ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

CUARTO AÑO DE ESCOLARIDAD

4 TO AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

"2025 BICE TENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 4to año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del CastillO
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria
Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Josue Israel Pacheco Conde

DIAGRAMACIÓN:
Vanessa Jacqueline Pereyra Marquez

Depósito legal:
4-1-578-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 4to año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los "*Textos de aprendizaje 2025*", para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los "*Textos de aprendizaje 2025*" tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

ECUACIONES ALGEBRAICAS

PRÁCTICA

Varias personas comentan que el precio de los autos nuevos podría aumentar pronto. Sin embargo, lo que llama la atención es que alguien añade: "si los autos suben de precio, también subirá el costo de las piezas de repuesto y los servicios de mantenimiento". Un hombre señala que el incremento en los precios de los autos impactará a muchos otros sectores de la economía. Otra persona comenta: "a mí no me afectará, porque no tengo auto".

Fuente: Open AI,2024

Actividad

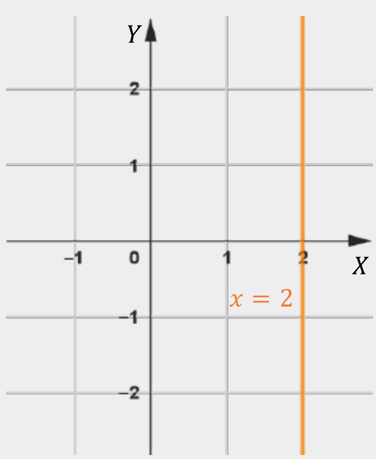
Respondemos las siguientes preguntas:

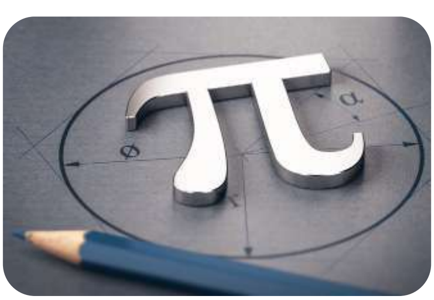
- ¿Por qué se espera que el precio de los autos nuevos aumente?
- ¿De qué manera el incremento en el precio de los autos podría afectar otros sectores, como las piezas de repuesto o los servicios de mantenimiento?
- ¿Qué otros productos o servicios podrían verse afectados por el aumento en el precio de los autos?
- ¿Por qué algunas personas creen que no les afectará el incremento en el precio de los autos si no poseen uno?

TEORÍA

Dato importante

Una ecuación lineal con una incógnita $x = 2$, geométricamente representa una línea recta vertical.





Fuente: https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/dia-que-politicos-cambiaron-valor-pi_19568

1. Ecuación lineal

Una ecuación es una combinación de dos o más términos separados por una igualdad. En el caso de una ecuación lineal, la misma cumple el concepto de ecuación, salvo que la o las variables deben tener a la unidad como exponente.
En general una ecuación lineal (con una incógnita o variable) toma la siguiente forma:

Incógnita   Signo   Constante   Igualdad

Coeficiente

$$\underbrace{ax + b}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{0}_{\text{Segundo miembro}}$$

Donde: $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Igualdad

Es aquella en la que dos expresiones algebraicas poseen el mismo valor mediante el signo "=", así mismo, una igualdad puede expresarse de dos maneras con las siguientes características:

Ecuación

Es aquella igualdad que se verifica para ciertos valores, por ejemplo:
$8x - 1 = 15$ verifica únicamente para $x = 2$

Identidad

Es aquella igualdad que se verifica para todos los valores correspondientes, tal es el caso de los productos y cocientes notables.

Ejemplo:

La igualdad: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ es una identidad

Para: $x = 3$; $y = 1$, así: $(3-1)^2 = 32-2$

$(2)^2 = 9-6+1$

$4 = 4$ verdadero

2. Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita o variable

a) Ecuaciones lineales

Para resolver ecuaciones lineales, se siguen los pasos:

Paso 1: Identificamos los términos que contienen una variable y las constantes.

Paso 2: Transponemos los términos que poseen la variable o incógnita a un miembro de la ecuación y los términos conocidos (constantes) al otro, con la regla de transposición de términos de suma o resta.

Paso 3: Reducimos términos semejantes en ambos miembros.

Paso 4: Despejamos la incógnita enviando el coeficiente a dividir o multiplicar al otro miembro (según la regla de transposición de términos de multiplicación y división).

Ejemplo:

La transposición de signos se aplica de la siguiente manera:

$3x+5=0 \longrightarrow 3x=-5$ $\qquad$ $3x=18 \longrightarrow x=\dfrac{18}{3}$

$x-8=0 \longrightarrow x=8$ $\qquad$ $\dfrac{x}{7}=10 \longrightarrow x=10\cdot 7$

Ahora efectuaremos la resolución de una ecuación lineal para hallar el valor de la incógnita:

$4x-2=10$	Planteamiento del ejercicio.
$4x=10+2$	La constante -2 pasa al otro miembro como $+2$.
$4x=12$	Efectuamos la suma en el segundo miembro.
$x=\dfrac{12}{4}$	El coeficiente 4 de x pasa a dividir al otro miembro.
$x=3$	Efectuamos la división y obtendremos el resultado del ejercicio.

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación: $3x-5(x-8)=-14-[2-7(3x-4)]$

$3x-(5)(x)-5(-8)=-14-[2-(7)(3x)-7(-4)]$	Propiedad distributiva de la multiplicación
$3x-5x+40=-14-[2-21x+28]$	Multiplicamos términos
$3x-5x+40=-14-2+21x-28$	Eliminamos los paréntesis
$-2x-21x=-44-40$	Transposición de términos (suma → resta)
$-21x=-84$	Reducción de términos semejantes
$x=\dfrac{-84}{-21}$	Transposición de términos (multiplicación → división)
$x=4$	División y resultado final

Regla práctica de transposición de signos

$+ = -$	*De sumar pasa al otro miembro a restar.*
$- = +$	*De restar pasa al otro miembro a sumar.*
$\times = \div$	*De multiplicar pasa al otro miembro a dividir.*
$\div = \times$	*De dividir pasa al otro miembro a multiplicar.*

En general, la resolución de ecuaciones lineales busca hallar el valor de la variable (incógnita) para que cumpla la igualdad en la ecuación inicial.

Sobreentendido

Considere la siguiente ecuación lineal:

$$x-4=9$$

Se considera que:

- *La variable x tiene como coeficiente el valor de 1.*
- *La variable x y la constante 9 tienen el signo + por delante.*
- *La variable x tiene como exponente el valor de 1.*

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita:

1) $4x-10=2$

2) $x-(2-3y)=11y-4$

3) $3z-2=(2-7z)$

4) $(u+1)^2=(u+1)(u-1)$

5) $(5v-3)^2+2(v-1)^2=2v(8v-3)+11v(v-2)$

6) $2w-(w+1)+(w+4)=1+[2w-(w-1)]$

7) $-2x-1-\{-3-[18x-(3x-15)]\}=-10-(-14+12x)$

8) $4-(0,2+a)=-0,2(1-0,5a)-0,1a$

Diofanto de Alejandría

Fuente: Open AI,2024

(Siglo III) Matemático griego, sus escritos contribuyeron de forma notable al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo del álgebra de su época.

De su obra se conservan varios volúmenes de la Aritmética, libro de inspiración colectiva, pero redactada por un solo autor.

Sobreentendido

Ecuaciones fraccionarias y con coeficiente fraccionario:

$$\frac{a}{x} + b = c$$

Equivale a:

$$x = \frac{a}{c-b}$$

Sobreentendido

Descomposición:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

$$\boxed{\frac{a \pm c}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}}$$

b) Ecuaciones fraccionarias y con coeficiente fraccionario

Para resolver ecuaciones fraccionarias o con coeficientes fraccionarios, se siguen los pasos:

Paso 1: Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir factorizamos dichos denominadores.

Paso 2: Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por el común denominador.

Paso 3: Operamos algebraicamente para despejar la incógnita o variable.

Ejemplo:

Resolvemos la ecuación con coeficiente fraccionario: $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 6$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 6 \quad // (10)$	Multiplicamos ambos miembros por 10
$5x + 2x = 60$	Operamos algebraicamente
$7x = 60$	Transponemos términos
$x = \frac{60}{7}$	Resultado del ejercicio

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación con coeficiente fraccionario:

$$\frac{t-4}{2} + \frac{t+1}{6} = 6(t-4) - \frac{t+3}{3}$$

$$\frac{t-4}{2} + \frac{t+1}{6} = 6(t) + 6(-4) - \frac{t+3}{3}$$

$$\frac{t-4}{2} + \frac{t+1}{6} = 6t - 24 - \frac{t+3}{3} \quad // (6)$$

$$3(t-4) + t + 1 = 36t - 144 - 2(t+3)$$

$$3(t) + 3(-4) + t + 1 = 36t - 144 - 2(t) - 2(3)$$

$$3t - 12 + t + 1 = 36t - 144 - 2t - 6$$

$$3t + t - 36t + 2t = -144 - 6 + 12 - 1$$

$$-30t = -139$$

$$t = \frac{-139}{-30}$$

$$t = \frac{139}{30}$$

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación fraccionaria: $\frac{p^2-3}{2p^2+12p+18} - \frac{(p-1)^2}{p^2-9} = \frac{-(p+5)}{2p+6}$

$$\frac{p^2-3}{2(p^2+6p+9)} - \frac{(p-1)^2}{(p-3)(p+3)} = \frac{-(p+5)}{2(p+3)}$$

$$\frac{p^2-3}{2(p+3)^2} - \frac{p^2-2p+1}{(p-3)(p+3)} = \frac{-p-5}{2(p+3)}$$

$$\frac{(p^2-3)(p-3) - 2(p+3)(p^2-2p+1)}{2(p+3)^2(p-3)} = \frac{-p-5}{2(p+3)}$$

$$(p^2)(p)+p^2(-3)-(3)(p)-(3)(-3)-(2p+6)(p^2-2p+1)=\frac{2(p+3)^2(p-3)(-p-5)}{2(p+3)}$$

$$p^3-3p^2-3p+9-(2p)(p^2)-(2p)(-2p)-(2p)(1)-6(p^2)-6(-2p)-6(1)=(p^2-9)(-p-5)$$

$$p^3-3p^2-3p+9-2p^3+4p^2-2p-6p^2+12p-6=(p^2)(-p)+(p^2)(-5)-(9)(-p)-(9)(-5)$$

$$-p^3-5p^2+7p+3=-p^3-5p^2+9p+45$$

$$-p^3-5p^2+7p+p^3+5p^2-9p=45-3$$

$$-2p=42 \;\Rightarrow\; p=\frac{42}{-2} \quad \Rightarrow \quad p=-21$$

c) Ecuaciones con radicales

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Transponemos términos: en un miembro aquellos que tienen radicales y en otros aquellos que no lo tienen.

Paso 2: Eliminamos los radicales elevando ambos miembros a la potencia que lleva el índice del radical y efectuando el desarrollo de binomios o trinomios, si se presentasen.

Paso 3: Despejamos la incógnita en cuestión mediante la transposición de términos.

Ejemplo:

Se pide resolver la siguiente ecuación: $\sqrt{x-1}=3$

$(\sqrt{x-1})^2=(3)^2 \quad //(\,)^2$	Elevamos cada miembro a la potencia
$x-1=9$	Transponemos términos
$x=9+1$	Realizamos operaciones algebraicas
$x=10$	Resultado del ejercicio

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=3$

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=3^2 \quad //\;(\quad)^2$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\left(\sqrt{x+1}\right)(\sqrt{x})+(\sqrt{x})^2=9$$

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(x)}+x=9$$

$$2\sqrt{(x)(x)+(1)(x)}=9-x-1-x$$

$$2\sqrt{x^2+x}=8-2x$$

$$\left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2=(8-2x)^2$$

$$(2)^2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2=(8)^2-2(8)(2x)+(2x)^2$$

$$4(x^2+x)=64-32x+4x^2$$

$$4x^2+4x=64-32x+4x^2$$

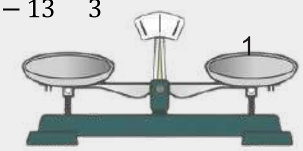
$$4x^2+4x+32x-4x^2=64$$

$$36x=64$$

$$x=\frac{64}{36} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{16}{9}$$

Intentalo!

$$\frac{9}{5x-13}+\frac{2}{3}$$



Fuente: https://creazilla.com/media/clipart/7814008/roberval-balance

Para que esto se cumpla, x debe ser 8 estrictamente.

Otro valor desequilibra la balanza.

Sobreentendido

1) $\sqrt{a}=b \;\rightarrow\; a=b^2$
2) $\sqrt[3]{a}=b \;\rightarrow\; a=b^3$
3) $\sqrt[4]{a}=b \;\rightarrow\; a=b^4$
$\vdots$
4) $\sqrt[n]{a}=b \;\rightarrow\; a=b^n$

Si n es par, $a\geq 0$

Si n es impar, $a\in\mathbb{R}$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias con una incógnita o variable:

1) $\dfrac{5x}{x+2}+\dfrac{2x}{x+1}=7$

2) $\dfrac{2y-2}{y^2-4}=\dfrac{2y-1}{y^2-4y+4}$

3) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}$

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales racionales con una incógnita:

4) $2\sqrt{2p+1}=10$

5) $m+2=\sqrt{m^2+1}$

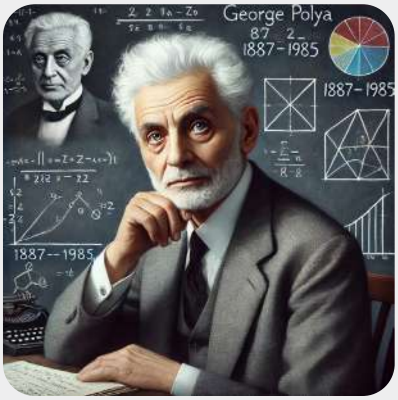
6) $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt[3]{a-5}}}=3$

7) $\sqrt{z+3}=\sqrt{z}+3$

8) $x-1=\sqrt{x-2}$

9) $\dfrac{1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

George Polya



Fuente: Open AI,2024

(1887-1985)

Matemático húngaro, trabajó en una gran variedad de temas matemáticos, incluidas las series, la teoría de números, geometría, álgebra, análisis matemático, la combinatoria y probabilidad.

Intentalo!

Sabías que, para resolver problemas debes comprender el lenguaje lógico matemático, así si te dicen "el doble de un número" se debe pensar algebraicamente en "$2x$", donde x puede ser cualquier número o cantidad.

Fuente: Open AI,2024

3. Resolución de problemas

Un contexto de la vida real también puede ser interpretado a través de una ecuación, es por ello que su aplicación es base para todas las ciencias exactas, siendo lo más importante, al margen de "despejar la incógnita", plantear correctamente cual es la incógnita dependiendo el problema, además de la interacción con otros términos, signos o constantes.

a) Consideraciones para el planteamiento de problemas

- Entender plenamente la situación planteada.
- Identificar las cantidades conocidas y desconocidas.
- Elegir una letra para representar la incógnita o variable.
- Identificar la igualdad y operaciones.
- Formular la ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Establecer la solución del problema.

Problema:

La edad de Claudia es cuatro veces más que la edad de Micaela, si ambas edades suman 35 años ¿qué edad tiene cada una?
Planteamos el problema de la siguiente forma:

Edad de Micaela $\rightarrow x$

Edad de Claudia $\rightarrow 4$ veces la edad de Micaela

$$\underbrace{\text{Edad de Micaela}}_{x} + \underbrace{\text{Edad de Claudia}}_{4x} = 35 \text{ años}$$

$x + 4x = 35$	Planteamiento del problema
$5x = 35$	Reducción de términos semejantes
$x = \dfrac{35}{5} = 7$	Transposición de términos y resultado final

Si la edad de Micaela es x, entonces su edad es de 7 [años]
Si la edad de Claudia es $4x$, entonces su edad es de $4 \cdot (7)$, es decir 28 años.

Problema:

Ángel tiene 12 años, Beatriz es 4 años mayor que Ángel y Carlos tiene el doble de la edad de Beatriz, ¿cuál es la suma de las edades de Ángel, Beatriz y Carlos?

Datos:
A=12 años (Ángel)
B= Beatriz
C=Carlos
S=Suma de edades

Del enunciado se plantea como:
$A = 12$
$B = 4 + 12$
$C = 2(4 + 12)$

La suma de edades es:

$$\begin{aligned} S &= A+B+C \\ &= 12+(4+12)+2(4+12) \\ &= 12+(4+12)+2(4+12) \\ &= 12+16+32 \\ &= 60. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S = 60 \text{ años}$$

Por tanto, la suma de las edades es 60 años.

Problema:

En una unidad educativa, la maestra le pide a Ana que multiplique los números $\frac{5}{3}$ y $2\frac{1}{3}$, a Carlos le pide que sume los mismos números. Si a la repuesta de Carlos le restamos la de Ana, ¿cuánto nos queda?

Fuente: Open AI,2024

Datos:
A: Ana
C: Carlos
d: diferencia

Primer número:

$$x = \frac{5}{3}$$

Segundo número:

$$y = 2\frac{1}{3}$$

Como Ana multiplica los números, entonces:

$$A = xy \Rightarrow A = \frac{5}{3}\left(2\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{6+1}{3}\right) = \frac{5}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{35}{9} \Rightarrow A = \frac{35}{9}$$

Como Carlos suma los números, entonces:

$$C = x + y \Rightarrow C = \frac{5}{3} + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{6+1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{5+7}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow C = 4$$

Diferencia entre ambas respuestas:

$$d = C - A = 4 - \frac{35}{9} = \frac{9\cdot 4 - 35}{9} = \frac{36-35}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow d = \frac{1}{9}$$

La diferencia entre las respuestas de Ana y Carlos es $\frac{1}{9}$.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Encontramos 3 números enteros consecutivos cuya suma sea 123.
2) Adrián vende huevos a Bs0.70 cada uno. Si quiere obtener un total de Bs287.7, ¿cuántos huevos debe vender exactamente?
3) Edwin tiene 5 años más que su hermana María. Dentro de 3 años la suma de sus edades será 41 años, ¿qué edades tienen Edwin y María actualmente?
4) Juan puede hacer una obra en 4 horas, Marcos en 6 horas y Pablo en 12 horas, ¿cuánto tardarán si trabajan juntos?

VALORACIÓN

Diofanto, fue un matemático de la antigüedad, a quien le encantaba representar la información a través de ecuaciones desde las más simples situaciones hasta situaciones más complejas de nuestro diario vivir.

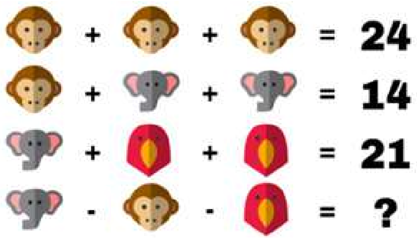
– ¿De qué manera aplicamos las ecuaciones lineales de una variable en la vida real?

PRODUCCIÓN

Jugando con ecuaciones

Identificamos el resultado solicitado en la figura adjunta. Como sugerencia se recomienda ir paso a paso para ir descubriendo el valor de cada una de las figuras iniciales.

– Creamos un juego similar, con otras imágenes de nuestro entorno.



Fuente: https://lc.cx/jedI-N

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

PRÁCTICA

Según el cronograma de actividades programado por el director de nuestra unidad educativa, hoy tenemos que realizar una excursión a Warnes en la ciudad de Santa Cruz, al parque Eólico.

Fuente: Open AI,2024

Contratamos dos buses de transporte, el primero salió a horas, 08:00 am y el chofer indicó que avanzarán con una velocidad promedio de 80 km/h, el segundo bus se atrasó y partió a horas 08:20 am, lo que se quiere es que los buses lleguen al mismo tiempo al parque.

Sabemos que Warnes se encuentra a 180 km de nuestra unidad educativa.

Actividad

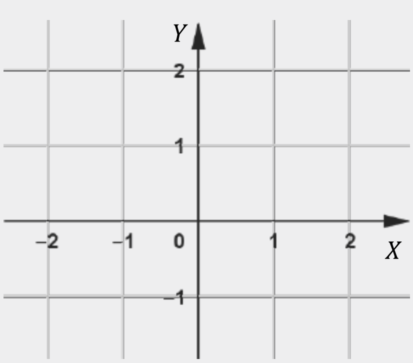
Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué solución podemos dar a este problema?
- ¿Podemos utilizar ecuaciones, si se puede de qué tipo?

TEORÍA

Sistema cartesiano

Creado por Descartes, es la intersección de dos rectas (ejes), divididas cada una en infinitos segmentos con valores positivos en el lado superior y derecho y negativos en el lado inferior e izquierdo de forma perpendicular (90°). La recta que está alineada de forma horizontal, se denomina "eje de abscisas" y el que está alineado de forma vertical se denomina "eje de ordenadas". Usualmente se los representa con las letras "x" (eje de abscisas) y "y" (eje de ordenadas).



1. Ecuación lineal con dos incógnitas o variables

Una ecuación lineal con dos incógnitas o variables "x", "y" tiene la siguiente forma:

Donde:

$$ax + by + c = 0$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a, b \neq 0$

a) Representación geométrica

Geométricamente una ecuación lineal con dos incógnitas o variables representa una recta, la cual es graficada por la unión de dos o más puntos mediante el trazo de una línea.

Para proceder a graficar, realizamos los siguientes pasos:

Paso 1: Despejamos una variable en concreto (usualmente las ecuaciones lineales vienen dadas con las variables "x" y "y"). A la variable que ha sido despejada la nombramos "variable dependiente" y la que no ha sido despejada "variable independiente".

Paso 2: Asignamos valores a la variable independiente y calculamos el correspondiente valor de la variable dependiente, en función a la ecuación de la variable despejada (pares de puntos).

Paso 3: Ubicamos los pares de puntos en el plano cartesiano y mediante una línea unimos dichos puntos.

Ejemplo:

La gráfica de la ecuación lineal de 2 variables $2x-3y-1=0$ es la siguiente:

1. Despejamos una variable en concreto.

$$2x-3y-1=0$$

$$2x=1+3y$$

$$x=\frac{1+3y}{2}$$

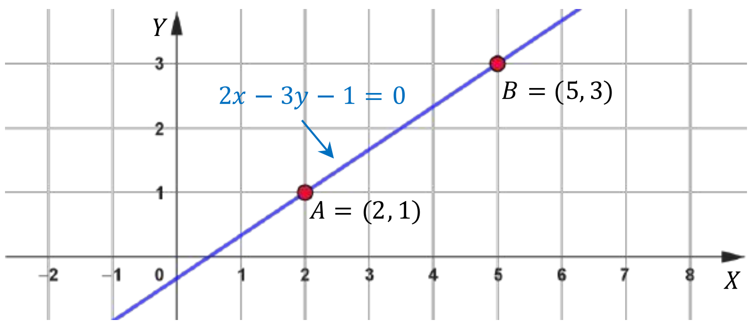
x: será la variable dependiente
y: será la variable dependiente

2. Ahora, asignamos valores a "y" para obtener el correspondiente valor de x.

Si $y=3$ entonces $x=\dfrac{1+3\cdot 3}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ por lo cual el $2x=1+3$ y punto es $(5,3)$

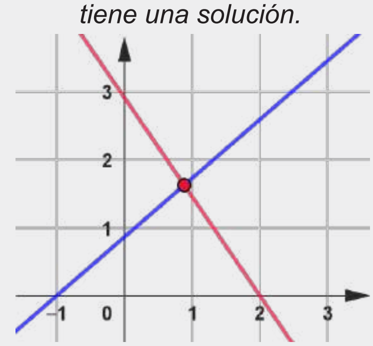
Si $y=1$ entonces $x=\dfrac{1+3\cdot 1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ por lo cual el punto es $(2,1)$

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos una línea que pase por ambos puntos:

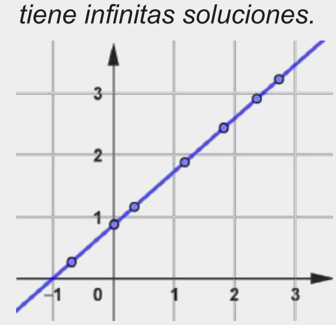


Tipos de sistemas de ecuaciones

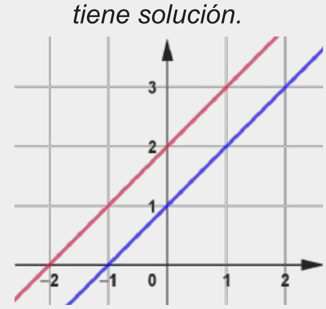
Sistema consistente, determinado. *Es aquella que tiene una solución.*



Sistema consistente, indeterminado. *Aquella que tiene infinitas soluciones.*



Sistema inconsistente o incompatible. *Aquella que no tiene solución.*



2. Sistemas de ecuaciones lineales

Es el conjunto de varias ecuaciones, donde generalmente hay igual cantidad de ecuaciones para una cantidad de incógnitas.

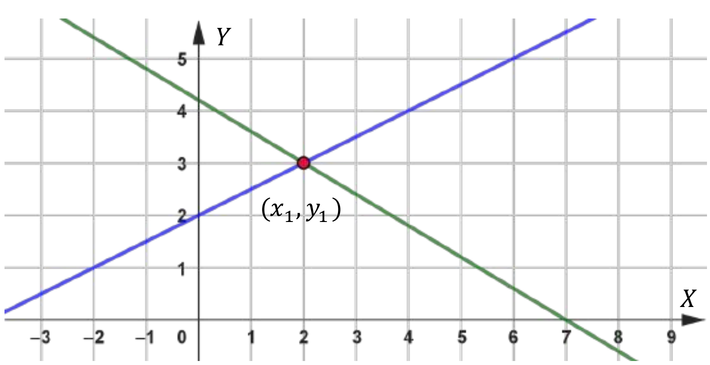
3. Resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas está dado por:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ y $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$

Geométricamente cada ecuación representa una recta en el plano cartesiano, la intersección de dos rectas es un punto (x_1, y_1) común entre ellas, ese punto es la solución al sistema de ecuaciones.



Entre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones más comunes tenemos a:

a) Método de reducción

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema, con este método, son los siguientes:

Paso 1: Eliminar una de las variables igualando los coeficientes de una de las incógnitas. En nuestro sistema igualamos los coeficientes de "y" en ambas ecuaciones; para eso multipliquemos la ecuación por 2.

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ x + 2y = 8 \quad // \cdot (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{6} = 6$$

$$x = 6$$

Paso 2: Reemplazando $x = 6$ en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2) (elegir la más sencilla).

Entonces en (2):

$$2(6) + 4y = 16$$

$$12 + 4y = 16$$

$$4y = 16 - 12$$

$$4y = 4$$

$$y = \frac{4}{4}$$

$$y = 1$$

La solución del sistema es: $x = 6$ $y = 1$. Además son punto de intersección de las rectas, es decir: $P(6,1)$

Habitualmente

Todo sistema de dos ecuaciones con dos variables se representa con el arreglo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = g \end{cases}$$

Donde a, b, c, d, e, g, son números reales o coeficientes.

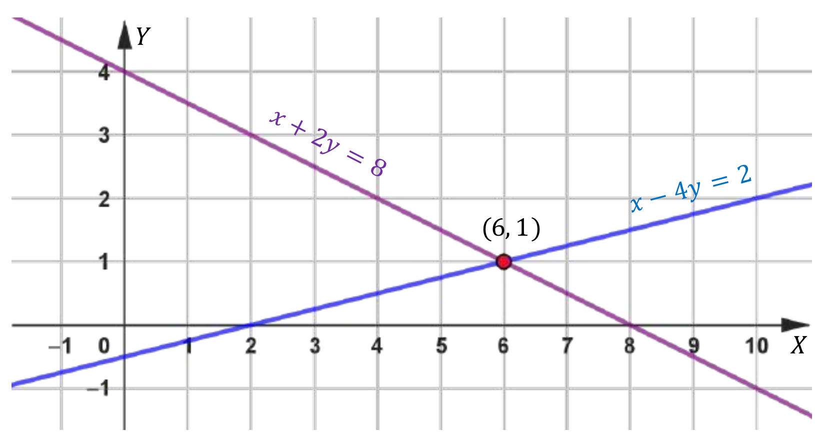
No olvidar que

El sistema está compuesto por L_1 y L_2, rectas tales que:

$$L_1 : ax + by = c$$
$$L_2 : dx + ey = g$$

Deben ser graficadas en un solo plano cartesiano.

Gráficamente:



Actividad

Realizamos la gráfica de las siguientes ecuaciones lineales de dos incógnitas o variables:

1) $3x - y = 1$

2) $\dfrac{x+3}{5} + \dfrac{x+y}{6} = 2$

3) $0.3x + 0.1(x + y) = 0.2(0.5 - y)$

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de reducción:

4) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + y = -6 \\ -6x - 2y = 10 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - \dfrac{1}{3}y = 6 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

b) Método de igualación

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

Paso 1: Despejamos la misma variable de ambas ecuaciones, en este caso:

Despejamos "x" de (1):

$$3x = 8 - 2y \Rightarrow x = \frac{8 - 2y}{3} \qquad (3)$$

Despejamos "x" de (2):

$$2x = 3 + y \Rightarrow x = \frac{3 + y}{2} \qquad (4)$$

Paso 2: Igualamos las ecuaciones (3) y (4):

$$\frac{8 - 2y}{3} = \frac{3 + y}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(8 - 2y) = 3(3 + y)$$

$$16 - 4y = 9 + 3y$$

$$-4y - 3y = 9 - 16$$

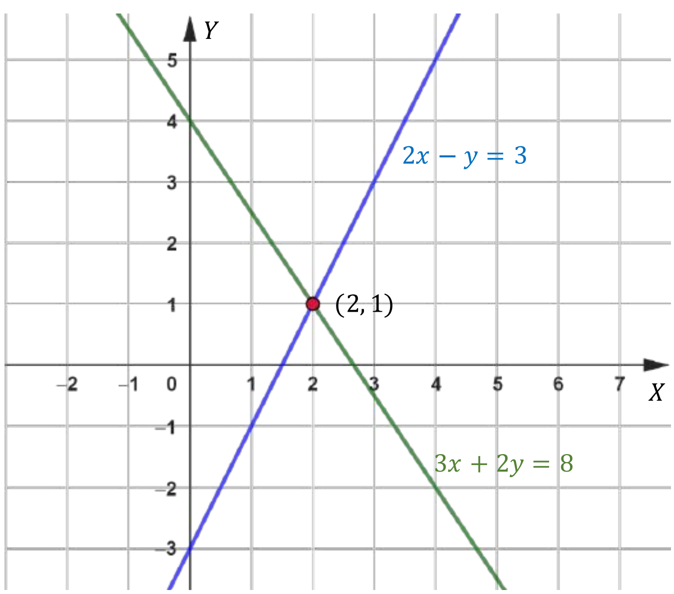
$$-7y = -7$$

Paso 3: Sustituimos el valor $y = 1$ en (3) o (4): en este caso en (4), tenemos:

$$x = \frac{3 + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

La solución del sistema es: $x = 2,\ y = 1$

Punto de intersección de las rectas $P(2, 1)$
Gráficamente:



¿Cómo graficar una ecuación con dos variables?

Para graficar

$$x - 2y = 3$$

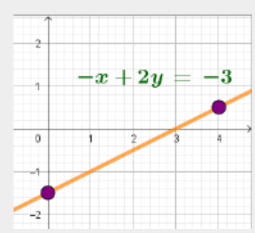
Se debe despejar "y"

$$x - 2y = 3$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Tabla de valores:

x	y
0	$-\frac{3}{2}$
4	$\frac{1}{2}$



Actividad

Encontramos los valores en los sistemas de ecuaciones, por el método de igualación:

1) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} = y - 3 \\ 3(x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$

c) Método de sustitución

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

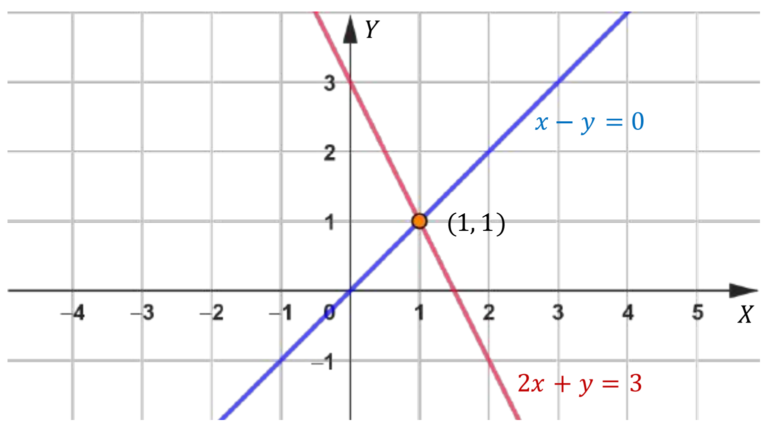
Paso 1: Despejar una de las variables "x" o "y" en este caso de (1) despejamos "x" entonces: $x = y$... (3)

Paso 2: Reemplazar (3) en (2): $2(y) + y = 3$ de donde $3y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1$

Paso 3: Reemplazar en (3): $x = y \Rightarrow x = 1$

La solución del sistema es: $x = 1, y = 1$ Punto de intersección de las rectas $P(1{,}1)$

Gráficamente:



Actividad

Solucionamos los siguientes sistemas de ecuaciones, usando el método de sustitución:

1) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2(y + 1) = 3x \\ 3x - 3(y - 1) = x + y + 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{5y-1}{9} = \frac{2x+1}{3} - 2 \\ \frac{4x-2}{7} = \frac{y+28}{10} - 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \end{cases}$

d) Método de determinantes

Un determinante es un arreglo rectangular de números, un determinante de orden 2 está dispuesto de dos filas y dos columnas como se muestra en la figura:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Donde los elementos a_1 y b_2 forman la diagonal principal. El valor del determinante está definido como el producto de las cantidades de la diagonal principal menos el producto de las cantidades en la otra diagonal, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

A partir de: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Paso 1: Calculamos los siguientes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Dividimos los siguientes determinantes para obtener el resultado final:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Consulta con tu maestra o maestro sobre esta estrategia

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 \\ a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 \end{array}\right\} \text{restar} \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 \\ a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 \\ a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \end{array}\right\} \text{sumar}$$

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 & (1) \\ 3x - 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

1ro Calculamos el determinante "Δ" (DELTA)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19$$

2do Calculamos la incógnita "x"

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 8 \cdot 5$$
$$= 2 - 40$$
$$= -38$$

Luego,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{-39}{-19} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

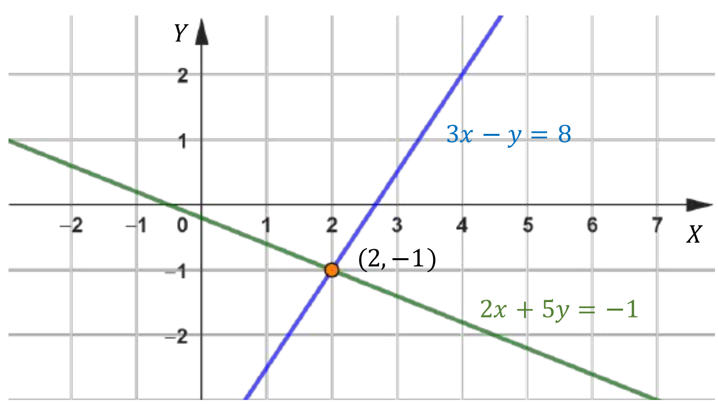
3ro Calculamos la incógnita "y"

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 8 \cdot (-1)$$
$$= 16 + 3$$
$$= 19$$

Luego,

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{19}{-19} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

La solución del sistema es: x=2, y=−1. Punto de intersección de las rectas P(2,-1) Gráficamente:



Actividad

Solucionamos los siguientes sistemas de ecuaciones, usando el método de determinantes:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \mathbf{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 12x + 5y + 6 = 0 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = \mathbf{-12} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 0 \\ \frac{x}{7} - \frac{3y}{4} = 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = -\frac{3y+3}{4} \\ y = -\frac{1+5y}{4} \end{cases}$

e) Método gráfico

Consiste en ubicar gráficamente el punto donde se intersecan las rectas que corresponde a cada ecuación. Cabe resaltar que el método no brinda un resultado exacto en muchos casos. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 18 & (1) \\ 4x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

Procedemos a graficar ambas rectas:

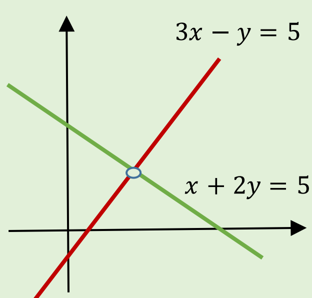
Para: $3x+3y=18$	Para: $4x-y=4$
Despejando "x": $3x = 18 - 3y \Rightarrow x = \dfrac{18-3y}{3}$	Despejando "y": $y=4-4x \Rightarrow y=-4+4x$
Evaluando puntos:	Evaluando puntos:
$y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18 - 3\cdot 0}{3} = \dfrac{18}{3} = 6 \Rightarrow P(6,0)$	$x = 0 \rightarrow y = -4+4\cdot0 = -4+0 = -4 \Rightarrow P(0,-4)$
$y = 5 \Rightarrow x = \dfrac{18-3\cdot5}{3} = \dfrac{18-15}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \Rightarrow P(1,5)$	$x = 1 \rightarrow y = -4+4\cdot1 = -4+4 = 0 \Rightarrow P(1,0)$

Observamos que la intersección del sistema en el plano cartesiano es: $x= 2$, $y = 4$

Atención

El método gráfico es muy limitado, muchas soluciones pueden ser confundidas, por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

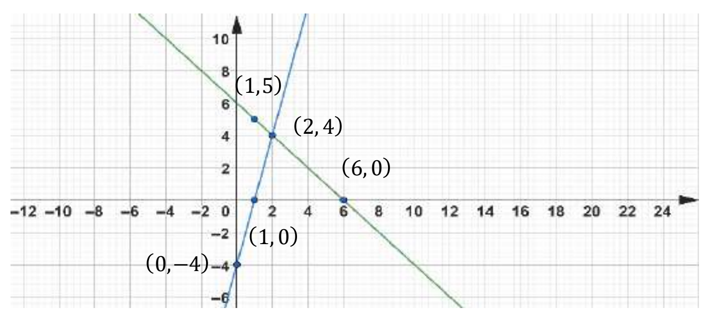


Solución

$x = 2.14$
$y = 1.43$

Aproximadamente

Gráficamente:



Punto de intersección de las rectas es $P(2,4)$

Problemas de aplicación

Hacemos uso de los sistemas de ecuaciones para plantear problemas que involucran un análisis del uso de 2 incógnitas en diversas situaciones.

Ejemplo:

Si hoy compramos 3 salteñas y 4 tucumanas por $\mathrm{Bs}45$ y ayer 2 salteñas y 6 tucumanas por $\mathrm{Bs}50$ determinamos el precio de cada salteña y tucumana.
Sea: s = cantidad de salteñas, t = cantidad de tucumanas planteamos el sistema de ecuaciones lineales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3s + 4t = 45 & (1) \\ 2s + 6t = 50 & (2) \end{cases}$$

s: salteñas
t: tucumanas

Resolvemos el problema por el método de sustitución:

Paso 1: Despejamos s en (1):

$$s = \frac{45 - 47}{3} \qquad (3)$$

Paso 2: Reemplazar (3) en (2):

$$2\left(\frac{45-4t}{3}\right) + 6t = 50 \Rightarrow \frac{90-8t}{3} + 6t = 50 \Rightarrow \frac{90 - 8t + 18t}{3} = 50 \Rightarrow 90 + 10t = 150$$

Paso 3: Reemplazar (3):

$$s = \frac{45 - 4(6)}{3} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{45 - 24}{3} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{21}{3} \quad \Rightarrow \quad s = 7$$

Por lo tanto, la cantidad de salteñas es 7 y la cantidad de tucumanas es 6.

Actividad

1) Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - \frac{1}{3}(3x - 2) = -\frac{4}{3} \\ \frac{2(x + 4)}{3} = \frac{y}{2} + \frac{9}{2} \end{cases}$

2) Resolvemos los siguientes problemas:

a) La suma de dos números es 73. Encuentra estos números si uno de ellos es 15 unidades menos que tres veces el otro.

b) Hace 5 años, la edad de Julián era triple que la de Ramiro, dentro de 10 años será doble, ¿qué edad tiene cada uno?

c) Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es de $90°$. Si el mayor de dos ángulos complementarios es $15°$ mayor que dos veces el menor, encuentra la medida de los ángulos.

VALORACIÓN

La historia de la matemática nos indica que los Babilonios resolvieron sistemas de ecuaciones lineales, asignando a las incógnitas nombres como longitud, ancho, área o volumen, sin que estuvieran necesariamente vinculadas a problemas de medida. Asimismo, se sabe que los griegos utilizaban métodos geométricos para solucionar ciertos sistemas de ecuaciones. Además, los Thymaridas (alrededor de 4000 a.C.) habían descubierto una fórmula para resolver un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas

− Entendiendo que las ecuaciones involucran situaciones que cambian y otras que son constantes, ¿crees que otras ciencias utilizan ecuaciones en sus conocimientos y si lo hacen, de qué modo?

− ¿Qué tan importante es la resolución de sistemas de ecuaciones con 2 incógnitas?

PRODUCCIÓN

Juego de dados

Materiales:

1 lápiz	Cronómetro
3 dados	Hojas de apunte

Procedimiento:

El jugador "A" lanza los 3 dados y estos números serán los coeficientes del sistema de ecuaciones, en el primer lanzamiento obtendrá el coeficiente de "x", el segundo será el coeficiente de "y" y el tercero será el término independiente. Lanza nuevamente los 3 dados y obtiene los coeficientes de la segunda ecuación.

El ganador es el estudiante que logra resolver el sistema antes que su rival. Una variante puede ser decidir, anticipadamente el método con el cual se resolverá el sistema

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS

PRÁCTICA

La ampliación de las vacaciones se determina a través de las autoridades de educación, pero también de salud.

Se toman en cuenta tres variables como el incremento de casos de enfermedades respiratorias, también se toma en cuenta el frío y los descensos de temperatura en las diferentes regiones de nuestro país.

Mencionamos 3 variables, seguramente podríamos formar un sistema de 3 ecuaciones con este tipo de datos.

Fuente: Open AI,2024

Actividad

Identificamos y respondemos las siguientes preguntas:

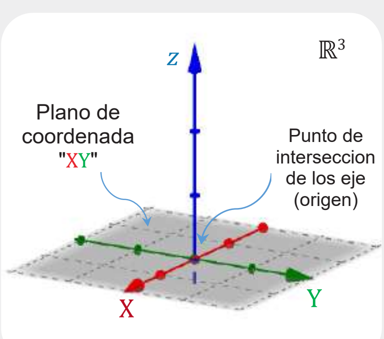
- Identifiquemos alguna situación en la que participen 3 variables.
- Para resolver sistemas de ecuaciones, ¿cuál método te parece ser el más fácil?
- Si todos los métodos de resolución nos llevan al mismo resultado, entonces, ¿por qué aprendemos varios métodos si con aprender uno sería suficiente?

TEORÍA

Atención

Es la intersección de 3 ejes de coordenadas intersecadas en un punto en común (usualmente el nombre de estos ejes es dado por las letras "x", "y" y "z"). Estos 3 ejes conformarán 3 pares de planos interceptados de forma perpendicular (90°) cada una y que dichos planos son equivalentes a planos de coordenadas, tanto el plano "XY", "YZ" como "XZ".

Espacio cartesiano



1. Ecuación lineal con tres incógnitas

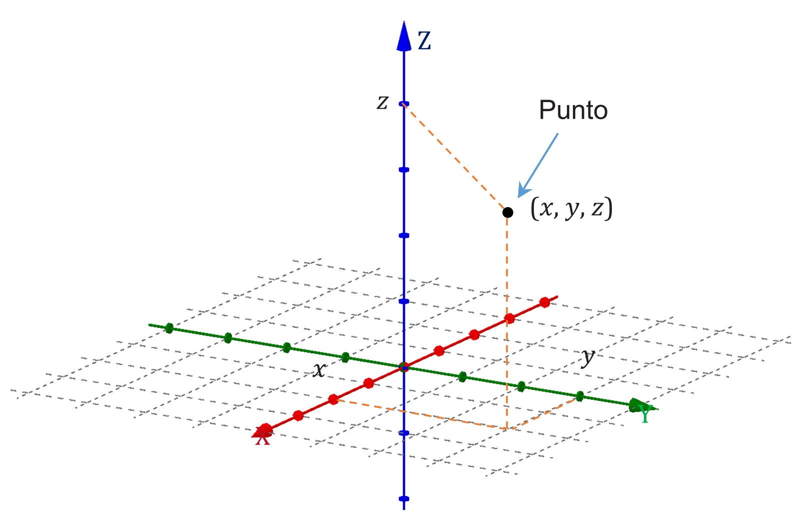
Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Donde: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$ y x, y, z son las variables.

a) Interpretación geométrica de un sistema lineal con tres incógnitas

La solución de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas representa un punto en el espacio cartesiano (x,y,z).



2. Métodos de resolución

a) Método de reducción

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ 4x + 8y - z = 3 \\ 2x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$

Paso 1: Enumeramos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 & (1) \\ 4x + 8y - z = 3 & (2) \\ 2x - 3y + 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

Paso 2: Eliminamos una de las variables (la que resulte más sencilla) para obtener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, en el ejercicio eliminaremos la variable z: De las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ 4x + 8y - z = 3 \quad //\cdot(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ -8x - 16y + 2z = -6 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambas ecuaciones, tenemos:

$$-5x - 15y + 0 = -5 \Rightarrow -5x - 15y = -5 \quad //\div(-5)$$

$$\Rightarrow x + 3y = 1 \quad (4)$$

Paso 3: De igual manera eliminamos la variable "z" entre las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{cases} 4x + 8y - z = 3 & //\cdot(3) \\ 2x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 24y - 3z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambas ecuaciones tenemos:

$$14x + 21y + 0 = 14 \Rightarrow 14x + 21y = 14 \quad //\div(7)$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 2 \quad (5)$$

Paso 4: Resolvemos el sistema de ecuaciones generados (4) y (5)

$$\begin{cases} x + 3y = 1 & //\cdot(-1) \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambos miembros de la ecuación:

$$x + 0 = 1 \Rightarrow x = 1$$

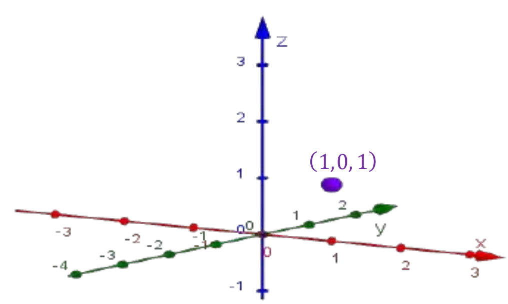
Paso 5: Reemplazamos el valor hallado $x = 1$ en (4)

Paso 6: Sustituimos los valores hallados $x = 1$, $y = 0$ en (1), (2) o (3) para calcular el valor de la variable que falta. En este caso reemplazaremos en la ecuación (1):

$$3\cdot(1) + 0 - 2z = 1 \Rightarrow 3 - 2z = 1$$
$$\Rightarrow -2z = 1 - 3$$
$$\Rightarrow -2z = -2 \quad //\div(2)$$
$$\Rightarrow z = 1$$

De este modo, la solución del sistema es: $x = 1$; $y = 0$; $z = 1$

Gráficamente:



Actividad

Resolvemos los sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = -1 \\ a + c = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5u - 3w = 2 \\ -v + 2w = -5 \\ u + 2w = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2e - 2f + g = -5 \\ 3e + f + 3g = -1 \\ 4e - f - 2g = -12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 6x - 2y - z = -14 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} - \dfrac{c}{3} = 3 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{6} - \dfrac{c}{2} = -5 \\ \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{3} - \dfrac{c}{6} = 0 \end{cases}$

¿Qué son las matrices?

Una matriz es un conjunto de elementos dispuestos de forma horizontal (filas) y vertical (columnas), es decir:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Donde:

- *A: es el nombre de la matriz*
- *$a_1, b_1, \dots, z_1, a_2, \dots, z_n$ son los elementos de la matriz.*

b) Método de determinantes

Un determinante es el resultado de la suma de ciertos productos asociados a una matriz. En el caso de un sistema de tres incógnitas, el determinante de dicha matriz estará compuesto por 9 elementos distribuidos en 3 filas y 3 columnas.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, inicialmente debemos conocer el procedimiento para calcular una determinante "Δ"; para ello debemos realizar lo siguiente:

Copiamos la primera y segunda columna y las ubicamos a lado de la matriz inicial. como muestra la figura, luego sumamos los productos correspondientes a las diagonales que apuntan hacia la derecha y restar los productos correspondientes a las diagonales que apuntan la izquierda, como se muestra en la figura:

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right| = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$$

Ahora bien, conocida la forma de resolver una determinante, realizamos los siguientes pasos para resolver un sistema de ecuaciones de tercer grado (por el método Cramer) de la siguiente manera:
Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Paso 1: Organizamos cada ecuación de la siguiente forma: los términos que contienen las variables los ubicamos en el primer miembro, pero ordenados en la misma secuencia y ubicamos las constantes en el segundo miembro.

Paso 2: Generamos las matrices de coeficientes según el anterior sistema:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Paso 3: Calculamos las determinantes correspondientes para $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ y Δ_z

Paso 4: Dividimos las siguientes fracciones para hallar las variables correspondientes:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Ejemplo:

Resolvemos por el método Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+2y=-3+z \\ 3x+y+z=4 \\ x+2z-6=y \end{cases}$$

Paso 1: Agrupamos y ordenados las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 3x+y+z=4 \\ x-y+2z=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Generamos las matrices de coeficientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Paso 3: Calculamos las determinantes correspondientes del anterior paso:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = (1)(1)(2) + (2)(1)(1) + (-1)(3)(-1) - (-1)(1)(1) - (1)(1)(-1) - (2)(3)(2)$$

$$=2+2+3+1+1+12=-3 \quad \Rightarrow \quad \Delta=-3$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right| = -6+12+4+6-3-16=-3 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x=-3$$

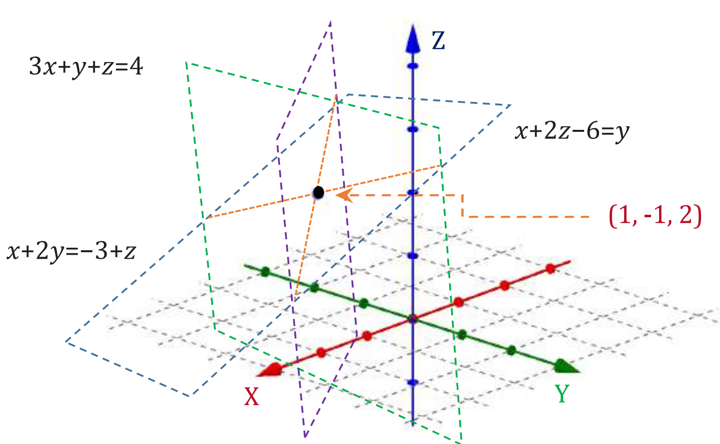
$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right| = 8-3-18+4-6+18=3 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y=3$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} & 3 & & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = 6+8+9+3+4-36=-6 \quad \Rightarrow \quad \Delta_z=-6$$

Paso 4: Dividimos las fracciones correspondientes para hallar la solución:

$$x = \frac{-3}{-3}\; y = \frac{3}{-3}\; z = \frac{-6}{-3} \rightarrow x=1; y=-1; z=2$$

Gráficamente:



¡Sabias qué!

Una manera de hallar el resultado de una matriz es, aumentar las dos primeras columnas al final de la matriz y multiplicar en cruz, es decir:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2)$$
$$-(a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3)$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias con una incógnita:

1) $\begin{cases} 3x+2y-2=0 \\ 4y+4zz=3 \\ 3x+12z=4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-3y-z=1 \\ x+4y-6z=-1 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3a+2b-c=0 \\ 2a-3b+c=7 \\ 5a-b-6=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+2y=z+1 \\ 3x-2(y+z)=0 \\ 3(x+z)=4(y+1) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+6}{2}-\dfrac{y-z}{3}=1 \\ \dfrac{x+6}{2}-\dfrac{y-z}{6}=1 \\ \dfrac{y-2x-5}{3}-\dfrac{z}{2}=0 \end{cases}$

Diofanto de Alejandría

Fuente: Open AI,2024

Matemático del siglo III y IV. Autor de libros llamados Arithmetica, que están perdidos.

Su aporte es importante en la resolución de ecuaciones algebraicas.

Para tu conocimiento

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 *admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma “,” y el punto “.”*

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: “.”

Tomando en cuenta estos hechos, se utilizará el punto decimal como separador.

Ejemplo:

$$\pi \approx 3.14\,;\ e \approx 2.71\,;\ \text{-0,93}$$

$$-\frac{5}{2} = -2.5\,;\quad \frac{13}{5} = 2.6\,;$$

$$-\frac{25}{100} = -0.25$$

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y a la tecnología

Ejemplo:

Una familia está compuesta por la madre, el padre y su hija. La suma de las edades actuales de los tres es de 80 años, dentro de 22 años la edad de la hija será la mitad que la de su madre. Si el padre es mayor, por un año que la madre, ¿qué edad tiene cada uno en la actualidad?

Planteamos el problema de la siguiente forma:

Sea: x: La edad de la madre; y: La edad del padre; z: Edad de la hija
Las variables las llevamos a un cuadro que muestre la edad actual y la edad dentro de 22 años:

	Edad actual	Dentro de 22 años
Madre	x	$x + 22$
Padre	y	$y + 22$
Hija	z	$z + 22$

Ahora planteamos las ecuaciones según las condiciones que plantea el problema:

1ra condición: la suma de las tres edades es de 80 entonces:

$$x + y + z = 80 \quad \ldots \quad (1)$$

2da condición: en 22 años la edad de la hija será la mitad que la edad de la madre.

$$z + 22 = \frac{x + 23}{2} \ldots \quad (2)$$

3ra condición: el padre es un año mayor que la madre.

$$y = x + 1 \quad \ldots \quad (3)$$

Reduciendo las ecuaciones. Ahora el sistema estará formado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 80 & (1) \\ x - 2z = 22 & (2) \\ x - y = 1 & (3) \end{cases}$$

En la ecuación (3), despejamos la variable "y": $y = x+1$

Ahora sustituimos en la ecuación (1) y junto a la ecuación (2) conformaremos un nuevo sistema de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} x + (x + 1) + z = 80 \\ x - 2x = 22 \end{cases}$$

Realizamos operaciones:

$$\begin{cases} 2x + z = 79 & (4) \\ x - 2z = 22 & (5) \end{cases}$$

Por el método de reducción eliminamos “z”:

$$\begin{cases} 2x + z = 79 & //\cdot (2) \\ x - 2z = 22 & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2z = 158 \\ x - 2z = 22 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones y transponemos términos: $5x = 180 \rightarrow x = 36$
Ahora sustituimos el último valor en la ecuación (3): $36 - y = -1 \rightarrow y = 36+1 \rightarrow y = 37$ Finalmente, hallamos el valor de z en la ecuación (1): $x + y + z = 80 \rightarrow 36 + 37 + z = 80 \rightarrow z = 7$
Por tanto, la solución del sistema es: $x = 36,\ y = 37,\ z = 7$

Esto significa que, la edad de la madre es 36 años, la edad del padre es 37 años y la edad de la hija es de 7 años.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) La suma de la medida de los ángulos de un triángulo es 180º. El ángulo más pequeño del triángulo es dos tercios del tamaño del ángulo mediano. El ángulo más grande es 30º menor que 3 veces el ángulo mediano, ¿cuál es la medida de los 3 ángulos?

2) Un comerciante vende quesos de tres tipos: queso del altiplano, queso menonita, queso chaqueño. Los precios de cada uno de ellos son: Bs12 por kilo, Bs15 por kilo y Bs9 por kilo, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, que el importe total de la venta es de Bs436 y que el número de kilos vendidos del queso menonita es el doble del queso altiplano. Determinamos cuántos kilos de cada clase vendió el comerciante.

VALORACIÓN

La historia de la matemática se distinguió por el desarrollo progresivo de símbolos y la solución de ecuaciones. Así, los griegos (300 a.C.) hicieron grandes avances en el álgebra, pero fue Viete (1540-1603) quien introdujo notaciones simbólicas, marcando el comienzo de una nueva etapa en la ciencia matemática. Descartes (1596-1650) también hizo una contribución notable a la notación algebraica, permitiendo que las ecuaciones se traten como lo hacemos hoy en día.

El uso de ecuaciones para interpretar distintas situaciones favorece la resolución de problemas de distinta índole, ahí la importancia del uso del lenguaje algebraico y la relación de la información a través de símbolos matemáticos. ¿En tu opinión, qué tan importante es conocer los sistemas de ecuaciones 3 por 3 y por qué?

PRODUCCIÓN

Creamos sistemas de ecuaciones 3x3:

Para empezar, daremos los valores que deseamos que tengan las variables, digamos “x, y, z”, por ejemplo:

$$x=2\ ;\ y=3\ \ ;\ z=-1$$

A continuación, proponemos un lado de las ecuaciones como: $2x-3y-z$; $5x-y-z$; $x+y+2z$ (aún no escribimos la igualdad).
Posteriormente, realizamos las operaciones reemplazando los valores que dimos al inicio.
En el caso de $2x-3y-z$ será: $2(2)-3(3)-(-1)$ que es igual a -4 así tenemos la primera ecuación que será:

$$2x-3y-z=-4$$

Realizando lo mismo con las otras expresiones tendremos el sistema completo:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -4 \\ 5x - y - z = 8 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Fuente: Open AI,2024

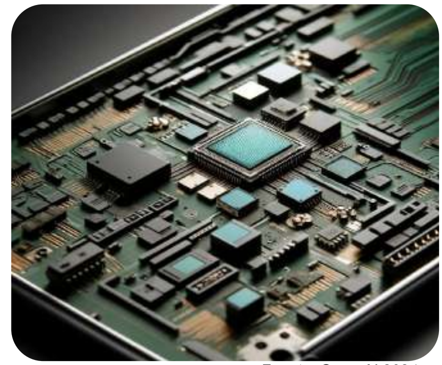
Así tenemos un sistema de 3x3, verificando veremos que al resolverlo se obtienen los resultados que se mencionaron al principio.

NÚMEROS COMPLEJOS

PRÁCTICA

Desde nuestros inicios, en la matemática hemos podido ver que tenemos diversos tipos de números, iniciamos nuestro caminar conociendo a los números naturales, luego utilizamos los números enteros y después las fracciones (racionales), además de mencionar a los números irracionales como el conocido "π-pi"; a todos estos números los llamamos números reales. Todos ellos se utilizan en diferentes ramas del conocimiento.

Sin embargo, existen ramas o áreas que requieren otro tipo de números para realizar sus avances. Por ejemplo, en electricidad se requiere el uso de números imaginarios, el diseño de placas de los celulares requerirá no solo números reales para tener diseños óptimos y eficaces.



Fuente: Open AI,2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

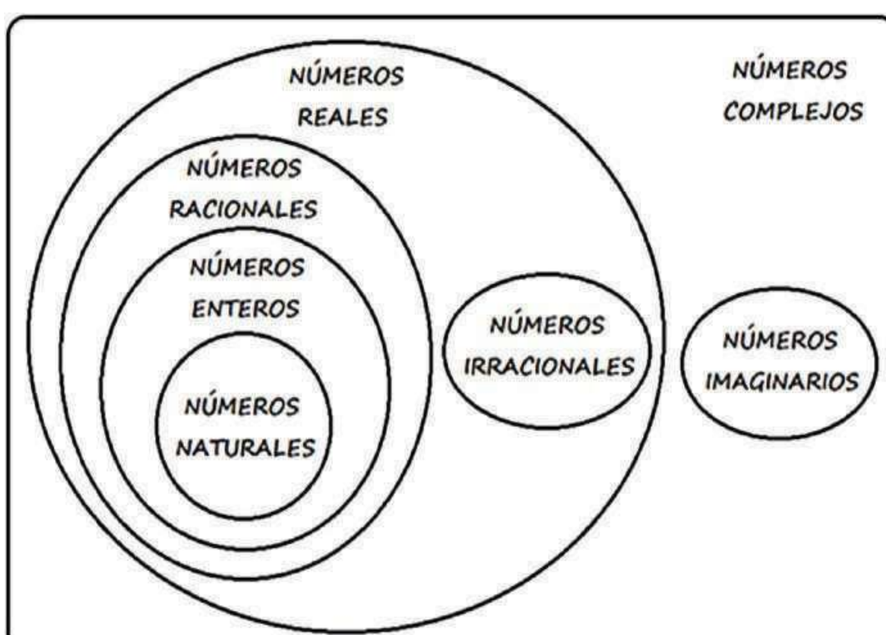
- ¿Existe alguna expresión matemática que representa a una señal de corriente alterna?
- ¿Cuál será el motivo de tener diferentes conjuntos numéricos?
- ¿Qué conocimientos serán necesarios para realizar el diseño de un circuito eléctrico?

TEORÍA

1. Conjunto de los números complejos

Se entiende que el conjunto de números complejos es la combinación de un número real y un número imaginario, surge con la necesidad de abarcar aspectos que los números reales no tienen, en especial para hallar todas las raíces de un polinomio en general (es decir, soluciones que contengan raíces cuadradas de números negativos).

Por convención, se denota a un número complejo con la letra "z". El esquema de los números complejos es el siguiente:



Nota. Elaboración propia

Conjuntos de números y sus características:

Números naturales $\mathbb{N}$, *inician a partir de la unidad y se forman sumando 1, pero no tienen decimales.*

Números enteros $\mathbb{Z}$, *contienen a los números naturales y a los números negativos incluyendo el cero.*

Números racionales $\mathbb{Q}$, *son la relación entre dos números enteros, cuya división arroja decimales con un patrón repetitivo.*

Números irracionales $\mathbb{Q}^c$, *contienen decimales que no siguen un patrón repetitivo, no se pueden expresar como fracción.*

Números reales $\mathbb{R}$, *involucran todas las características anteriores.*

2. Unidad imaginaria y sus propiedades

Los números imaginarios constituyen un conjunto de números definidos como la raíz cuadrada de números negativos. La unidad imaginaria se denota con la letra "i" (del inglés "Imaginary number") y tiene el siguiente valor:

$$i = \sqrt{-1}$$

Propiedades

El coeficiente del valor imaginario es 1, es decir: $i = 1i$

Elevando al cuadrado: $(i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$ es decir $i^2 = -1$

$-i = (-1) \cdot i$

Los números imaginarios son escritos usando números reales multiplicados por la unidad imaginaria, por ejemplo $6i\ -\frac{2}{3}i, \sqrt{5i}$

3. Potencias de la unidad imaginaria

Conociendo el valor de la unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$, las potencias son:

$i^0 = 1$ | $i^4 = (-1)(-1) = 1$

$i^1 = i$ | $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^2 = -1$ | $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = i$

Dato curioso

$$i^0 = 1 \to i^4 = 1 \to i^8 = 1$$
$$i^1 = i \to i^5 = i \to i^9 = i$$
$$i^2 = -1 \to i^6 = -1 \to i^{10} = -1$$
$$i^3 = -i \to i^7 = -i \to i^{11} = -i$$

Por tanto, para calcular i^{2025} *,se puede hacer:*

$$i^{2025} = i^{506 \cdot 4 + 1} = i^{506 \cdot 4} \cdot i^1$$

Como $i^{506 \cdot 4} = 1,$ *queda el resultado:*

$$i^{2025} = i$$

Ejemplo:

$$i^{63} = i^{15 \cdot 4 + 3} = i^3 = -i$$

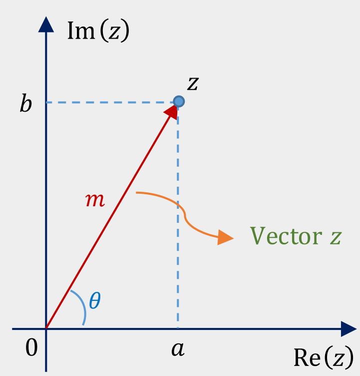
4. Números complejos y su representación gráfica

Un número complejo "z" es la combinación de los números reales e imaginarios, su notación es un conjunto de pares (a, b), donde el primer elemento del par "a" es la parte real del número complejo y el segundo elemento "b" es la parte imaginaria del número complejo.

Representación gráfica

$$z = a + bi = (a, b)$$

$$a \in Im_z, b \in Re_z$$



Expresión Binómica

Se denota a un número complejo de la siguiente forma:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Donde:

a: es parte real del número complejo
b: es parte imaginaria del número complejo
i: denota la unidad imaginaria del número complejo

De la representación gráfica rescatamos que:
θ: es el ángulo de inclinación de z
m: es el módulo (tamaño) de z, además:

$$\boxed{m = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Sea $z = -3 + 4i$, hallamos el módulo y el ángulo de inclinación.

$$m = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \to m = 5$$

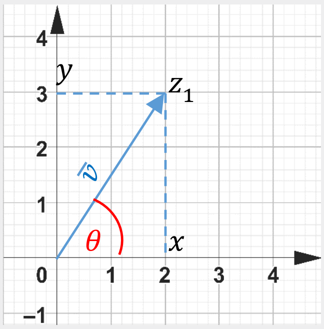
$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = -53°7'48''$$

Reduciendo el ángulo

$\theta = 180° - 53°7'\,48''$
$\theta = 126°52'12''$

Vectores

Por la semejanza del tratamiento de los números complejos con los vectores, debemos conocer algunas características de los mismos:



Donde:

$\hat{v}$: es la notación del vector con coordenadas (x, y)

x: coordenada en el eje

y: coordenada en el eje

θ: es el ángulo de inclinación del vector $\hat{v}$

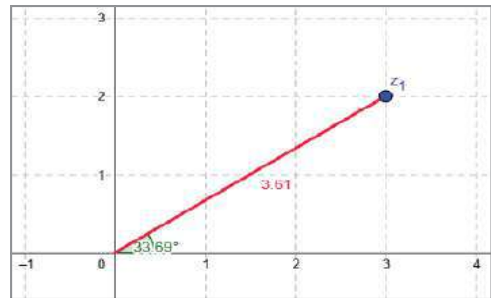
Ejemplo:

Dado el número complejo: $z = 3 + 2i$, hallar el módulo y el ángulo de inclinación

El módulo complejo es: $m = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3.61$

Su ángulo de inclinación es: $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33°41'24.24'' \cong 33.69°$

Gráficamente:



Ejemplo:

Trazamos el vector $z = -5 + 3i$ hallar el módulo y el ángulo de inclinación

El módulo del número complejo:

$$m = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

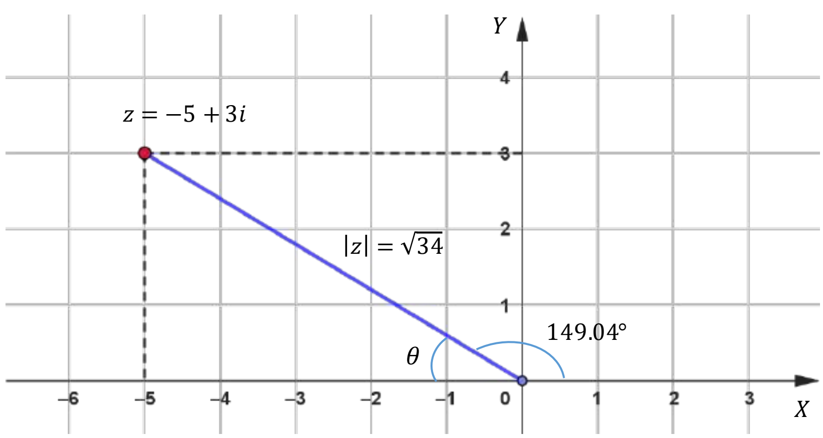
Su ángulo de inclinación es:

$$\theta = arctan\left(\frac{3}{5}\right) = -30°57'49.52''$$

Como la ubicación del número complejo es en el segundo cuadrante, su ángulo de inclinación corresponde a ese cuadrante θ, por ello, hallaremos el ángulo suplementario que mida desde el primer cuadrante:

$$\theta_s = 180° - 30°57'49.52'' = 149°2'10.48'' \approx 149.04°$$

Gráficamente:



Actividad

1) Resolvemos las siguientes potencias:

$a)\ i^9$ $\quad b)\ i^{100}$ $\quad c)\ i^{2025}$ $\quad d)\ 2i^{100} - i$ $\quad e)\ i^{1000} - i^{999}$

2) Hallamos el módulo y ángulo de inclinación de los siguientes números complejos:

$a)\ z_1 = 5 + 3i$ $\quad b)\ z_2 = 7 - 3i$ $\quad c)\ z_3 = -4 - 6i$ $\quad d)\ z_4 = -8i$

Propiedades:

- Número complejo nulo. Tiene la parte real e imaginaria igual a cero.

$$0 = 0 + 0i$$

- Número complejo opuesto. Si el complejo es $z = a+bi$, entonces su complejo opuesto tiene parte real e imaginaria opuestas respectivamente.

$$z = a + bi \rightarrow \; -z = -a - bi$$

- Número complejo conjugado. Es el número complejo que tiene la misma parte real pero la parte imaginaria opuesta.

$$z = a + bi \rightarrow \; \bar{z} = a - bi$$

- Números complejos iguales. Dos complejos son iguales si y solamente si, tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow \; a_1 = a_2 \; y \; b_1 = b_2$$

Investigando

¿Qué son las coordenadas polares?

¿Cómo se convierte un complejo binómico a forma polar?

¿Cómo es la gráfica de una función polar?

¿Qué papel juega el módulo y el argumento en la conversión de un número complejo a su forma polar?

¿Qué ventajas ofrece la forma polar sobre la forma binómica para la multiplicación y división de números complejos?

VALORACIÓN

Gerolamo Cardano y Rafael Bombelli sugirieron hacer uso de números imaginarios pues no podían abastecer la solución de problemas con los números reales. Bombelli optó por el uso de los números imaginarios para resolver algunas ecuaciones, mientras que Caspar Wessel representó el plano cartesiano como una manera de mostrar un número complejo para su mejor comprensión.

- En tu opinión, ¿qué tan importante es conocer el uso de los números complejos?
- ¿Cuáles ramas de la tecnología utilizan más los números complejos?

PRODUCCIÓN

Construimos un tablero como la figura con los siguientes materiales:

- Lápices de color
- Cartulina
- Marcadores

Dividimos la hoja de cartulina en varios recuadros y colocamos la potencia del número imaginario como muestra la figura.

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6
i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}	i^{17}	i^{18}
i^{19}	i^{20}	i^{21}	i^{22}	i^{23}	i^{24}
i^{25}	i^{30}	i^{35}	i^{40}	i^{50}	i^{70}
i^{100}	i^{200}	i^{400}	i^{800}	i^{1600}	i^{3200}

El juego consiste en que 4 estudiantes se disponen a lanzar a 2 metros del tablero una moneda. Donde la moneda llegue a caer, el participante debe resolver la potencia del número imaginario indicado. Si la moneda cae fuera del tablero, vuelve a lanzar la moneda hasta que caiga en algún recuadro. El ganador es aquel que acierte más respuestas en sus 6 intentos.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

PRÁCTICA

Diana, Elvis y Mario son estudiantes universitarias de Ingeniería Electrónica y pretenden realizar, a partir de conceptos teóricos y reconocimiento de dispositivos, ciertas configuraciones electrónicas.

Para ello requieren de equipos e instrumentos como el osciloscopio, tester, protoboard, bobinas, capacitores, resistencias, fuente de tensión, todo ello para la ejecución del laboratorio y poner en marcha las leyes de Kirchhoff. Su intención es comparar los datos que lanza el osciloscopio con lo hecho en sus cuadernos de trabajo.

Fuente: Open AI,2024

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

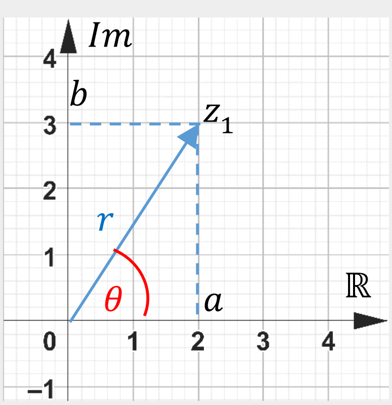
- Investigamos las características y mediciones que realiza un osciloscopio.
- Explicamos qué es una inductancia o bobina y cuál es su función.
- Identificamos qué tipo de componente es la capacitancia y cuál es su función.

TEORÍA

Conjuntos de números y sus características:

Si bien conocemos la forma básica de la expresión de un número complejo ($\boldsymbol{z = a + i}$), también existen otras nomenclaturas para denotarlos, que aunque no corresponde a este curso se muestra para conocer más a profundo dicha nomenclatura.

Estas son:
$z = r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$ o bien
$z = r \cdot e^{i}$
Donde z es el número complejo



1. Adición de números complejos

Sumamos dos o más números complejos separando las partes reales e imaginarias.

Si: $z_1= a+ib$, $z_2= c+id \to z_i+z_2= (a+c)+i(b+d)$

Propiedades:

La suma de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \to z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- Elemento neutro: $0+i0$
- Número complejo opuesto, $-a-ib$

Ejemplo:

Para los números complejos $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$, hallar la sumas de z_1 y z_2 es decir: $z_3 = z_1+z_2$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro.

$$z_1 = 5 + 3i$$
$$z_2 = 7 + 4i$$
$$z_1 + z_2 = (5 + 7)+(3 + 4)i$$
$$z_3 = z_1 + z_2 = 12 + 7i$$

2. Sustracción de números complejos

Restamos dos o más números complejos separando las partes reales e imaginarias, es decir:

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di \to z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$$

Propiedades:

La resta de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \;\; \Rightarrow \;\; z_1 - z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutatividad: $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$
- Asociativa: $(z_1 - z_2) - z_3 \neq z_1 - (z_2 - z_3)$
- Elemento neutro: $0 + 0i$
- Número complejo opuesto: $-a - ib$

Ejemplo:

Sean los números complejos $\boldsymbol{z_1} = 7 + \boldsymbol{3i}, \boldsymbol{z_2} = -\boldsymbol{3} + 5\boldsymbol{i}$, hallar: $z_1 + z_2$

Sea $\boldsymbol{z_3} = \boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria).

$$\boldsymbol{z_1} = 7 + \boldsymbol{3i}$$
$$\boldsymbol{z_2} = -\boldsymbol{3} + 5\boldsymbol{i}$$

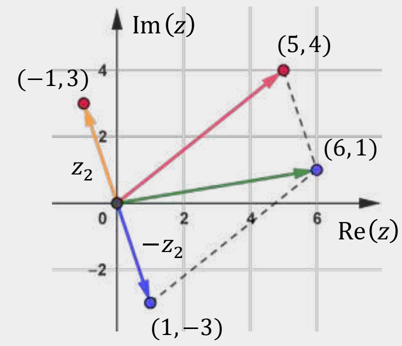
$$z_3 = z_1 - z_2 = [7 - (-3)] + (3 - 5)i$$
$$z_3 = z_1 + z_2 = 10 - 2i$$

Gráfico

$z_1 = \quad + \; i$

$-z_2 = 1 - 3i$

$z_1 - z_2 = 6 + 1i$



3. Multiplicación

Multiplicamos dos o más números complejos, aplicando la propiedad distributiva entre sus componentes y recordando las potencias de la unidad imaginaria.

Si: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, la multiplicación de ambas es:

$$a + bi$$
$$c + di$$

$$a \cdot c + c \cdot b\,i + a \cdot d\,i + d \cdot b\,i\text{^}2 \quad i\text{^}2 = -1 \rightarrow$$
$$a \cdot c + c \cdot bi + a \cdot di + d \cdot b(-1)$$

El resultado será: $(a + bi)(c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (b \cdot c + a \cdot d)i$

Nota. En la multiplicación es conveniente aplicar la multiplicación algebraica para encontrar el producto de dos complejos.

Propiedades:
La multiplicación de números complejos tiene las propiedades:

Clausura: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

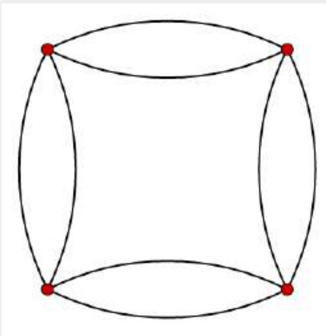
Asociativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Distributiva respecto a la suma: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

Elemento neutro: 1

Investigando

*El conjunto de los números complejos, desprovisto del elemento neutro de la adición, es un **grupo abeliano** respecto de la multiplicación.*
Un grupo abeliano es un grupo en el que la operación interna satisface la conmutatividad, esto, evidentemente, no sucede en el conjunto de los números complejos.



Ejemplo:

Sean los números complejos $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = -4 + 3i$, hallar $z_1 \cdot z_2$
Sea $z_3 = z_1 \cdot z_2$ ubicamos cada número complejo uno debajo del otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria).

$$z_1 = 3 + 5i$$
$$z_2 = -4 + 3i$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (-4)(3) + (-4)(5i) + (3i)(3) + (3i)(5i)$$
$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = -12 - 20i + 9i + 15i\text{^}2$$
$$z_3 = z1 \cdot z_2 = -12 - 11i + 15(-1)$$
$$z_3 = z1 \cdot z_2 = -27 - 11i$$

4. División

Dividimos dos números complejos multiplicando y dividiendo por la conjugada del divisor para eliminar la unidad imaginaria del denominador.

Si: $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+ di$, la división de ambas será:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{a\cdot c+a\cdot di+c\cdot bi-b\cdot d\cdot i^2}{c^2-(di)^2}=\frac{a\cdot c+(a\cdot d+c\cdot b)i-b\cdot d\cdot(-1)}{c^2-d^2\cdot i^2}$$

$$=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+(a\cdot d+c\cdot b)i}{c^2-d^2\cdot(-1)}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+(a\cdot d+c\cdot b)i}{c^2+d^2}$$

Dato curioso

Si, $z_1=1+i$ y $z_2=\sqrt{2}$ al multiplicarlos obtienes $z_1\times z_2$. Geométricamente, esto se traduce en un vector que ha sido ampliado y rotado en el plano complejo. Esto puede ser una forma fascinante de visualizar la complejidad de estas operaciones.

Propiedades:

La división de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1/z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutatividad: $\frac{z_1}{z_2} \neq \frac{z_2}{z_1}$
- Asociativa: $(z_1 \div z_2) \div z_3 = z_1 \div (z_2 \div z_3)$
- Elemento neutro: 1

Ejemplo:

Sean los números complejos $z_1= 5-3i$, $z_2 = 4+3i$, hallar $\frac{z_1}{z_2}$.

Sea $z_3=\frac{z_1}{z_2}$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria).

$$\frac{5-3i}{4+3i}=\frac{5-3i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{(5)(4)-(5)(3i)-(3i)(4)+(3i)(3i)}{(4)^2-(3i)^2}=\frac{20-15i-12i+9i^2}{16-9i^2}=\frac{20-27i+9(-1)}{16-9(-1)}$$

$$=\frac{20-27i-9}{16+9}=\frac{11-27i}{25}=\frac{11}{25}-\frac{27}{25}i$$

Ejemplo:

Simplificamos la siguiente expresión: $\frac{1+i}{1-i}+\frac{2}{1+i}-\frac{1}{i}$

$$\frac{(1+i)(1+i)i+2i(1-i)-(1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)i}=\frac{(1+i)^2+2i-2i^2-(1-i^2)}{(1-i^2)i}=\frac{(1+2i+i^2)i+2i+2-1-1}{(1+1)i}$$

$$=\frac{i-2-i+2i+2-2}{2i}=\frac{-2}{2i}+\frac{2i}{2i}=\frac{-2}{2i}\cdot\frac{i}{i}+1=\frac{-2}{2i^2}i+1=\frac{-2}{2(-1)}i+1=i+1$$

Actividad

1) Para: $z_1 = 2 -3i$, $z_2 = -4 + i$ y $z_3 = 3 - 8i$, resolvemos las siguientes operaciones:

a) $z_4 = z_1 + z_2$ c) $z_5 = z_2 + z_3$ e) $z_6 = z_3 - z_2$ g) $z_7 = z_2 - z_1$

b) $z_8 = z_1 + z_2 - z_3$ d) $z_9 = z_2 - (z_1 + z_3)$ f) $z_{10} = z_1 + z_2 + z_3$

2) Para: $z_1=2 + 3i$, $z_2 = -6 + i$ y $z_3 = -2-8i$, resolver las siguientes operaciones:

a) $z_4 = z_1 \cdot z_2$ c) $z_5 = z_2 \div z_3$ e) $z_6 = z_3 \cdot z_2$ b) $z_7 = z_2 \div z_1$

b) $z_8 = z_1 \cdot (z_2 \div z_3)$ d) $z_9 = z_2 \div z_1 \cdot z_3$ e) $z_{10} = (z_1 \cdot z_2) \div z_3$

Propiedades:

- El conjugado de la suma es igual a la suma de los conjugados: $\overline{z1+z2} = \overline{z1} + \overline{z2}$
- El conjugado del producto es igual al producto de los conjugados: $\overline{z1 \cdot z2} = \overline{z1} \cdot \overline{z2}$
- El conjugado del conjugado es el número complejo original: $\overline{\overline{z}} = z$
- La suma de dos números complejos conjugados es igual al duplo de la parte real.

Ejemplo:

Hallar el conjugado del $z = 5-2i$
El conjugado es el cambio de signo a la parte imaginaria, es decir: $\overline{z} = 5-(-2i) = 5+2\,i$

5. Operaciones combinadas

En esta sección se incluyen las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el conjugado.

Ejemplo:

Resolvemos las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)+\overline{(-2-i)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\cdot 1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2-2-i$

$$\sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}-2-i$$

$$-2+3i$$

Fuente: Open AI,2024

b) $$i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{i}}}}$$

Dividimos por partes de abajo hacia arriba: $$i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{i}}}}$$

En 1:

$$1+\frac{1}{i}=\frac{i+1}{i}\rightarrow\frac{1}{\frac{i+1}{i}}=\frac{1}{1+i}$$

En 2:

$$i+\frac{i}{1+i}=\frac{i(1+i)+i}{1+i}=\frac{i+i^2+i}{1+i}=\frac{2i-1}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{2i+2-1+i}{1-i^2}=\frac{2i+2-1+i}{1+1}=\frac{3i+1}{2}\rightarrow\frac{1}{\frac{3i+1}{2}}=\frac{2}{1+3i}$$

En 3:

$$i+\frac{2}{1+3i}=\frac{i(1+3i)+2}{1+3i}=\frac{i+3i^2+2}{1+3i}=\frac{i-3+2}{1+3i}=\frac{-1+i}{1+3i}\rightarrow\frac{1}{\frac{-1+i}{1+3i}}=\frac{1+3i}{-1+i}$$

En 4:

$$i+\frac{1+3i}{-1+i}=\frac{i(-1+i)+1+3i}{-1+3i}=\frac{-i+i^2+1+3i}{-1+i}=\frac{-i-1+1+3i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-2i-2i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{-2i-2(-1)}{1+1}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

Actividad

Para: $z_1 = 2+3i,\ z_2 = -6+i,\ z_3 = -2-8i,\ z_4 = 4-i$. Resolver las siguientes operaciones combinadas:

1) $z_5 = z_1+z_2 \cdot z_3$

2) $z_8 = z_1+\cfrac{1}{z_2+\cfrac{1}{z_3}}$

3) $z_6 = \dfrac{z_1+z_2}{z_3-z_4}$

4) $z_9 = \dfrac{z_1}{z_2-z_3}-\dfrac{z_4}{z_1-//}$

5) $z_7 = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4}$

6) $Z_{10} = z_4-\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{z_4}}}}$

7. Resolución de problemas aplicados al contexto de la tecnología

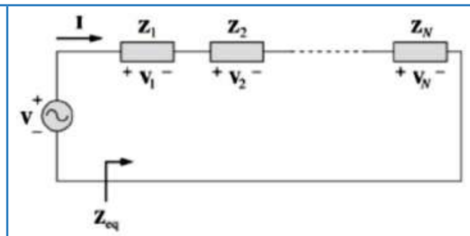
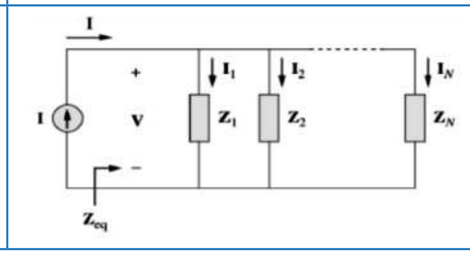
En la electrónica:

La impedancia es conocida por oponerse al paso de corriente alterna.
Su ecuación es; $Z = \frac{V}{I}$

Donde Z es la impedancia $[\Omega]$, V es el voltaje $[V]$, I es la corriente alterna que pasa por el circuito $[A]$, a su vez, la impedancia se puede expresar como un número complejo: Z=R+Ix $[\Omega]$

Donde
R es la resistiva a la impedancia, su figura es:
X es la resistencia:

- Si es inductor $X = X_L$ (figura)
- Si es capacitor X = -XC (figura)

En casos eléctricos con varias impedancias, tenemos 2 casos:	
Impedancia equivalente en serie: $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_n$	
Impedancia equivalente en paralelo: $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$	

La independencia en circuitos de Corriente Alterna (CA), los componentes como resistencias, inductores y condensadores tienen una impedancia que se puede representar como un número complejo.

Ejemplo:

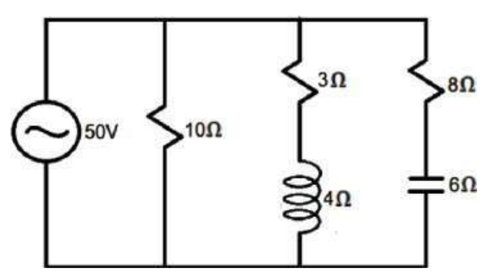
Un circuito tiene una resistencia de $10\ \Omega$ y un condensador con reactancia de $X_C = -i\ 20\Omega$. La impedancia total Z el circuito en serie es:

$$Z = R + X_C = 10 - i\ 20\Omega$$

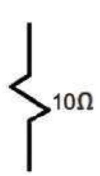
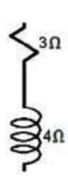
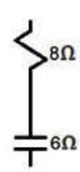
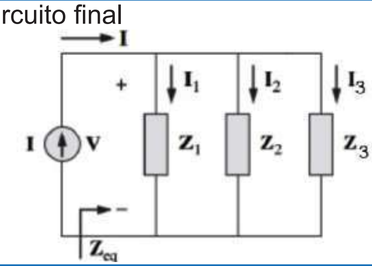
Este número complejo describe tanto la magnitud como la fase de la oposición total al flujo de corriente.

Ejemplo:

Hallar la impedancia equivalente y la corriente del siguiente circuito electrónico:



1. Calcula las impedancias parciales:

	Solo lleva una resistencia: $Z_1 = 10$		Lleva una resistencia y un inductor: $Z_2 = 3+4i$		Lleva una resistencia y un capacitor: $Z_3 = 8+6i$	Circuito final 

2. Identificamos el tipo de circuito: en paralelo

3. Calculamos la impedancia equivalente: $\dfrac{1}{z_{eq}} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} \rightarrow \dfrac{1}{z_{eq}} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3+4i} + \dfrac{1}{8-6i}$

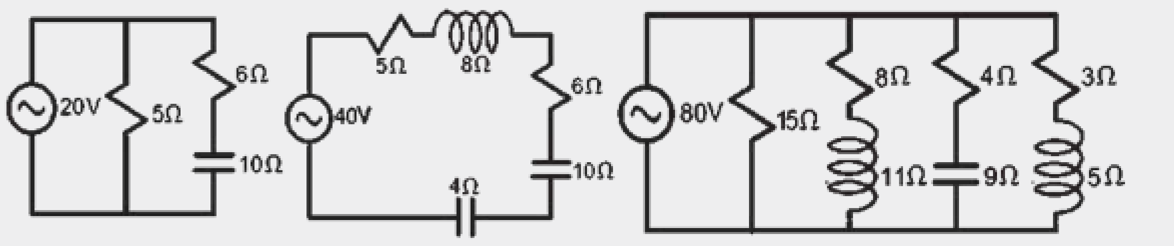
$$\frac{1}{z_{eq}} = \frac{(3+4i)(8-6i) + (10)(8-6i) + (10)(3+4i)}{(10)(3+4i)(8-6i)} \rightarrow \frac{1}{z_{eq}} = \frac{48+14i+80-60i+30+40i}{(30+40i)(8-6i)} \rightarrow \frac{1}{z_{eq}} = \frac{158-6i}{480+140i}$$

$$z_{eq} = \frac{480-140i}{158+6i} \cdot \frac{158-6i}{158-6i} \rightarrow \frac{1}{z_{eq}} = \frac{75\,000+25\,000i}{25\,000} \rightarrow z_{eq} = 3-i$$

La intensidad de corriente es: $z = \dfrac{V}{I} \rightarrow I = \dfrac{V}{Z} \rightarrow I = \dfrac{50}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i} \rightarrow I = 15-5i$

Actividad

Hallamos las impedancias equivalentes y corrientes de los siguientes circuitos:



VALORACIÓN

La última parte de este tema hizo notar la aplicación que tiene el álgebra proposicional en la cotidianidad, el desarrollo de los aparatos electrónicos que se tienen en la mayor parte de los hogares bolivianos.

- En tu opinión, ¿qué tan importante es la utilización de los números complejos en las ciencias?
- ¿Qué significan las señales sinusoidales, el movimiento ondulatorio y la amplitud de onda en la electrónica?

PRODUCCIÓN

Construimos una ruleta como la figura con los siguientes materiales:

- Hojas de color
- Cartón
- Marcadores
- Hojas bond (para los ejercicios)

Fuente: Open AI,2024

Dividimos las hojas bond en trozos pequeños y escribimos números complejos en cada uno.

Adaptamos una caja de cartón donde se encontrarán estas fichas.

El juego consiste en que 4 estudiantes sacan dos papelitos, cada uno de la caja y luego giran la ruleta para realizar la operación entre los dos papelitos donde haya caído la flecha. El estudiante que logre resolver de forma correcta, en las 6 opciones que le toque, gana el juego.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Ecuaciones lineales con una incógnita

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $3(x-2)=4$

2) $5(x-2)=3(x+2)$

3) $\frac{2}{5}=\frac{x}{10}$

4) $\frac{3}{k}=\frac{9}{6}$

5) $\frac{1}{4}=\frac{z+1}{8}$

6) $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{3}{2}$

7) $\frac{5y-2}{7}=\frac{15y-2}{28}$

8) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-2}$

9) $\frac{5,6}{-x-6,2}=\frac{2}{x}$

10) $\frac{2b}{b+1}=2-\frac{5}{2b}$

11) $\frac{3y-2}{y+1}=4+\frac{y+2}{y-1}$

12) $\frac{15}{x}+\frac{9x+7}{x+2}=9$

13) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}=-\frac{5}{x^2-9}$

14) $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$

15) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}$

16) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-6}{x-5}-\frac{x-4}{x-3}$

17) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+4}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x-5}$

Problemas de aplicación:

1) Encontramos un número que cumple con la suma de su doble y su triple sea igual a 100.

2) El padre de Juan tiene 30 años más que él y su madre tiene 5 años menos que su padre, ¿cuál es la edad actual de Juan sabiendo que la suma de las edades de su padre es 7 veces la edad de Juan?

3) En la fórmula $d=\frac{fl}{f+w}$, despejamos "w"

4) En una elección escolar reciente, se contaron 980 votos. El ganador recibió 372 votos más que el perdedor. ¿Cuántos votos recibió cada candidato?

5) Repartir 350 naranjas entre tres personas, modo que la primera reciba 15 naranjas más que la segunda y ésta 10 naranjas más que la tercera.

6) En la fórmula $\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, despejamos R_T

7) Juana, Julia y Josefa trabajaron en total dieciocho horas en una fiesta escolar. Juana y Julia completaron once entre ambas y Josefa trabajo una hora más que Juana. Determínese cuántas horas trabajó cada una.

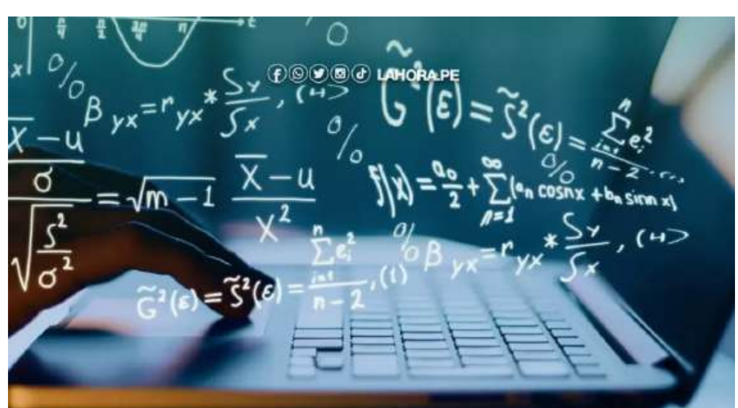
8) La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encontramos dichos números.

9) La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determinamos los números.

10) La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determinamos los números.

11) En la relación: $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, despejamos x

12) La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determinamos los números.



Fuente: https://lahora.pe/tendencia/incursion-de-la-ia-en-las-matematicas-representara-un-eje-crucial-en-el-progreso-tecnologico/

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas

1) Resolvemos por sustitución:

a) $\begin{cases} x+2y=9 \\ x=2y+1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=x+2 \\ -x-2=2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=6 \\ x=y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2y=6-4x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-y=-4 \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-2 \\ x-3y=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 6x-y=1 \end{cases}$

2) Resolvemos por igualación:

a) $\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ 3x=2y+8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-5y=-23 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=1 \\ \frac{3x}{4}-\frac{y}{3}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=2 \\ \frac{3x}{4}-\frac{y}{3}=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-\frac{3-y}{2}=2 \\ y-\frac{2+x}{3}=3 \end{cases}$

3) Resolvemos por reducción o eliminación:

a) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 4x+5y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x=-2y+3 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3}+4y=\frac{13}{3} \\ \frac{2(-2y+x)}{3}-\frac{3x}{2}=-\frac{13}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{7x-9y}{2}-\frac{2x+4}{2}=-15// \\ 5(x-1+y)=25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=32 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4p-3q=-2 \\ 20p-15q=-1 \end{cases}$

4) Resolvemos por determinantes:

a) $\begin{cases} x+7y=1 \\ 3x-4y=20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20x+13y=12 \\ -6x+10y=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ x-y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -5x-15y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 8p-3q \\ 2p+9q=15 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x-4y=32 \\ 5x+y=38 \end{cases}$

Problemas de aplicación:

1) En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es 30° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

2) La distancia entre las ciudades A y B es 255 km. Un móvil sale de A hacia B con una velocidad de 90 km/h. El móvil B sale al mismo tiempo hacia A con velocidad de 80 km/h. Si su velocidad es constante, determinamos el tiempo que tardan en encontrarse, además de la distancia que recorre cada uno hasta encontrarse.

3) Un avión puede viajar a 540 millas por hora con el viento a favor y a 490 millas por hora contra el viento. Encontramos la velocidad del avión en aire tranquilo y la velocidad del viento.

4) En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar Bs1060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron Bs1100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

5) Al revisar sus facturas de pago, el señor Apaza se percata de que la empresa de mensajería y paquetería “La Paloma”, le cobró Bs1924 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que por los paquetes que envió a Santa Cruz cobró a Bs92 por kilogramo y por los que mandó a Pando Bs30 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS

Sistema de ecuaciones lineales

1) Resolver por el método de determinante:

a) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + y - 2z = -1 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - 3y - 2z = -2 \\ 8x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a + 2b + 2c = 1 \\ 2a - b + c = 3 \\ 4a + b + 2c = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2a + 2b - c = 2 \\ 3a + 4b + c = -4 \\ 5a - 2b - 3c = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1 \end{cases}$

2) Resolver por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x - \dfrac{y+z}{3} = 4 \\ y - \dfrac{x+z}{8} = 10 \\ z - \dfrac{y-x}{2} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 2 \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{z} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4n - 2m - 3r = 1 \\ m + 3n - 5r = -4 \\ 3m - 5n + r = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 7 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} = 5 \\ \dfrac{4}{a} - \dfrac{3}{b} + \dfrac{2}{c} = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 4 \\ -3x - y + 4z = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 6z = 12 \\ y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x - 6z = -17 \\ 3x - 4y + 5z = -1 \\ 2z = 6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2a - 5b = 12 \\ -3b = -9 \\ 2a - 3b + 4c = 8 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2 - b + 5c = -4 \\ 3a - 2c = 6 \\ 4c = 2 \end{cases}$

Problemas de aplicación:

1) Para el concierto de un grupo folclórico se habilitaron tres sectores para el público. Los lugares frente al escenario son los más caros, los asientos detrás del escenario son los segundos más caros y los de galería son los menos caros. Los asientos al frente del escenario son dos veces más caros que los de galería, los asientos de galería cuestan Bs10 menos que los de detrás del escenario y Bs30 menos que los del frente del escenario, ¿cuál es el precio de cada sector?

2) La tienda de videojuegos vendió 600 ejemplares de un videojuego a Bs6384, el precio original era de Bs12, pero también ha vendido copias, presuntamente defectuosas, con un descuento del 35% y 40%. Si el número de copias defectuosas que vendió fue la mitad del número de copias en buen estado, se pide calcular a cuántas copias les aplicó el descuento del 35%.

3) El cajero automático de una entidad financiera contiene 95 billetes de Bs10, Bs20 y Bs50, sumando un total de Bs2000. Si la cantidad de billetes de Bs10 es el doble de la cantidad de billetes de Bs20, se pide determinar cuántos billetes hay de cada tipo.

4) Tres hermanos cuyas edades son: el quíntuplo de la edad del primero con el cuádruplo de la edad del segundo y el triple de la edad del tercero, es 60. El cuádruplo de la edad del primero con el triple de la edad del segundo y el quíntuplo de la edad del tercero, es 50. Asimismo, el triple de la edad del primero con el quíntuplo de la edad del segundo y el cuádruplo de la edad del tercero, es 46. Se pide determinar las edades de los tres hermanos.

NÚMEROS COMPLEJOS

Números Complejos

1) Simplificar los siguientes números imaginarios:

a) i^{343}

b) i^{20}

c) i^{40}

d) i^{918}

e) $i^2 + i^3 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

f) $M = (1 + i)^2$

g) $(4 + 3i)(5 + i)$

h) $\left(\sqrt{2} + i\right)^2$

2) Simplificar los siguientes números complejos:

a) $(1 + i)^2$

b) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+2i}$

c) $[(1 + i)^{-1} + 4(1 + i^{-1})]^{-1}$

d) $1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1-i}}}}}}$

e) $\frac{(1+i)^2}{2-i} + \frac{1}{1-i} - \frac{3}{1+i}$

f) Sabiendo que $z_1 = \frac{1}{2} - i,\ z_2 = -2 + \frac{i}{3},\ z_3 = -4i$

3) Determinar:

a) $z_1 - z_2$

b) $z_2 \cdot z_3$

c) $z_1 + z_3$

d) $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)$

e) $z_2\,\overline{(z_1 - z_3)}$

f) $\dfrac{z_1 + z_3}{z_2 + z_3}$

4) Representa gráficamente los siguientes números complejos:

a) $z = 4 - 3i$

b) $z = 2 + i$

c) $z = -4 + 3i$

d) $z = -5 - i$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Adición y Sustracción

1) Si $z = 2+3i$ y $z_1 = 5-4i$ encuentre $z+z_1$

2) Si $z_1 = 3-2i$ y $z_2 = 3+2i$ obtén z_1+z_2

3) Si $z_1=4-5i$ y $z_2 = 4-5i$ encuentra z_1-z_2

4) Si $w = 3-4i$ y $w_1=2+7i$ realiza w_1-w

5) Si $z = 1-i$, $z_1 = 1+i$ y $z_2 = i$ hallar z_1-z+z_2

6) Si $z_1 = 7-3i$ y $z_2 = 4-\frac{1}{2}i$, calcula z_1+z_2

7) Si $z = 2-3i$, $z_1=10i$ y $z_2=2+3i$ realiza $z+z_2-z_1$

Multiplicación

8) $(3-4i)(-3-2i)$

9) $(2, 3)(1, -1)$

10) $(2, 0)(3, 2)$

11) $(1, -i)(2, -1)$

12) $(1+2i)^2$

13) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

14) Si $z = (1/3, 1/3)$ y $w=(2, 3)$ determina $z_1 \cdot w$

15) Si $z = (1/2, \sqrt{2})$ y $z_2=(0, \sqrt{2})$ efectúa $z_1 \cdot z_2$

16) Si $w = 6-2i$ y $w_1 = 3i$ encuentra $w \cdot w_1$

17) Si $z = (4, -1)$, $z_1 = (2, -3)$ y $z_2 = (-1, 1)$ obtén $z_2\,(z+z_1)$

18) Si $z = 1$, $w=(1/3, 0)$ y $y=2+i$ determina $z(w-y)$

División

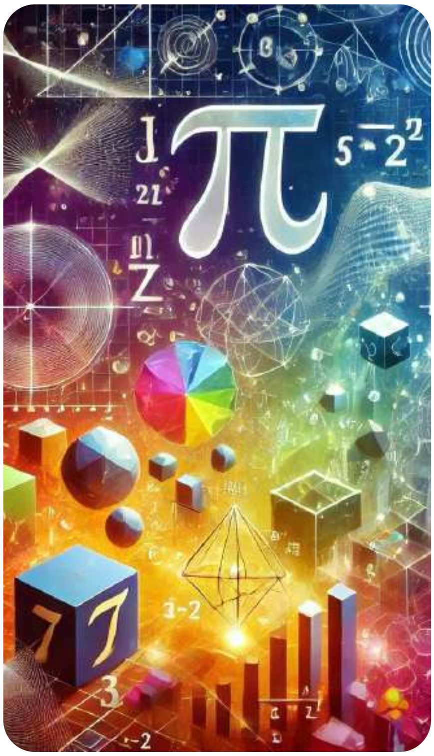
19) $\dfrac{i}{1-2i}$

20) $\dfrac{3-2i}{3+2i}$

21) $\dfrac{1-3i}{i}$

22) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

23) $\dfrac{1-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$



Fuente: Open AI,2024

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

PRÁCTICA

Con el objetivo de forestar el entorno y crear jardines, se ha seleccionado un terreno rectangular de 80 m², en el cual el largo debe ser el triple del ancho según el espacio disponible.

Para proteger el área, los estudiantes deciden comprar puntales y alambre tejido. ¿Cuántos puntales y cuánta cantidad de alambre deberán adquirir?

Para incentivar la conciencia ambiental entre sus compañeros, la mesa directiva del centro de estudiantes ha lanzado una convocatoria para que todos los cursos participen en la creación de jardines, promoviendo la mejora de espacios descuidados dentro de su unidad educativa, considerando el tamaño y forma adecuados para cada jardín.

Fuente: Open AI,2024

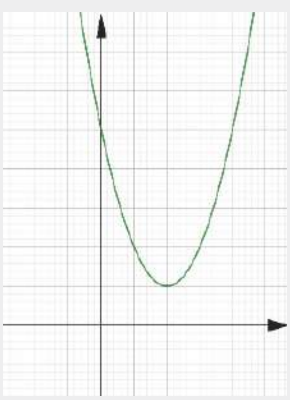
Actividad

Analizamos y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué conceptos se aplican en la construcción de los jardines?
- ¿Qué figura geométrica aparte del rectángulo podemos usar para construir un jardín?
- Analizamos en qué otras áreas utilizan los conceptos de la ecuación cuadrática.
- Además de la construcción de un jardín, ¿dónde emplearíamos estos saberes y conocimientos?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos para la construcción de jardines en nuestra casa y colegio?

TEORÍA

Parábola



$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

La parábola puede estar ubicada en cualquier punto del plano cartesiano y puede estar abierto hacia arriba o hacia abajo.

Así:

- *ax^2 es el término cuadrático*
- *bx es el término lineal*
- *c es el término independiente*

1. Función cuadrática y sus características

Las trayectorias parabólicas, o concretamente las parábolas, son representaciones geométricas de las funciones cuadráticas. Las características de una parábola son:

- Las ramas determinan la concavidad o convexidad.
- Los puntos donde se corta con el eje horizontal se llaman "ceros", "raíces" o "puntos de intersección".
- Una de las ramas corta al eje vertical en un punto de coordenadas $(0,y)$.
- El vértice es el punto más alto si la parábola se abre hacia abajo y el punto más bajo si la parábola se abre hacia arriba.
- La rama izquierda es simétrica con la rama derecha, con relación al vértice de la parábola.
- La rama izquierda es simétrica con la rama derecha, con relación al vértice de la parábola.

La ecuación cuadrática trata de tomar la función cuadrática cuando las ordenadas son iguales a cero, es decir: $f(x)=0$ siendo la función parabólica $f(x)=ax^2+bx+c$, cuando $f(x)=0$ se tiene la ecuación de una sola incógnita "x", cuya forma general es:

$$ax^2+bx+c=0 \text{ donde } a\neq 0$$

Por lo que pueden existir ecuaciones que al transformarlas o llevarlas a su forma, resultan ser ecuaciones cuadráticas, por ejemplo:

Ecuaciones	¿Qué hacer?	Forma cuadrática	Valores
$x^2=2x+3$	Transponer términos e igualar a cero	$x^2-2x-3=0$	$a=1$, $b=-2$ y c=-3
$3(x^2-3x)=2$	Desarrollar paréntesis e iguala a cero	$3x^2-9x-2=0$	$a=3$, $b=-9$ y $c=-2$
$2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$	Multiplica por x^2	$x^2+3x+2=0$	$a=1$, $b=3$ y $c=2$

2. Métodos de resolución de una ecuación cuadrática

La ecuación de segundo grado se clasifica de la forma siguiente:

Incompleta pura: Puede expresarse de las dos maneras siguientes.

$$ax^2+c=0$$

donde los valores de "a" y "c" son distintos de cero. Se resuelve despejando "x".

Ejemplo:

Determinamos las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadráticas.

1) $x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Despejando "x":

$$x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\end{cases}$$

Una ecuación cuadrática incompleta: $ax^2=0$, con "a" distinto de cero. Su única solución de multiplicidad es $x=0$.

Incompleta mixta: Se expresa como:

$$ax^2+bx=0$$

donde los valores "a" y "b" son distintos de cero. Se resuelve por factorización de "x". Siempre una de sus soluciones es:

$$x_1=0 \text{ y } x_2=\frac{-b}{a}$$

Ejemplo:

Determinamos las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadráticas.

1. $5x^2+7x=0$

Factorizando x:

$$x(5x+7)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\5x_2+7=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x_2=-7\ \Rightarrow\ x_2=-\frac{7}{5}\ \Rightarrow\ x_1=0\vee x_2=-\frac{7}{5}$$

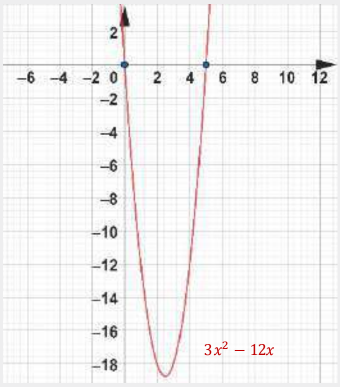
Completa: se expresa como $ax^2+bx+c=0$ o $x^2+bx+c=0$ donde los factores a, b y c son distintos de cero. Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversos metodos, los cuales iremos estudiando por casos.

Dato

La ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos soluciones no necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas o conjugadas).

Ceros de una función

Sabías que al resolver una ecuación cuadrática se están encontrando los ceros de la función cuadrática.



Si $3x^2-15x=0$ *factorizando* x *de* $3x(x-5)=0$, *entonces:*

$x_1=0$ y $x_2-5=0$

$x_1=0$ y $x_2=5$

Donde 0 *y* 5 *son los "ceros" de la función cuadrática.*

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado $ax^2+c=0$:

1) $5x^2-20=0$

2) $4x^2-64=0$

3) $3x^2-15=0$

4) $7x^2-28=0$

5) $10x^2-1000=0$

6) $3x^2-4=0$

Encontramos la solución de las ecuaciones $ax^2+bx=0$:

1) $5x^2+5x=0$

2) $8x^2-24x=0$

3) $3x^2+x=0$

4) $x^2-4x=0$

5) $x^2-20x=0$

6) $2x^2+4x=0$

Dato importante

Ecuación completa general:

$ax^2+bx+c=0;\ a,b,c\neq 0$

Ecuación completa particular:

$ax^2+bx+c=0;\ a=1,\ b,c\neq 0$

a) Completando cuadrados

Procedimiento:

- Se divide la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ entre "a" para lograr que el coeficiente de x^2 sea 1. En caso de ser necesario.
- Se transpone el término independiente al segundo miembro.
- Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x", a fin de convertir este miembro a un trinomio cuadrado perfecto.
- Se factoriza el primer miembro.
- Se aplica la propiedad de la raíz cuadrada.
- Se despeja la variable y se hallan las raíces o soluciones de la ecuación.

Ejemplos:

Resolver las ecuaciones dadas, completando cuadrados:

1) $x^2+2x-15=0 \Longrightarrow x^2+2x=15$

$$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2=15+\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$x^2+2x+1=15+1$$

$$(x+1)^2=16$$

$$x+1=\pm\sqrt{16}$$

$$x=\begin{cases}4-1\\-4-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-5\end{cases}$$

2) $5x^2+14x-3=0 \quad //(\div 5)$

$$x^2+\frac{14}{5}x-\frac{3}{5}=0 \Longrightarrow x^2+\frac{14}{5}x=\frac{3}{5}$$

$$x^2+\frac{15}{4}x+\left(\frac{\frac{14}{5}}{2}\right)^2=\frac{3}{5}+\left(\frac{\frac{14}{5}}{2}\right)^2$$

$$x^2+\frac{15}{4}x+\left(\frac{14}{10}\right)^2=\frac{3}{5}+\left(\frac{14}{10}\right)^2$$

$$x^2+\frac{15}{4}x+\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{3}{5}+\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{3}{5}+\frac{49}{25}\Longrightarrow x+\frac{7}{5}=\pm\sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$x=\begin{cases}\frac{8}{5}-\frac{7}{5}\\-\frac{8}{5}-\frac{7}{5}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{5}\\x_2=-3\end{cases}$$

b) Factorización

Luego de transformar una ecuación a su forma general, (igualada a cero) es posible tomar el trinomio y factorizarlo o escribirlo como el producto de sus factores, a continuación, se iguala cada factor a cero y se resuelve la nueva ecuación.

Ejemplo:

1) La ecuación $x^2+6x+9=0$ es un caso de un trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$$x^2+6x+9=0 \Longrightarrow (x+3)^2=0 \Longrightarrow x+3=0 \Longrightarrow x=3$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $x^2+4x+3=0$

2) $2x^2+5x-1=0$

3) $2x^2-3x-4=0$

4) $5x^2+5x+1=0$

5) $7x^2+7x+1=0$

6) $2x^2-8x-24=0$

7) $2x^2-5x+1=0$

8) $3x^2-6x+2=0$

9) $2x^2+5x-3=0$

10) $3x^2-12x+12=0$

2) $x^2-10x+25=36$, en este caso factorizar el primer miembro, es decir:

$$x^2-10x+25=3 \Longrightarrow (x+5)^2=36$$

$$x+5=\pm\sqrt{36} \Longrightarrow x+5=\pm 6 \Longrightarrow x=\begin{cases} x_1=6-5 \\ x_2=-6-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-11 \end{cases}$$

3) $6x^2-x-2=0$, factorizando se tendrá:

$$6x^2-x-2=0 \Longrightarrow (3x-2)(2x+1)=0$$

$$\begin{array}{lr} 3x & -2=-4x \\ 2x & +1=+3x \\ \hline & -x \end{array}$$

$$3x-2=0 \;\vee\; 2x+1=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3} \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4) $2x^2-8x+7=0$, aquí convertiremos el 1º y 3 º término en cuadrados:

$$2\cdot(2x^2-8x+7)=0\cdot 2 \qquad //\cdot(2)$$

$$4x^2-16x+14+2=2 \qquad //+2$$

$$4x^2-16x+16=2 \Longrightarrow (2x-4)^2=2 \Longrightarrow 2x-4=\pm\sqrt{2}$$

$$2x=\begin{cases} 4-\sqrt{2} \\ 4+\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2} \\ x_2=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

c) Fórmula general

Para una ecuación cuadrática con coeficientes reales o complejos existen siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas conjugadas).

Fórmula general para la obtención de raíces:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dato importante

Para encontrar las soluciones igualamos a cero cada factor y se despeja para la variable. Igualamos a cero ya que sabemos que, si un producto es igual a cero, uno de sus multiplicandos, o ambos, es igual a cero.

Curiosidad

Sea la ecuación:

$$x^2+6x+8=0$$

En este caso no resulta un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2+6x+8+1=1$$

sumando $+1$ en ambos miembros, se tendrá:

$$x^2+6x+9=1$$

$$(x+3)^2=1 \Longrightarrow x+3=\pm\sqrt{1}$$

$$x=\begin{cases} 1-3 \\ -1-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-4 \end{cases}$$

Para tomar en cuenta

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos echos se utilizara el punto decimal como separador. Ejemplo:

3.14; 0.71; -0.5; ....

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas, por factorización:

1) $x^2+6x+8=0$

2) $x^2+7x+120=0$

3) $x^2+27x+180=0$

4) $x^2-54x-84=0$

5) $x^2-14x+48=0$

6) $x^2-16x+63=0$

7) $x^2+30x+221=0$

8) $x^2-11x-84=0$

9) $x^2-15x+44=0$

10) $x^2-x-56=0$

11) $x^2-4x-63=0$

12) $x^2-4x-45=0$

Demostración de la fórmula general

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Así:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas por fórmula general:

1. $6x^2+7x-3=0$

Sea $a=6, b=7$ y $c=-3$ tenemos $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ reemplazando:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4\cdot(6)\cdot(-3)}}{2\cdot 6}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{2\cdot 6}=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{2\cdot 6}=\frac{-7\pm 11}{2\cdot 6}$$

Así la solución es:

$$x_1=\frac{-7+11}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x_2=\frac{-7-11}{12}=\frac{-18}{12}=-\frac{3}{2}$$

2. $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}=0$

Los coeficientes deben ser enteros:

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}=0 \qquad // \; m.c.m.(30)$$

$15x^2-12x-40=0$ donde $a=15$, $b=-12$ y $c=-40$ al reemplazar a la fórmula general:

$$=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 15\cdot(-40)}}{2\cdot 15}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{2544}}{30}=\frac{12\pm 4\sqrt{159}}{30}=\frac{2\left(6\pm 2\sqrt{159}\right)}{30}$$

Así la solución es:

$$x_1=\frac{6+2\sqrt{159}}{15} \quad \text{o} \quad x_2=\frac{6-2\sqrt{159}}{15}$$

d) Po – Shen Loh

Existe un nuevo método para resolver ecuaciones de segundo grado de forma rápida, siempre que el coeficiente de la variable al cuadrado sea uno, es decir de la forma $x^2+bx+c=0$. Este método se difundió a finales del año 2019 por Po-Shen Loh un profesor de Matemática en la Universidad Carnegie Mellon y entrenador nacional del equipo de la Olimpiada Internacional de Matemática en EEUU.

Utilizando la fórmula $p^2-u^2=c$ donde $p=-\frac{b}{2}, u=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$ y para hallar la solución final se tiene que $x=p\pm u$.

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas, usando la fórmula general:

1) $16x^2-24x-19=0$

2) $49x^2-28x+13=0$

3) $4x^2+8x+3=0$

4) $x^2+6x-16=0$

5) $5x^2-2x-16=0$

6) $x^2-10x+23=0$

7) $45x^2+22x-3=0$

8) $36x^2-12x+2=0$

9) $\frac{6x}{5}-\frac{7}{x}=\frac{61}{20}$

10) $x^2-2(5x-7)=0$

11) $x^2-7x-30=0$

Ejemplo:

Resolvemos:

1) $3x^2+14x-5=0$

$$3x^2+14x-5=0 \qquad // \cdot\frac{1}{3}$$

Donde:

$$x^2+\frac{14}{3}x-\frac{5}{3} \Longrightarrow b=\frac{14}{3}, \qquad c=-\frac{5}{3}$$

Determinamos p:

$$p=-\frac{b}{2}=-\frac{\frac{14}{3}}{2}=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$$

Hallar u:

$$p^2-u^2=c \rightarrow \left(-\frac{7}{3}\right)^2-u^2=-\frac{5}{3} \rightarrow \left(-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{5}{3}=u^2 \rightarrow u=\pm\sqrt{\frac{64}{9}}=\pm\frac{8}{3}$$

Las soluciones son:

$$x=p\pm u=\begin{cases} x_1=-\frac{7}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{15}{3}=-5 \\ x_2=-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

2) $x^2-14x+24=0$

Si:

$$b=-14, c=24 \rightarrow p=-\frac{b}{2}=-\frac{(-14)}{2}=7$$

Como $p^2-u^2=c$ se tendrá:

$$(-7)^2-u^2=24 \rightarrow 49-24=u^2 \rightarrow u=\sqrt{25}=5$$

Las soluciones serán:

$$x=p\pm u=\begin{cases} x_1=7-5=2 \\ x_2=7+5=12 \end{cases}$$

Pasos

Paso 1: *Reconocemos "b" y "c"*

Paso 2: *Determinar $p=-\frac{b}{2}$*

Paso 3: *Hallamos "u" reemplazando en $p^2-u^2=c$ con los valores "p" y "c"*

Paso 4: *Hallamos la solución final en $x=p\pm u$*

Discriminante

Si $\Delta>0$, el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas (la parábola cruza dos veces el eje de las abscisas "x"):

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta=0$, el discriminante es cero, las dos soluciones anteriores coinciden, teniendo la ecuación una única solución y en este caso es una solución doble (la parábola sólo toca en un punto al eje de las abscisas: x):

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

3. Análisis de la discriminante

En la fórmula de la ecuación cuadrática, la expresión dentro de la raíz cuadrada recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática. Suele representarse con la letra D o bien con el símbolo Δ (delta):

$$\Delta=b^2-4ac$$

Si $\Delta>0$. Si el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas (la parábola cruza dos veces el eje de las abscisas x):

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas por Po–Shenloh:

1) $x^2+3x-10=0$

2) $x^2+6x+8=0$

3) $x^2-16x+63=0$

4) $x^2+10x-56=0$

5) $x^2-13x-48=0$

6) $x^2-7x-30=0$

7) $x^2+4x-5=0$

8) $x^2-10x+21=0$

9) $4x^2+8x+3=0$

10) $x^2+6x-16=0$

11) $5x^2-2x-16=0$

Discriminante

Si $\Delta<0$, el discriminante es negativo, la ecuación de segundo grado no tiene solución real, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe, hay dos soluciones complejas conjugadas (la parábola no corta al eje de las abscisas x):

$$\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

donde i es la unidad imaginaria.

$$\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)a}=\sqrt{(-1)}\sqrt{a}=i\sqrt{a}$$

$$i^1=i$$

$$i^2=-1$$

$$i^3=-i$$

$$i^4=1$$

Ejemplo

$$x^2+4=0 \Longrightarrow x^2=-4$$

$$x=\pm\sqrt{-4} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=2i \\ x_2=-2i \end{cases}$$

Así la ecuación es:

$$(x+2i)(x-2i)=0$$

Ejemplos:

Sin resolver las ecuaciones, determinar cuántas soluciones tienen.

1) $5x^2-4x-2=0 \Longrightarrow \Delta=b^2-4ac \Longrightarrow \Delta=(-4)^2-4\cdot5\cdot(-2)=96>0$
Como la determinante es mayor que cero, la ecuación tiene dos soluciones reales.

2) $x^2-8x+16=0 \Longrightarrow \Delta=b^2-4ac \Longrightarrow \Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot16=0$
Como la determinante es igual a cero, la ecuación tiene dos soluciones reales.

3) $3x^2+5x+6=0 \Longrightarrow \Delta=b^2-4ac \Longrightarrow \Delta=(5)^2-4\cdot3\cdot6=-47<0$
Como la determinante es menor a cero, la ecuación no tiene soluciones reales.

4. Soluciones imaginarias, propiedades y operaciones

Si $\Delta<0$ entonces las dos raíces son complejas y además una es el conjugado de la otra. Es decir, si una solución es $x_1=a+bi$, entonces la otra solución es $x_2=a-bi$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$x^2-3x+7=0 \Longrightarrow a=1, b=-3$, y $c=7$ entonces:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-28}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-19}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{19i}}{2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3+\sqrt{19i}}{2} \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{19i}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \left(x_1=\frac{3+\sqrt{19i}}{2}\right)\left(x_2=\frac{3-\sqrt{19i}}{2}\right)=0$$

Así la ecuación es: $\left(x_1=\dfrac{3+\sqrt{19i}}{2}\right)\left(x_2=\dfrac{3-\sqrt{19i}}{2}\right)=0$

5. Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Suma de raíces y el producto de raíces está dado por: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ y $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

$$x^2-(x_1+x_2)b+x_1\cdot x_2=0 \Longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0$$

Ejemplo:

Formar la ecuación cuyas raíces son: $x_1=3; x_2=-5$

Suma de raíces: $x_1+x_2=3+(-5)=-2$

Producto de raíces: $x_1\cdot x_2=(3)\cdot(-5)=-15$

Así la ecuación está dada por: $x^2+2x-15=0$

Actividad

Determinamos las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

1) $x_1=4$, $x_2=-2$

2) $x_1=-2$, $x_2=-4$

3) $x_1=7$, $x_2=-1$

4) $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=-5$

5) $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$

6) $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=\dfrac{2}{3}$

7) $x_1=4$, $x_2=\dfrac{5}{2}$

8) $x_1=n$, $x_2=m$

6. Aplicaciones

Muchas situaciones, tanto en matemática como en otros ámbitos, pueden modelarse y resolverse utilizando ecuaciones cuadráticas con una incógnita, pero a pesar de la heterogeneidad del problema, todas pueden resolverse si se tienen en cuenta algunas consideraciones comunes.

Ayuda

Para resolver un problema de ecuaciones de segundo grado debemos considerar:

¿Qué se pide?

¿Qué datos se tienen?

¿Qué se debe hacer para resolver el problema?

¿Son pertinentes los resultados?

Problema:

Calcula el área de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 3 cm se cuadriplica su área.

$$4(\pi r^2) = \pi(r+3)^2 \Longrightarrow 4\pi r^2 = \pi(r^2+6r+9) \Longrightarrow 4r^2 = r^2+6r+9$$

$$\Longrightarrow 3r^2 - 6r - 9 = 0 \Longrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \Longrightarrow a = 1;\ \ b = -2;\ \ c = -3$$

Así se tendrá:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} r_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ r_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Longrightarrow r = 3$$

Reemplazando el radio se tiene: $A = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- El área de un rectángulo es 400 cm². Calcular las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es 80 metros.
- Un rectángulo tiene de diagonal 23 cm y de altura 13 cm, averiguar la base y el área.
- Un triángulo isósceles tiene de base 10 cm y de altura 14 cm, averiguar el perímetro.
- Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 cm respectivamente. Averiguar el lado, el perímetro y el área.
- Hallar dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.
- Calcular el radio de un círculo sabiendo que, si aumentamos el radio en 6 cm, el área se hace nueve veces más grande.

VALORACIÓN

Las ecuaciones cuadráticas son importantes porque son una herramienta matemática fundamental que se pueden utilizar para resolver una amplia gama de problemas de la vida real. En la escuela, las ecuaciones cuadráticas se enseñan como parte del álgebra, sin embargo, su importancia va más allá del aula. Las ecuaciones cuadráticas se utilizan en una variedad de campos, como la física, la ingeniería, las finanzas y la economía.

En ingeniería, las ecuaciones cuadráticas se utilizan para diseñar estructuras como puentes, edificios y máquinas. Por ejemplo, la ecuación para calcular la fuerza necesaria para sostener un puente es una ecuación cuadrática.

- ¿Cómo se emplea el concepto de función cuadrática en la construcción de los arcos triunfales?
- ¿Cómo calculamos y diseñamos un arco triunfal para nuestro hogar?

Fuente: Open AI, 2024

PRODUCCIÓN

- Elaboramos un informe sobre las aplicaciones de la función cuadrática en la construcción de puentes.
- Investigamos sobre el diseño y construcción de arcos del triunfo.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y SU APLICACIÓN

PRÁCTICA

Juan y Oscar son los encargados del área de deportes en su curso y en uno de los entrenamientos observan que el balón describe dos trayectorias particulares, visualmente los pases directos son líneas rectas y los lanzamientos de tiro libre describen parábolas.

Fuente: Open AI,2024

La trayectoria de la pelota en el aire se puede modelar mediante una parábola descrita por una ecuación cuadrática. Por ejemplo, si la pelota se patea con una velocidad inicial de 100 km/h a un ángulo de 45 grados, la ecuación cuadrática que describe su trayectoria es:

$$y=-4{,}9x^2+50x$$

Donde:

- "y" es la altura de la pelota, en metros.
- "x" es la distancia horizontal desde el punto que se patea la pelota, en metros.

Esta ecuación se puede utilizar para predecir dónde caerá la pelota.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas y realizamos la actividad:

- ¿Qué conceptos matemáticos se aplican en la práctica de futbol?
- ¿Qué trayectoria describe el balón en un tiro libre?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos de ecuaciones cuadráticas?
- Construimos el sistema con una ecuación lineal y ecuación cuadrática que describe la intersección de las trayectorias.

TEORÍA

Resolución de sistemas de ecuaciones

Para resolver un sistema de educaciones utilizamos cualquiera de los siguientes métodos:

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Método de reducción

Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.

1. Sistemas de ecuaciones de segundo grado

Es el conjunto de ecuaciones que verifican simultáneamente para los mismos valores de sus incógnitas:

Solución de un sistema, conjunto de valores de todas sus incógnitas que al ser sustituido en las ecuaciones originales las convierten en identidades.
Sistemas equivalentes, son aquellos que a pesar de tener ecuaciones diferentes aceptan las mismas soluciones.

Clasificación de los sistemas

De acuerdo a sus soluciones, los sistemas de ecuaciones pueden ser:

Sistema compatible, cuando existe solución.
Sistema incompatible, cuando no existe solución, atendiendo el número de ecuaciones con el número de incógnitas.
Sistema determinado, cuando el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas.
Sistema indeterminado, cuando el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas, estos sistemas se caracterizan por tener infinidad de soluciones.
Sistema sobre determinado, cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas.

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas o variables no lineales, son aquellos en los cuales una o ambas de las ecuaciones que forman el sistema es una ecuación no lineal, es decir, cuando las incógnitas que forman parte de la ecuación no son de primer grado.

Así, por ejemplo:

1) $5x-3=2$ es una ecuación de una variable lineal.
2) $x^2-6=0$ es una ecuación de una variable no lineal.
3) $3x-2y=4$ es una ecuación de dos variables lineal.
4) $x^2+y^2=9$ es una ecuación de dos variables no lineal cuadrática.

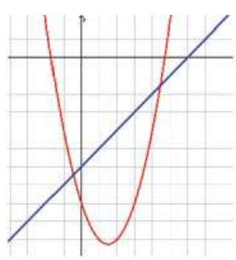
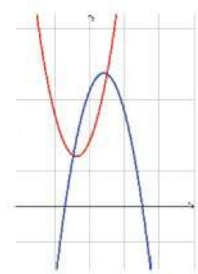
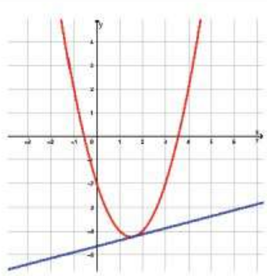
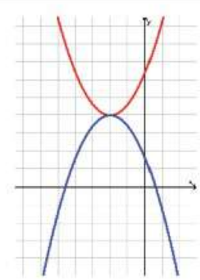
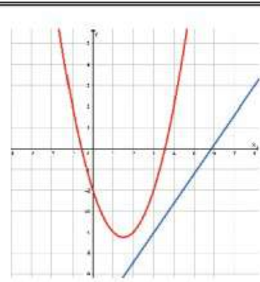
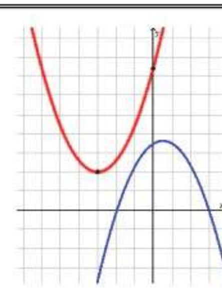
Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas son mixtos cuando son no lineales. La solución de dicho sistema es el conjunto de pares ordenados (x, y).
Gráficamente quedan representados por una recta y una parábola, o bien, por dos parábolas.
Existen distintos métodos de resolución analítica y también se pueden resolver de forma gráfica. Dentro de los métodos analíticos vamos a trabajar con los llamados métodos de igualación y sustitución.
En los casos en que el sistema esté formado al menos por una ecuación de segundo grado, luego de haber aplicado algún método analítico para su resolución, nos quedará una ecuación cuadrática y podremos reconocer cuántas soluciones obtendremos, se tiene el mismo analizando el discriminante de la ecuación cuadrática, que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución. Analicemos lo dicho anteriormente, pero desde el enfoque gráfico.

Tipos de soluciones

Teniendo en cuenta la gráfica se puede deducir que existen tres tipos de soluciones en los sistemas del cuadro.

- *Una solución, la recta y la parábola se cortan en un solo punto.*
- *Dos soluciones, la recita y la parábola se cortan en dos puntos.*
- *Sin solución, la recta y la parábola no se intersecan.*

Para resolver analíticamente este tipo de sistema, se utilizan los métodos ya conocidos, eligiendo el más conveniente. Debes tener en cuenta que una de las ecuaciones es de segundo grado o ambas.

	Sistema formado por una recta y una parábola. $\begin{cases} y = mx + b \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$	Sistema formado por dos parábolas. $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$
$\Delta > 0$ Dos puntos de intersección.		
$\Delta = 0$ Un punto de intersección.		
$\Delta < 0$ Ningún punto de intersección.		

Método de Po - Shen Loh

Paso 1: *Reconocemos "b" y "c"*

Paso 2: *Hallamos* $p=-\dfrac{b}{2}$

Paso 3: *Hallamos "u" reemplazando en $p^2-u^2=c$ con los valores "p" y "c"*

Paso 4: *Hallamos la solución final $x=p\pm u$*

Ejemplos:

Resolvemos los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=68 & (1) \\ x+y=10 & (2) \end{cases}$

Utilizamos el método de sustitución despejando "x" en la ecuación (2)

$$x=10-y \qquad (3)$$

Reemplazando la ecuación (3) en (1)

$$x^2+y^2=68 \rightarrow (10-y)^2+y^2=68 \Rightarrow 100-20y+y^2+y^2=68$$

$$2y^2-20y+32=0 \quad //\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y^2-10y+16=0$$

Por el método de Po-Shen Loh se tendrá: $b=-10, c=16 \Rightarrow p=-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{(-10)}{2}=5$

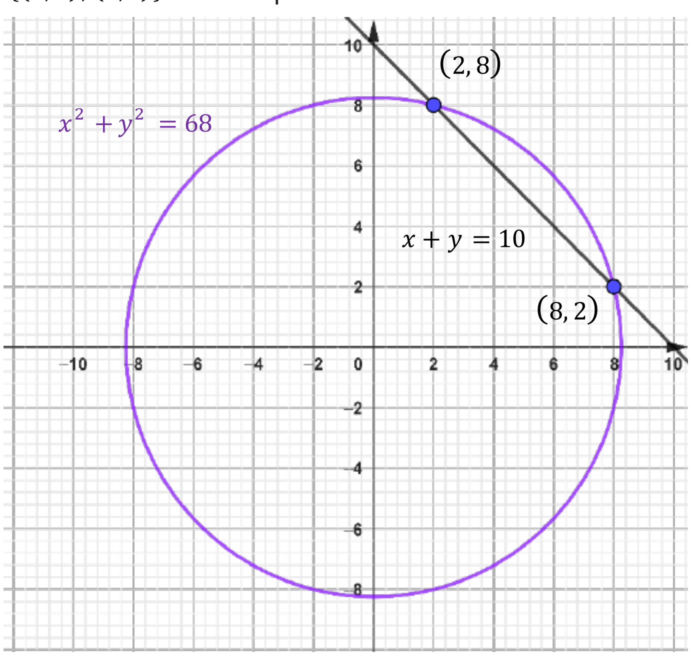
Si: $p^2-u^2=c \Rightarrow (5)^2-u^2=16 \Rightarrow 25-16=u^2 \Rightarrow u^2=9 \Rightarrow u=\pm\sqrt{9}=\pm3$

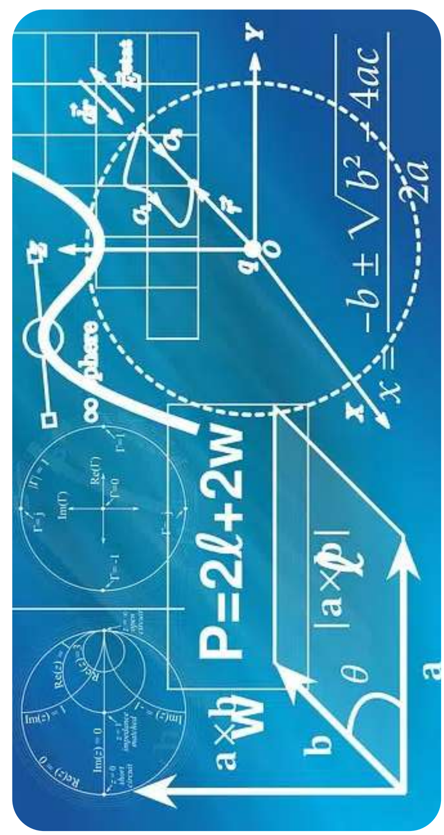
Las soluciones serán: $y=p\pm u=\begin{cases} y_1=5-3 \\ y_2=5+3 \end{cases}$

Así reemplazando en ecuación (3): $x=10-y=\begin{cases} x_1=10-2=8 \\ x_2=10-8=2 \end{cases}$

Comprobando en el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=68 \\ x+y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8^2+2^2=68 \\ 8+2=10 \end{cases}$

Así $C_s=\{(8,2);(2,8)\}$ son dos puntos de intersección.





Fuente: https://definicion.de/funcion-matematica/

Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+2xy=-1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-xy=12 \\ xy-y^2=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=27 \\ x-y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 & (1) \\ 3x - y = 11 & (2) \end{cases}$

Utilizamos el método de igualación:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 & (1) \\ 3x - y = 11 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 & (1) \\ y = 3x - 11 & (2) \end{cases}$$

Igualando ecuación (1) y (2) se tendrá:

$$x^2 - 4x + 1 = 3x - 11$$
$$x^2 - 4x - 3x + 1 + 11 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Por el método de Po - Shen Loh:

$$b = -7, c = 12 \Rightarrow p = -\frac{b}{2} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$$

Si:

$$p^2 - u^2 = c \Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 - u^2 = 12 \Rightarrow \frac{49}{2} - 12 = u^2$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

La solución es:

$$x = p \pm u = \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4 \end{cases}$$

Reemplazando u_1, u_2 en ecuación (2):

$$y = 3x - 11 \Rightarrow y = \begin{cases} y_1 = 3(3) - 11 = -2 \\ y_2 = 3(4) - 11 = 1 \end{cases}$$

Comprobando los resultados:

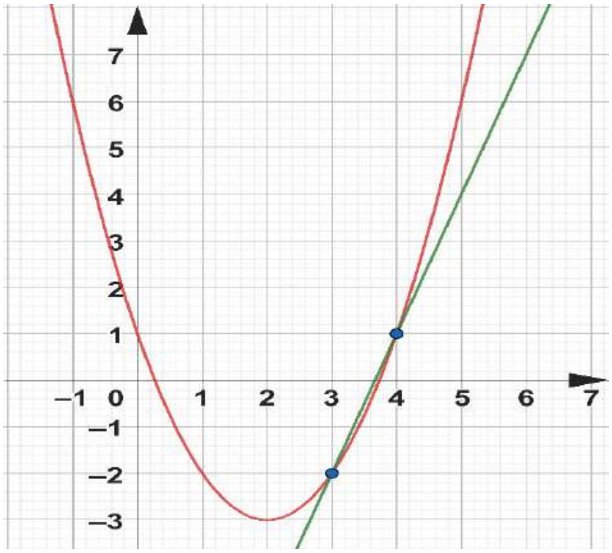
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 3^2 - 4(3) + 1 \\ 3(3) - (-2) = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = 9 - 12 + 1 = -2 \\ 9 + 2 = 11 \end{cases}$$

Así: $C_s = \{(3, -2); (4, 1)\}$

Método de Po - Shen Loh

Su método se basa en la idea de completar el cuadrado, pero lo hace de una manera más visual y lógica. En lugar de memorizar la fórmula cuadrática, su método permite a los estudiantes comprender el proceso detrás de la fórmula, haciendo que el aprendizaje sea más accesible y comprensible. Este enfoque destaca cómo la matemática puede ser enseñada y entendida de maneras diferentes, rompiendo con los métodos tradicionales y demostrando que las soluciones pueden ser más simples y elegantes de lo que parecen.



Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x = 2 - y \\ 2x - 7 = -y \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x + y) \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x^2 + 3y = 10 \\ x - 4y = -13 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2. Comparación de una función cuadrática con una ecuación cuadrática

a) Función cuadrática

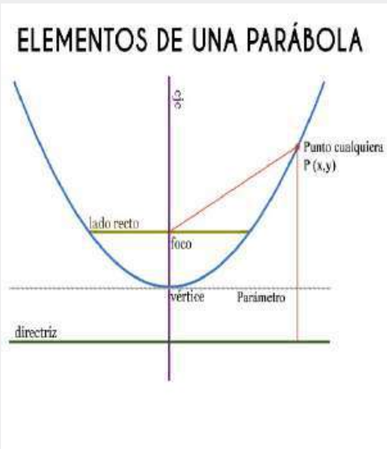
Una función cuadrática es aquella función de la forma $y=ax^2+bx+c$, donde "a", "b" y "c" son números reales cualquiera, pero "a" debe ser diferente de cero y donde "x" e "y" son las variables de dicha función. Las funciones cuadráticas también reciben el nombre de funciones de segundo grado.

Para poder construir la gráfica de una función cuadrática debemos hacer lo siguiente:
1ro: Saber cuál es el vértice (punto más alto o más bajo de la gráfica) de la parábola.

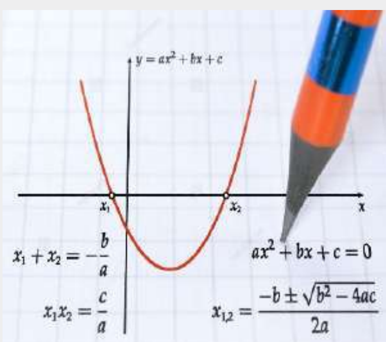
2do: Construir una tabla de valores.

3ro: Graficar el punto correspondiente al vértice y los puntos obtenidos en la tabla de valores

4to: Unir los puntos graficados en el numeral anterior.



Fuente: https://www.lifeder.com/elementos-parabola/



Fuente: https://depositphotos.com/mx/photo/graph-of-parabola-315760462.html

Elementos de una parábola

Vértice, es el punto más alto o más bajo de la parábola, cuando la parábola abre hacia arriba decimos que en el vértice hay un mínimo y cuando la parábola abre hacia abajo decimos que en el vértice hay un máximo.

Eje de simetría, es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, su ecuación será de la forma $x=n$, donde n es el valor de x correspondiente al vértice.

Dominio, es el conjunto de todos los números reales.

Rango, es un conjunto de números que depende de la abertura de la parábola.

- Si la parábola abre hacia arriba el rango será el intervalo (m,∞)
- Si la parábola abre hacia abajo el rango será el intervalo $(-\infty,m)$

Nota: "m" es el valor correspondiente a "y" en el punto del vértice.

Puntos de corte, los puntos de corte con los ejes serán aquellos valores donde la gráfica corte dichos ejes.

b) Ecuación cuadrática

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde "a", "b" y "c" $\in \mathbb{R}$ y, $a\neq 0$ se denomina ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado.
Dependiendo del valor de las constantes "b" y "c", las ecuaciones cuadráticas se clasifican en incompletas y completas.
La solución de una ecuación cuadrática, consiste en encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Gráficamente, la solución representa los cortes con el eje "x", si los hay, de la parábola, es decir los puntos de corte o intercepto.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

- Ecuación de la forma $ax^2=0$ — En este caso, al despejar la variable x, la única solución es $x=0$. Es decir, la ecuación tiene una única solución y es real.
- Ecuación de la forma $ax^2+bx=0$ — En este caso, debemos factorizar la variable x, (factor común) e igualar a cero cada uno de los factores determinados.
- Ecuación de la forma $ax^2+c=0$ — Debemos despejar la variable x, y sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. Se obtienen dos soluciones diferentes y dependiendo del tipo de raíz, las soluciones pueden ser complejas.

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema:

En una librería hay una liquidación de estuches geométricos. El dueño determinó una función de oferta dada por $O(x)=x^2-9x+470$ y la función demanda $D(x)=500-2x$, para saber la cantidad de estuches geométricos que debe liquidar, donde "x" es el precio en bolivianos, de un estuche geométrico. Si O y D representan el número de estuches ofrecidos y demandados respectivamente, determinar el precio que debe pedir por cada estuche, para que la cantidad de estuches ofrecidos y demandados sea la misma, es decir: $O(x)=D(x)$
Si $O(x)=D(x)$ se tendrá:

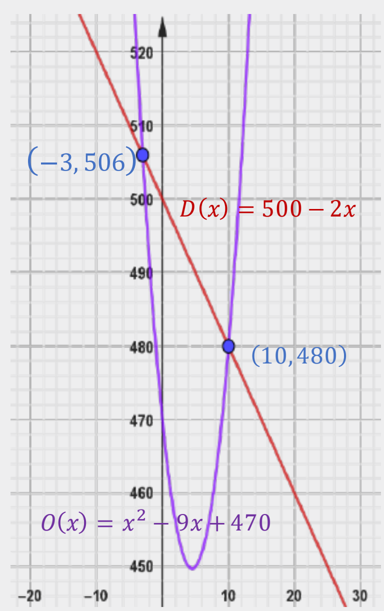
$$x^2-9x+470=500-2x \Rightarrow x^2-7x+30 \Rightarrow a=1;\ \ b=-7;\ \ c=30$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-30)}}{2(1)}=\frac{7\pm 13}{2}$$

Analizando para ambos casos se tiene:

$$x=\frac{7\pm 13}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{7+13}{2}=10 \\ x_2=\dfrac{7-13}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow x=10$$

El precio de cada estuche geométrico será de 10Bs, para tener la misma cantidad de estuches ofrecidos y demandados.



¿Por qué es importante encontrar la intersección entre estas funciones?
Porque se puede encontrar un valor de "x" en el dominio, para el cual su imagen es la misma en ambas funciones.

Actividad

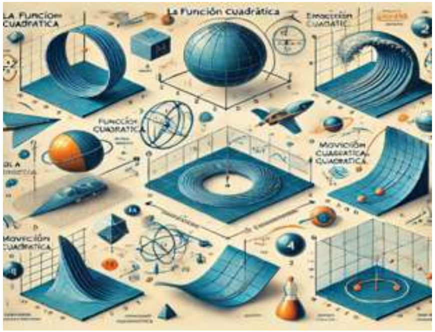
Realizamos las siguientes actividades:
Se intenta establecer el precio de los tickets para un concierto, si el precio es demasiado bajo, no tendrá suficiente dinero para cubrir los gastos de presentación, si el precio es demasiado alto, no habrá suficiente gente que vaya al concierto. Ellos estiman que pueden aproximar sus ganancias totales por el concierto, mediante la formula $I=x^2+24x-44$ donde $0\le x\le 24$ además "x" es el precio del ticket.

1) Trace una gráfica de la ganancia y el costo del boleto.
2) Determinar el costo mínimo de un ticket para que la función no gane, ni pierda dinero.
3) Determinar el costo máximo del ticket que puede cobrar y que no obtenga ganancias ni perdidas.
4) ¿Cuánto deben cobrar por ticket para obtener la ganancia mínima?

VALORACIÓN

Modelar el movimiento de objetos, como el de un proyectil, trayectoria de un balón o el movimiento de un fluido, son ejemplos de la aplicación de la función cuadrática y la ecuación cuadrática.

- ¿Cuál es nuestra opinión sobre las aplicaciones de la función cuadrática?



Fuente: Open AI,2024

PRODUCCIÓN

- Realizamos un informe aplicando la modelización matemática.
- Investigamos sobre el diseño y construcción de elementos de la vida cotidiana donde exista intersección de rectas y parábolas.

DESIGUALDADES E INECUACIONES

PRÁCTICA

Néstor está lanzando su emprendimiento de helados de zanahoria, para lo cual decide fabricar una cantidad suficiente para abastecer a toda la comunidad, tomando en cuenta sus Ingresos "I" y sus costos "C", todo está en bolivianos y se tiene las siguientes ecuaciones:

$$I=20x, \quad C=2000+15x$$

Aplicando el concepto de:

Ganancia = Ingresos – Costos

Para determinar qué cantidad de helados debe elaborar para ponerlos a la venta y obtener una ganancia, desde Bs2400.

La ganancia desde Bs2400 significa que:

$$\text{Ganancia} \geq 2400 \implies \text{Ingresos} - \text{Costos} \geq 2400$$

Fuente: Open AI,2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué cantidad de helados debe preparar Néstor para conseguir la ganancia que se ha propuesto?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos con inecuaciones lineales como la del ejemplo?
- ¿Para qué otros emprendimientos podemos utilizar los conocimientos de inecuaciones?
- ¿Cómo puedes ayudar a tu familia construyendo un modelo matemático para realizar tu emprendimiento y así predecir las ganancias que te propones?

TEORÍA

Dato previo

Una desigualdad es una expresión matemática que contiene un signo de una desigualdad, los signos son:

$\neq$: no es igual que
$<$: menor que
$>$: mayor que
$\leq$: menor o igual que
$\geq$: mayor o igual que

Ejemplos:

$3<5$: *"Tres es menor que cinco"*

$2\leq 4$: *"Dos es menor o igual que cuatro"*

$5\geq 1$: *"Cinco es mayor o igual que uno"*

*En particular las desigualdades que representan los símbolos $<$ o $>$ se llaman **desigualdades estrictas** y las que presentan $\leq$ o $\geq$ **desigualdades no estrictas**.*

1. Desigualdad e inecuación

a) Desigualdad

Es una relación que establece una comparación entre dos cantidades que no son iguales, con un signo de desigualdad.

Sea "a" y "b" dos números reales cuales quiera, al compararlos, puede suceder alguna de las siguiente situaciones:

- $a<b$ que significa: "a es menor que b"
- $a\leq b$ que significa: "a es menor o igual que b"
- $a>b$ que significa: "a es mayor que b"
- $a\geq b$ que significa: "a es mayor o igual que b"
- $a=b$ que significa: "a es igual a b"

El campo de los números reales posee la propiedad del buen orden, es decir que tiene lugar la **ley de la tricotomía** de los números reales. Entonces, para todo par de números (a, b) tiene lugar una y sola una de las tres relaciones que son:

$$a>b, \quad a<b, \quad a=b$$

Propiedad de tricotomía:

Si "a" y "b" son dos números reales cuales quiera, entonces una y solamente una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a>b, \quad a<b, \quad a=b$$

Donde $a>b$ significa por definición que $a-b$ es positivo, mientras que $a<b$ significa que $a-b$ es negativo, es decir:

$$\begin{cases} a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \end{cases}$$

b) Inecuación

Las inecuaciones son desigualdades entre dos expresiones algebraicas, su solución es el conjunto de números que satisfacen la desigualdad al ser reemplazadas en la desigualdad original, esta solución se llama "conjunto solución".

Ejemplo:

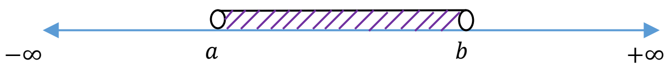
$5x-1\geq 4$ si $x\in[1,+\infty)$
$3x<x-8$ si $x\in(-\infty,4)$

2. Intervalo real y representación gráfica de los intervalos

Son subconjuntos de los números reales, que gráficamente son segmentos de recta o semirrecta y sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

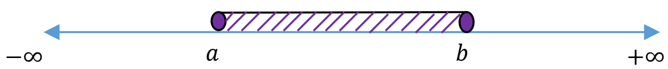
a) Abierto en ambos extremos

Representación por comprensión: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /a<x<b\}$
Representación gráfica:



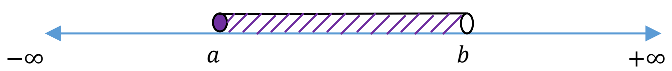
b) Cerrado en ambos extremos

Representación por comprensión: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /a\leq x\leq b\}$
Representación gráfica:



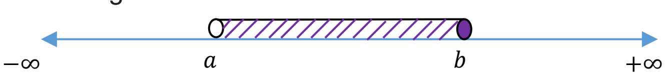
c) Semiabierto por la derecha

Representación por comprensión: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /a\leq x<b\}$
Representación gráfica:



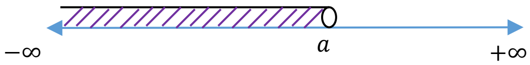
d) Semiabierto por la izquierda

Representación por comprensión: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /a<x\leq b\}$
Representación gráfica:



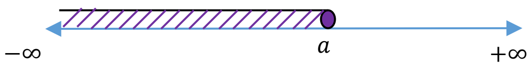
e) Abierto por la derecha que se extiende hacia la izquierda

Representación por comprensión: $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\ /x<a\}$
Representación gráfica:



f) Cerrado por la derecha que se extiende hacia la izquierda

Representación por comprensión: $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\ /x\leq a\}$
Representación gráfica:



Desigualdad

Una inecuación lineal o de primer grado en una variable "x" es una desigualdad de la forma:

$$ax+b>0;\ \ ax+b<0$$

$$ax+b\geq 0;\ \ ax+b\leq 0$$

Donde:

"x" es la variable

"a" y "b" son valores constantes

Fuente: Open AI, 2024

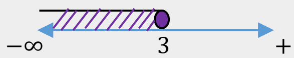
Notación

La notación ∞, que se lee infinito no es un número real, sino un símbolo que se utiliza para indicar que a partir de un número "x" hay números tan grandes como se quiera, por la derecha $(+\infty)$ o por izquierda $(-\infty)$.

$$(-\infty,+\infty)=\{x/x\in\mathbb{R}\}$$

Ejemplo:

$$3x-2<7$$
$$3x<7+2=9$$
$$x<3$$



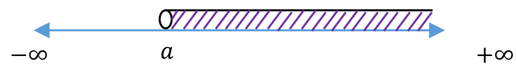
Solución

Las soluciones de una inecuación se pueden expresar de la siguiente manera.
Conjunto solución:

$$S = \{ x \,/\, x > a\}$$

g) Abierto por la izquierda que se extiende hacia la derecha

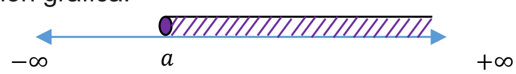
Representación por comprensión: $(a, +\infty)=\{x\in\mathbb{R} \,/x>a\}$
Representación gráfica:



h) Cerrado por la izquierda que se extiende hacia la derecha

Representación por comprensión: $[a, +\infty)=\{x\in\mathbb{R} \,/x\geq a\}$

Representación gráfica:



i) Cerrado

Analizando una propiedad

Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro por miembro, resulta una desigualdad del mismo signo.
Si $a > b$ y $c>d$ se tiene:

$$\begin{array}{c} a > b \\ \underline{c > d} \\ a + c > b + d \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a > b \\ \underline{c > d} \\ a \cdot c > b \cdot d \end{array}$$

Ejemplo:

En $10>8$ y $5>2$, sumando miembro por miembro:

$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ \underline{5 > 2} \\ 10 + 5 > 8 + 2 \\ 15 > 10 \end{array}$$

Propiedad		Ejemplo	
El sentido de una desigualdad no cambia, si a cada miembro se suma o resta una misma cantidad.	Si $a>b$	$a+c>b+c$	$7>2$ //+5 $7+5>2+5$
		$a-c>b-c$	$4>-1$ //−2 $4-2>-1-2$
El sentido de una desigualdad no cambia, si se multiplica o se divide cada miembro por una misma cantidad positiva.	Si $a>b$	$a\cdot c>b\cdot c$ con $a>0$	$8>3$ //·(2) $8\cdot 2>3\cdot 2$
		$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ con $a>0$	$4>-1$ //÷ (5) $\frac{4}{5}>-\frac{1}{5}$
El sentido de una desigualdad se altera, si se multiplica o divide cada miembro por una misma cantidad negativa.	Si $a>b$	$a\cdot c<b\cdot c$ con $a<0$	$9>5$ //·(−3) $9\cdot(-3)<5\cdot(-3)$
		$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ con $a<0$	$6>-2$ //÷ (−4) $-\frac{6}{4}<\frac{2}{4}$
Si $a>0$, $b>0$ y $a>b$.	Si $a^2>b^2$	Si $a<0$, $b<0$ y $a>b$	Si $a^2<b^2$

Actividad

Colocamos el signo de desigualdad para cada caso:

1) $-5-4+8 \,\square\, -1-2+4$

2) $-8+\frac{2}{3} \,\square\, -\frac{1}{3}+4$

3) $-5(-1+2) \,\square\, -4-(2+2)$

4) $\frac{3}{5}-\frac{1}{4} \,\square\, \frac{2}{5}-\frac{4}{7}$

5) $-\frac{1+4}{3}-3 \,\square\, 7+\frac{4}{2}$

6) $\frac{5-\frac{1}{3}}{2} \,\square\, \frac{\frac{4}{3}-2}{5}$

3. Inecuaciones lineales con una variable

Son aquellas desigualdades de primer grado, cuyo coeficiente de la variable puede ser un número entero, fraccionario o un decimal.

Si la inecuación involucra a expresiones lineales, es recomendable aplicar métodos de despeje para encontrar la desigualdad y, en consecuencia, la solución.

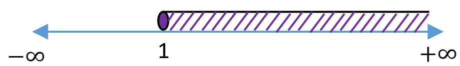
a) Inecuación entera

Ejemplo:

1° forma: Resolver $3+6x>8+x$, despejando la variable.

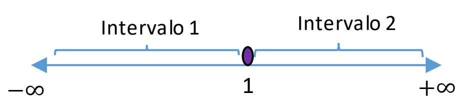
$$3+6x>8+x \Longrightarrow 6x-x>8-3$$
$$\Longrightarrow 5x>5 \Longrightarrow x>1$$

Interpretación gráfica:

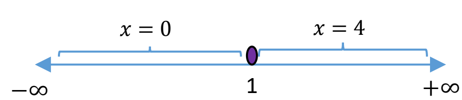


$$C_s = [1,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\}$$

2° forma: Resolver la misma inecuación por puntos críticos, encontrar el punto crítico para ello se resuelve la ecuación:
Se sabe: $3+6x>8+x \Longrightarrow x>1$



Verificamos para cada intervalo tomando un valor al azar, así verificamos para que intervalo se cumple la inecuación



Si $x = 0$ en $3 + 6x > 8 + x$:
$$3 + 6(0) > 8 + 0 \Longrightarrow 3 > 8$$
Falso

Si $x = 4$ en $3 + 6x > 8 + x$:
$$3 + 6(4) > 8 + 4 \Longrightarrow 27 > 12$$
Verdadero

b) Inecuación racional

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{x}{2x+1} - \dfrac{3}{2x+1} < 2$.

Agrupar la inecuación y factorizar:

$$\frac{x}{2x+1} - \frac{3}{2x+1} < 2 \Longrightarrow \frac{x-3}{2x+1} < 2 \Longrightarrow \frac{x-3}{2x+1} - 2 < 0 \Longrightarrow \frac{x-3-2(2x+1)}{2x+1} < 0 \Longrightarrow \frac{x-3-4x-2}{2x+1} < 0 \Longrightarrow \frac{-3x-5}{2x+1} < 0$$

Los puntos críticos son: $-3x-5$ y $2x+1$

Conjunto solución

Está formado por los valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad.

Resolver la inecuación implica encontrar sus soluciones. En la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

***1ro:** Quitar los paréntesis, si los hay.*

***2do:** Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.*

***3ro:** Pasar los términos en “ x” a un miembro (normalmente al primero) y los números al otro.*

***4to:** Reducir términos semejantes.*

***5to:** Despejar la variable “ x”*

***6to:** Graficar y verificar el resultado.*

Existen métodos para resolver una inecuación, algunos son:

- Despeje
- Factorizar
- Puntos críticos
- Estudio de signos

Los pasos pueden variar para cada método, pero el conjunto solución siempre será el mismo.

Actividad

Resolvemos las siguientes inecuaciones:

1) $2x - 6 > 7$
2) $(x-3) + 4 \geq 5 - 2x$
3) $2(y-6) < 5(3-5y)$
4) $1.4x + 2.2 < 2.6x - 0.2$
5) $15.3 > 3(a - 1.4)$
6) $\dfrac{3y-6}{2} > \dfrac{2y+5}{6}$
7) $\dfrac{3(x-2)}{5} > \dfrac{5(2-x)}{3}$

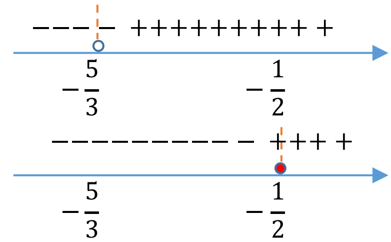
Evaluando:

$-3x-5=0 \Rightarrow -3x=5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$ (punto crítico) $2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (punto crítico)

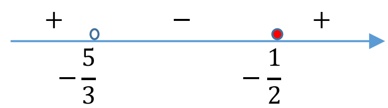
Atención

En una ecuación racional no se eliminan los denominadores pues se pierden intervalos.

Fuente: Open AI,2024



Intersectando las gráficas se tendrá el conjunto solución:



Así: $C_s=\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

c) Inecuación con doble desigualdad

Atención

En una ecuación racional, no se debe despejar o eliminar el denominador sin tener certeza de su valor.

Para estar seguros de haber encontrado el C_s se puede verificar tomando un valor de los intervalos encontrados y reemplazarlos en la inecuación original, para ver su valor de verdad.

Ejemplo:

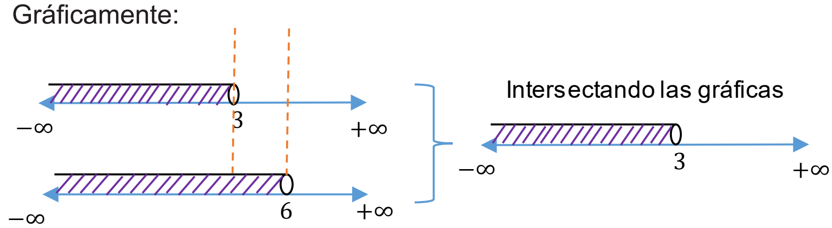
Resolver: $2+2x<x-1<5$

$2+2x<x-1<5 \Rightarrow 2+2x<x-1 \quad \wedge \quad x-1<5$

$\Rightarrow 2x-x<-1-2 \quad \wedge \quad x<5+1$

$\Rightarrow x<-3 \quad \wedge \quad x<6$

Gráficamente:



Así el conjunto solución es: $C_s=(-\infty,-3)=\{x\in\mathbb{R}: x<-3\}$

Ejemplo:

Resolver: $3\leq 2x\text{-}1<7$

Otra manera de encontrar el conjunto solución:

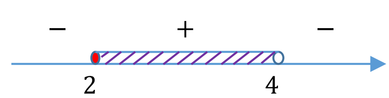
$3\leq 2x-1<7 \Rightarrow 3\leq 2x-1<7 \quad //+1$

$\Rightarrow 4\leq 2x<8 \qquad //\div(2)$

$\Rightarrow \frac{4}{2}\leq\frac{2}{2}x<\frac{8}{2}$

$\Rightarrow 2\leq x<4$

Así el conjunto solución es: $C_s=[2,4)=\{x\in\mathbb{R}: 2\leq x<4\}$



Prueba

Si $x=3\in[2,4)$ entonces:

$3\leq 2x-1<7 \Rightarrow 3\leq 2(3)-1<7$

$\Rightarrow 3\leq 5<7$

(Verdadero)

Actividad

Determinamos el C_s de las inecuaciones:

1) $1.2(2t-3)\leq 2.3(t-1)$
2) $5<2x+7<13$
3) $1\leq\frac{1-3x}{4}\leq 4$
4) $3x+7>5-2x\geq 13-6x$
5) $\frac{2}{x+2}\geq\frac{1}{x-1}$
6) $\frac{2}{x+2}\geq\frac{1}{x-1}$
7) $\frac{x-2}{x+4}<\frac{x+1}{x+2}$
8) $\frac{x+4}{x+5}-\frac{x+2}{x+3}\geq\frac{1}{24}$
9) $\frac{x}{x-3}-\frac{x-2}{x+1}\leq\frac{6}{x-1}$

4. Inecuaciones con valor absoluto

Son aquellas en las que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

Sea $x, a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ entonces:

$$|x| \leq a \Longrightarrow x \leq a \quad \vee \quad x \geq -a \Longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \Longrightarrow x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a$$

Ejemplo:

Resolver la inecuación: $|5x+10| \leq 15$
Aplicando la definición:

$$|5x + 10| \leq 15 \Longrightarrow -15 \leq 5x + 10 \leq 15 \quad //-10$$

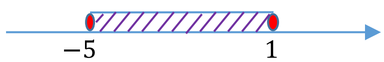
$$\Longrightarrow \; -15 - 10 \leq 5x + 10 - 10 \leq 15 - 10$$

$$\Longrightarrow \; -25 \leq 5x \leq 5 \quad // \cdot \frac{1}{5} \Longrightarrow -\frac{25}{5} \leq \frac{5}{5}x \leq \frac{5}{5}$$

$$\Longrightarrow \; -5 \leq x \leq 1$$

$$C_s = [-5, 1] = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 1\}$$

Interpretación gráfica:



Tomar nota

$|P(x)| > a;\; |P(x)| \geq a$

$|P(x)| < a;\; |P(x)| \leq a$

Donde $P(x)$: es un polinomio lineal y $a \in \mathbb{R}$.

Las inecuaciones con valor absoluto se presentan de forma variada. En este apartado se resolverán inecuaciones del tipo:

$$|ax + b| \leq c \Longrightarrow \begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq c \end{cases}$$

$$\Longrightarrow -c \leq ax+b \leq c$$

Actividad

Determinamos el C_s de las inecuaciones:

1) $|x + 2| > 5$

2) $|3x + 2| > 10$

3) $|3 + 2x| \leq 5$

4) $\left|\frac{x}{x - 1}\right| \leq 2$

5) $\left|\frac{3}{5} + 2x\right| \leq \frac{2}{5}$

6) $\left|3 + \frac{2}{5}x\right| > 2$

7) $\left|\frac{5x - 1}{4}\right| \leq 10$

VALORACIÓN

Las inecuaciones lineales se pueden utilizar para establecer límites en las variables de un problema. Por ejemplo, si sabemos que el costo de un producto no puede ser superior a Bs1000, podemos establecer la inecuación $\mathrm{C} < 100$, donde C es el costo del producto.

Fuente: Open AI,2024

Edwin, en la materia de matemática, obtuvo como puntaje trimestral la nota de 60, el segundo trimestre descuidó sus estudios y reprobó con una nota de 39 puntos.

La preocupación de Edwin es que debe aprobar el año y para eso quiere calcular la nota que debe poder sacar para que pueda aprobar la materia en esta gestión. Podemos calcular esto a través de inecuaciones, pues sabemos que el promedio de las notas de los tres trimestres determina la calificación anual que indicará si Edwin ha aprobado o no. Por lo tanto, podemos expresarlo así:

$$\frac{(60 + 39 + x)}{3} \geq 51$$

PRODUCCIÓN

Reflexionamos con las compañeras y compañeros sobre la importancia de saber resolver inecuaciones:

- Investigamos acerca de las aplicaciones de las inecuaciones en el comercio.
- Realizamos un mapa mental con los conceptos vistos del tema.

INECUACIONES CUADRÁTICAS Y SISTEMA DE INECUACIONES

PRÁCTICA

Julia y María están preparando queques de zanahoria para su presentación en la feria gastronómica de su unidad educativa, utilizan una receta que requiere harina y otros ingredientes para hacer un queque de zanahoria. Representan la cantidad de harina con $a>2$, para la mantequilla con $m>\frac{1}{4}$, el huevo $h\geq 4$.

Así tienen los ingredientes, que indican las cantidades de ingredientes que deben ser mayores o iguales que sus cantidades mínimas.

Fuente: Open AI,2024

Actividad

Respondemos y analizamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué conceptos están aplicando para realizar la receta de su queque?
- ¿En qué otras áreas se utilizan los conceptos de desigualdades?
- Además de la elaboración de pasteles y galletas, ¿dónde emplearíamos estos saberes y conocimientos?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos que ayuden en las recetas del área de gastronomía?

TEORÍA

Discrimante

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y de la discriminante:

$$\Delta=b\text{^}2-4ac$$

- *Si $\Delta>0$, $(a>0)$, el polinomio a^2+bx+c, se puede factorizar en los números reales.*
- Si $\Delta=0$, $(a>0)$, el polinomio a^2+bx+c, se transforma a un trinomio cuadrado perfecto.
- Si $\Delta<0$, $(a>0)$, el polinomio a^2+bx+c, se transforma en cuadrado más un cuarto número real positivo.

1. Inecuaciones cuadráticas y de grado superior

Es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen una sola incógnita y cuyo mayor exponente es dos (2). Resolver una inecuación cuadrática en una variable que significa encontrar el conjunto de números reales (intervalo) que satisface la desigualdad. Para ello, recurrimos a las propiedades básicas de las desigualdades.

Las inecuaciones cuadráticas pueden escribirse de una de las siguientes formas:

$$ax^2+bx+c>0;\ ax^2+bx+c<;\ ax^2+bx+c=0$$

Resolver una desigualdad cuadrática, es hallar el conjunto de los valores reales de las incógnitas que la verifican, o satisfagan, es decir, los valores que hacen que se cumpla la desigualdad. Para esto se debe dejar en el lado derecho de la desigualdad, el valor de 0, si es que no está; después de esto se debe factorizar la expresión del lado izquierdo (si no se puede factorizar directamente, se puede utilizar la fórmula general).

Pasos para resolver:

1ro Ordenamos buscando darle la forma: $ax^2+bx+c>0$.

2do Factorizamos la expresión, haciendo uso de cualquiera de los métodos conocidos.

3ro Obtenemos los puntos críticos, igualando cada factor a cero y despejando la incógnita.

4to Graficamos los puntos críticos sobre la recta numérica.

5to Evaluamos el signo de cada factor en la gráfica, tomando un valor de prueba de cada intervalo.

6to El signo resultante, se obtiene por ley de signo de la multiplicación.

Ejemplos:

Resolvemos las inecuaciones:

1) $x^2-7x>-10$

$$x^2-7x>-10x^2 \implies x^2-7x+10>0$$

Donde:

$$a=1,\ b=-7,\ c=10 \implies \Delta=b^2-4ac \implies \Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=9$$

Factorizando:

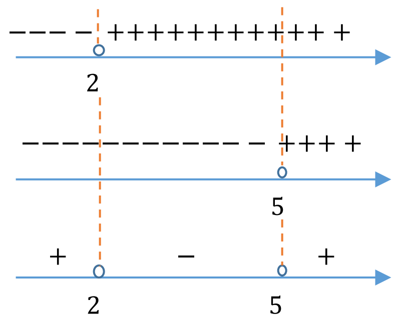
$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

$$\begin{array}{ccl} x & & -5=-5x \\ x & & -2=-2x \\ \hline & & -7x \end{array}$$

Los puntos críticos son: $\begin{cases} x-5=0 \\ x-2=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$

Situándolos en la recta real:

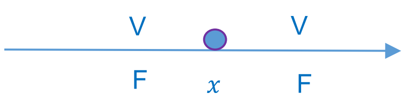
Intersectando gráficas:



Los intervalos que cumplen con la desigualdad son:

$$C_s=(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$$

Nota: es de multiplicidad par, si es de la forma: $(x\pm a)^{2n}$ donde $n\in\mathbb{N}$. Recordemos que si la raíz es de multiplicidad par, entonces los valores de verdad de los intervalos adyacentes son iguales, es decir:



$\forall x\in\mathbb{R}$. En resumen, los valores de verdad no se intercalan ya sea V, V o F, F.

2) $x^2-18x+81>0$

Donde:

$$a=1,\ b=-18,\ c=81 \implies \Delta=b^2-4ac \implies \Delta=(-18)^2-4\cdot(1)\cdot(81)=0$$

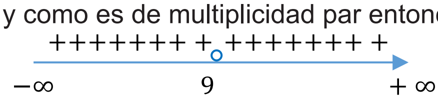
Factorizando:

$$x^2-18x+81=(x-9)(x-9)=(x-9)^2$$

Los puntos críticos son:

$$(x-9)^2=0 \implies x-9=0 \implies x=9$$

Situándolos en la recta real y como es de multiplicidad par entonces:



$$\implies C_s=\mathbb{R}-\{9\}$$

Signos del conjunto solución

La solución dependerá del signo inicial de la inecuación:

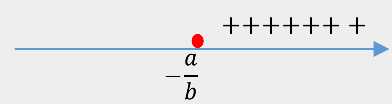
Si $ax^2+bx+c\le0$ el conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (−).

Si $ax^2+bx+c\ge0$ el conjunto solución estará por el intervalo donde aparece el signo (+).

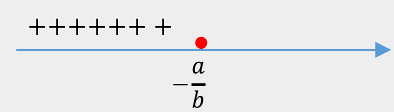
Signos de un factor.

En factor $ax+b$:

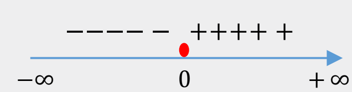
Si $a>0$ entonces:



Si $a<0$ entonces:



Recta real



Actividad

Resolvemos las inecuaciones:

1) $x^2<x+2$

2) $2x^2+3x\le2$

3) $x^2+3x\ge-2$

4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x-2}{x+1}>1$

5) $(x-1)(x+4)\ge2(x+3)+2$

6) $4x+\frac{3}{2x}\le5$

7) $(x-2)^2-1\le2(x-1)$

Ejemplo

Resolver $x^2-8x+25\geq 0$, *donde* $a=1$, $b=-8$, $c=25$ *entonces:*

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-8)^2-4(1)(25)=-36<0$$

Si $\Delta<0$ *entonces no tendrá puntos críticos, pero la expresión cuadrática siempre es positiva (Teorema Fundamental del Algebra) es decir:*

$$x^2-8x+25=x^2-8x+16+9$$
$$=(x-4)^2+9>0$$

Por tanto, el conjunto solución de:

$$x^2-8x+25\geq 0$$

es todos los reales.

$$C_s=\mathbb{R}$$

3) $\sqrt{x^2+27}\geq 6$

Como $\sqrt{x^2+27}\geq 6>0$ entonces:

$$\sqrt{x^2+27}\geq 6 \qquad //(\ \ )^2 \Longrightarrow \left(\sqrt{x^2+27}\right)^2\geq 6^2$$

$$\Longrightarrow x^2+27\geq 36 \Longrightarrow x^2-9\geq 0$$

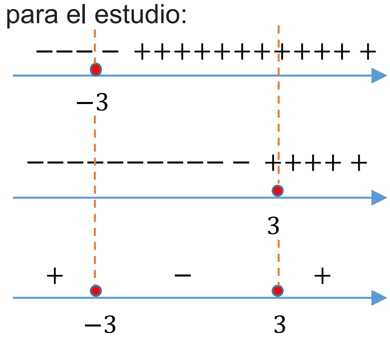
Factorizando:

$$x^2-3^2\geq 0 \Longrightarrow (x-3)(x+3)\geq 0$$

Los puntos críticos son: $\begin{cases} x-3=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

Situarlos en la recta real para el estudio:

Intersectando gráficas:



Los intervalos que cumplen con la desigualdad son:

$$C_s=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$

a) Inecuaciones de grado superior

Resolvemos inecuaciones de grado superior, es hallar el conjunto de los valores reales de las incógnitas que la verifican, o satisfagan, es decir, los valores que hacen que se cumpla la desigualdad.

Ejemplos:

Resolvemos la desigualdad:

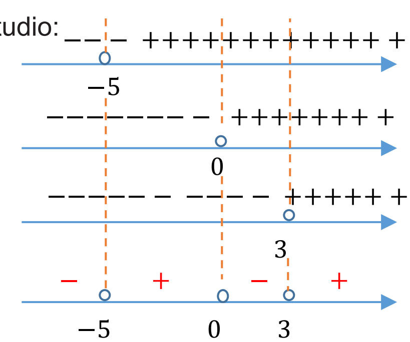
1) $x^3+2x^2>15x$

Factorizando:

$$x^3+2x^2>15x \Longrightarrow x^3+2x^2-15x>0$$
$$\Longrightarrow x(x^2+2x-15)>0 \Longrightarrow x(x+5)(x-3)>0$$

Los puntos críticos son: $\begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \\ x_3=3 \end{cases}$

Situarlos en la recta real para el estudio:



$\Longrightarrow C_s=(-5,0)\cup(3,+\infty)$

Actividad

Resolvemos las inecuaciones:

1) $x^3-10+17x-8x^2>0$

2) $x^3-3x^2+2x\geq 0$

3) $x^4-10x^3+29x^2-8x-48>0$

4) $x^5-8x^4+6x^3<-68x^2+127x-60$

5) $x^3-x^2-x-2>0$

6) $x^3-3x+2\leq 0$

b) Inecuaciones con variable en el denominador

Son aquellas en las que tanto el numerador como el denominador son inecuaciones polinómicas cuadráticas o polinómicas de grado mayor a 2.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0$$

Factorizando:

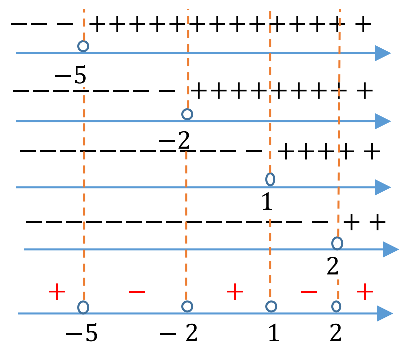
$$\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0 \Rightarrow \frac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}<0$$

Los puntos críticos son:

Númerador $\begin{cases} x+5=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=2 \end{cases}$

Denominador $\begin{cases} x+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-2 \\ x_4=1 \end{cases}$

Situarlos en la recta real para el estudio:



Así los intervalos que cumplen la desigualdad son:

$$C_s=(-5,2)\cup(1,2)$$

Nota importante

Las inecuaciones con variable en el denominador pueden tener expresiones lineales, cuadráticos o de grado superior, pero de manera general para resolverlas se siguen los pasos expuestos.

Fuente: Open AI,2024

2. Inecuaciones lineales de dos variables

Se tiene conocimiento de que una ecuación con dos variables es una recta en el plano cartesiano, al cambiar la igualdad por una desigualdad se forma una inecuación lineal de dos variables.

$$ax+by>c;\ ax+by<c;\ ax+by\geq c;\ ax+by\leq c$$

Las inecuaciones de este tipo se resuelven así:

1ro Se traza la ecuación lineal $ax+by=c$. Esta define una frontera entre dos superficies o semiplanos en que divide al plano cartesiano.

2do El conjunto solución de la inecuación de dos variables es uno de esos semiplanos y se determina seleccionando un punto de cada semiplano y se reemplaza en la desigualdad para ver si la cumple o no.

3ro Se debe verificar que la frontera sea parte o no del conjunto solución de la inecuación de dos variables. Esto se hace viendo la desigualdad: si la desigualdad es < o >, la frontera no es solución de la inecuación, pero si la desigualdad es ≥ o ≤, la frontera si forma parte del conjunto solución.

4to La solución de la inecuación de dos variables debe ser interpretada geométricamente.

Actividad

Encontramos el conjunto solución de las inecuaciones:

1) $\frac{x}{x-3}<4$

2) $\frac{3x+1}{x-2}<1$

3) $\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}\leq 1$

4) $\frac{1}{1-x}\leq\frac{3}{1-x^3}$

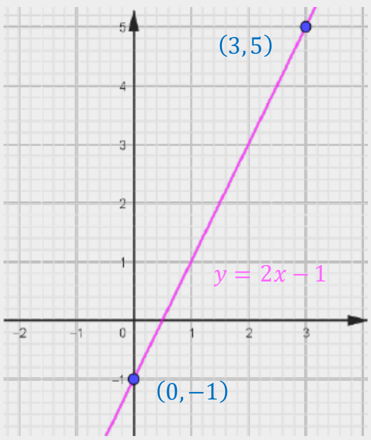
5) $\frac{x-2}{x-4}\leq\frac{x+1}{x+2}$

6) $\frac{2x-3}{x-3}>\frac{x}{x+1}$

Graficando

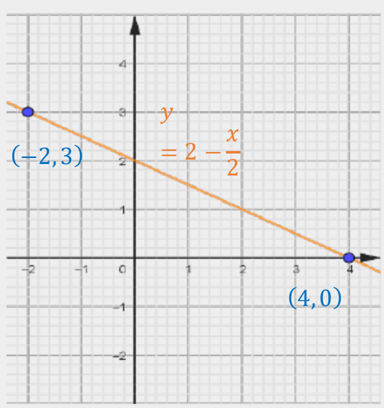
La inecuación: $y=2x-1$

x	$2x-1$	y	(x,y)
0	$2\cdot0-1$	-1	$(0,-1)$
3	$2\cdot3-1$	5	$(3,5)$



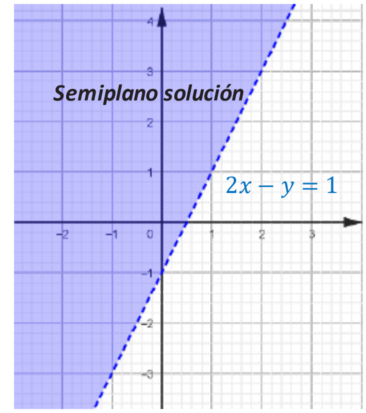
La inecuación: $y=2-\frac{x}{2}$

x	$y=2-\frac{x}{2}$	y	(x,y)
-2	$2-\frac{-2}{2}$	3	(-2, 3)
4	$2-\frac{3}{2}$	0	(4, 0)



Ejemplos:

1) $2x-y<1$



Despejar la variable "y"

$$2x-y<1 \Longrightarrow 2x-1<y$$

Representamos $y=2x-1$

Para ver qué lado del semiplano es la solución, tomemos un punto y veamos su valor de verdad. Sea el punto $(3,\ 1)$ reemplacemos en la inecuación.

Sea $x=3$ y $y=1$ entonces:

$$2x-y<1 \Longrightarrow 2\cdot3-1<1 \Longrightarrow 5<1$$

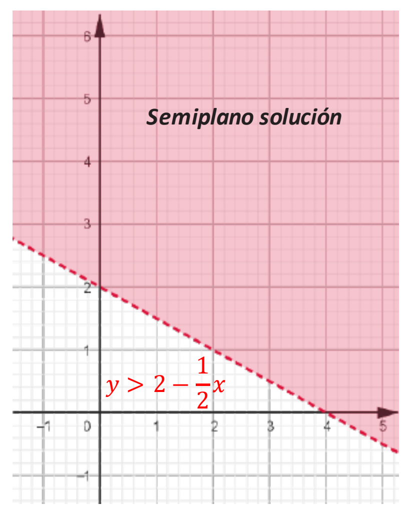
Lo que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el semiplano superior y la frontera no forma parte de la solución.

$$C_s=\{(x,y)/\ y>2x+1\}$$

2) $2x+4y>8$

Despejar la variable "y"

$$2x+4y>8 \Longrightarrow 4y>8-2x$$
$$\Longrightarrow y>2-\frac{1}{2}x$$



Representando: $y=2-\frac{1}{2}x$

Para ver qué lado del semiplano es la solución, tomemos un punto y veamos su valor de verdad. Sea el punto $(0,\ 0)$ reemplacemos en la inecuación.

$$2x+4y>8 \Longrightarrow 2\cdot0+4\cdot0>8$$
$$\Longrightarrow 0>8$$

Lo que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el semiplano superior y la frontera no forma parte de la solución.

$$C_s=\left\{(x,y)/\ y=2-\frac{1}{2}x\right\}$$

Actividad

Determinamos el conjunto solución de la inecuación:

1) $2x+y\geq 1$

2) $3x-2y\leq -2$

3) $5x-y>0$

4) $x+4y-1<0$

5) $5x-1\geq y$

6) $2x+1\leq y$

7) $6x-2y>0$

8) $\frac{1}{2}x+y>\frac{1}{4}$

9) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}y\leq\frac{1}{2}$

3. Sistema de inecuaciones

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y>c_1 \\ a_2x+b_2y>c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y<c_1 \\ a_2x+b_2y<c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y\geq c_1 \\ a_2x+b_2y\geq c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y\leq c_1 \\ a_2x+b_2y\leq c_2 \end{cases}$$

Un punto (x_0, y_0) es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones.

El conjunto de soluciones viene dado por la región del plano común a las regiones solución de cada una de las inecuaciones. Por tanto, se debe resolver cada inecuación del sistema por separado y a continuación hallar la región del plano común a todas esas inecuaciones (buscamos las zonas de intersección de ambos, o los puntos del plano que cumplen ambas desigualdades simultáneamente).

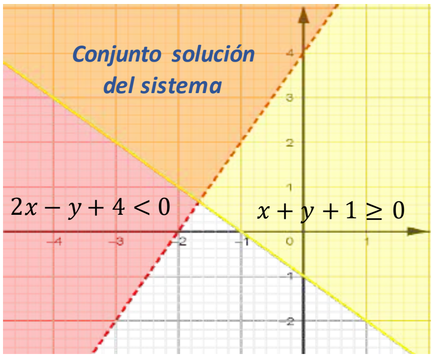
Ejemplo:

Resolvemos, gráficamente, el sistema de desigualdades lineales.

1) $\begin{cases} 2x-y+4<0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$

Despejar "y" en cada una de las desigualdades:

$$\begin{cases} 2x-y+4<0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4<y \\ y\geq -x-1 \end{cases}$$



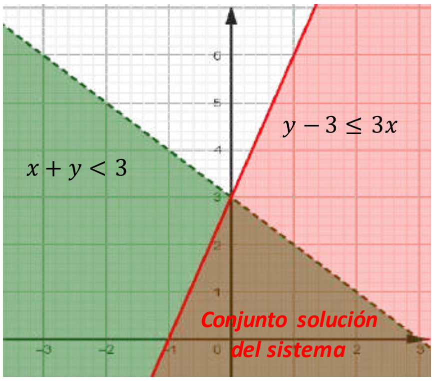
La intersección de las soluciones es el conjunto soluciones del sistema de inecuaciones. Cualquier punto que se encuentre en esta región satisface las condiciones de ambas inecuaciones del sistema.

Verifiquemos para el punto $(-2,2)$, es decir al sustituir $x=-2$, $y=2$ en ambas inecuaciones originales, tendremos una desigualdad verdadera.

2) $\begin{cases} x+y<3 \\ y-3\leq 3x \end{cases}$

Despejar "y" en cada una de las desigualdades:

$$\begin{cases} x+y<3 \\ y-3\leq 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<3-x \\ y\leq 3x+3 \end{cases}$$



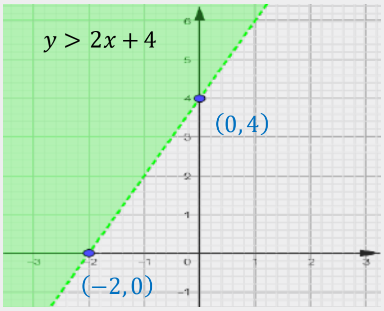
La intersección de las soluciones es el conjunto solución de sistema de inecuaciones. Cualquier punto que se encuentre en esta región satisface las condiciones de ambas inecuaciones del sistema.

Verifiquemos para el punto $(1, 1)$, es decir al sustituir $x=1$, $y=1$ en ambas inecuaciones originales, tendremos una desigualdad verdadera.

Graficando

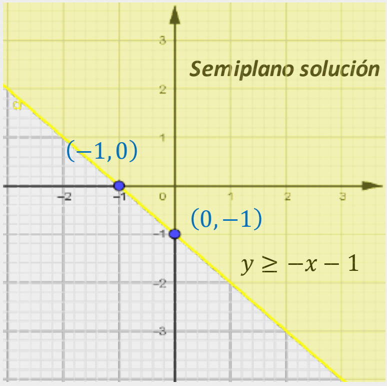
Gráfica de la inecuación: $y>2x+4$

x	$2x+4$	y	(x, y)
0	2·0+4	4	(0, 4)
-2	2·(-2)+4	0	(-2, 0)



Gráfica de la inecuación: $y\geq -x-1$

x	$-x-1$	y	(x, y)
0	-0-1	-1	(0, -1)
-2	-(-1)-1	0	(-1, 0)



Actividad

Resolvemos cada sistema:

1) $\begin{cases} 2x-3y\leq 0 \\ x-2y>1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x-3y\geq -1 \\ x-5y>2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x-6\geq 2 \\ x-4\leq 2 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x-1>y \\ 3x<y-1 \end{cases}$

Graficando

Expresiones que intervienen en el planteo de inecuaciones:

"$>$" Mayor, más, supera, superior, excede, sobrepasa.

"$<$" Menor, menos, no llega, inferior, es excedido, no alcanza.

"$\geq$" Mayor o igual, como mínimo, por lo menos, al menos, no es menor, no menos.

"$\leq$" Menor o igual, como máximo, no supera, no más, no es mayor, cuando mucho.

La tarifa de un taxi es de Bs17.5 por los primeros 8 kilómetros y Bs3.50 por cada kilómetro adicional.

Escribir una desigualdad que pueda utilizarse para determinar la distancia máxima que una persona puede viajar con Bs20.

***Tarifa base:** Bs17.5 por los primeros 8 kilómetros.*

***Tarifa adicional:** Bs3.5 por cada kilómetro que exceda los 8 kilómetros.*

Distancia $x\leq 8$, kilómetros

Distancia $x>8$, kilómetros

Así se puede obtener la desigualdad:

$$17.5+3.5(x-8)\leq 20$$

4. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver inecuaciones, debemos traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, algebraico, se aconseja proceder de la manera similar a la forma de resolver una ecuación y tener en cuenta las propiedades.

Ejemplos:

1) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20: $3x+8<20$.
2) Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo: $\frac{3x}{4}-2>\frac{x}{2}+5$

3) Si mi dinero aumentara al triple y, además, me regalaran Bs20, tendría, por lo menos, Bs110: $3x+20\geq 110$.

Problema:

María tiene 22 años menos que su papá y es menor por 48 años que su abuelo. A partir de cierta edad, la suma de los años que tienen ella y su padre será mayor que la edad de su abuelo, ¿cuál es esa edad?

La edad de María: x
La edad de su padre: $x+22$
La edad de su abuelo: $x+48$
Si la suma de los años que tienen ella y su padre será mayor que la edad de su abuelo, entonces:

$$x+x+22>x+48 \implies 2x+22>x+48 \implies x>26$$

Cuando María sea mayor a 26 años, la suma de su edad con la de su padre superará a la edad de su abuelo.

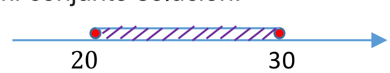
Problema:

Una carnicería se encuentra con grandes reservas de carne de res, que deben vender rápidamente. Julia la dueña sabe que, si la carne se ofrece a "x" bolivianos por kilo, venderá "k" kilos, con $k=1000-20x$, ¿qué precio mínimo deberá fijar con el fin de obtener ingresos de por lo menos Bs$12\,000$?

Sea "x" el precio en bolivianos por kilo y "k" la cantidad en kilos y se sabe que $k=1000-20x$. Si el ingreso debe ser I y $I\geq 12\,000$ se deduces que $I=x\cdot k$, teniendo la inecuación:

$$I\geq 12\,000 \implies x\cdot k\geq 12\,000 \implies x(1000-20x)\geq 12\,000$$
$$\implies 0\geq 20x^2-1000x+12\,000 \implies 0\geq x^2-50x+600$$
$$\implies 0\geq (x-30)(x-20)$$

Haciendo un análisis, determinados por los puntos críticos se tendrá el intervalo que será mi conjunto solución:



Así julia debe fijar el precio mínimo de Bs20 por kilo de carne para obtener por lómenos Bs$12\,000$.

Actividad

Traducimos al lenguaje algebraico:

1) La tercera parte del curso es menor que 20.
2) La mitad de un número menos 10 unidades es mayor que 7.
3) El perímetro de un rectángulo cuya base mide $3\ cm$ y que la altura es menor a 50 m.
4) Hacer cocer el arroz no dura más de 18 minutos.
5) Dos libras de arroz más tres libras de fideo nos costará por lo menos Bs25.
6) ¿Cuál será el largo de cierto terreno de forma rectangular si se sabe que el ancho es de $5\ m$ y su perímetro mide $26\ m$?

Problema:

La suma de un número natural con su sucesor es menor a 33, ¿cuáles son los valores que este número puede adoptar?

Sea "x" el primer número y "$x+1$" el sucesor entonces:

$$x+(x+1)<33 \Longrightarrow 2x+1<33 \Longrightarrow x<16$$

Como "x" es natural, los valores que puede tomar son:

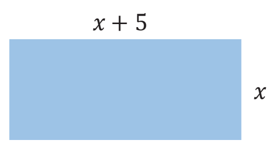
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

Problema:

El área de un terreno rectangular debe ser por lo menos de $250\ m^2$, si el largo del terreno es 5 metros mayor que su ancho, ¿cuál es el valor mínimo que deben tomar las dimensiones del terreno?

Sea A_1 el área del terreno

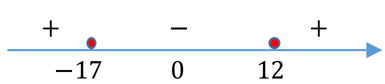
$$A_t = (x+5)x = x^2+5x$$



Debe cumplirse $A_t \geq 204$ entonces:

$$A_t \geq 204 \Longrightarrow x^2+5x \geq 204$$
$$\Longrightarrow x^2+5x-204 \geq 0 \Longrightarrow (x+17)(x-12) \geq 0$$

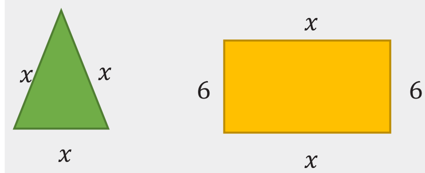
Haciendo un análisis con los puntos críticos respecto a la rectal real, se tendrá:



Se sabe que $x>0$, por tanto de la gráfica se tiene los valores: $x \in [12,+\infty)$
Así el valor mínimo que puede tomar el ancho y largo son 12 y 17 metros respectivamente.

Graficando

Tenemos dos figuras, un triángulo equilátero de lado "x" y un rectángulo de largo "x" y altura 6. Determina para qué valores de "x" el perímetro del rectángulo es superior al del triángulo.



Perímetro del rectángulo:
$$P\square = 2x+12$$

Perímetro del triángulo:
$$P\triangle = 3x$$

Si:
$$P\square > P\triangle \Longrightarrow 2x+12>3x$$
$$\Longrightarrow 12>x$$

Para los valores de "x" menores a 12 el perímetro del rectángulo es superior al perímetro del triángulo.

VALORACIÓN

Las inecuaciones y los sistemas de inecuaciones se pueden utilizar para crear modelos matemáticos de sistemas físicos o situaciones del mundo real, en matemática, las inecuaciones se pueden utilizar para resolver problemas de geometría, álgebra y cálculo.

En economía, las inecuaciones se pueden utilizar para modelar el comportamiento de los mercados o las decisiones de los consumidores, es decir, en un presupuesto que indica el gasto máximo permitido es un caso de una inecuación.

- ¿Cómo se emplea la definición de inecuaciones lineales en la elaboración de un presupuesto familiar?
- ¿Qué operaciones y propiedades se utiliza para generar un modelo matemático que nos ayude a realizar un presupuesto familiar?

Fuente: Open AI,2024

PRODUCCIÓN

- Realizamos una investigación sobre los presupuestos que realizan en una familia para no generar déficit y planificar los gastos familiares.
- Construímos un modelo matemático para observar cómo se realiza la planificación del presupuesto de una familia.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

PRÁCTICA

Clara y Ruth se encuentran en el laboratorio de computación en su , pueden ver que el antivirus en uno de los equipos les indica que el sistema ha sido infectado con un virus computacional, lo que ellas interpretan la situación como una enfermedad.

Los virus, troyanos y otros programas son considerados infecciosos pues alteran el normal funcionamiento del sistema operativo o alguna aplicación del mismo en la computadora, es así que la computadora podría no rendir igual que siempre a menos que limpiemos por completo la memoria hasta eliminar el virus.

El virus que infectó el equipo se caracteriza por hacer 12 copias de sí mismo en un segundo, luego, cada una de esas 12 copias produce otras 12 copias, de esta manera, al cabo de dos segundos ya habrá $12 \cdot 12$ copias del virus. Además, se sabe que el virus ocupa 1 kB (kilobyte) en el disco, ¿en qué tiempo se satura la computadora si su memoria es de $256\,000$ kB?

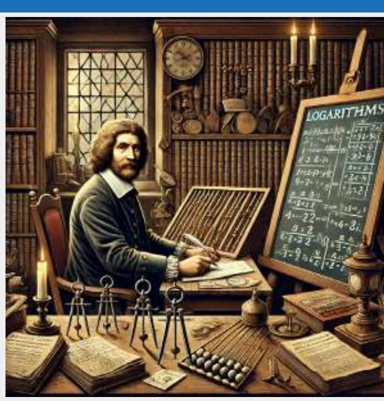
Fuente: Open AI,2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:
- ¿En cuánto tiempo se saturará la memoria de la computadora?
- Elaboramos una tabla donde se observe el incremento del virus con respecto al tiempo transcurrido.
- ¿En qué otras situaciones se pueden observar comportamientos similares?
- ¿Sucedería igual con la gripe?

TEORÍA

Dato



Fuente: Open AI,2024

Los logaritmos se inventaron (a principios del siglo XVII) para simplificar los cálculos matemáticos de multiplicación, división, potenciación y radicación, sobre todo cuando los resultados son números muy grandes y básicamente lo que importa es su orden de magnitud.

1. Logaritmos

Los logaritmos fueron ideados antes que las computadoras actuales y permiten realizar operaciones con números muy grandes o muy pequeños. El logaritmo simplifica el cálculo, siempre y cuando no contemos con una calculadora científica. A medida que se analizaron más y más los logaritmos se fueron ideando muchas propiedades que simplifican aún más el cálculo. Es verdad que muchos de dichos cálculos se pueden hacer actualmente con la ayuda de las computadoras. Pero en algunas ocasiones se encontrarán explicaciones de ciertos temas utilizando logaritmos y no podremos entender, a menos que tengamos una base en el tema.

Por ejemplo, plantear la ecuación $5^x = 333$ o similar. Dar una aproximación de la solución.

En este ejemplo estamos buscando el exponente al que está elevado, número "5", para ello nos vemos obligados a buscar una operación matemática que no conocías $\log_5 x$.

Definición

Sea "a" un número real positivo y no nulo distinto de 1 y "N" otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo del número "N" en la base "a", al número a que debe elevarse la base para obtener el número "N", es decir:

$$\log_a N = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = N$$

Notación logarítmica — Notación exponencial

$$\log_2 16 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$$

Se lee: Logaritmo de 16 en base 2 es 4.

Consecuencias de la definición de logaritmo:

- $\log_a 1 = 0 \Longrightarrow a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \Longrightarrow a^1 = a$
- $\log_b a = c$ no existe si $b < 0$ o $b = 0$
- $\log_b N < 0, 0 < N < 1, b > 1$
- $\log_b N > 0, 0 < N < 1, b > 1$
- $\log_b N > 0 \Leftrightarrow N > 1, b < 1$
- $\log_b N < 0 \Leftrightarrow N > 1, b > 1$

Fuente: https://www.istockphoto.com/es/vector/fondo-de-icono-de-matem%C3%A1ti-cas-gm539025928-96015019

Sistema de logaritmos

Toda expresión de la forma $\log_a N = x$ constituye un sistema de logaritmos según su base.

Por lo tanto, existen infinitos sistemas de logaritmos; pero los más utilizados e importantes son los siguientes:

Sistemas de logaritmos decimales, se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número diez. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} N = \log N$$

Sistemas de logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos, se llaman logaritmos naturales a los logaritmos que tienen por base el número irracional e=2.718281828459....

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Logaritmos decimales

Son logaritmos cuya base es 10 y por estar de acuerdo con nuestro sistema de numeración reciben el nombre de logaritmos comunes, decimales; también son llamados logaritmos vulgares o de Briggs.

Así para las potencias de 10, se tiene:

$$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1 \qquad \log 1 = \log 10^0 = 0$$
$$\log 0.01 = \log 10^{-2} = -2 \qquad \log 10 = \log 10^1 = 1$$
$$\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \qquad \log 100 = \log 10^2 = 2$$
$$\log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4 \qquad \log 1000 = \log 10^3 = 3$$
$$\log 10^{-n} = -n \qquad \log 10^n = n$$

Los logaritmos decimales se pueden escribir como suma de dos números: la característica y la mantisa

$$\log 777 = \overset{\text{Característica}}{2},\underbrace{890\,421\,019}_{\text{Mantisa}}$$

Casos particulares

$$\log_b b = 1$$
$$\log_b b^2 = 2$$
$$\log_b 1 = 0$$
$$\log_b \sqrt{b} = \frac{1}{2}$$
$$\log_b \frac{1}{b} = -1$$
$$\log_{\sqrt{b}} b = 2$$

Comprueba los resultados utilizando la definición de logaritmos.

Datos importantes

Las tablas que tradicionalmente se han utilizado para calcular logaritmos, son tablas de logaritmos decimales.

La característica de un logaritmo decimal es el número entero inmediatamente inferior o igual a dicho logaritmo.

La mantisa de un logaritmo decimal es la diferencia entre el logaritmo y su característica.

Actualmente es suficiente presionar en la calculadora, la tecla log (escrito sin indicar la base se entiende que la base es 10) para obtener el $\log_{10} x$ cuándo $x > 0$.

Actividad

Aplicando la definición de logaritmo, identificamos si son correctas las siguientes expresiones:

1) $\log_5 125 = 3$

2) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8} = 2$

4) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

5) $\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$

Aplicando la definición de logaritmo determinamos el valor de:

6) $\log_2 32 =$

7) $\log_8 2 =$

8) $\log_{\frac{1}{2}} 2 =$

9) $\log_{49} \sqrt{7} =$

10) $\log_2 \sqrt[5]{16} =$

2. Logaritmos naturales

En los cálculos científicos la base más usada es el número irracional trascendente e=2.71......, siendo "e" el número de Euler, base de los logaritmos naturales o de Napier. En la calculadora aparecen las teclas para el logaritmo en base e denotado por " $\ln$ " y para la exponencial por e^x . Los logaritmos naturales se simbolizan con el operador " $\ln$ ", debe entenderse que " $\ln$ ", equivalente a " $\log_e$ ", pero este ultimo operador no es usual.
Así:

$$\ln 1 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1, \ln e = 1 \Leftrightarrow e^1 = e$$

Antilogaritmo

Es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número. Es decir, consiste en elevar la base al número resultante.

$$\log_a N = x \Leftrightarrow \operatorname{antilog}_a x = N \Leftrightarrow a^x = N$$

Ejemplo:

$$\log_2 N = 3 \Leftrightarrow \log_2 3 = N \Rightarrow a^x = N \Rightarrow 2^3 = 8$$

Cologaritmo

Se llama cologaritmo de un número N al logaritmo de su recíproco.

$$\operatorname{colog}_b N = \frac{1}{\log_b N} = -\log_b N$$

Ejemplo:

$$\operatorname{colog}_6 16 = \frac{1}{\log_6 16} = -\log_6 16$$

Cambio de base

Las bases más utilizadas en el estudio de los logaritmos son "10" y "e", pero siempre es posible escribir un logaritmo con otra base, esto se realiza cuando es necesario realizar el cambio de bases para pasar el logaritmo de una base a otra.

$$x = \log_a N \Rightarrow a^x = N \Rightarrow \log_b a^x = \log_b N$$

$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_9 14 = \frac{\log_6 14}{\log_6 9} \approx 1.201$$

Otra manera:

$$\log_9 14 = \frac{\ln 14}{\ln 9} \approx 1.201$$

Dato

Teóricamente, el número "e" se obtiene al hacer crecer "n" en la expresión:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ cuando } n \to \infty \text{ se tiene}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Notar:

$$\operatorname{antilog}_a x = N = a^x$$

Si:

$$\log_4 x = 5 \Rightarrow 4^5 = x \Rightarrow x = 1024$$

Otra manera:

$$\log_4 x = 5 \Leftrightarrow \operatorname{antilog}_4 5 = 4^5$$

$$\Rightarrow x = 1024$$

Conocidos los logaritmos en una base se pueden hallar fácilmente en cualquier otra. La base que se utiliza en la práctica es 10 logaritmos decimales.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Aunque sus equivalencias son diferentes, pero nos darán el mismo resultado. Pues recordemos que ya vimos que del logaritmo vulgar trabaja en base a "10" y el natural trabaja en base a "e".

Actividad

Aplicando la definición logaritmo, determinamos el valor de *N*:

1) $\log_4 N = 3$

2) $\log_8 N = 4$

3) $\log_N 9 = 2$

4) $\log_{49} N = 1$

5) $\log_{0,1} N = 3$

6) $\log_4 N = 3$

7) $\log_8 N = 4$

8) $\log_N 9 = 2$

9) $\log_{49} N = 1$

10) $\log_{0,1} N = 3$

11) $\log_N 100 = 2$

12) $\ln N = 0$

13) $\log_{\frac{2}{3}} N = -2$

14) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = N$

3. Propiedades de logaritmos

Logaritmo de un producto

Si M y N son números reales positivos no nulos, entonces, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$$

Ejemplos:

$\log_m 5 \cdot 7 = \log_m 5 + \log_m 7$ $\qquad$ $\log_4 3x = \log_4 3 + \log_4 x$

a) Logaritmo de un cociente

Si M y N son números reales positivos no nulos, entonces, el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Ejemplos:

$\log_b \left(\frac{2}{7}\right) = \log_b 2 - \log_b 7$ $\qquad$ $\log_5 \left(\frac{y}{7}\right) = \log_5 y - \log_5 7$

b) Logaritmo de una potencia

Si M y N es un número real positivo y un número real cualquiera, entonces, el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \cdot \log_a M$$

Ejemplos:

$\log_a 8^2 = 2 \cdot \log_a 8$ $\qquad$ $\log_2 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 7 \cdot \log_2 \frac{1}{3}$

Ejemplos

$\log_4 4096 = 6 \Leftrightarrow 4^6 = 4096$

$\log_4 256 = 4 \Leftrightarrow 4^4 = 256$

$\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$

$\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 2^5 = 32$

$\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow 2^6 = 64$

$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

$\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$

$\log_7 7 = 1 \Leftrightarrow 7^1 = 7$

$\log_6 6^7 = 7 \Leftrightarrow 6^7 = 6^7$

$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

$\log_{10} 10 = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 10$

$\log_{100} 100 = 1 \Leftrightarrow 100^1 = 100$

$\log_3 1000 = 10 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

c) Logaritmo de una raíz

Si M es un número real positivo y N un número natural mayor que 1, entonces, el logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a (M)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a M$$

Ejemplo:

$$\log_m \sqrt[5]{7} = \log_m (7)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log_m 7$$

Fuente: Open AI,2024

Nota:

El logaritmo de 1 en cualquier base es igual a cero: $\log_a 1 = 0$

El logaritmo de la base es igual a la unidad: $\log_a a = 1$

Actividad

Aplicamos las propiedades de logaritmos y desarrollamos:

1) $\log_m 7m$
2) $\log_a \frac{2}{a}$
3) $\log_x 5x^2$
4) $\log_g \frac{2m}{g}$
5) $\log_h \frac{4x^2 y}{3h}$
6) $\log_p \frac{\sqrt{p}}{7}$
7) $\log_m \sqrt[5]{\frac{7m}{a}}$
8) $\log_h \left(\frac{5x^3 y}{z}\right)$
9) $\log_p \left(\frac{10\,a^2}{b^3}\right)$
10) $\log_m \sqrt[4]{\frac{mn}{16}}$

Aplicando definición

$$\log_3(x-5)=2$$
$$x-5=3^2$$
$$x=9+5$$
$$x=14$$

Ejemplos:

Dado el logaritmo, aplicar las propiedades:

1. $\log_2 \sqrt[5]{2}+\log_2 8+\log_2 \frac{1}{4}$

$=\frac{1}{5}\log_2 2+\log_2 2^3-\log_2 4=\frac{1}{5}\cdot 1+3\log_2 2-\log_2 2^2=\frac{1}{5}+3\cdot 1-2\log_2 2$

$=\frac{1}{5}+3-2=\frac{6}{5}$

2. $\log\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3}\cdot(x+z)^2}$

$=\log x^2-\log\sqrt[3]{x-3}\cdot(x+z)^2=\log x^2-\left(\log\sqrt[3]{x-3}+\log(x+z)^2\right)$

$=\log x^2-\left(\log(x-3)^{\frac{1}{3}}+\log(x+z)^2\right)=2\log x-\left(\frac{1}{3}\log(x-3)+2\log(x+z)\right)$

$=2\log x-\frac{1}{3}\log(x-3)-2\log(x+z)$

Características

Algunas características de la función logaritmo:

Dominio: $\mathbb{R}^+$

Imagen: $\mathbb{R}$

Ceros, *corta al eje* x *en* $(1,0)$

Ordenada al origen, *no tiene*

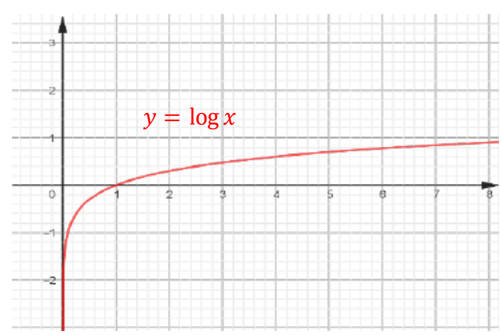
Asíntota vertical, $x=0$ *(el eje* y*)*

4. Función logaritmo

La función logarítmica en base "a" es la función inversa de la exponencial en base "a". Se define como: $f(x)=\log_a x, a>0$ y $a\neq 1$

La tabla de valores y la gráfica de la función se representan por:

x	$\log x$
-1	Error
0	Error
0,1	-1
1	0
2	0,30
10	1
100	2



5. Ecuaciones logarítmicas

Son las que tienen la variable en el argumento o base de algún logaritmo, para resolverlas, debemos tener presente que:

- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Actividad

Aplicando las propiedades logarítmicas determinamos:

1) $\log_b\frac{x^2y}{\sqrt{z}}$

2) $\log_m\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{m}}}{\sqrt[5]{m}}\right)$

3) $\log_w\sqrt[3]{\frac{\sqrt{w}\sqrt[3]{w}}{xw^2}}$

4) $2\log_a(a-b)-\log_a(a^2-b^2)$

5) $\log_2\frac{\sqrt{a-b}}{a}-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{a-b}{a}\right)^4$

6) $\log_x\left(\frac{a}{b}\right)+\log_x\left(\frac{b}{c}\right)+\log_x\left(\frac{c}{d}\right)-\log_x\left(\frac{ay}{xd}\right)$

Ejemplos:

Resolvemos las ecuaciones logarítmicas:

1) $\log_4 x^3 = \frac{3}{2}$

$\log_4 x^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^3 = 4^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^3 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2^3} \Rightarrow x = 2$

2) $\log(x+2) - \log x = \log 12$

$\log(x+2) - \log x = \log 12 \Rightarrow \log(x+2) - \log x - \log 12 = 0$

$\Rightarrow \log(x+2) - (\log 12x) = 0 \Rightarrow \log\frac{x+2}{12x} = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{12x} = 10^0 \quad \Rightarrow \frac{x+2}{12x} = 1$

$\Rightarrow x + 2 = 12x \Rightarrow 2 = 12x - x \Rightarrow 2 = 11x$

$\Rightarrow x = \frac{2}{11}$

3) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$

$\Rightarrow \frac{\log(x+12)}{\log 2^2} \cdot \frac{\log 2}{\log x} = 1 \Rightarrow \frac{\log(x+12)}{2\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log x} = 1 \Rightarrow \frac{\log(x+12)}{2} \cdot \frac{1}{\log x} = 1$

$\Rightarrow \frac{\log(x+12)}{2\log x} = 1 \Rightarrow \log(x+12) = 2\log x \quad \Rightarrow \log(x+12) - 2\log x = 0$

$\Rightarrow \log(x+12) - \log x^2 = 0 \Rightarrow \log\frac{(x+12)}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{(x+12)}{x^2} = 10^0 \quad \Rightarrow \frac{(x+12)}{x^2} = 1$

$\Rightarrow x + 12 = x^2 \Rightarrow 0 = x^2 - x - 12 \Rightarrow 0 = (x-4)(x+3 \Rightarrow x = 4$ o $x = -3$

4) $\log_{\log_n 27} 81 = 4$

$(\log_n 27)^4 = 81 \Rightarrow \log_n 27 = 3 \Rightarrow n^3 = 27 \Rightarrow n = 3$

6. Propiedades de las potencias

Multiplicación de potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplo:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

División de potencias de igual base:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplo:

$$\frac{4^5}{4^7} = 4^{5-7} = 4^{-2}$$

Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo:

$$5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2$$

División de potencias de distinta base e igual exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{a^m}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{10}{5}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Ejemplos

$\ln(3x+8) = \ln(2x+2)(x-2)$

$3x + 8 = 2x^2 - 2x - 4$

$0 = 2x^2 - 5x - 12$

$0 = (2x+3)(x-4)$

$x_1 = 4$

$x_2 = -\frac{3}{2}$ $(no\ es\ solucion)$

$\log_2(3x-4) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 3x - 4$

$3x - 4 = 8$

Otras propiedades

$a^0 = 1$

$Ejemplos: (5x^3 + 6x - 4)^0 = 1$

$1^n = 1$

$Ejemplos: 1^{2025} = 1$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$Ejemplos: (g^3)^2 = g^{3 \cdot 2} = g^6$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$Ejemplos: 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$Ejemplos: \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5}$$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones:

1) $\log(3x+1) - \log(2x-8) = 1$

2) $\log x = \log 2 + \log(x-3)$

3) $\log 20x + \log 2x = 2$

4) $\log x + \log 50 = 1$

5) $\log x = \log(10 - 3x)$

6) $5\log x - \log 10 + 1 = 0$

7) $\log_2 x + \log_2 4x - 6 = 0$

8) $\log_5^2 x - 2\log_5 x^2 = 0$

9) $\log_2(2x+2) - \log_2(2-x) = 2$

Potencias

Algunas propiedades de las potencias son:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

La base de una función exponencial o de una función logarítmica es un número estrictamente positivo distinto de uno.

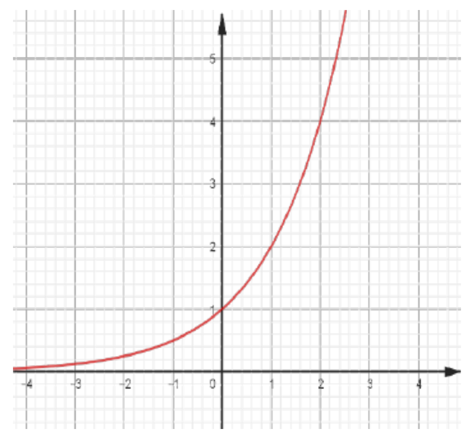
7. Función exponencial

Sea “a” un número real positivo. Aquella función en que, a cada número real “x” le corresponde “a^x ” es llamada función exponencial de base “a” con exponente “x”. Se representa:

$$f(x) = y = a^x$$

La tabla siguiente muestra las potencias de tomando como exponentes números negativos y positivos.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Algunas características de la función exponencial:

- Los valores $f(x) = a^x$ son todos positivos, ya que la gráfica siempre se encuentra situada por encima del eje x.
- Es inyectiva $a \neq 1$.
- Creciente si $a > 1$. (es decir la curva sube de izquierda a derecha)
- Decreciente si $a < 1$.
- Las curvas $y = a^x$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje y.

8. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la variable es parte del exponente. Para resolver una ecuación exponencial vamos a tener en cuenta: $a > 0, a \neq 1$

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo:

$$16^{3x-2} = 8^{x+6} \Rightarrow (2^4)^{3x-2} = (2^3)^{x+6} \Rightarrow 2^{4(3x-2)} = 2^{3(x+6)}$$

$$\Rightarrow 4(3x-2) = 3(x+6) \Rightarrow 12x - 8 = 3x + 18$$

$$\Rightarrow 12x - 3x = 18 + 8 \Rightarrow 9x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{9}$$

Actividad

Aplicamos las propiedades de los exponentes:

1) $a^6 \cdot a^3 =$

2) $(-3)^a \cdot 4^a =$

3) $2^3 \cdot 2^2 =$

4) $(3mn^2)^4 =$

5) $(b^{-2})^8 =$

6) $\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\right) =$

7) $(m^{3a-1} \cdot m^{3a+1})^3 =$

8) $\left(\frac{k^{3r+2}}{k^{2+3r}}\right) =$

9) $8a^3 \cdot 2^{-1} a^4 \div 16a^5 =$

10) $\frac{x^{3x+1}}{x^{2x+1}} =$

11) $e^x \cdot e^{x+1} \cdot e^{x+2} =$

12) $3^{4x} \cdot 9^{8x-1} \cdot 243^{2-4x} =$

13) $m^3 n^2 \cdot m^4 n^{-2} \div m^6 n =$

Ejemplo:

1) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}}{\frac{(e^x)^2-1}{e^x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{((e^x)^2+1)(e^x)}{(e^x)((e^x)^2-1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(e^x)^2+1}{(e^x)^2-1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2((e^x)^2+1) = 3((e^x)^2-1) \Rightarrow 2(e^x)^2 + 2 = 3(e^x)^2 - 3$$

$$\Rightarrow 2+3 = 3(e^x)^2 - 2(e^x)^2 \Rightarrow 5 = (e^x)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{5} = e^x \Rightarrow \ln\sqrt{5} = \ln e^x$$

$$\Rightarrow x = \ln\sqrt{5}$$

2) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

$$3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0 \Rightarrow 3\sqrt[x]{9^2} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0 \Rightarrow 3(\sqrt[x]{9})^2 - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$$

Hagamos un cambio de variable en $\sqrt[x]{9}$ tal que $u = \sqrt[x]{9}$.

$$3(\sqrt[x]{9})^2 - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0 \Rightarrow 3u^2 - 10u + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3u^2 - 10u + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3u-1)(u-3) = 0$$

$$\Rightarrow 3u - 1 = 0 \text{ o } u - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3u = 1 \text{ o } u = 3$$

$$\Rightarrow 3u = 1 \text{ o } u = 3$$

Volvamos a reemplazar el valor de u que es igual a $\sqrt[x]{9}$.

$$u = \tfrac{1}{3} \text{ o } u = 3 \Rightarrow \sqrt[x]{9} = \tfrac{1}{3} \text{ o } \sqrt[x]{9} = 3 \Rightarrow \sqrt[x]{3^2} = 3^{-1} \text{ o } \sqrt[x]{3^2} = 3$$

$$\Rightarrow (3^2)^{\frac{1}{x}} = 3^{-1} \text{ o } (3^2)^{\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2}{x}} = 3^{-1} \text{ o } 3^{\frac{2}{x}} = 3$$

$$\Rightarrow \tfrac{2}{x} = -1 \text{ o } \tfrac{2}{x} = 1 \Rightarrow -2 = x \text{ o } 2 = x$$

Ecuaciones

Resolver:

$$\sqrt[5x-1]{8^{x+1}} = 32$$

$$8^{\frac{x+1}{5x-1}} = 2^5$$

$$2^{3\left(\frac{x+1}{5x-1}\right)} = 2^5$$

$$3(x+1) = 5(5x-1)$$

$$3x + 3 = 25x - 5$$

$$3 + 5 = 25x - 3x$$

$$22x = 8$$

$$x = \frac{4}{11}$$

$$3^{x+2} = 7$$

$$\log(3^{x+2}) = \log 7$$

$$(x+2)\log 3 = \log 7$$

$$x + 2 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$$

$$\Rightarrow x \approx -0.229$$

VALORACIÓN

Las funciones exponenciales y logarítmicas son dos funciones matemáticas fundamentales que tienen una amplia gama de aplicaciones en la ciencia, la ingeniería, la economía y la vida cotidiana, además que son funciones inversas una de la otra.

Por ejemplo para medir la cantidad de intensidad de sonido en una fiesta debemos tomar como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ a una frecuencia de 100 hertz, lo que mide un sonido que es apenas audible. El nivel de intensidad, medido en decibeles, se define como:

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

¿Cómo se emplean los logaritmos en el nivel de intensidad en decibeles para un acto cívico y no causar contaminación auditiva?

Fuente: Open AI,2024

PRODUCCIÓN

Construimos un modelo matemático para controlar la intensidad de decibeles cuando se realizan actos cívicos en una unidad educativa, en donde se utilizan parlantes de sonido fuerte. Como alternativa se puede utilizar locales como restaurantes, karaokes, otros sitios publicitarios.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL CONTEXTO

Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado $ax^2+c=0$:

1) $x^2 - 9 = 0$

2) $x^2 - 5 = 0$

3) $4x^2 - 25 = 0$

4) $x^2 - \frac{4}{49} = 0$

5) $x^2 + 5 = 30$

6) $2x^2 - 9 = x^2 - 1$

Resolvemos las siguientes ecuaciones $ax^2+bx=0$:

1) $x^2 - x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$

3) $4x^2 - 2x = 0$

4) $x^2 - \frac{4}{25}x = 0$

5) $x^2 + 5x = 30x$

6) $3x^2 - 9x = x^2 - x$

Resolvemos las siguientes ecuaciones completando cuadrados:

1) $6 + 5k = 21k^2$

2) $8x^2 - 22x + 15 = 0$

3) $x(x-1) - 5(x-2) = 2$

4) $\frac{u-1}{u+1} - 2 = 7\left(\frac{u+3}{3}\right)$

5) $\frac{y+2}{y} + y = \frac{74}{y}$

Resolvemos las siguientes ecuaciones por factorización:

1) $x^2 + 6x = -8$

2) $15 + 19r + 6r^2 = 0$

3) $9t^2 = 6t + 35$

4) $12y^2 - 14 + 13y = 0$

5) $(x-2)^2 - (2x+3)^2 = -80$

Resolvemos las siguientes ecuaciones por fórmula general:

1) $5w - 32 = 6w^2$

2) $\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{4}x = 7$

3) $(3x+1)(2x+3) = x - 1$

4) $x^2 + (x-2)^2 = 130$

Resolvemos las siguientes ecuaciones por Po-Shen loh:

1) $x^2 + 50 = 27x$

2) $x^2 + 6x = -8$

3) $15 + 19r + 6r^2 = 0$

4) $x^2 - \frac{x}{5} - \frac{1}{3} = 0$

5) $12y^2 - 14 + 13y = 0$

Formamos las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

1) $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{6}{5}$

2) $x_1 = 5$ y $x_2 = 8$

3) $x_1 = \frac{11}{3}$ y $x_2 = 9$

4) $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$

5) $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = -1$

6) $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = -2$

7) $x_1 = -\frac{19}{2}$ y $x_2 = 0$

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2,5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones y ¿Cuál es mejor? ¿Por qué?

2) Carlos debe cercar en forma rectangular un pedazo de un corral. Para ello compró 4000 metros de alambre de púas que debe disponer en cuatro líneas, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?

3) Un triángulo isósceles tiene de base 16 cm y de altura 24 cm. Averigua el perímetro.

4) Se tiene un tablero de 1800 cm^2 de superficie se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 8 cm más de lado que la otra. Si de la madera que sobra miden 86 cm^2, entre ambas tiras, ¿cuáles son las dimensiones de las piezas cortadas?

5) Si al producto de un número natural por su consecutivo le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. Calcular los números.

Resolvemos los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=5 \\ xy=14 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2=4x \\ x=2y-3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-y=1 \\ y=x+1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ y+x^2=4x+2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y^2=4x+5 \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y^2=4x \\ x=2y-3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-y=-8 \\ xy=1353 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=2x+5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$

Resolvemos los siguientes problemas aplicados al contexto y la tecnología:

1) Los trabajadores de la empresa logran fabricar $A_1(t)=t^2-2t$ artículos de aseo en "t" días y otra empresa competencia de igual número de trabajadores fabrica $A_2(t)=4t+16$ artículos en "t" días.¿Habrá alguna cantidad de días para que la producción sea la misma?

2) Hoy, el número de habitantes de dos municipios de Santa Cruz crece según los modelos $H_1(t)=80t+12\,500$ y $H_2(t)=t^2+72t+12\,480$ donde "t" se mide en años. ¿En cuántos años mas el número de habitantes de ambas localidades será el mismo?

3) Ana desea pedir un crédito de Bs$50\,000$ en dos instituciones financieras. Una de ellas calcula la tasa de interés según $I_1(t)=-0.06t+2.434$ y la otra según $I_2(t)=-0.006t^2+0.02t+2.49$ donde "t" es el número de meses al cual se pedirá el crédito. ¿A cuántos meses habrá que tomar el crédito para que la tasa de interés sea la misma?

4) Dos tasadores utilizan distintas fórmulas para la depreciación (pérdida del valor) de una maquinaria pesada. El primero utiliza la función cuadrática $V_1(t)=0.2t^2-2.6t+10.4$ y el otro tazador la función lineal $V_2(t)=-1.2t+9.2$, donde "t" está en años y $V(t)$ representa el valor de la máquina en bolivianos. Considerando "t" mayor a 1 año, ¿en cuántos años el valor de ambas tasaciones es el mismo?

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Colocamos el signo de desigualdad para:

1) $8+5+6 \square 5+24$

2) $\frac{6}{9}+\frac{10}{6} \square \frac{2}{5}-6$

3) $20-2+6-69 \square 35+20-2$

4) $\frac{19}{9}+\frac{6}{5} \square \frac{25}{6}-\frac{89}{5}$

5) $2-33+5 \square 8-6+33$

Resolvemos las siguientes inecuaciones y realizamos la interpretación gráfica:

1) $x-10>-8$

2) $-\frac{x}{4}-4 \geq \frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$

3) $x-10>-8$

4) $2z+4>-8$

5) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$

Resolvemos las siguientes inecuaciones:

1) $\frac{x}{x-3} \leq \frac{x}{x+1}$

2) $\frac{x}{x-5}-2 \geq 0$

3) $\frac{2x-1}{x+5}>2$

4) $\frac{x-1}{x+5}>2$

SUCESIONES, PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

PRÁCTICA

Las familias en Bolivia, están acostumbran a comprar pan todos los días, los papás pagan el préstamo bancario en cuotas, frecuentemente subimos escaleras de casa de dos en dos a manera de juego, quizá ahorraste dinero de tu recreo de moneda en moneda. Notarás en estas situaciones cotidianas, que se establecen relaciones entre los datos como subir las escaleras "de dos en dos", la cantidad de pan que se compra es, casi siempre, constante, las cuotas a pagar en el banco es la misma cada mes, entonces:

¿Tienen algo en común estos eventos?, ¿alguna cantidad se repite siempre?, ¿cómo se relacionan estos datos?

Veamos otro ejemplo, Danner empieza a leer un libro el 1 de julio, el primer día leyó 23 páginas, el siguiente día se propuso leer 3 páginas más que el anterior día y así sucesivamente. A partir de la situación:

- ¿Cuántas páginas leerá el séptimo día?
- ¿Cuántas páginas leerá el último día del mes?
- ¿Alguna cantidad de páginas se repite?

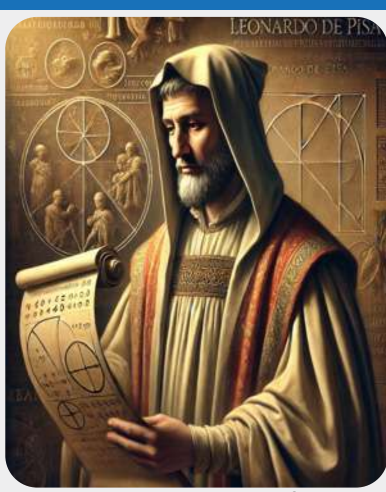
Fuente: Open AI,2024

TEORÍA

1. Sucesiones de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es una serie infinita de números naturales, comienza con 0 y 1, los siguientes elementos resultan de la suma de los dos anteriores.

Fibonacci



Fuente: Open AI,2024

(1175 – 1240)

Matemático italiano, llamado también Leonardo de Pisa, Leonardo Bigollo Pisano o simplemente considerado "el Fibonacci, Matemático occidental de mayor talento de la edad media".

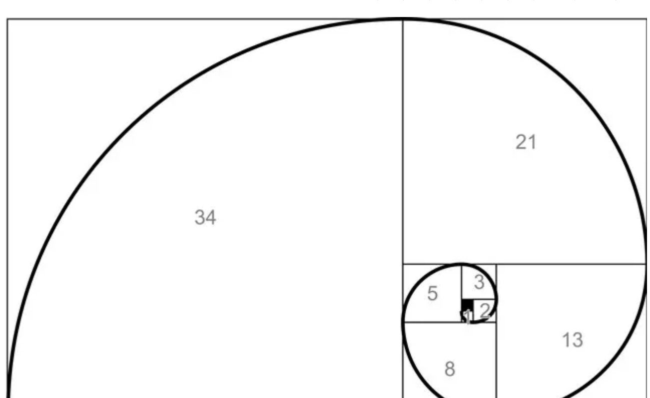
La Sucesión de Fibonacci es:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

Lo interesante de esta sucesión es que Leonardo de Pisa la propuso luego de observar el aumento de la población, a partir de una pareja de conejos. Con el tiempo se puede notar que una gran cantidad de fenómenos naturales se relacionan con esta sucesión.

Al tomar dos elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, si se divide el mayor entre el menor, se encuentra $1{,}618$ aproximadamente, pero si se divide el menor entre el mayor, se encuentra $0{,}618$ aproximadamente. Este cociente es llamado "razón áurea", se representa con la letra griega phi "$\boldsymbol{\Phi}$".

Otro dato interesante de la sucesión de Fibonacci es la espiral áurea. Se la dibuja trazando arcos circulares con las esquinas opuestas de los cuadrados que se ajustan a los valores de la sucesión, acomodándolos sucesivamente. Los cuadrados son de lados: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\ldots$



$$\begin{array}{c} 0+1=1 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \\ 2+3=5 \\ 3+5=8 \\ 5+8=13 \\ 8+13=21 \\ 13+21=34 \\ 21+24=55 \\ 34+55=89 \\ 55+89=144 \end{array}$$

2. Sucesiones numéricas

a) Sucesión

Es un conjunto ordenado de elementos que pueden ser números, letras o figuras o una combinación de las anteriores. Estos elementos se caracterizan por seguir una regla de formación.

b) Sucesión numérica

Es un conjunto de números, cuyos elementos están enumerados ordinalmente (primero, segundo, tercero, etc.) indicando así la posición que ocupan y cuyo valor es construido por una función generatriz, que en este texto será definido como S_n , donde "$n \in \mathbb{N}$", será la variable que nos permita determinar el valor del elemento en esa posición.

c) Ley de formación o función generatriz

Es el patrón que se va establecer dentro de la sucesión numérica, para determinar de qué forma va creciendo o decreciendo, este lo podemos encontrar comparando uno de los términos con el anterior.

d) Notación

Generalmente una sucesión está determinada por términos, que se escriben de la siguiente manera:

t_1: Primer término $\Rightarrow n=1$

t_2: Segundo término $\Rightarrow n=2$

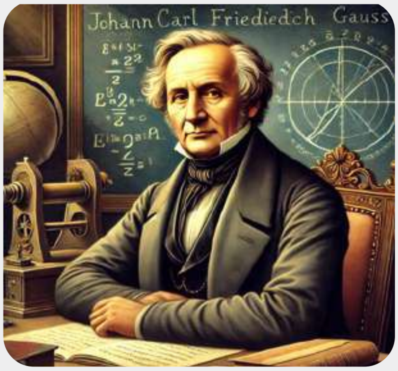
t_3: Tercer término $\Rightarrow n=3$

t_5 : Quinto término $\Rightarrow n=5$

t_{10} : Décimo término $\Rightarrow n=10$

t_n : Último término o enésimo término

Johann Carl Friedrich Gauss



Fuente: Open AI,2024

$(1777 - 1855)$

Matemático astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos ámbitos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, álgebra, geodesia, magnetismo y la óptica. En el campo matemático es considerado como: "Príncipe de la Matemática".

Ejemplo:

1) Hallamos la sucesión de números de la siguiente función generatriz: $S_n = 2n - 3$

$n = 1 \Longrightarrow S_1 = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$n = 2 \Longrightarrow S_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$n = 3 \Longrightarrow S_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

$n = 4 \Longrightarrow S_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$

$n = 5 \Longrightarrow S_5 = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

$n = 6 \Longrightarrow S_6 = 2 \cdot 6 - 3 = 13 - 3 = 9$

2) Encontramos los 5 primeros términos de la sucesión : $S_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

$n = 1 \Longrightarrow s_1 = \dfrac{2 \cdot 1 - 1}{1+1} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2 \Longrightarrow s_2 = \dfrac{2 \cdot 2 - 1}{2+1} = \dfrac{4-1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

$n = 3 \Longrightarrow s_3 = \dfrac{2 \cdot 3 - 1}{3+1} = \dfrac{6-1}{4} = \dfrac{5}{4}$

$n = 4 \Longrightarrow s_4 = \dfrac{2 \cdot 4 - 1}{4+1} = \dfrac{8-1}{5} = \dfrac{7}{5}$

$n = 5 \Longrightarrow s_5 = \dfrac{2 \cdot 5 - 1}{5+1} = \dfrac{10-1}{6} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{3}{2}$

$s_n = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{2}\right\}$

3) Calculamos el sexto término de la sucesión: $S_n = \sqrt{2n^2 + 9}$

$$n = 6 \Rightarrow S_6 = \sqrt{2(6)^2 + 9} = \sqrt{2 \cdot 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

Actividad

Encontramos los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

1) $S_n = 3n - 5n^2$

2) $S_n = -(-n^2)$

3) $S_n = \frac{n+1}{n-2}$

4) $S_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

5) $S_n = \sqrt{2n^2 + 3n}$

6) $S_n = \sqrt{\frac{n+1}{n--3}}$

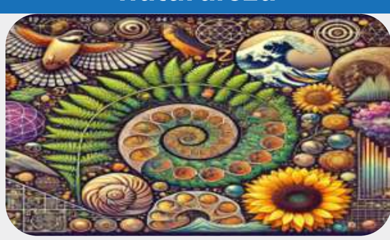
7) $S_n = \sqrt[3]{\frac{n+1}{n^3+1}}$

Las margaritas y las sucesiones

Fuente: Open AI,2024

Las margaritas no poseen siempre la misma cantidad de pétalos, pero su número es siempre un término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo: $13,21,34,55,89$, *etc. En Botánica, se llama filotaxia a la disposición de las hojas, flores u otras estructuras vegetales repetitivas de forma regular, dispuestas según uno o varios sistemas de espirales o hélices.*

La serie de Fibonacci en la naturaleza



Fuente: Open AI,2024

La serie de Fibonacci inspira una matemática sutil detrás de todo cuanto nos rodea, desde el patrón de crecimiento de un helecho hasta el trino de las aves, la disposición de los pétalos en las flores, la estructura del caparazón de ciertos moluscos, la espiral de una galaxia en el universo, fenómenos de la naturaleza, cuestiones relacionadas con la computación y teoría de juegos.

Sumatoria y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria, se emplea para representar a la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) "$\sum$", la cual iremos detallando a continuación:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_n$$

x_i : Son los elementos de la sumatoria

n : El número de elementos de la sumatoria

a) Propiedades de la sumatoria

Las propiedades que se tienen para la sumatoria son las siguientes:

Propiedad	Fórmula
La suma del producto de una constante por una variable es igual a k−veces la sumatoria de la variable.	$\sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i$
La sumatoria hasta "n" de una constante es igual a n−veces la constante	$\sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k$
La sumatoria de una suma es igual a la suma de las sumas de cada termino.	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

Ejemplos:

1) Encontramos la sumatoria: $\sum_{i=1}^{5} i^2$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

2) Calculamos la sumatoria: $\sum_{i=1}^{4} (2i - 3)$

$$\sum_{i=1}^{4} (2i - 3) = (2 \cdot 1 - 3) + (2 \cdot 2 - 3) + (2 \cdot 3 - 3) + (2 \cdot 4 - 3)$$

3) Hallamos la sumatoria de: $\sum_{i=4}^{7} \frac{1}{3 - i}$

$$\sum_{i=4}^{7} \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - 4} + \frac{1}{3 - 5} + \frac{1}{3 - 6} + \frac{1}{3 - 7} = -\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{25}{12}$$

Actividad

Encontramos las sumatorias:

$1)\ \sum_{X=3}^{6} \frac{x}{3}$ $\quad 3)\ \sum_{x=6}^{9} \frac{x - 1}{x + 1}$ $\quad 5)\ \sum_{i=1}^{9} \frac{i^2 - i}{i - i^2}$

$2)\ \sum_{X=2}^{7} (x^2 - 5)$ $\quad 4)\ \sum_{y=3}^{7} \frac{1}{1 - y}$ $\quad 6)\ \sum_{h=1}^{5} \frac{2h - 3}{h^3}$

3. Progresiones aritméticas

a) Definición

Una progresión aritmética (PA) es una sucesión de números, en la que cada término se obtiene sumando una constante denominada diferencia. La diferencia se puede obtener mediante la expresión:

$$d = t_n - t_{n-1}$$

Si la diferencia aritmética es positiva, entonces la progresión es creciente, porque cada término es mayor que el anterior y cuando la diferencia aritmética es negativa entonces la progresión es decreciente ya que cada término es menor que el anterior.

b) Notación

Una PA se denota conociendo el primer término y la diferencia, donde:

t_1: Primer término

d: Diferencia

t_n: Último o enésimo término

n: Número de términos

S_n: Suma enésima

Tomando en cuenta la definición, la simbolizaremos de la siguiente manera:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n = t_1, (t_1 + d), (t_1 + 2d), (t_1 + 3d), \ldots, (t_1 + (n-1)d)$$

Las progresiones pueden ser ilimitadas o limitadas, según tengan el último término o no lo tengan. En las progresiones limitadas, el primer término y el último se denominan extremos y los demás medios.

La diferencia

Cuando se tienen los primeros términos de la progresión aritmética, por lo general la diferencia se encuentra restando el segundo término del primero.

$$d = t_2 - t_1$$

Progresión creciente si:

$$d > 0$$

Progresión decreciente si:

$$d < 0$$

Ejemplos:

1) Encontramos el noveno término de la progresión: $4, 11, 18, \ldots$

$$t_1 = 4; \; n = 9; \; d = 11 - 4 = 8; \; t_9 = ?$$
$$t_n = t_1 + (n-1)d \Longrightarrow t_9 = (4 + (9-1)7) = (4 + (8)7) = 4 + 56 = 60$$

2) Hallamos el primer término si el vigésimo es 105 y $d = 6$

$$t_{20} = 105; \; n = 20; \; d = 6; \; t_1 = ?$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Longrightarrow t_1 = t_n - (n-1)d$$

$$t_1 = 105 - (20-1)6 = 105 - 19 \cdot 6 = 105 - 114 = -9$$

Hallamos la diferencia si el primer término es 9 y el décimo término es 144

$$t_1 = 9; \; n = 10; \; t_{10} = 144; \; d = ?$$
$$d = \frac{t_n - t_1}{n-1} \Longrightarrow d = \frac{t_{10} - t_1}{10-1}$$
$$d = \frac{144 - 9}{10 - 1} = \frac{135}{9} = 15$$

Determinamos el número de términos de la progresión: $4, 6, 8, \ldots, 56$

$$t_1 = 4; \; n = ?; \; t_n = 56; \; d = 6 - 4 = 2$$

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 \Longrightarrow n = \frac{56 - 4}{2} + 1 = \frac{52}{2} + 1 = 26 + 1 = 27$$

Tabla de valores

Término enésimo:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

Primer término:

$$t_1 = t_n - (n-1)d$$

Diferencia:

$$d = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

Cantidad de términos:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$$

Suma aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_n + t_1)$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

Actividad

Hallamos los términos que se pide en las siguientes progresiones:

1) El octavo término de: $5, 13, 21, \ldots$

2) El 32º término de: $-5, -1, 4, 8, \ldots$

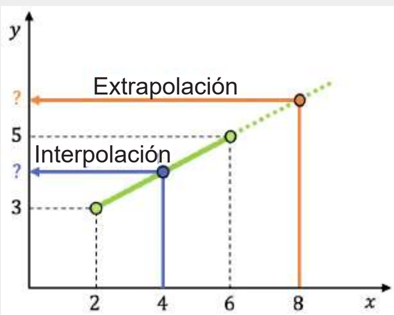
3) El trigésimo tercer término de una progresión aritmética es “-18” y $d=3$, halla el primer término.

4) El término 74 de una progresión aritmética es mil cincuenta y el primer término es menos cuarenta y dos, encuentra la diferencia.

Observación

Para interpolar o insertar medios aritméticos entre dos números o dos extremos de una progresión, se utiliza la siguiente diferencia:

$$d = \frac{t_n - t_1}{n - 1}$$



c) Interpolación aritmética

En una progresión aritmética todos los términos comprendidos entre el primer y último término se denominan medios aritméticos de estos dos:

$$t_1, \underbrace{t_2, t_3, t_4, t_5, \dots,}_{\text{Medios}} t_n$$

Ejemplos:

1) Interpolamos 4 medios aritméticos entre 2 y 77

$$2, t_2, t_3, t_4, 77 \Rightarrow t_1 = 2; n = 6; t_6 = 77$$

$$d = \frac{t_n - t_1}{n - 1} \Rightarrow d = \frac{77 - 2}{6 - 1} = \frac{75}{5} = 15$$

Tenemos la progresión con diferencia 15, es decir:

$$2,17,32,47,62,77$$

2. Interpolamos 5 medios entre -10 y 15

$$-10, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, 15 \Rightarrow d = \frac{t_n - t_1}{n - 1} \Rightarrow d = \frac{15 - (-10)}{7 - 1} = \frac{25}{6}$$

Tomemos la progresión con diferencia $\frac{25}{6}$, es decir:

$$-10, -\frac{35}{6}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{20}{3}, \frac{65}{6}, 15$$

¡Idea!

Partiendo de la anécdota de Gauss cuando era niño, sobre la suma de los 100 primeros números naturales, veamos:

1+2+3+4+....+97+98+99+100

1+100=101

2+99=101

3+98=101

4+97=101

⋮

50·101=5050

d) Suma de una progresión aritmética

La suma de una progresión aritmética de “n” términos se la define de la siguiente manera:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n \Rightarrow S_n = \frac{n(t_n + t_1)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n - 1)d]$$

Ejemplo:

Encuentra la suma de los diez primeros términos de: $12,19,26\dots$

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n - 1)d]$$

donde: $t_1 = 12;\ d = 7;\ n = 10;\ S_n = ?$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 12 + (10 - 1)7] = 5[24 + 63] = 5[87] = 435$$

Actividad

Interpolamos los medios indicados en cada caso:

1) 4 medios aritméticos entre 0 y -16.

2) 6 medios aritméticos entre -3 y 81.

3) 5 medios aritméticos entre 25 y -25.

Determinamos la suma en cada caso:

1) Ocho primeros términos de -4,3,10,...

2) Setenta primeros términos de -1,7,15,...

3) Halla el número de términos para que: 2+8+14+20+⋯= 3640.

4) Catorce primeros términos de 2,9,16,...

5) Halla la suma de los múltiplos de 7 entre 2 y 87.

6) Calcula la suma de los 80 primeros números naturales impares.

Fuente: Open AI,2024

e) Problemas de aplicación

Las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarse en diferentes actividades que se dan en la vida real, como lo veremos en los siguientes ejemplos y ejercicios.

Fuente: Open AI,2024

Ejemplos:

1) La maestra Andrea, el mes de enero, apertura una cuenta de ahorro en el Banco Unión con Bs225 y en los meses posteriores decide ahorrar Bs35 más que el mes anterior. ¿Cuál será el monto de dinero que depositará en el mes de diciembre y cuánto dinero tendrá ahorrado en un año?

$$t_n = t_1 + (n-1)d; \quad S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

donde: $t_1 = 225; \; d = 35; \; n = 12; \; t_{12} = ?; \; S_{12} = ?$

$$t_{12} = 225 + (12-1)35$$
$$t_{12} = 225 + (11)35$$
$$t_{12} = 225 + 385$$
$$t_{12} = 610$$

En el mes de diciembre depositara Bs610.

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \cdot 225 + (12-1)35]$$
$$S_{12} = 6[450 + 385]$$
$$S_{12} = 6[835] = 5010$$

En un año la maestra logrará ahorrar Bs5010.

2) En el gimnasio el instructor indica a una persona que después de levantarse realice 10 flexiones, 20 sentadillas y 15 abdominales, repite eso dos veces seguidas durante 3 días, luego aumenta 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días, nuevamente aumenta 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días y así sucesivamente. ¿Al final del mes, cuántas flexiones, sentadillas y abdominales realizará? ¿Durante el mes, cuántas sentadillas, abdominales y flexiones realizó?

	Día 1	Día 2	Día 3	Total	Día 4	Día 5	Día 6	Total
Flexiones	20	20	20	60	22	22	22	66
Sentadillas	40	40	40	120	42	42	42	126
Abdominales	30	30	30	90	32	32	32	96

Determinando la cantidad de ejercicios que hace en los últimos días del mes:

Flexiones	$t_n = 60 + (10-1)6 = 60 + 9 \cdot 6 = 60 + 54 = 114$
Sentadillas	$t_n = 120 + (10-1)6 = 120 + 9 \cdot 6 = 120 + 54 = 174$
Abdominales	$t_n = 90 + (10-1)6 = 90 + 9 \cdot 6 = 90 + 54 = 144$

Determinando la cantidad de ejercicios que realizó en el mes:

Flexiones	$S_n = \frac{10 \cdot (114 + 60)}{2} = \frac{10 \cdot 174}{2} = 870$
Sentadillas	$S_n = \frac{10 \cdot (174 + 120)}{2} = \frac{10 \cdot 174}{2} = 870$
Abdominales	$S_n = \frac{10 \cdot (144 + 90)}{2} = \frac{10 \cdot 234}{2} = 1170$

Con incógnitas

Determinar el valor de "x", de manera que la sucesión:

$$10x+4, \; 6x-3, \; 3x-8$$

forme una progresión aritmética.

$d=t_2-t_1$

$\Rightarrow d=6x-3-(10x+4)=-4x-7$

$d=t_3-t_2$

$\Rightarrow d=3x-8-(6x-3)=-3x-5$

Igualando:

$d=t_2-t_1=t_3-t_2$

$-4x-7=-3x-5 \Rightarrow -7+5=4x-3x$

$\Rightarrow x=2$

La sucesión seria:

$$-16, -15, -14$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Mario Josué gana Bs20 el primer día, Bs40 el segundo, Bs60 el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto percibirá al cabo de 30 días?

2) Un dentista atendió a una persona por sus piezas dentales. Por la primera pieza le cobró Bs100 y por cada una de las demás Bs20 más que la anterior. ¿Cuánto cobró el dentista, si le corrigió 4 piezas dentales?

La razón

Cuando se tienen los primeros términos de la progresión geométrica por lo general la razón se obtiene dividiendo el segundo término entre el primero.

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

Progresión creciente:

$$r > 0$$

Progresión decreciente:

$$r < 0$$

Formulario

Termino enésimo:

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

Primer término:

$$t_1 = \frac{t_n}{r^{n-1}}$$

Razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Cantidad de términos:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1$$

Progresiones geométricas

a) Definición

Una progresión geométrica (PG) es una sucesión de números, en la que cada término se obtiene multiplicando una constante denominada razón. La razón se puede obtener mediante la expresión:

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

b) Notación

Una PG se denota conociendo el primer término y la razón, donde:

t_1: Primer término	r: Razón
t_n: Último o enésimo término	n: Número de términos
S_n: Suma enésima	

Tomando en cuenta la definición de la razón, la simbolizaremos de la siguiente manera:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot \cdots \cdot t_n = t_1 \cdot (t_1 \cdot r) \cdot (t_1 \cdot r^2) \cdot (t_1 \cdot r^2) \cdot \cdots \cdot (t_1 \cdot r^{n-1})$$

Ejemplos:

1) Encuentra el sexto término de $4, 8, 16, \ldots$

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}; \ t_1 = 4; \ n = 6; \ r = 2; \ t_6 = ?$$

$$t_6 = 4 \cdot r^{n-1} \Longrightarrow t_6 = 4 \cdot 2^5 = 4 \cdot 32 = 128 \Longrightarrow t_6 = 128$$

2) Determina el primer término si la razón es 5, el sexto término es $50\,000$.

$$t_1 = \frac{t_n}{r^{n-1}}; \ t_6 = 50\,000; \ n = 6; \ r = 5; \ t_1 = ?$$

$$t_1 = \frac{50\,000}{5^{6-1}} = \frac{50\,000}{5^5} = \frac{50\,000}{3125} = 16 \Longrightarrow t_1 = 16$$

3) Halla la razón de la progresión que contiene 5 términos: $1, \ldots, 625$.

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}; \ n = 5; \ t_5 = 625; \ t_1 = 1; \ r = ?$$

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{625}{1}} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5 \Longrightarrow r = 5$$

4) Indica el número de términos de la siguiente progresión geométrica: $59\,049, 65\,610, \cdots, 100\,000$.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1; \ t_1 = 59\,049; \ t_n = 100\,000; \ r = \frac{65\,610}{59\,049} = \frac{10}{9}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{100\,000}{59\,049}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)} + 1 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow n = 6$$

Actividad

Determinamos el elemento solicitado:

1) El quinto término de: $-3, 24, -192$

2) Número de términos si: $t_1 = 4; \ t_n = 9604; \ r = 7$

3) El primer término si: $t_6 = 1944; \ r = 6$

4) $t_1 = 4; \ r = -2; \ n = 8; \ t_8 = ?$

Fuente: https://www.ecommercenews.pe/marketing-digital/2023/ia-de-matematicas.html/

c) Interpolación geométrica

En una progresión geométrica todos los términos comprendidos entre el primer y último término se denominan medios geométricos de estos dos extremos:

$$t_1, \underbrace{t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_{n-1}}_{\text{Medios geométricos}}, t_n$$

Ejemplo:

1) Interpolamos 3 medios geométricos entre -1 y $-\frac{1}{16}$.

$$-1, t_2, t_3, t_4, -\frac{1}{16}$$

$$t_1 = -1; \ \ t_5 = -\frac{1}{16}; \ \ n = 5; \ \ r = ? \Rightarrow r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{-\frac{1}{16}}{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$-1, t_2, t_3, t_4, -\frac{1}{16} \Rightarrow -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}$$

2) Interpolamos 4 medios geométricos entre $12\,000$ y 375.

$$12\,000, t_2, t_3, t_4, t_5, 375$$

$$t_1 = -1; \ \ t_6 = 375; \ \ n = 6; \ \ r = ? \ \Rightarrow \ r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{375}{12\,000}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$12\,000, \ t_2 \cdot \frac{1}{2}, \ t_3 \cdot \frac{1}{2}, \ t_4 \cdot \frac{1}{2}, \ t_5 \cdot \frac{1}{2}, 375 \Rightarrow 12\,000, 600, 3000, 1500, 750, 375$$

3) Interpolamos 5 medios geométricos entre m y m^7.

$$m, t_2, t_3, t_4, t_5, m^7$$

$$t_1 = m; \ \ t_7 = m^7; \ \ n = 7; \ \ r = ?; \ \Rightarrow r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

$$r = \sqrt[7-1]{\frac{m^7}{m}} = \sqrt[6]{m^6} = m \Rightarrow r = m$$

$$m, t_2 \cdot m, t_3 \cdot m, t_4 \cdot m, t_5 \cdot m, m^7 \Rightarrow m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7$$

Actividad

Interpolamos:

1) 3 medios geométricos entre 2 y 2592

2) 4 medios geométricos entre $\frac{25}{4}$ y $\frac{8}{125}$

3) 5 medios geométricos entre -1 y -729

4) 6 medios geométricos entre 14 y $\frac{7}{64}$

5) 3 medios geométricos entre 5 y 1280

6) 7 medios geométricos entre 8 y $\frac{1}{32}$

Recordando

Para interpolar o insertar medios geométricos entre dos números o dos extremos de una progresión, se utiliza la siguiente razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

El invento del ajedrez

Hace mucho tiempo hubo un rey muy absorto y maravillado con el fascinante juego del ajedrez. Tan encantado estaba que ofreció a su inventor concederle lo que pidiera. “Sólo le pido 1 grano de trigo por la primera casilla, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente. En cada una el doble que la anterior hasta llegar a la última, la casilla número 64”. Al rey le pareció algo insignificante y pensó que el inventor era muy humilde. Pero estaba muy equivocado, ¿a cuántos granos de trigo asciende la deuda que el rey contrajo con el inventor? Se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su razón 2, el último término corresponde a 2^{63} , el rey no pudo conceder su promesa, porque no existe tal cantidad de trigo en toda la tierra.

2^{63}=9 223 372 036 854 776 000

La torre de Hanói

Se trata de una estructura de 3 varillas donde tienen varios discos de diferentes tamaños, inicialmente los discos se sitúan en la varilla de la izquierda colocados de mayor a menor. El juego consiste en pasar los discos a la varilla de la derecha. Cuenta la leyenda que Dios coloco 64 discos en la varilla de la izquierda y dijo: “Cuando la humanidad concluya este juego se acabará el mundo” El número de movimientos se trata de una sucesión geométrica cuyo término general es:

$$a_n = 2^n - 1$$

4. Progresiones armónicas

Una progresión armónica es una sucesión de números en la que sus recíprocos forman una progresión aritmética. Se llaman progresiones armónicas porque cada término es la media armónica entre el anterior y el siguiente.
En este tipo de progresiones, no existe ninguna fórmula elemental como los que hay para las progresiones aritméticas y geométricas.

Propiedad

Si A, G y H son las medias aritmética, geométrica y armónica, entonces la media geométrica es la media proporcional entre la media aritmética y armónica, esto es:

$$A : G :: G : H$$

Los inversos multiplicativos de los términos que forman una progresión aritmética formarán una progresión armónica. Es decir:

$$\frac{m}{p} = \frac{m-n}{n-p} \Rightarrow m(n-p) = p(m-n)$$

$$\Rightarrow mn - mp = pm - pn \qquad // \left(\frac{1}{mnp}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{mn}{mnp} - \frac{mp}{mnp} = \frac{pm}{mnp} - \frac{pn}{mnp}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

Lo que demuestra la proposición.

Media armónica

Sean “m” y “n” dos términos y “H” su media armónica, por lo demostrado anteriormente en la proposición:

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{H} \Rightarrow \frac{2}{H} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow H = \frac{2mn}{m+n}$$

Ejemplo:

1) Encontramos el término que sigue en la siguiente progresión armónica:

$$(-10)^{-1} = -\frac{1}{10}$$

Su progresión aritmética está dada por:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}; (-1)^{-1}; \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}; \left(-\frac{1}{7}\right)^{-1} \Rightarrow 2;\ -1;\ -4;\ -7$$

$$t_1 = 2;\ \ n = 5;\ \ d = -4 - (-1) = -3;\ \ t_n = ? \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_5 = 2 + (5-1)(-3) = 2 + (4)(-3) = 2 - 12 = -10 \Rightarrow t_5 = -10$$

Por tanto el siguiente término en la progresión armónica es: $(-10)^{-1} = -\frac{1}{10}$

2) Interpolamos un medio armónico entre 2 y 3

$$m = 2;\ \ n = 3;\ \ H = ? \Rightarrow H = \frac{2mn}{m+n}$$

$$H = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = \frac{12}{5} \Rightarrow H = \frac{12}{5}$$

Actividad

En las siguientes progresiones:

1) Encontramos el quinto término de: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots$

2) Calculamos el octavo término de: $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$

3) Determinamos si la siguiente sucesión es o no una progresión armónica: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$

4) Tres términos están en PH, calculamos el valor de x si los términos son: $x,\ x{-}8,\ x{-}12$

5. Suma en una sucesión geométrica - infinita decreciente

a) Sucesión geométrica finita

Para lograr sumar los "n" términos consecutivos de una progresión geométrica, es necesario conocer la razón "r", el primer término y el número de términos que se desea sumar en la sucesión.

Formulario

Suma enésima o finita:

$$S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Suma infinita:

$$S_\infty = \frac{t_1}{1 - r}$$

Ejemplo:

Hallamos la suma geométrica finita:

1) Halla la suma de la progresión: $120, 60, 30, 15, \frac{15}{2}, \frac{15}{4}$

$$t_1 = 120;\ t_n = \frac{15}{4};\ n = 6;\ r = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \Longrightarrow S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2} - 120}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{15}{8} - 120}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{945}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{945}{4} = 236.25$$

2) Si el primer término de una progresión geométrica es 3, el último término es 9375 y la suma $11\ 718$, encuentra los valores de r y n.

$$t_1 = 3;\ t_n = 9375;\ S_n = 11\ 718;\ r = ?;\ n = ? \Longrightarrow S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r - 1} \wedge t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

$$11\ 718 = \frac{9375 \cdot r - 3}{r - 1} \Longrightarrow 9375 \cdot r - 3 = 11\ 718r - 11\ 718$$

$$\Longrightarrow 11\ 718 - 3 = 11\ 718r - 9375r \Longrightarrow r = 5$$

$$9375 = 3 \cdot 5^{n-1} \Longrightarrow 5^5 = 5^{n-1} \Longrightarrow 5 = n - 1 \Longrightarrow n = 6$$

b) Sucesión geométrica finita decreciente

Existen progresiones geométricas, donde cada término va decreciendo de tal forma que sus términos se aproximan a cero, analicemos el siguiente conjunto $\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$ en decimales, el conjunto se puede entender como,$\{2,\ 1,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.125,\ 0.0265, \dots\}$entonces vemos que los valores cada vez son más pequeños, a esto es lo que se llama progresión infinita decreciente.

Ejemplo:

Hallamos la suma de la progresión: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$$t_1 = 2;\ r = \frac{1}{2} \Longrightarrow S_\infty = \frac{t_1}{1 - r} \Longrightarrow S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} \Longrightarrow S_\infty = \frac{2}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow S_\infty = 4$$

Actividad

En las siguientes progresiones, encontramos la suma de los:

1) 4 primeros términos de : $3, 9, 27; \dots$

2) 7 primeros términos de: $-3, -12, -48; \dots$

3) 10 primeros términos: $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \dots$

En las siguientes progresiones, encontramos la suma de la progresión finita:

1) $4, 2, 1, \dots$ **2)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$ **3)** $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las progresiones geométricas, al igual que las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real. Veamos algunos casos.

1) Daniela abre una cuenta de ahorro con Bs7000 en una entidad bancaria, el asesor le indica que los intereses se pagan por día a una razón de $1.000\,083$ (así el interés ganará otro interés). Si Daniela decide sacar su dinero cumplido un año, ¿cuál será el monto acumulado y cuánto tiempo deberá dejarlo en la entidad bancaria para ganar un interés de Bs1000?

$$t_1 = 7000; r = 1{,}000\,083; n = 365; t_n = ? \Rightarrow t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

Fuente: Open AI,2024

$$t_n = 7000 \cdot (1{,}000\,083)^{365-1} = 7000 \cdot (1{,}000\,083)^{364} = 7217{,}70$$

Al cumplir el año de ahorro, Daniela tendrá un monto de Bs$7214{,}70$. Ahora calculamos el tiempo "n" que deberá esperar para ganar un interés de Bs1000, entonces:

$$t_1 = 7000; r = 1{,}000\,083; t_n = 7000 + 1000 = 8000 \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{8000}{7000}\right)}{\ln(1{,}000\,083)} + 1 \approx 1610$$

Daniela tendrá que esperar aproximadamente 1610 dias para ganar un interés de Bs1000.

2) El crecimiento poblacional en Bolivia se ha ido dando a una razón de 1.19 cada 10 años. Si en 1990 teníamos una población de 6.86 M (millones), ¿qué población tuvo Bolivia él 2020?, estimar la población de Bolivia en 2030 y 2050. El cálculo se lo realiza cada 10 años, por lo tanto:

$$t_1 = 6.86;\ \ r = 1.19;\ \ n = 4;\ \ t_n = ?\ \Rightarrow t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$
$$t_4 = 6.86 \cdot (1.19)^{4-1} = 6.86 \cdot (1.19)^3 = 11.56$$

En el año 2020 Bolivia tuvo una población de 11.56 M de habitantes aproximadamente.

$$t_1 = 6{,}86;\ \ r = 1.19;\ \ n = 5;\ \ t_n = ?\ \Rightarrow t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$
$$t_5 = 6.86 \cdot (1.19)^{5-1} = 6.86 \cdot (1.19)^4 = 13.75$$

En el año 2030 Bolivia tuvo una población de 13.75 M de habitantes aproximadamente.

$$t_1 = 6{,}86;\ \ r = 1.19;\ \ n = 7;\ \ t_n = ?\ \Rightarrow t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$
$$t_7 = 6.86 \cdot (1.19)^{7-1} = 6.86 \cdot (1.19)^6 = 19.48$$

En el año 2050 Bolivia tuvo una población de 19.48 M de habitantes aproximadamente.

3) Supongamos que el lunes gané Bs200 y después diariamente gané el doble del día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?

$$t_1 = 200; r = 2; n = 6; t_n = ? \Rightarrow t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow t_6 = 200 \cdot 2^{6-1} = 200 \cdot 2^5 = 200 \cdot 32 = 6400$$

El día sábado gane un monto de Bs6400.
Ahora calculamos el monto final, que se ganó de lunes a sábado:

$$t_1 = 200; r = 2; n = 6; S_n = ? \Rightarrow S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{6400 \cdot 2 - 200}{2 - 1} = \frac{12\,800 - 200}{1} = 12\,600$$

La suma de mis ganancias es de Bs$12\,600$.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Un recipiente contiene 36 litros de alcohol puro, se sacan seis litros y se reemplazan con agua, si esta operación se efectúa seis veces, calcular la cantidad de alcohol puro que queda en el recipiente.

2) Una persona pide un préstamo de Bs800 al 1% de interés compuesto mensualmente. Esta persona saldará el préstamo en un único pago al cabo de 36 meses ¿a cuánto asciende la cantidad a pagar?

VALORACIÓN

Las progresiones aritméticas y geométricas son secuencias de números que tienen una relación constante entre cada término. Las progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre cada término es constante, mientras que las progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente entre cada término es constante.

Analizamos la importancia que tienen las progresiones y su aplicación en situaciones de la vida cotidiana de las personas y respondemos:

- ¿Cómo se aplican las progresiones aritméticas y geométricas en la naturaleza?
- ¿En qué situaciones de la vida se utilizan las progresiones como una herramienta importante para la solución de problemas?

Fuente: Open AI,2024

PRODUCCIÓN

- Investigamos y elaboramos un informe sobre las generalizaciones que utilizan los bancos para el préstamo y ahorro de dinero.

- Para nuestra investigación, utilizamos herramientas como celulares que fortalezcan la importancia de las progresiones.

- Realizamos un diagrama de la obtención de los números de la serie de Fibonacci.

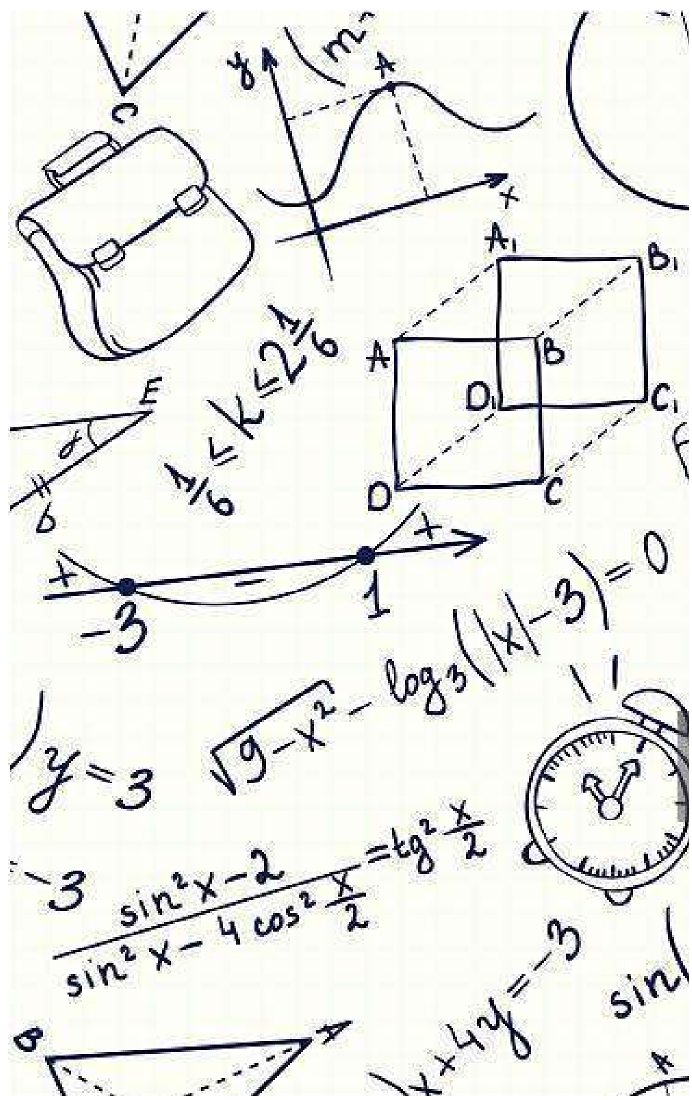
- Investigamos el valor del número áureo y como se da su valor.

- El número áureo está relacionado con la belleza, desde la época griega, se relaciona con las proporciones de belleza de las personas. Así:

$$r = \frac{\text{altura de una persona}}{\text{distancia del ombligo a los pies}}$$

- Se concluye que mientras más cerca esté "r" de Φ, el cuerpo de una persona será más proporcionado.

- Averigüemos cómo es que los griegos creían mucho en esta fórmula para llegar a la perfección humana.



Fuente: https://www.gettyimages.es/ilustraciones/matematicas

MATEMÁTICA FINANCIERA

PRÁCTICA

Luciana decide realizar un curso en un instituto tecnológico. La institución le da la opción de pago al contado, el cual contempla un descuento, pero elige la opción de pago por cuotas mensuales en un plazo de 6 meses con una tasa de interés mensual al 2% en lugar de un pago al contado por Bs500.

Fuente: Open AI,2024

Actividad

Luego de leer la situación anterior, respondemos:

- ¿La decisión que tomó Luciana, es la más adecuada económicamente?
- ¿Cuál es la diferencia económica entre pagar el curso al contado y pagarlo en cuotas?

TEORÍA

1. Importancia de la matemática financiera

Radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos, en muchas áreas del área de finanzas y en la vida cotidiana de las personas y empresas, por ello resulta imprescindible su comprensión, pues los errores que se cometen tienen repercusión directa en el bolsillo tanto de las personas como de las empresas.

Hoy por hoy, uno de los más importantes fenómenos de análisis en la economía es el crecimiento, administración, ganancias y pérdidas que se dan del dinero. Siendo este aspecto el que se puede estudiar mediante la matemática financiera.

Cuentas claras

Pagar los servicios domiciliarios y otros gastos deben ser planificados por todas las familias bolivianas.

Fuente: Open AI,2024

A continuación, se apuntan algunas preguntas que las matemáticas financieras podrían ayudar a responder:

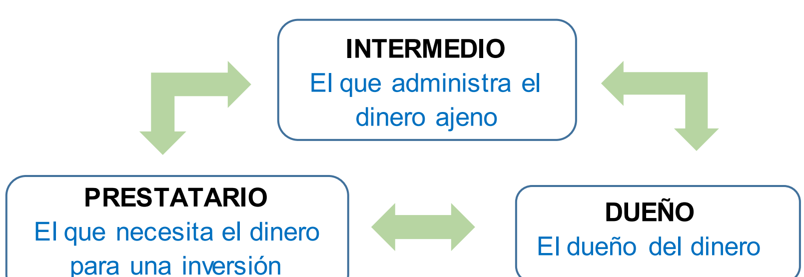
- Es más aconsejable ¿ejecutar un proyecto o realizar una inversión?
- ¿Conviene recurrir a un crédito bancario para ampliar la infraestructura y así incrementar el nivel de producción?
- ¿Cómo se determina el valor del dinero en el tiempo?

Las respuestas podrían ayudar a una empresa o un inversionista a tomar decisiones, para ejecutar proyectos o para determinar que su ejecución no conviene por no ser factible.

Definición

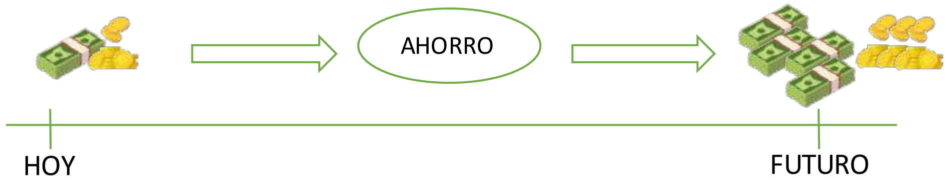
La matemática financiera, es el estudio del dinero en el tiempo, donde intervienen elementos como capital e interés, lo cual podemos utilizar cuando se ahorra en una cuenta bancaria con el fin de obtener ganancias económicas en el futuro, o cuando se accede a un préstamo que a futuro se debe devolver con un pago adicional.

Habitualmente se presentan tres aspectos en las transacciones financieras, este aspecto es denominado como el triángulo financiero.



2. Valor del dinero en el tiempo

Se refiere a un concepto económico que explica el fenómeno por el cual el dinero presente, que puede ser expresado en cualquier divisa, tendrá un menor poder de compra en el futuro.
La tasa de interés es la variable que determina la equivalencia de un monto de dinero en dos periodos distintos de tiempo.



El valor del dinero en el tiempo permite entender cómo cambia el poder adquisitivo del dinero, así como los diferentes métodos que se utilizan para realizar ese cálculo. De acuerdo a las situaciones cotidianas, conocer y aplicar el valor del dinero en el tiempo permitirá tomar decisiones en relación a aspectos financieros, de tal modo que el dinero pueda ser empleado de mejor manera, sea de forma personal, familiar o grupal. Hay que tomar en cuenta que la unidad de dinero hoy tiene más valor que la unidad de dinero en el futuro, ya que el dinero en el tiempo tiene la capacidad de generar más valor.

Por ello, será de gran importancia conocer el funcionamiento de la inflación, la cual consiste en "una escalada generalizada y prolongada de los precios", es decir que "cada vez se pueda comprar menos con la misma cantidad de dinero".

El dinero tiene un valor, el cual va cambiando mientras pasa el tiempo, un ejemplo de ello es el cambio del precio del pan, hace 30 años podías comprar 10 panes por Bs1, pero hoy por hoy solo puedes comprar 4 panes por Bs2, por ese motivo el estudio del dinero en el tiempo es importante. Analizar el dinero en el tiempo nos permite entender que:

- Bs100 el día de hoy, es diferente a Bs100 de un día futuro.
- El valor del dinero permite analizar distintas oportunidades.
- Existen riesgos financieros a la hora de invertir.

Fuente: Open AI,2024

Cálculo del valor del dinero en el tiempo

Considérese esta situación, a alguien le gustaría comprar un automóvil y puede ofrecerle $150\ 000$ bolivianos por él hoy o $155\ 000$ si pueden pagarle dentro de dos años. El valor del dinero en el tiempo nos enseña que $150\ 000$ hoy valen más de $155\ 000$ en dos años.

La fórmula que calcula el valor futuro del dinero es:

$$F = A \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \cdot i}$$

F: valor en el futuro
A: valor actual del dinero
i: tasa de interés
t: número de años a tener en cuenta
n: número de períodos de interés compuesto por año

Ejemplo:

Supongamos que se invierte en la compra de un automóvil hoy por Bs$150\ 000$, del cual se paga 2% cada año, compuesto mensualmente. El cálculo del dinero dentro de dos años será:

$$F = 150\ 000 \cdot \left(1 + \frac{0.2}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 156\ 120$$

De este modo, los Bs$150\ 000$ que se obtienen hoy por el automóvil, dentro de dos años tendrán un valor de Bs$156\ 120$.

Actividad

Algunos bolivianos en su mayoría compran, en un mercado o tienda, el producto que quieren adquirir con un costo de Bs100, algo que hace 5 años lo hubieran adquirido con menor cantidad.

1) ¿Por qué creemos que se da esta situación?

2) ¿Cómo influye en la vida diaria de las y los bolivianos?

3) ¿Por qué el precio de los productos de la canasta familiar tiene costo diferente de un día al otro?

¿Es bueno prestarse dinero?

Imagina por un momento que estás en un lugar alejado y te quedas sin crédito, pero necesitas hacer una llamada urgente a tu mamá, así que le dices a tu amigo que te pase Bs10 de crédito, pero tu amigo te dice que tendrás que devolverle 11. ¿Estarías de acuerdo con ese trato?

Algo de historia

En la Edad Media, la Iglesia consideraba al interés como un pecado de usura, basado en cobrar una moratoria por el tiempo que transcurrió cuando el tiempo era propiedad única de Dios.

En el Renacimiento surge la idea del arrendamiento del dinero como cualquier otro bien, ya que el costo del paso de tiempo empezó a ser entendido como un 'costo de oportunidad'.

En la Época Moderna, la economía clásica introdujo los primeros estudios acerca del tipo de interés. Adam Smith fue el primer exponente de la escuela que creía que el dinero, como mercancía, estaba sujeto a la oferta y la demanda, las que, en el punto de equilibrio, consensuaría una tasa de interés.

Fuente: Open AI,2024

3. Interés y tasa de interés

Cuando se recurre a préstamos monetarios, el acto de "pedir prestado" tiene un costo, que es conocido como tasa de interés. Este costo lo determina el prestamista y es asumido por el prestatario, conviniendo un tiempo determinado entre ambas partes.

a) Interés

Este término es más conocido como "tipo de interés", básicamente es el dinero que se utiliza a cambio de cierta cantidad de dinero. Es medido en porcentaje y casi siempre es expresado en términos anuales.

Los intereses varían de una operación a otra, los factores pueden ser analizados por riesgo en cada entidad bancaria, así si el riesgo es mayor, mayor será el interés.

Para la persona que accede a un préstamo el interés y el coste del capital son los mismos, pero para la entidad que presta el dinero el interés equivale al rendimiento de la operación.

Dentro del sistema financiero se tienen dos tipos de interés, que son:

Interés simple

Es el dinero que se obtiene cuando los intereses que se producen lo hacen a partir del capital inicial.

Interés compuesto

Es el dinero que se obtiene cuando los intereses producidos se suman periódicamente al capital inicial, por lo que reproducen su ganancia.

Fuente: Open AI,2024

b) Tasa de interés

La tasa de interés, llamado también tipo de interés es el precio que una persona o institución debe pagar por solicitar un préstamo. Por lo general, la tasa de interés se expresa como un porcentaje anual.

Existen diferentes tipos de tasa de interés, entre los cuales tenemos:

Tasa de interés fija

Es la tasa de interés cuyo valor no varía en el tiempo que dura el préstamo. El porcentaje acordado al inicio del préstamo se mantiene fijo.

Tasa de interés variable

Es la tasa de interés que está sujeta a cambios. Sucede porque es calculada sobre una tasa de referencia con variación periódica.

Tasa de interés real

Es la tasa de interés que trata de la rentabilidad obtenida luego de restarle efecto a la inflación.

Tasa de interés nominal

Es la tasa opuesta a la tasa de interés real.

El interés simple es el costo que se paga por el uso de dinero que no es propio por un período de tiempo específico, es simple cuando un capital genera ganancias al finalizar el plazo de inversión, o bien si representa el monto final a pagar, en el caso de una deuda. Este concepto se utiliza en el ámbito de los negocios y en el cotidiano cuando ahorramos, invertimos o compramos algún producto a crédito y queremos saber cuál será el monto final a recibir o pagar.

c) Características

b) El capital no se acumula, se paga en periodos.
c) El interés siempre será el mismo, sin importar si es prestado por $2,3,\ldots,$ meses.

d) Elementos

Los elementos del interés simple son:

Capital (C), es el dinero inicial, el cual será la fuente principal del crecimiento del interés.

Monto (M), es el total del dinero acumulado después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.

Tiempo (t), es el espacio que transcurre desde que se presta el dinero hasta el momento de su devolución o pago.

Interés (r), es la cantidad de dinero ganada en un tiempo determinado, generalmente calculada de forma anual.

Tasa de interés (i), es el porcentaje que determina el crecimiento del dinero.

Formulario

Interés:

$$r = C \cdot i \cdot t$$

Monto:

$$M = C + r \Longrightarrow M = C(1 + i \cdot t)$$

Capital:

$$C = M - r \Longrightarrow C = \frac{M}{1 + i \cdot t}$$

Tasa de interés:

$$i = \frac{M - C}{C \cdot t}$$

Tiempo:

$$t = \frac{M - C}{C \cdot i}$$

Ejemplos:

1) Determine el interés y el monto que genera un capital (C) de Bs4000, depositados en el banco a una tasa de interés (i) del 4% $(0{,}04)$, durante (t) de 5 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuestas
$r = C \cdot i \cdot t$	$M = C + r$	Al finalizar los 5 años, los Bs4000 se
$r = 4000 \cdot 0.04 \cdot 5 = 800$	$M = 4000 + 800 = 4800$	convertirán en Bs4800

2) Se solicita un préstamo de Bs140 000 para devolver en 2,5 años con un interes del 5% (0,05) anual, halla el capital final a pagar durante ese tiempo.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuestas
$r = C \cdot i \cdot t$	$M = C + r$	Al finalizar los 2.5 años, los Bs140 000
$r = 140\,000 \cdot 0.05 \cdot 2.5 = 17\,500$	$M = 140\,000 + 17\,500 = 157\,500$	se convertirán en Bs157 500

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas sobre interés simple:

1) Una familia pide un préstamo de Bs7000 para pagar en 3 años a un interés del 4.5%. Hallamos la cantidad que debe pagar al cabo de 3 años.

2) Calculamos el interés y el capital final si se tiene un capital Bs5000 para pagar en 4 años a interés del 4%.

3) Encontremos el interés y el capital final si se tiene un capital Bs$50\,000$ para pagar en 60 meses a un interés del 4.5%.

4) Calculamos el capital que se debe imponer al 5% para formar al cabo de 6 años una suma de Bs$120\,000$.

5. Tasa, tiempo, capital, valor, valor final, valor actual y descuentos a interés simple

a) Tasa

Dentro la economía global, la tasa hace referencia a las expectativas existentes sobre la tasa de inflación o deflación, al riesgo asociado al tipo de activo que los inversores exigen una tasa de interés mayor como contrapartida para asumir mayores riesgos.

Algo de historia

Según datos del Banco Central, entre 1982 *y* 1985, *la moneda boliviana se devaluó más de un millón de veces. El dólar, en agosto de aquel año, cuando Siles dejó el poder ya valía* 1 149 354 *pesos bolivianos. La inflación había escalado para entonces hasta* 11 749.64 *por ciento. Las reservas internacionales habían caído de* 300 *millones de dólares en* 1977 *a cero en* 1983 *para recuperarse hasta algo más de* 100 *en* 1984.

Los bancos utilizan tasas de interés distintas:

- Tasa de interés activa, estos intereses se llaman activos pues son recursos en favor de la entidad bancaria. Son los porcentajes cobrados por servicios de créditos a los mismos prestamistas.
- Tasa de interés pasiva, cuando una persona deposita dinero en el banco, el porcentaje que recibe de parte del banco es la tasa de interés pasiva.
- Tasa de interés preferencial, frecuentemente, las entidades bancarias habilitan un porcentaje inferior al "normal", este es el interés preferencial, sucede para promover ciertas políticas en el banco o privilegiar a sectores como el gremial, por ejemplo.

b) Tiempo

Es el intervalo de unidades de tiempo que transcurre del inicio al final del préstamo, es conocido como plazo. Algo para tomar en cuenta y que es muy importante sobre todo en el cálculo de intereses y resolver los problemas financieros, los datos de tiempo (t) y la tasa de interés (i) deben estar referidas en una misma unidad de tiempo.

Ejemplos:

- Si la tasa es anual y el tiempo es de 5 años, entonces $n=5$.
- Si la tasa es anual y el tiempo es de 7 meses entonces $n=\frac{7}{12}$.
- Si la tasa es mensual y el tiempo es de 2 años entonces $n=12\cdot2=24$.
- Si la tasa es trimestral y el tiempo es de 5 años entonces $n=5\cdot4=20$.
- Si la tasa es anual y el tiempo son 5 cuatrimestres entonces $n=\frac{5}{3}$.

c) Capital

Una entidad bancaria tiene el capital que se expresa en todos los recursos físicos y financieros, los mismos que son obtenidos de aportes de socios o accionistas u otro medio con el fin de producir un valor.
También se le conoce como valor presente o valor actual del dinero. El capital puede ser:

Capital financiero, es el valor de las inversiones a corto plazo que mantiene una entidad con otras instituciones. Se puede ver reflejada de formas diferentes, ya sea en acciones, préstamos, etc.

Capital de riesgo, son fondos donde un inversionista coloca en empresas, sectores, transacciones o instrumentos de alto riesgo, innovación y elevado crecimiento para lograr sobre los mismos un rendimiento o ganancia mayor a lo normal.

Capital variable, es el capital dentro de una sociedad que varía al cambiar el número de socios que hay en ella y por ende los recursos originales que habían puesto en ella (capital social).

Capital fijo, son los bienes dentro de una empresa, llamados también de largo plazo, o activos, que se espera hacer uso de ellos hasta dentro de un año o más, normalmente incluyen propiedades, terrenos, maquinarias, etc.

d) Valor

El valor del dinero no es constante, pierde su valor a través del tiempo por diferentes razones como la inflación. El tiempo es la variable que influye en el valor del dinero, asimismo el dinero es un activo con el que se puede generar más dinero, de este modo, surgen dos conceptos importantes a tratar: el valor actual y el valor futuro del dinero.

e) Valor final

El valor final de una determinada transacción es el término 'valor futuro', se refiere al dinero que puede generar cierta inversión en una fecha próxima o planificada. Se comprende como la suma del capital invertido más los intereses.

$M=C+r;$ C:capital invertido, r:interes

f) Valor actual

El valor presente o valor actual, se refiere al valor del dinero en tiempo presente. Como el valor del dinero no es constante, su cálculo es importante porque permite saber cuál es el monto actual con que se cuenta, con este dato se pueden realizar cálculos futuros en función del valor actual.

g) Descuentos a interés simple

Las que se pueden reducir antes de vencer una cantidad prestada, se denominan descuentos a interés simple. Existen dos tipos de descuento para el interés simple:

Descuento comercial o bancario, es el que se aplica sobre el valor nominal del documento, puede decirse que es el interés simple del valor nominal. En este tipo de descuento, el interés se cobra por adelantado, en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento.

$VP = N \cdot (1 - d \cdot t)$	VP: valor presente d: tasa de descuento	N: valor nominal de descuento t: tiempo

Descuento real o justo, a diferencia del descuento comercial, el descuento real o justo se calcula sobre el valor real que se anticipa y no sobre el valor nominal.

$$VP = \frac{N}{1 + i \cdot t}$$

Ejemplos:

1) Encontramos el valor actual y el descuento racional al 1 de enero de un documento por Bs7200, que debe ser pagado el 20 de febrero, suponiéndose la tasa de interés simple del 2% anual.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$N = 7200$ $i = 0.02$ $t = \frac{50}{365} = \frac{10}{73}$	$VP = \frac{N}{1+it}$; $D = N - VP$ $VP = \frac{7200}{1 + 0.02 \cdot \frac{10}{73}} = 7180.33$ $D = 7200 - 7180.33 = 19.67$	El descuento asociado es Bs19.67

En el contexto comercial, el descuento consiste en la disminución concedida al pago o deuda por diferentes razones, estas pueden ser promociones, liquidaciones, etc.

2. A una laptop que se vende en galerías con un valor de Bs5000, se le aplicaron dos descuentos sucesivos de 3.5% y de 6%, ¿cuál fue su precio final?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$P=5000$ $m_1=3.5$ $m_2=6$	$D=P\cdot\frac{100-m_1}{100}\cdot\frac{100-m_2}{100}$ $D=5000\cdot\frac{100-3.5}{100}\cdot\frac{100-6}{100}=4535.5$	El precio final con los descuentos es de Bs4535.5

Interés

La diferencia entre interés simple y compuesta radica en que el interés simple ocurre cuando éste se calcula sobre el capital inicial y se obtienen intereses fijos, mientras que el interés compuesto se suma al capital, se calcula sobre el capital aumentado y los intereses se incrementan en cada periodo. El interés compuesto puede hacer que los ahorros crezcan más rápido o hacer que los préstamos se vuelvan más costosos.

Formulario

Interés:

$$r=M-C$$

Monto:

$$M=C(1+i)^t$$

Capital:

$$C=M-r\Rightarrow C=\frac{M}{(1+i)^t}$$

Tasa de interés:

$$i=\sqrt[t]{\frac{M}{C}}-1$$

Tiempo:

$$t=\frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

6. Interés compuesto en actividades financieras

a) Definición

El interés compuesto se entiende como el interés en el que el capital cambia al final de cada periodo; sucede porque los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital al que se denomina monto y sobre este monto se vuelven a calcular intereses, es decir que se capitalizan los intereses. La suma total que se obtiene al final es conocida como el monto compuesto o valor futuro. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina interés compuesto.

b) Características

- El capital inicial crece ya que en cada periodo se suman los intereses.
- La tasa de interés es aplicada sobre el capital que cambia.
- Los intereses aumentan periodo a periodo.

c) Elementos

Los elementos del interés compuesto al igual que en el interés simple son:

Capital (C), es el dinero inicial, el cual será la fuente principal del crecimiento del interés.

Monto (M), es el total del dinero acumulado después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.

Tiempo (t), es el espacio que transcurre desde que se presta el dinero hasta el momento de su devolución o pago.

Interés (r), es la cantidad de dinero ganada en un tiempo determinado, generalmente calculada de forma anual.

Tasa de interés (i), es el porcentaje que determina el crecimiento del dinero.

Ejercicios resueltos:

1) ¿Cuánto será el monto que producirá un capital de Bs$25\,000$, al 3% anual en 4 años?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C=25\,000$ $i=3\%=\frac{3}{100}=0.03$ $t=4$	$M=C(1+i)^t$ $M=25\,000(1+0.03)^4=28\,137.72$	El monto que producirá el capital en 4 años será de Bs$28\,137.72$

2) Mario invierte Bs$100\ 000$ al 6% acumulándose los intereses cada 6 meses. Halla el capital final y el interés al cabo de 2 años.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C = 100\ 000$ $i = \frac{1}{2} \cdot 6\% = 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$ $t = 2 \cdot 2 = 4$	$M = C(1+i)^{t}$ $M = 100\ 000(1+0.03)^{4} = 112\ 550.88$	El capital final al cabo de 2 años se convierte en Bs$112\ 550.88$.

3) Hallamos la tasa de interés que se debe invertir de Bs$35\ 000$ (C) para tener al cabo de 4 años (t) Bs$55\ 000$ (M).

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
M=55 000 C=35 000 t=4	$i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1$ $i = \sqrt[4]{\frac{55\ 000}{35\ 000}} - 1 = 0.11963$	i=0,11963·100%=11,96% La tasa de interés será aproximadamente $11{,}96\%$.

4) Paola depositó al Banco un capital de Bs$10\ 000$ (C), a un interés (i) del 3% anual para que se convierta en Bs$12\ 200$ (M), ¿cuántos años debe estar en el banco?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
M=12 200 C=10 000 $i = 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$	$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$ $t = \frac{\ln\left(\frac{12\ 200}{10\ 000}\right)}{\ln(1+0.03)} = 6.77$	El tiempo que Paola debe tener depositado su dinero aproximadamente es de 6.77 años.

5) Encontramos el interés de un capital invertido en bienes raíces que asciende a un monto de Bs$150\ 000$, a una tasa de interés del 5% cobrados anualmente, el tiempo de inversión es de 3 años.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C = 150\ 000$ $i = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ $t = 3$	$M = C(1+i)^{t}; \quad r = M - C$ $M = 150\ 000(1+0.05)^{3} = 173\ 643.75$ $r = 173\ 643.75 - 150\ 000 = 23\ 643.75$	El interés cobrado por el capital invertido es de Bs23 643.75.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas sobre interés compuesto:

1) ¿En cuánto se convertirán Bs1200 al 3% anual, en 2 años, capitalizando los intereses por semestres?

2) Una cantidad prestada por el 4% anual de interés compuesta se convierte en Bs$97\ 260$ durante 4 años, ¿cuál fue la cantidad prestada?

3) Hace 4 años se pidió un préstamo de Bs9000 y la cantidad pagada al terminar el período del préstamo han sido Bs9500, ¿qué tipo de interés se aplicó?

4) ¿Cuántos años debe estar un depósito de Bs8000, a un interés compuesto del 5% anual para que se convierta en Bs$10\ 000$?

5) Rubén, por un préstamo de Bs$20\ 000$, ha tenido que pagar Bs$22\ 500$ al cabo de un año, ¿cuál es la tasa de interés que ha cobrado la institución financiera?

Origen de los créditos

Fuente: Open AI,2024

Los créditos se originan al rededor del 3000 a.C. Se tiene evidencia, según distintas fuentes revisadas, que este tipo de operaciones se dieron en Mesopotamia.

Asimismo, existieron operaciones de crédito en la antigua Grecia y Roma. Los romanos llegaron a establecer leyes, tanto para regular los intereses como para castigar el impago de las deudas.

7. Créditos, inversiones y utilidades

a) Créditos

Un crédito es un préstamo de dinero que una persona recibe a cambio de que esta devuelva el valor recibido, junto a un porcentaje de intereses que debe pagar en un tiempo determinado, definido entre el acreedor y el deudor. Así, el acreedor es aquella persona o empresa que otorga el dinero en calidad de préstamo y tiene derecho a cobrarlo, mientras que el deudor es la persona o institución que debe el monto de dinero prestado (además de los intereses) y tiene en la obligación de pagarlo.

Los aspectos que se deben tomar en cuenta al adquirir un crédito o préstamo son:

Tasa interés, costo que las entidades bancarias cobran sobre el monto financiado y que deben ser pagados en cada una de las cuotas.

Plazo a pagar, tiempo comprometido por el deudor para realizar el pago total del crédito, lo que incluye capital, intereses y seguros.

Cuotas, valor periódico (mensual, trimestral…) que deben ser pagados por el plazo acordado.

Garantías, soporte que respalda la obligación que se adquiere con la entidad financiera al momento de otorgarse el crédito.

Los tipos de créditos más comunes son:

Créditos de consumo, monto de dinero que la entidad financiera otorga a las a personas por la adquisición de bienes o pago de servicios y que es pagado en corto o mediano plazo. El ejemplo son las facturas de luz, agua y otros servicios comunes.

Créditos comerciales, monto de dinero que la entidad financiera otorga a empresas con el fin de satisfacer necesidades de capital de trabajo, adquirir bienes, pago de servicios que se orientan a la operación de la misma o el refinanciamiento de pasivos con otras instituciones y proveedores de corto plazo. Estos créditos son pagados en corto o mediano plazo. Por ejemplo, cuando se apertura una microempresa.

Créditos hipotecarios, monto de dinero que el Banco otorga para la adquisición de una propiedad ya construida o un terreno. También aplica para la construcción de viviendas, oficinas y otros bienes raíces. La garantía de la hipoteca es sobre el bien adquirido o construido; puede ser pagado en mediano o largo plazo.

Albert Einstein

Fuente: Open AI,2024

Matemático, físico, diplomático y profesor, alemán, calificó el interés compuesto como "la fuerza más poderosa de la galaxia".

Los créditos presentan:

Ventajas

- Permiten sobresalir en emergencias, cuando se requiere de liquidez en el momento.
- Permiten acceder a pagos importantes como estudio a sola adquisición de bienes de costo alto.
- Impulsa la actividad de la economía, desde el punto de vista macroeconómico, permitiendo dinamización en el consumo económico diario.

Desventajas

- Se deben pagar intereses, esto implica que las compras a crédito resultan de mayor costo que cuando se compra en efectivo. Muchas personas no analizan esta desventaja y caen en versiones tramposas de algunas casas de crédito.
- El deudor podría enfrentar alguna dificultad económica en el futuro, pues su capacidad para devolver lo prestado podría disminuir y no ser suficiente.
- Cualquier crédito ocasiona endeudamiento permanente a las familias cuando se dejan llevar por el consumismo desmedido e irresponsable. Esta podría ser una de las razones principales de que las familias caigan en problemas económicos.

b) Inversiones

El significado de inversión se rige bajo los factores: rentabilidad, riesgo, liquidez y plazo; lo que se comprende que es lo que ganamos, lo que podríamos perder y el tiempo.

Rentabilidad, es lo que se obtiene luego de realizar la inversión, habitualmente se mide en términos de beneficio y de rentabilidad.

Riesgo, es el nivel de incertidumbre luego de adquirir cierto monto. Es recomendable estar consciente del riesgo que se toma al invertir, por si esta no sale bien.

Liquidez, se entiende como la capacidad de convertir una determinada inversión en dinero que no tenga pérdidas con relación a su valor inicial.

Plazo, es el tiempo de duración de la inversión.

En estos tiempos, cualquier persona puede invertir, no es una capacidad neta de las personas que tienen más o menos. Por ejemplo, se puede invertir en la bolsa de valores para ganar dinero, sacando rentabilidad de cierto dinero ahorrado.

c) Utilidades

A menudo se utiliza el término “utilidad” para hacer referencia a la medida de satisfacción de un consumidor cuando adquiere cierto producto, el concepto de utilidad podría ser subjetivo y no poderse medir.

Las unidades de medida de la utilidad son las “utilidades” y el beneficio que los consumidores pueden adquirir es difícil de calcular.
La función de utilidad es el valor numérico asignado a cada cantidad de los bienes que el consumidor elige, por tanto, cuando mayor es ese valor, la situación del comprador mejorará.

Las características de la función de utilidad son:

- La utilidad incrementa de forma creciente y cuando llega a su valor máximo la utilidad comienza a disminuir.

- Cuando el bien adquirido es consumido frecuentemente, la satisfacción total crece, pero llegando a un punto las variaciones en la utilidad serán menores.

- Matemáticamente puede demostrarse que, si es posible modelizar la conducta de un consumidor perfectamente racional mediante funciones de utilidad convexa, entonces esta conducta puede resumirse mediante una curva de demanda decreciente.

8. Emprendimientos productivos

La matemática financiera nos permite realizar diferentes actividades, desde el préstamo para la apertura de un negocio, o la planificación de pagos de la compra de una casa. El objetivo de la matemática financiera es hacer que el dinero trabaje para obtener beneficios económicos para las personas, de tal forma que podremos mencionar aspectos en los cuales podemos aplicar las matemáticas financieras.

Crédito préstamo

Fuente: Open AI,2024

De hecho, aunque tienen muchas cosas en común, conocer las diferencias puede hacernos aprovechar el dinero de una forma mucho más eficiente. En términos generales, el préstamo es en forma mucho más acotado que el crédito, el cual es más flexible. Digamos que el préstamo se concede todo de una vez, el crédito es dinero disponible el cual podemos utilizar o no.

Ahorro e inversión

Fuente: Open AI,2024

El ahorro es aquel dinero que guardamos para poder disponer de él en el futuro. Renunciamos a gastarlo en el presente, poniéndolo en un lugar seguro y sin riesgo, pero que suele generar intereses.

Por otro lado, la inversión es aquel dinero que renunciamos a gastar en el presente para que en el futuro nos aporte un dinero extra. Esta ganancia extra que nos aporta la inversión con respecto al ahorro se debe a que con la inversión estamos arriesgando nuestro dinero y por ello recibimos una compensación.

- Efectuar pagos de préstamos a entidades financieras, de tal forma que podamos evitar intereses elevados. Realizar depósitos de dinero, de tal forma que vaya ganando intereses (ahorro, intereses a plazo fijo, bonos, etc.).

- Emprendimientos individuales de préstamo de dinero a personas de escasos recursos.

- Préstamos para pequeñas, medianas y grandes empresas.

a) Definición

El emprendimiento es la iniciativa de un individuo o un grupo de individuos que toman un riesgo económico e invierten en recursos para aprovechar la oportunidad que el mercado le brinda.

Las personas que toman el riesgo descrito anteriormente, son denominadas emprendedores y deben tener ciertas capacidades para lograr éxitos. En nuestro país existen personas que iniciaron negocios que, con el tiempo, les da rentabilidad y estabilidad económica para sus familias, esto sucede con la capacidad de adaptación que las personas presentan al momento de asumir el riesgo.

Los emprendimientos comienzan con ideas que responden a ciertas necesidades. Es como tomar un viaje con el objetivo de hacer realidad la idea inicial.

b) Tipos de emprendimiento

Unipersonal, se conforma por la iniciativa de emprendimiento formado por una sola persona, en Bolivia existen variadas empresas unipersonales con servicios también variados.

Sociedad colectiva, se conforma por la iniciativa de varias personas, un grupo de personas, quienes conforman una sociedad e invierten un patrimonio económico con una participación en la dirección o gestión de la empresa.

Fuente: Open AI,2024

Fuente: Open AI,2024

Cooperativas, está conformada por cooperativistas, personas que de manera organizada participan en una constitución sin fines de lucro. Los miembros de la cooperativa son trabajadores, pero también hay proveedores y clientes de empresa.

c) Características

Las características de un emprendedor, al momento de convertir una idea en negocio rentable son:

- Espíritu, el dinamismo, la creatividad y la curiosidad con elementos del emprendedor con espíritu empresarial, esto le permitirá emprender un negocio con oportunidades de prosperidad.
- Capacitación, un emprendedor debe tener conocimientos suficientes para consolidar la idea en una empresa.
- Marco regulatorio, el conocimiento legal es otro aspecto importante que debe conocer un emprendedor, esto para poner en práctica su conocimiento legal en la creación empresarial.
- Financiación, debe tener una fuente de financiamiento para la actividad generada.
- Red, involucra a otros actores formando una red de trabajo con el fin de trabajo sinérgico con otros emprendedores.

Actividad

Realizamos un cuadro didáctico donde se puedan describir los elementos que se estudian en matemática financiera, de tal forma que sirva como recordatorio.

Investigamos las siguientes actividades que se dieron en Bolivia años atrás:

1) ¿Qué año se dio el mayor porcentaje de inflación?

2) ¿Cómo influye en la vida diaria de los bolivianos y bolivianas?

3) ¿Qué políticas o estrategias se podría adoptar o implementar para revertir y mejorar la situación económica del país?

VALORACIÓN

Supongamos que tenemos cierta cantidad de dinero y decidimos simplemente guardarla en casa, en lugar de invertirla, la inflación reducirá el valor del dinero que tenemos, pero si en una fecha futura decidimos invertir, nuestro dinero tendrá un menor poder de compra.

- ¿Por qué creemos que las y los bolivianos prefieren guardar su dinero en casa?
- ¿Cómo calificamos el sistema financiero del país?
- Valoramos el poder de decisión financiero que debemos practicar para mejorar nuestra situación económica, personal, familiar y comunitaria.
- Reflexionamos y analizamos cómo el dinero que no se invierte pierde su valor en el tiempo.

Para evitar pagar el interés compuesto, solicita préstamos que cobren interés simple.

Los préstamos grandes como hipotecas y préstamos para compra de vehículos utilizan una fórmula de interés simple.

Las tarjetas de crédito y algunos otros préstamos con frecuencia utilizan el interés compuesto, por ello, es recomendable utilizar tarjetas de crédito de manera prudente y asegurarse de liquidar el saldo del estado de cuenta cada mes.

PRODUCCIÓN

Realizamos un cuadro didáctico donde se puedan describir los elementos que se estudian en matemática financiera, de tal forma que este sirva como recordatorio:

- ¿Cuáles son los principales conceptos que deben incluirse en el cuadro didáctico para representar los elementos de matemática financiera (por ejemplo, interés, valor presente, valor futuro, tasa de interés, etc.)?
- ¿Qué estructura visual sería más efectiva para organizar la información en el cuadro didáctico (tabla, diagrama de flujo, mapa conceptual u otro)?
- ¿Qué ejemplos prácticos o ecuaciones clave se podrían incluir en el cuadro didáctico, para facilitar su comprensión y recordatorio?

Fuente: Open AI,2024

LA LÓGICA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

PRÁCTICA

Analizamos las situaciones que se plantean en la imagen y escribe una respuesta.

En nuestra vida diaria existen situaciones donde se debe decidir algo o dar una respuesta o solución, aunque es cierto que cada uno de nosotros es un mundo diferente y las respuestas, como soluciones pueden ser diferentes, existen situaciones en que, aunque quisiéramos, no podemos negar su razón.

Nota. Elaboración propia

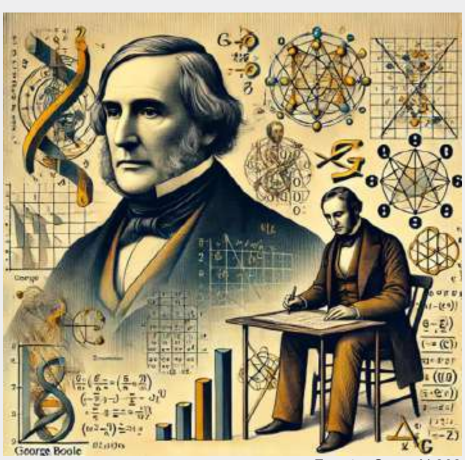
Actividad

Subrayamos la palabra que corresponde a la oración planteada:

- **Laura utiliza el color… .... , para pintar el cuadro de una noche estrellada.**
  a) Rojo b) Negro c) Verde d) Amarillo
- **José y Rodrigo agarran su………………….. y van a la… .... a jugar futbol.**
  a) Bate b) Plaza c) Pelota d) Cuarto e) Raqueta f) Cancha
- **Por normas de urbanidad, cuando una mujer embarazada sube al transporte público, te……**
  a) Haces al dormido b) Pones a chatear c) Insultas d) Levantas y cedes el asiento

TEORÍA

La lógica matemática



Fuente: Open AI,2024

Boole y Frege son los creadores de la lógica simbólica o matemática.

Boole matemático inglés llevó a cabo la completa matematización de la lógica de Aristóteles, usando fórmulas algebraicas para expresar relaciones lógicas.

Definición

“La Lógica, es la disciplina que trata de los métodos, modos y formas del razonamiento humano. Ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no” Lazo (1999).

Mediante la lógica, es posible mejorar el lenguaje, comprender situaciones y planificar proyectos con resultados esperados. Es así que en este capítulo se analizará como incide la lógica en nuestras actividades diarias, además de establecer de qué forma se conectan y representan utilizando el lenguaje matemático.

Pero también se debe mencionar que la lógica matemática, es la disciplina que trata de métodos de razonamiento lógico que se emplea para demostrar teoremas; en computación para verificar si los programas y aplicaciones son correctos o no; en las ciencias para concluir en experimentos, en las ciencias sociales y la vida cotidiana, al resolver problemas.

La lógica matemática debe cuestionar con rigor y reglas de deducción que son utilizados en matemática. La teoría matemática define leyes que relacionan a objetos entre sí, los axiomas deducen nuevas proposiciones y a veces, nuevos objetos.

1. Proposiciones simples y compuestas

La lógica matemática se desarrolló como un instrumento para analizar el conocimiento científico y en especial, el conocimiento matemático. El conocimiento está formado por proposiciones.

a) Proposición

Una proposición es una oración (o enunciado) declarativa, la cual solo se puede establecer si es verdadera o falsa, pero no ambas. Por lo tanto, de una oración declarativa, solo pueden establecerse dos afirmaciones, o bien es Verdadera (V) o bien es Falsa (F).

Ejemplos:

Establece los valores de verdad de las siguientes afirmaciones y subrayamos el correcto.

El Estado Plurinacional de Bolivia cuenta con 9 departamentos	V o F
En Matemática se aprende sobre el uso de anticonceptivos	V o F
El teorema de Pitágoras es una propiedad de todos los triángulos	V o F
Solo los hombres son los que ejercen violencia a las mujeres	V o F
Por un punto pasan infinitas rectas	V o F

Hay que entender que, no todas las oraciones pueden ser proposiciones y por ende, no se puede establecer un valor de verdad, ya que existen oraciones interrogativas, de las cuales no se sabe si son verdaderas o falsas, por ejemplo:

La casa está sola	-3+4-5+1
El perro del vecino	¿Será que mañana llueve?

b) Proposición simple

Una proposición simple o atómica, es aquella oración declarativa que solo tiene una proposición que analizar. Los ejemplos analizados anteriormente son un ejemplo de proposición simple.

Ejemplos:

- Los paceños somos bolivianos.
- Hoy es martes, mañana tendré mi terreno en Buena Vista.
- La tierra gira alrededor del sol.
- 5 es divisor de 30.
- Los números $3, 5, 7$ y 11 son números primos.

Proposiciones

Una proposición simple es una afirmación que no contiene conectores lógicos, expresando una sola idea. Por otro lado, una proposición compuesta es aquella que combina dos o más proposiciones simples mediante conectores lógicos, como "y", "o", "si... entonces", creando una afirmación más compleja.

c) Proposición compuesta

Una proposición compuesta o molecular, es aquella oración declarativa que consta de dos o más proposiciones que analizar, las cuales están unidas por conectivos lógicos.

Ejemplos:

- Si los números pares son los que tienen como unidad: $0, 2, 4, 6, 8$, entonces el 49 es par.
- En la clase de educación física observamos que Adolfo levanta a Mario y Mario levanta a Daniela, por lo tanto, Adolfo levanta a Daniela.
- Las operaciones opuestas son, la adición con la sustracción y la multiplicación con la potenciación.
- $\log_b a = c \Longrightarrow b^c = a$

Las proposiciones compuestas son las que nos permiten comprender algunos razonamientos, los cuales debemos validar y establecer una posición, para se utilizan conectivos lógicos.

Actividad

Validamos las siguientes proposiciones indicando si son verdaderas o falsas:

1) El lunes pasamos Matemática

2) Argentina es campeón del mundo en futbol

3) 153 es divisible entre 7

4) Un triángulo tiene solo 2 vértices

5) $2025^{2024} < 2024^{2025}$

6) La quinua es originaria de Bolivia

7) Mañana es jueves

8) Si mañana es domingo ayer era lunes

2. Notaciones y conectivos lógicos

a) Notación

Es la representación matemática que se utilizará, de tal forma nos permita comprender mejor y simplificar las operaciones que realizaremos. Para las proposiciones simples utilizaremos las letras minúsculas del alfabeto $(p, q, r, s,..., z)$, mientras que para las proposiciones compuestas además de las ya indicadas utilizaremos los conectivos lógicos.
Para estudiar las proposiciones, la lógica construye un modelo matemático del lenguaje corriente.

Lenguaje común	Conector lógico	Nombre del conector	Proposición lógica
no	$\sim$	Negación	$\sim p$
y	$\wedge$	Conjunción	$p\wedge q$
o	$\vee$	Disyunción	$p\vee q$
Si ….. entonces	$\rightarrow$	Condicional o implicación	$p\rightarrow q$
…si y solo si…	$\leftrightarrow$	Bicondicional o Doble implicación	$p\leftrightarrow q$
… ó …	$\veebar$	Disyunción exclusiva	$p\veebar q$

Hay 16 conectores diádicos y 4 monódicos, sin embargo, el sentido lógico de muchas de las conjunciones del lenguaje común puede expresarse con los seis conectores, vale decir:

- La negación es un conector monódico porque se aplica a una sola proposición, se coloca delante de la proposición.
- La conjunción, disyunción, condicional y bicondicional son conectores diádicos porque se aplican a dos proposiciones, se colocan entre ellas dos.
- Para evitar ambigüedades acerca de las proposiciones a las que se aplica un conector, se usan paréntesis, es decir:

$$p\rightarrow(q\wedge r)\neq(p\rightarrow q)\wedge r$$

b) Conectivos lógicos

Son símbolos matemáticos que dependiendo de la acción que se realicen entre las proposiciones, adopta ciertas operaciones. Veamos:

Negación (~): Es la operación lógica que niega una proposición.
“Esta mañana llovió en Sucre” negando la proposición “Esta mañana no llovió en Sucre”.

Conjunción (∧): Es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra “y”, las cuales tienen que suceder una después de otra.
“Iremos al cine y al teatro”

Nota importante

Existen dos tipos de Disyunción que aparecerán en las oraciones o proposiciones: una es incluyente y la otra excluyente, la diferencia radica, en que la incluyente permite realizar una acción sin importar si una de las proposiciones no se cumple, mientras que la excluyente, nos obliga a realizar una acción diferente según sean las condiciones.

Disyunción (∨), es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra “o inclusivo”, lo cual nos indica que una de las operaciones pueda ocurrir, aunque no la otra.
“Haré la tarea de Matemática o de Biología”
Condicional (→), indica que una proposición debe suceder para que suceda la otra proposición.
“Si ésta mañana llovió, entonces el patio está mojado”
Bicondicional (↔), indica que una proposición debe cumplirse, bajo la condición de que la otra también se tenga que cumplir.
“Alfredo correrá en una maratón si y solo sí puede cumplir la marca mínima”
Disyunción exclusiva (⊻), indica que se pueden realizar dos acciones independientes, su representación es la “ó excluyente”.
“Aprobaré el año ó lo reprobaré”

3. Operaciones proposicionales

Es la interpretación matemática de las proposiciones utilizando los conectivos lógicos, además de la representación de las proposiciones por letras que permitan desarrollar las operaciones.

Ejemplos:

Representamos lógicamente, las siguientes proposiciones:

1) Marco irá a la escuela en la tarde .

p: Marco irá a la escuela en la tarde	$\sim p$
$\sim p$: Marco no irá a la escuela en la tarde	

2) Me bañaré y me cambiaré de ropa.

p: Me bañaré	$p \wedge q$
q: me cambiaré de ropa	

3) Dyane correrá en la maratón del colegio o jugará fútbol en su zona.

p: Dyane correrá en la maratón del colegio.	$p \vee q$
q: jugará fútbol en su zona.	

4) Si estudio entonces aprobaré.

p: estudio	$p \rightarrow q$
q: aprobaré	

5) Participaré del campeonato si y solo si tengo la edad establecida en la convocatoria.

p: Participaré del campeonato	$p \rightarrow q$
q: tengo la edad establecida en la convocatoria	

6) O bien está lloviendo, o bien está soleado.

p: O bien está lloviendo	$p \veebar q$
q: o bien está soleado	

Actividad

1) Escribimos la negación de las siguientes proposiciones:

- 15 es un número compuesto
- 7 es un número par
- Mañana jugaremos básquet
- No me duele la cabeza
- $6>6$
- Un triángulo tiene 5 vértices

2) Si p: el puma es un felino, q: el puma vive en África, r: el puma es un carnívoro. Determinamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- El puma no es carnívoro
- El puma es un felino y no es carnívoro
- Si el puma no vive en África entonces es un felino
- El puma es un carnívoro si y solo si vive en África

3) Si p: es viernes, q: jugaré ajedrez, r: saldré a pasear. Determinamos lo siguiente:

- $\sim r$
- $p \wedge r$
- $\sim p \rightarrow q$
- $\sim q \rightarrow r$
- $\sim q \sim p$
- $q \vee r$
- $q \veebar r$
- $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

4) Si p:8−3=3 y q:3·(−4)=−12

- $\sim p$
- $p \wedge q$
- $\sim p \rightarrow q$
- $\sim q \rightarrow \sim p$
- $\sim q \leftrightarrow \sim p$
- $q \vee p$

4. Tablas de valor de verdad

Valor de verdad

Es el establecimiento de la veracidad o falsedad de las proposiciones, tomando en cuenta las diferentes posibilidades de cada proposición. El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende del valor de verdad de cada proposición y del conector lógico que las relaciona.

Los valores de verdad de las operaciones lógicas son:

Negación	
p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción		
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional		
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional		
p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disyunción exclusiva		
p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Sabemos que algunas proposiciones se construyen con 2 o más conectores, para determinar las condiciones en las que esta proposición es verdadera o falsa, se construye una tabla de verdad, una tabla de verdad simplifica muchísimo el desarrollo de encontrar la veracidad o falsedad de una o más proposiciones, para construir una tabla de verdad tomaremos en cuenta los siguientes puntos:

- Se anotan todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples. El número de esas combinaciones está dado por 2^n, donde n es el número de proposiciones simples distintas que aparecen en la proposición compuesta y el 2 indica el número de valores de verdad.
- Se encuentran los valores de verdad de las proposiciones compuestas que son parte de la proposición hasta encontrar los valores de verdad de ésta última.

Nota importante

Dado un conjunto de n variables proposicionales $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ cada variable puede tomar uno de dos valores: Verdadero (V) o Falso (F). El número total de combinaciones posibles de valores de verdad de estas n variables es 2^n.

Justificación:
Cada variable puede estar en uno de dos estados: V (Verdadero) o F (Falso).
Si tienes una sola variable $n=1$ hay $2^1=2$ combinaciones posibles.
Si tienes dos variables, $n=2$ hay $2^2=4$ combinaciones posibles.
En general si tienes n variables hay 2^n combinaciones posibles, porque cada variable agrega una nueva bifurcación (V o F) a cada combinación existente.

Ejemplos:

Construye las tablas de verdad para cada proposición.

1) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

2) $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$\leftrightarrow$	$q \vee \sim q$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

3) $\sim(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\rightarrow$	$q\rightarrow r$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

4) $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$

p	q	r	$\sim r$	$p\wedge q$	$\vee$	$q\wedge\sim r$
V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F

Resolución matemática

Durante el período de los 600 a.C. los griegos establecieron a la matemática como proceso deductivo o de razonamiento lógico que cuestionan rigurosamente las teorías y las reglas de la deducción. Representado por Aristóteles, Platón y Euclides.

Lógica científica

Tuvo lugar en la edad moderna por Immanuel Kant, Se establece mediante leyes que conforman el método científico, que son: la hipótesis, el desarrollo de la investigación y la tesis la cual confirma o niega la tesis.

Lógica matemática

Como disciplina independiente surgió gracias a George Boole. La Lógica estudia la forma del razonamiento, es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. Se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas.

Nota:

$$2^3 = 8$$

La base "2", representa los valores de verdad: V, F el exponente "3", representa la cantidad de proposiciones simples: p, q y r El resultado "8", representa a la cantidad de combinaciones que tomarán los valores de verdad o filas que se deben establecer.

Actividad

Construímos las tablas de verdad para las siguientes proposiciones:

1) $p\vee(\sim p\vee\sim q)$

2) $p\wedge\sim(q\vee p)$

3) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$

4) $\sim(p\wedge q)\rightarrow(q\rightarrow p)$

5) $p\rightarrow(\sim p\wedge q)$

6) $[(p\wedge q)\rightarrow\sim p]\rightarrow(q\wedge\sim p)$

7) $\sim[\sim(q\rightarrow\sim p)]\wedge r$

8) $[p\rightarrow(\sim p\wedge q)]\rightarrow[\sim q\wedge\sim r]$

9) $\{(\sim p\vee q)\vee[(p\rightarrow q)\wedge r]\}\wedge q$

10) $\sim[(p\rightarrow(\sim p\wedge\sim q))\wedge(p\wedge(p\vee q))]$

11) $[(\sim p\wedge q)\rightarrow(q\rightarrow p)]\wedge\sim q$

5. Clasificación de proposiciones compuestas (tautología, contradicción y contingencia)

Una tabla de verdad muestra el valor de verdad que corresponde a una proposición compuesta en todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples que aparecen en ella. De acuerdo con los resultados de su tabla de verdad, una proposición compuesta puede ser:

a) Tautología

Es la conclusión lógica de una proposición, donde TODOS sus valores de la columna resultado son verdaderos (V), indica que dicha proposición es verdadera o llamada también verdad lógica.

Tabla de valores

La lógica te llevará desde A hasta B, la imaginación te llevará a todas partes. (Albert Einstein) El niño que tiene libertad y oportunidad de manipular y usar su mano en una forma lógica, con consecuencias y usando elementos reales, desarrolla una fuerte personalidad. (María Montessori).

En nuestro lenguaje común las siguientes afirmaciones son tautologías:

- No hay nada que puedas hacer que no se pueda hacer.
- Es lo que es.
- O va a llover mañana, o no va a llover.

b) Contradicción

Es la conclusión lógica de una proposición, donde TODOS sus valores de la columna resultado son falsos (F), lo que nos indica, que dicha proposición es falsa o llamada también falsedad lógica.

Las siguientes afirmaciones son contradicciones:

- Está lloviendo ahora mismo y no está lloviendo en este momento.
- El vaso está lleno y vacío.
- El triángulo es un círculo.

c) Contingencia

Es la conclusión lógica de una proposición, donde los valores de verdad son falsos y verdaderos, lo que nos indica que la conclusión de la proposición es indeterminada.
Las siguientes afirmaciones son contingencias:

- Si tienes un gato, no tendrás ratones.
- Si vamos a la tienda, entonces compraremos algunas manzanas.
- Si una zona de alta presión se encuentra con una zona de baja presión, hay un tornado.

Ejemplo:

Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en tautología, contradicción o contingencia:

1) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$

p	q	$q\Rightarrow p$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Tautología

2) $(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow\sim q)$

p	q	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow\sim q$	$(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow\sim q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Contradicción

3) $(\sim q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(p\Rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q\Rightarrow\sim p$	$p\Rightarrow q$	$(\sim q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(p\Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Contradicción

Actividad

Construímos tablas de verdad para clasificar en tautología, contradicción o contingencia, las siguientes proposiciones:

1) $[p\Rightarrow(q\wedge\sim q)]\Rightarrow\sim p$

2) $(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$

3) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

4) $[(p\wedge q)\vee q]\Rightarrow\sim q$

5) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

6) $(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow r)$

7) $[(p\Rightarrow\sim q)\wedge p]\vee(\sim p\wedge q)$

8) $[(\sim p\vee\sim q)\wedge(r\Rightarrow q)]\vee q$

Las proposiciones compuestas están formadas a partir de proposiciones simples enlazadas a los conectivos, las proposiciones compuestas pueden tener dos o más conectores.

Ejemplos:

Hallamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) Si sabemos: $p\equiv V;\ r\equiv V;\ s\equiv F$

Determinamos el valor de verdad de la siguiente proposición: $p\wedge\sim(\sim r\wedge s)$

$$p\wedge\sim(\sim r\wedge s)\equiv V\wedge\sim(\sim V\wedge F)\equiv V\wedge\sim(F\wedge F)\equiv V\wedge\sim F\equiv V\wedge V\equiv V$$

2) Sabiendo que $q\wedge p\equiv V$ y que $q\equiv V$, determinamos el valor de verdad de: $[(\sim p\vee\sim q)\wedge(r\Rightarrow q)]\vee q$

$$[(F\vee F)\wedge(r\Rightarrow V)]\vee V\equiv[(F\wedge(r\Rightarrow V)]\vee V\equiv(F\wedge V)\vee V\equiv F\vee V\equiv V$$

3) El valor de verdad de $p\vee q$ es falso. Con esto calculamos el valor de verdad de:

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)$$

Ya que $p\vee q\equiv F$, entonces $p\equiv F$ y $q\equiv F$ pues el conectivo que los une es una disyunción, entonces:

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\equiv(F\wedge F\wedge r)\vee(V\wedge F\wedge\sim r)\vee(V\wedge F\wedge\sim r)$$

$$\equiv[(F\wedge F)\wedge r)]\vee[(V\wedge F)\wedge\sim r]\vee[(V\wedge F)\wedge\sim r]\equiv(F\wedge r)\vee(F\wedge\sim r)\vee(F\wedge\sim r)$$

$$\equiv F\vee F\vee F\equiv F$$

4) Si sabemos que: $p\equiv F;\ q\equiv F;\ r\equiv V;$

¿Cuál es el valor de $(p\rightarrow\sim q)\vee(\sim r\veebar q)$?

$$(p\rightarrow\sim q)\vee(\sim r\veebar q)\equiv(F\rightarrow\sim F)\vee(\sim V\veebar F)\equiv(F\rightarrow V)\vee(F\veebar F)\equiv V\vee F\equiv V$$

Actividad

Suponiendo que las proposiciones tienen los siguientes valores:

$$\boldsymbol{p\equiv V;\ q\equiv F;\ r\equiv F;\ s\equiv V}$$

Encontramos el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

1) $(p\wedge\sim q)\rightarrow(r\vee\sim p)$

2) $r\vee(s\wedge\sim q)$

3) $[(\sim q\vee s)\rightarrow\sim p]\rightarrow r$

4) $[(q\rightarrow\sim r)\wedge s]\rightarrow[q\rightarrow(r\vee p)]$

5) $[(q\rightarrow p)\rightarrow\sim q]\rightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow\sim p)]$

6) $[\sim(r\rightarrow\sim s)\rightarrow\sim q]\vee\sim(q\wedge p)$

Si sabemos que las proposiciones tienen los siguientes valores:

$$(\sim q\rightarrow p)\vee(r\rightarrow\sim s)\equiv F$$

Deducimos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) $(\sim p\wedge q)\rightarrow\sim(r\vee\sim p)$

2) $\sim r\vee(s\rightarrow\sim q)$

3) $[(\sim r\vee\sim s)\rightarrow\sim(p\vee q)]\rightarrow\boldsymbol{s}$

4) $[\sim(s\rightarrow q)\wedge\sim s]\rightarrow\sim[r\rightarrow(q\vee p)]$

5) $[(q\rightarrow\sim p)\rightarrow q]\wedge[p\rightarrow(q\vee\sim p)]$

6) $[\sim(r\vee\sim s)\sim q]\vee\sim(\sim q\wedge p)$

7) $\sim[(q\wedge s)\rightarrow\sim r]\rightarrow(\sim q\vee\sim p)$

8) $[\sim(r\rightarrow s)\rightarrow p]\rightarrow\sim(\sim r\rightarrow\sim p)$

6. Equivalencia lógica

La equivalencia lógica se presenta cuando existen dos funciones proposicionales, las cuales tienen la misma tabla de valores o el mismo resultado en la tabla de verdad y este resultado necesariamente tiene que ser una tautología.

Las leyes lógicas

Son enunciados que afirman que existe una relación de equivalencia entre dos proposiciones. Se tienen muchas leyes lógicas, algunas de las más simples y útiles están en el siguiente cuadro:

Negación	$\sim(\sim p)\equiv p$	
Impotencia	$p\wedge p\equiv p$	$p\vee p\equiv p$
Conmutativa	$p\wedge q\equiv q\wedge p$	$p\vee q\equiv q\vee p$
Asociativa	$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$	$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$
Distributiva	$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(q\vee r)$
Identidad	$p\wedge V\equiv p$	$p\vee F\equiv p$
Complementación	$p\wedge\sim p\equiv F$	$p\vee\sim p\equiv V$
De Morgan	$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$	$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$
Condicional	$p\to q\equiv\sim p\vee q$	$p\to q\equiv\sim(p\wedge\sim q)$
Bicondicional	$p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$	$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$
Absorción	$p\wedge F\equiv F$	$p\vee V\equiv V$
	$p\wedge(p\vee q)\equiv q$	$p\vee(p\wedge q)\equiv p$
	$p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q$	$p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q$

Estas leyes lógicas pueden ser demostradas mediante tablas de verdad, donde el resultado o la columna resultado nos dará una tautología.

Leyes de Morgan

*Estas leyes permiten transformar negaciones de **conjunciones** en **disyunciones** y viceversa:*

$$\sim(A\wedge B)\equiv(\sim A\vee\sim B)\ ;$$

$$\sim(A\vee B)\equiv(\sim A\wedge\sim B)$$

Son fundamentales para simplificar expresiones lógicas.

Frases de lógica

La lógica del pensamiento tiene que acudir siempre en ayuda de la insuficiencia del conocimiento. (Friedrich Engels).

La aritmética de la vida no siempre tiene una razón lógica. (Inshirah Abdur-Ra'uf).

Ejemplos:

Verifica las siguientes equivalencias:

1) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p\vee\sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

2) $(p\to q)\equiv[q\leftrightarrow(p\vee q)]$

p	q	$p\to q$	$p\vee q$	$q\leftrightarrow(p\vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

7. Álgebra de proposiciones y simplificación de proposiciones

Mediante las propiedades del algebra, podemos simplificar todas y cada una de las expresiones algebraicas, de tal forma que una operación (adición, sustracción, multiplicación división, etc.) pueda realizarse de una forma más rápida y exacta. El mismo principio podemos aplicarlo al álgebra de proposiciones, las cuales se podrán lograr mediante el uso de las leyes de equivalencia, de las cuales algunas ya pudimos demostrarlas mediante las tablas de verdad.

El proceso de transformar una proposición en otra equivalente que sea más sencilla se denomina simplificación. Para simplificar una proposición se utilizan las leyes lógicas y el principio de sustitución.

Ejemplo:

Simplificamos las siguientes proposiciones justificando cada paso, indicando la ley lógica que se utiliza:

1) $(p\to q)\vee(q\to r)\equiv(q\to p)\vee r$

$(p\to q)\vee(q\to r)\equiv(\sim q\vee p)\vee(\sim q\vee r)$	Equivalencia implicación
$\equiv\sim q\vee(p\vee\sim q)\vee r$	Asociatividad
$\equiv\sim q\vee(\sim q\vee p)\vee r$	Conmutatividad
$\equiv(\sim q\vee\sim q)\vee p\vee r$	Asociatividad
$\equiv(\sim q\vee p)\vee r$	Asociatividad
$\equiv(q\to p)\vee r$	Equivalencia implicación

2) $[q\wedge(q\to p)]\equiv p$

$[q\wedge(q\to p)]\equiv[q\wedge(\sim q\vee p)]$	Equivalencia implicación
$\equiv(q\wedge\sim q)\vee(q\wedge p)$	Distributividad
$\equiv F\vee(q\wedge p)$	Absorción
$\equiv q\wedge p$	Identidad
$\equiv V\wedge p$	pues $q\equiv V$
$\equiv p$	Identidad

3) $[p\vee(p\to\sim q)]\vee q\equiv V$

$[p\vee(p\to\sim q)]\vee q\equiv[p\vee(\sim p\vee\sim q)]\vee q$	Equivalencia implicación
$\equiv[(p\vee\sim p)\vee\sim q]\vee q$	Asociatividad
$\equiv[V\vee\sim q]\vee q$	Complementación
$\equiv V\vee q$	Absorción
$\equiv V$	Absorción

La reina de la ciencia y del conocimiento

En cierta ocasión Bertrand Russel estaba especulando sobre enunciados condicionales del tipo: "Si llueve las calles están mojadas" y afirmaba que de un enunciado falso se puede deducir cualquier cosa. Alguien que le escuchaba le interrumpió con la siguiente pregunta: "Quiere usted decir que si aceptamos que $2+2=5$ *entonces se puede demostrar que usted es el Papa".*

Uno más en la familia

El matemático P. G. Lejeune Dirichlet no era muy amigo de escribir cartas. Hizo una excepción cuando nació su primer hijo. Dirichlet mandó un telegrama a su suegro con el siguiente mensaje: $1+1=3$.

La lógica de la sorpresa

Bertrand Russell cuenta lo siguiente: "Una vez recibí una carta de un lógico eminente, la señora Christine Ladd Franklin, diciendo que ella era solipsista y mostrándose sorprendida de que no hubiera otros solipsistas. Viniendo de un lógico, esta sorpresa me sorprendió".

Actividad

Simplificamos las siguientes proposiciones justificando cada paso, indicando la ley lógica que se utiliza:

1) $[(p\wedge q)\to\sim p]\to(q\wedge\sim p)\equiv q$

2) $\sim[\sim(q\to\sim p)]\equiv q\vee\sim p$

3) $[\sim p\wedge(\sim q\to p)]\to q\equiv V$

4) $[p\to(\sim p\wedge q)]\to[\sim q\wedge\sim p]\equiv p\vee\sim q$

5) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p$

6) $\{(\sim p\vee q)\vee[(p\to q)\wedge r]\}\wedge q\equiv q$

7) $q\vee[(p\to q)\wedge\sim(q\to p)]\equiv\sim p$

8) $[(p\to(\sim p\wedge\sim q))\wedge(p\wedge(p\vee q))]\equiv V$

9) $[(\sim p\wedge q)\to(q\to p)]\wedge\sim q\equiv\sim q$

8. Circuitos lógicos

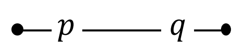
El sistema axiomático de la lógica proposicional dio paso al desarrollo del álgebra de Boole y el adelanto tecnológico de la microelectrónica que utiliza circuitos lógicos, con base en el sistema binario cuyos dígitos son 0 y 1.

Los circuitos lógicos son el arreglo de un conjunto de interruptores, conformado por compuertas abiertas y cerradas, que la finalidad de transmitir información. También se puede negar el paso de la información al restringir ciertas rutas dirigiendo la información por nuestro juicio.

Con dos o más interruptores teniendo un sentido lógico, se aplican los acoplamientos en serie, en paralelo o mixto.

a) Circuito en serie

Un circuito en serie es cuando las proposiciones representan interruptores, vale decir que la información pasa por el circuito a través de los interruptores, los valores de verdad de p y q son verdaderos cuando la información pasa entre las dos.



$p \wedge q$

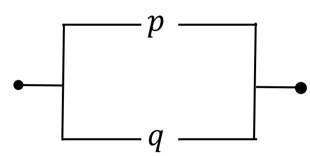
Pensamiento lógico matemático

La inteligencia lógico-matemática es aquella que permite solventar problemas lógicos y matemáticos.

Da uso del pensamiento lógico matemático para utilizarla coherencia, racionalidad, deducción, números, símbolos, figuras geométricas y otros elementos propios de la lógica y las matemáticas para proponer soluciones, crear ideas y establecer conclusiones.

b) Circuito en paralelo

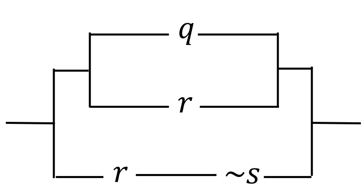
Un circuito en paralelo es donde las proposiciones p y q se encuentran en paralelo, en este caso, la información pasa por el interruptor p o, en todo caso, por el interruptor q.



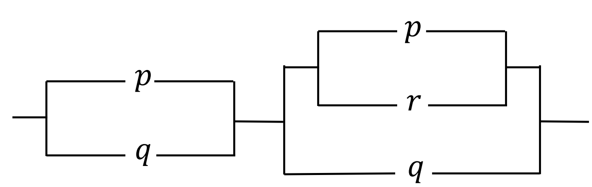
Ejemplos:

Escribimos la representación lógica del siguiente circuito:

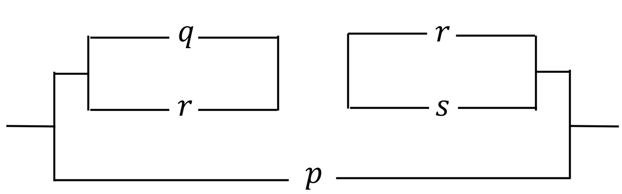
1) $(p \vee q) \vee (r \wedge \sim s)\}$



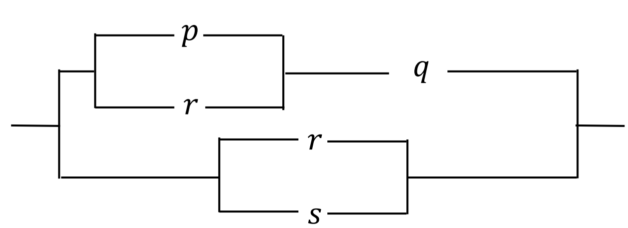
2) $(p \vee q) \wedge [(p \vee r) \vee q]$



3) $[(q \vee r) \wedge (r \vee s)] \vee p$



4) $[(p \vee r) \wedge q] \vee (r \vee s)$



Actividad

Representamos gráficamente las siguientes proposiciones mediante circuitos lógicos:

1) $[(p \wedge q) \vee \sim p] \vee (q \wedge \sim p)$

2) $[p \vee (q \wedge \sim p)]$

3) $[\sim p \wedge (\sim q \vee p)] \wedge \sim q$

4) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [\sim q \wedge \sim p]$

5) $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

6) $\{(\sim p \vee q) \vee [(p \wedge q) \vee r]\} \wedge q$

7) $q \vee [(p \wedge q) \wedge \sim (q \vee p)]$

8) $[(p \wedge (\sim p \wedge \sim q)) \wedge (p \wedge (p \vee q))]$

9) $[(\sim p \wedge q) \vee (q \vee p)] \wedge \sim p$

VALORACIÓN

La lógica es aplicable a la vida cotidiana, cuando un argumento es posible, cuando hay error eso en situaciones dudosas. Así, nos permite:

- Encontrar errores en el razonamiento utilizado y tomar decisiones.
- Encontrar argumentos dudosos en las versiones de otras personas, de modo que nos facilita evitar engaños.

Actividad

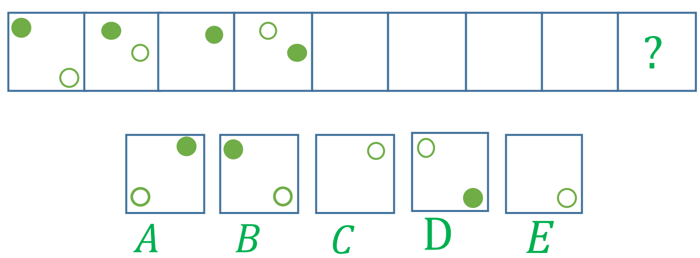
Tomando en cuenta la lectura de arriba, reflexionamos y respondemos:

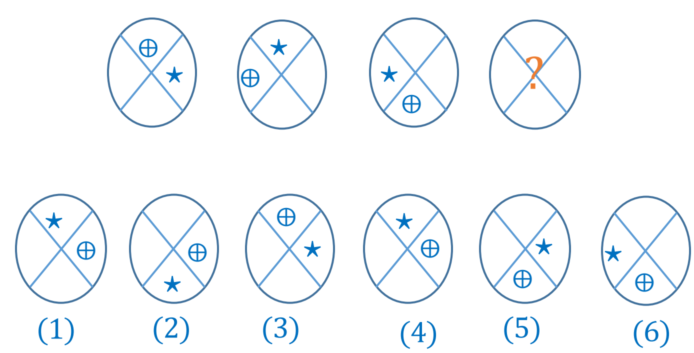
- ¿Por qué es importante la lógica?
- ¿Cómo aplicamos la lógica en el área de tecnología

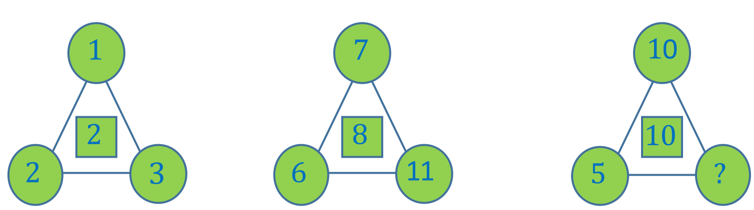
PRODUCCIÓN

Elaboramos dos páginas con “actividades de razonamiento lógico matemático” que se pueden encontrar en internet, resolvemos las actividades pensando, razonando y llegando a las conclusiones que pide cada actividad.

3				8				6
	1				6		2	
		4	7			5		
	4			1		9		
6			2		4			1
		3		6			5	
		8			3	6		
	2		4				1	
5				2				7







REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

SUCESIONES, PROGRESIONES ARITMÉTICAS - GEOMÉTRICAS

Sucesiones numéricas

Encontramos:

1) Los 3 primeros términos de: $S_n = 3n^2$

2) Los 5 primeros términos de: $S_n = (3n)^2$

3) Los 10 primeros términos de: $S_n = \frac{n^2}{2}$

4) El cuarto término de: $S_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2$

5) Los 6 primeros términos de: $S_n = (n-1)^2 - 2n + 3$

6) Los 9 primeros términos de: $S_n = \frac{n^2-2n}{n+3}$

7) Los primeros términos de: $S_n = \frac{\sqrt{4n-3}}{2n}$

8) Calcula el décimo término de: $S_n = (2n+1)^2 - (n-2)^2$

Sumatorias y sus propiedades

Con desarrollo, determinamos los elementos de las siguientes sumatorias:

1) $\sum_{x=1}^{4}(3x-2)$

2) $\sum_{i=1}^{5}(3-2i)$

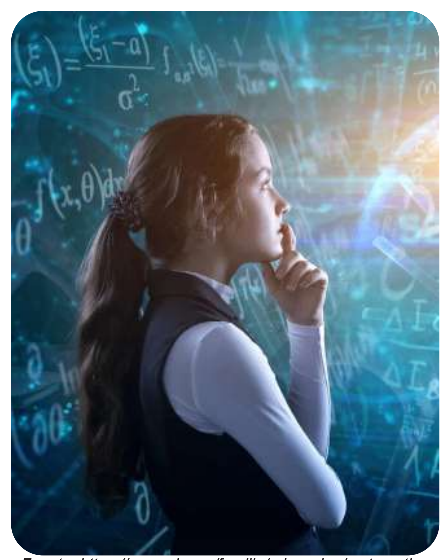
3) $\sum_{i=3}^{7}(i-i^2)$

4) $\sum_{x=3}^{6}\sqrt{x+1}$

5) $\sum_{x=1}^{4}(\sqrt{x}-x)$

6) $\sum_{a=2}^{5}\frac{a-2}{a+2}$

Progresiones aritméticas



Fuente: https://www.abc.es/familia/educacion/matematicas-odias-amas-razon-20230428130621-nt.html

1) Determinamos el décimo segundo término de: $3, 11, 19, \ldots$

2) Hallamos el trigésimo séptimo término de: $-31, -24, -17, \ldots$

3) Hallamos el siguiente término después del décimo quinto de: $14, 25, 36, \ldots$

4) Encontramos el primer término si: $t_{10}=40;\ t_5=26$

5) Determinamos la diferencia si sabemos que: $t_7=31;\ t_2=11$

6) Hallamos la cantidad de términos si: $t_1=0;\ t_n=124;\ d=31$

7) Encontramos la suma de los 30 primeros términos de: $-2, 6, 14, \ldots$

8) Determinamos la suma de los 30 primeros términos si: $t_3=5;\ t_5=-3$

9) Sumamos los primeros cuarenta números impares a partir de 57

10) Sumamos los primeros 50 números impares a partir de 99

11) Interpolamos 4 medios entre 5 y 45

12) Interpolamos 7 medios entre 1 y 10

13) Interpolamos 3 medios entre -5 y 5

14) Hallamos la suma de todos los números pares de dos dígitos

15) Hallamos la suma de todos los números impares de dos dígitos

16) Hallamos el primer y el décimo término de la progresión aritmética que cumple la siguiente condición: $S_7=a_5-19;$ $S_9=a_7-a_8$

17) Interpolamos 7 medios entre 0 y 1000

Progresiones geométricas

Encuentra:

1) El octavo término de la progresión: $15, 60, 240, \ldots$

2) El $5^{\text{º}}$ término de la P.G. si el $2^{\text{º}}$ término es 8 además el $3^{\text{º}}$ término es 32.

3) La razón de la progresión aritmética de 6 términos: $2, \ldots, 64$

4) La interpolación de cuatro medios geométricos entre -1 y -243.

5) La cantidad de términos de la P.G., si el $4^{\text{º}}$ término vale 125, el $2^{\text{º}}$ término es 5, el último término 3125.

6) Halla el primer término si se conoce que el quinto término de una progresión geométrica es 80 y el sexto 160.

7) La suma de los primeros cinco términos de una progresión geométrica es -77, la razón -2, halla el primer término.

8) El segundo término de una progresión geométrica es 6, el quinto término es 48, escribe la progresión.

9) La suma de tres números en una progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes estarán en una progresión aritmética. Halla tres números.

Suma en una sucesión geométrica – infinita decreciente

Halla:

1) La suma infinita de: $10, 5, \frac{5}{2}, \ldots$

2) La suma infinita de: $100, 25, \frac{25}{4}$

3) La suma infinita de: $\frac{1}{2}, \frac{1}{14}, \frac{1}{98}, \ldots$

4) La suma infinita de: $\frac{75}{4}, \frac{75}{6}, \frac{75}{9}, \ldots$

5) La suma infinita de: $25, \frac{50}{7}, \frac{100}{49}, \ldots$

6) La suma infinita de: $\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, \frac{3}{28}, \ldots$

7) La suma infinita de: $81, 27, 9, \ldots$

8) La suma infinita de: $\sqrt{10}, \frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{4\sqrt{10}}{9}, \ldots$

Fuente: https://jugadoresdeajedrez.com/ajedrez-y-las-matematicas-como-la-ciencia-se-utiliza-en-el-juego-de-estrategia-mas-antiguo-del-mundo/

Problemas del contexto aplicados a la ciencia y a la tecnología

1) El lunes gane Bs200 y después diariamente gané el doble del día anterior, ¿cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?

2) Un dentista arregla 20 piezas a una persona cobrándole Bs1 por la primera, Bs2 por la segunda, Bs4 por la tercera y así sucesivamente, ¿cuáles son los honorarios del dentista?

3) Un hombre jugó durante 8 días y cada día ganó $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el día anterior. Si el $8^{\text{º}}$ día ganó Bs1, ¿Cuánto gano el primer día?

4) ¿Cuántos términos tiene una progresión geométrica, donde los extremos son $\frac{1}{3}$ y 243, cuya razón es 3?

5) Si en una progresión la suma de los tres primeros términos es 7 y la suma de los 4 primeros términos es 15. Calcula el octavo término

6) Tres números están en una progresión geométrica, el $2^{\text{º}}$ es 32 unidades mayor que el $1^{\text{º}}$ y el $3^{\text{º}}$ es 96 unidades mayor que el $2^{\text{º}}$, halla estos números.

7) Si él $5^{\text{º}}$ y $7^{\text{º}}$ término de una P.G. son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{16}$ respectivamente. Encuentra la progresión de 10 términos

8) Halla el valor de "x" de modo que los tres términos, $x+2, 4x-2, 6x+2$, formen una progresión geométrica

9) Halla tres números que formen una P.G. cuya suma sea 21 y cuyo producto sea 216

10) El producto del $3^{\text{º}}$ y el $7^{\text{º}}$ término de una progresión geométrica de 9 términos es $\frac{1}{216}$, ¿cual es el producto?

11) En una progresión geométrica la suma del primer y segundo término es 6, la suma del segundo con el tercer término es 3, calcula el quinto término.

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación de México.

Allen, R. A. (2008). *Álgebra intermedia.* Ed. Pearson.

Arya, L. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Ed. Pearson.

Diccionario de matemáticas. (2000). Editorial Cultural S. A. Polígono Industrial Arroyo molinos – España.

Escalante Loayza, E. (2017). *Matemática 2.* Gráfica Millenium – Bolivia.

Laura Valencia, R. (2023). *Compilado de Matemática 4* [Texto inédito].

Londoño, N., & Bedoya, H. (2003). *Matemática progresiva 4.* Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

Ministerio de Educación. (2023). *Currículum base*: *Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. (2023). *Prontuario de mis aprendizajes: Matemática* [En proceso de publicación].

Olmos Millán, A., & Martínez C, L. C. (2003). *Matemática práctica 4.* Editorial Voluntad S.A. – Colombia.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **4TO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Lidia Nina Cruz

Matemática
Juan Pablo Loza Choque

Biología - Geografía
Melizza Fuentes Vera

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernández Huanca

SEGUNDO TRIMESTRE

Lengua Castellana
Verónica Graciela Mollo Condori

Matemática
Edwin Noel Escalante Loayza

Biología - Geografía
Melizza Fuentes Vera

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernández Huanca

TERCER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Lilian Paulina Peñas Aldana

Matemática
Edwin Noel Escalante Loayza

Biología - Geografía
Melizza Fuentes Vera

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernández Huanca

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol