ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

SEGUNDO AÑO DE ESCOLARIDAD

2 DO AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA
COMUNITARIA PRODUCTIVA

"2025 BICE TENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 2do año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Jorge Joaquin Mollinedo Calle

DIAGRAMACIÓN:
Jorge Luis Calcina Guachalla

Depósito legal:
4-1-576-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 2do año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los "*Textos de aprendizaje 2025*", para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los "*Textos de aprendizaje 2025*" tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
MINISTRO DE EDUCACIÓN

LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

PRÁCTICA

Isaac y Jazmín son los representantes del curso 2do de secundaria. Se encargan de partir la torta para poder compartir con sus 20 compañeros.

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en base a las imágenes:

- ¿En cuántas partes está dividida la torta?
- ¿Si la torta fuera cuadrada se la podría dividir de igual manera?
- ¿Representa a todo el curso la división realizada por Isaac y Jazmín?

TEORÍA

Importante

Numerador

$$\frac{a}{b}$$

Denominador

La lectura de los números fraccionarios es:

- $\frac{1}{2}$ *se lee "un medio"*
- $\frac{1}{3}$ *se lee "un tercio"*
- $\frac{1}{4}$ *se lee "un cuarto"*
- $\frac{1}{5}$ *se lee "un quinto"*
- $4\frac{6}{7}$ *se lee "cuatro enteros y seis séptimos"*
- $\frac{4}{7}$ *se lee "cuatro séptimos"*
- $\frac{1}{10}$ *se lee "un décimo"*
- $\frac{7}{23}$ *se lee "siete veintitresavos"*
- $\frac{9}{13}$ *se lee "nueve treceavos"*

Se llama número racional (fracción) a todo par de números enteros, a y b, denotados por $\frac{a}{b}$, en la que a es el numerador y b el denominador, b distinto de cero. De este modo, el conjunto de los números racionales es:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z};\ b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\right\}$$

Ejemplo:

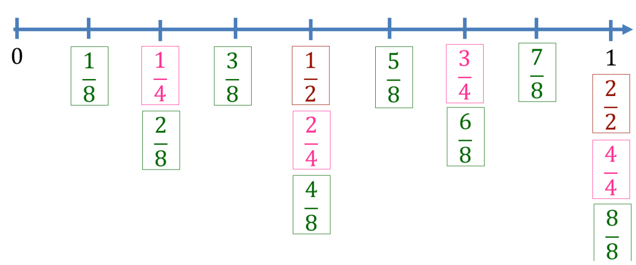
9 es racional, pues $9 = \frac{9}{1}$

Las fracciones se pueden reducir encontrando otras equivalentes:

$\frac{1}{2}$ es el equivalente a:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \cdots$$

La representación en la recta numérica puede ser comprendida así:



1. Operaciones con números racionales homogeneas

La suma se realiza sumando los numeradores y colocando el mismo denominador de las fracciones.

Ejemplo:

$$\frac{5}{7} + \frac{12}{7} = \frac{5 + 12}{7} = \frac{17}{7}$$

$$\frac{13}{3} - \frac{8}{3} = \frac{13 - 8}{3} = \frac{5}{3}$$

Suma o resta con distinto denominador (heterogéneas)

La suma se realiza reduciendo las fracciones a común denominador.

El común denominador se los divide con cada uno de los denominadores y se multiplica por el numerador respectivo, luego se suma o resta en el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{25}=\frac{1\cdot 25+3\cdot 5}{5\cdot 25}=\frac{25+15}{125}=\frac{40}{125}=\frac{8}{25}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6\cdot 3+4\cdot 1-3\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{18+4-3}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

Multiplicación

La multiplicación de dos fracciones se calcula haciendo el producto de numeradores y denominadores entre sí:

Ejemplo:

$$\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{7\cdot 3\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 3}=\frac{231}{24}=\frac{77}{8}=9\frac{5}{8}$$

División

En la división, el numerador se calcula multiplicando en "cruz" como sigue:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{9}{5}\div\frac{7}{3}=\frac{9\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{27}{35}$$

$$3\frac{13}{5}\div 6\frac{11}{7}=\frac{28}{5}\div\frac{53}{7}=\frac{28\cdot 7}{5\cdot 53}=\frac{196}{265}$$

En este caso, se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa la división.

Suma o resta

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$$

Recuerda

Mixto

$$3\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4+1}{4}=\frac{13}{4}$$

Fracción propia

$$\frac{5}{9};\quad 5<9$$

Fracción impropia

$$\frac{9}{8};\quad 9>8$$

Multiplicación

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{d}$$

División

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Actividad

Ejercicios de aplicación que debemos resolver:

1) Iván dedica $\frac{1}{3}$ de su tiempo libre a leer, $\frac{2}{7}$ a jugar y el resto a hacer actividades deportivas. Si tiene 21 horas libres a la semana, ¿cuántas horas dedica Iván a las actividades deportivas?

2) En una frutería, el $2\frac{2}{5}$ de las frutas vendidas son manzanas, $1\frac{3}{4}$ son naranjas y $3\frac{1}{7}$ son peras, ¿cuántas frutas se vendieron?

3) Para pintar una pared, se mezclan $\frac{5}{8}$ de pintura roja con $\frac{3}{7}$ de pintura azul. Si se necesitan 14 litros de mezcla para cubrir la pared, ¿cuántos litros de pintura se utilizan?

Nota

$0.\hat{6} = 0.666\ ...$

$0.58\hat{3} = 0.5833\ ...$

2. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Expresión decimal de un número racional

Ejemplo:

Para $\frac{5}{8}$ se procede a dividir:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ \hline 20 & 0.625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

luego $\frac{5}{8} = 0.625$ es un decimal exacto

Para $\frac{2}{3}$ se procede a dividir:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline 20 & 0.666\ ... \\ 20 & \\ \vdots & \end{array}$$

luego $\frac{2}{3} = 0.666\ ... = 0.\hat{6}$ es un decimal periódico puro.

Ejercicio

Convierte a número decimal.

a) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{11}{3}$ i) $\frac{7}{13}$

b) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{8}{11}$ j) $\frac{9}{25}$

c) $\frac{5}{8}$ g) $\frac{1}{7}$ k) $\frac{13}{18}$

d) $\frac{2}{9}$ h) $\frac{8}{3}$ l) $\frac{21}{66}$

Para $\frac{7}{12}$ se procede a dividir:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 12 \\ \hline 70 & 0.5833\ ... \\ 100 & \\ 40 & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

luego $\frac{7}{12} = 0.58\hat{3}$ es un decimal periódico mixto.

Nota

$0.777\ ... = 0.\hat{7}$

$0.9222\ ... = 0.9\hat{2}$

Números decimales exactos y periódicos

Ejemplos:

Decimales exactos

1) $3.625 = \frac{3625}{1000} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$ 2) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ 3) $1.02 = \frac{102}{100} = \frac{51}{50} = 1\frac{1}{50}$

Decimales periódicos

Para convertirlo un número decimal periódico a fracción, se procede así: en el numerador se escribe el número sin el punto decimal y se resta el número sin el periodo, en el denominador se escribe un nueve por cada cifra dentro del periodo respectivo y cero por la parte no periódica:

1) $0.333\ ... = 0.\hat{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9}$

2) $4.313131 = 4.\widehat{31} = \frac{431-4}{99} = \frac{427}{99} = 4\frac{31}{99}$

3) $0.1222\ ... = 0.1\hat{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}$

4) $3.567878\ ... = 3.56\widehat{78} = \frac{35678-356}{9900} = \frac{35322}{9900} = \frac{5887}{1650}$

Ejercicio

Convierte a fracción común:

a) $0.\hat{4}$ d) $\widehat{32}$

b) $6.\hat{1}$ e) $\widehat{14}$

c) $0.\widehat{13}$ f) $\widehat{11}$

d) $0.\widehat{32}$ g) $\widehat{14}$

Actividad

Ejercicio de aplicación que debemos resolver:

Una piscina tiene agua hasta los $\frac{3}{8}$ de su capacidad y si se le agregan 3200 litros de agua, se llenaría, ¿cuál es la capacidad máxima de la piscina?

Operaciones combinadas

Para las operaciones combinadas lo primero es resolver la operación dentro del paréntesis o corchetes, en el siguiente orden, la multiplicación o división, finalmente la suma o resta.

Ejemplo:

Realiza la operación para simplificar lo siguiente:

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{3}\right)-\left[\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)-\left(3-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Solución:

Respetando la jerarquía de los signos de agrupación, operamos primero lo que está dentro del corchete:

$$=\left(\frac{12-20}{15}\right)-\left[\left(\frac{10-14}{35}\right)-\left(\frac{9-1}{3}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{-8}{15}\right)-\left[\left(\frac{-4}{35}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{-8}{15}\right)-\left(\frac{-12-280}{105}\right)$$

$$=\frac{-8}{15}-\left(\frac{-292}{105}\right)=\frac{-8}{15}+\frac{292}{105}=\frac{-840+4380}{1575}=\frac{3540}{1575}=\frac{236}{105}=2\frac{26}{105}$$

Ejemplo:

Efectúa la siguiente operación:

$$2\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$$

Solución:

En primer lugar, se operan las fracciones asociadas por los paréntesis, luego el resultado se multiplica por la cantidad que está afuera del paréntesis y se simplifica para realizar la suma y obtener el resultado:

$$2\cdot\left(\frac{3\cdot 7-2\cdot 4}{6}\right)+3\left(\frac{5\cdot 2-3\cdot 2}{15}\right)=2\cdot\left(\frac{21-8}{6}\right)+3\left(\frac{10-6}{15}\right)$$

$$=2\cdot\left(\frac{13}{6}\right)+3\left(\frac{4}{15}\right)=\frac{26}{6}+\frac{12}{15}=\frac{13}{3}+\frac{4}{5}$$

$$=\frac{5\cdot 13+3\cdot 4}{15}=\frac{77}{15}=5\frac{2}{15}$$

Ejemplo:

¿Cuál es el resultado de simplificar la siguiente expresión?

$$\left(7\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)$$

Solución:

Operamos primero las restas dentro de los paréntesis y luego la división:

$$\left(\frac{15}{2}-\frac{5}{4}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2\cdot 15-5}{4}\right)\div\left(\frac{5-2\cdot 2}{6}\right)=\left(\frac{25}{4}\right)\div\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\left(\frac{25}{4}\right)\cdot(6)=\frac{150}{4}=\frac{75}{2}=37\frac{1}{2}$$

Para tomar en cuenta

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado, la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos aspectos, en el área de Matemática se utilizará el punto decimal como separador.

Ejemplos:

3.14; 0.71; -0.5; ....

Ley de signos (multiplicación)

$$(+)\cdot(+)=+$$

$$(-)\cdot(-)=+$$

$$(+)\cdot(-)=-$$

$$(-)\cdot(+)=-$$

Nota

Una división puede convertirse en una multiplicación, es decir:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$a,d\neq 0$$

Ejercicios

Realiza las operaciones:

a) $\frac{5}{8}\cdot(3)-\frac{3}{7}\cdot(11)$

b) $\frac{13}{5}\cdot(9-2)+\frac{7}{11}\cdot(7-4)$

c) $\left(6-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(5+9\frac{2}{3}\right)$

d) $\left(\frac{2}{3}+\frac{11}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{11}-8\right)$

e) $\left(15\frac{1}{3}\right)\div\left(7-8\frac{7}{5}\right)$

Potencia y raíces de fracciones racionales

La potencia de un número racional es la multiplicación reiterada.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\,-\text{veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo:

Efectúa la siguiente potencia:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Ejemplo:

Efectúa la siguiente potencia:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

A continuación, algunas propiedades de la potencia de fracciones:

Propiedades	Fórmula	Ejemplo
Distributiva de una potencia	$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$ $\left(\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\div\left(\frac{c}{d}\right)^n$	$\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^5$
Producto de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$	$\left(\frac{7}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^{4+3} = \left(\frac{7}{3}\right)^7$
Cociente de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^n\div\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7\div\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{7-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$
Potencia de una potencia	$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$	$\left[\left(\frac{1}{7}\right)^5\right]^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^{5\cdot 2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{10}$

Ejemplo:

Calcular la raíz cuarta de la siguiente fracción:

$$\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{5^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{5}{3}$$

Ejemplo:

Simplificar:

$$\left(\sqrt[3]{0{,}064} + \sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}216}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\frac{64}{1000}} + \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} + \sqrt[3]{\frac{216}{1000}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{4+3+6}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{13}\right)^{1} = \frac{10}{13}$$

Nota

$(-1)^{2k} = +1$

$2k : par$

$(-1)^{2k+1} = -1$

$2k+1 : impar$

$k>0$

Importante

Propiedades de la potencia:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Propiedades de la radicación:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\div\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m\cdot n]{\frac{a}{b}}$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios combinados:

1) $\dfrac{\sqrt{3^4+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}+\frac{2}{3}}} - \dfrac{5}{3}$ **2)** $\sqrt[3]{\dfrac{216}{27}\cdot 5^3} + \sqrt{\dfrac{64}{1444}\cdot(-3)^2}$ **3)** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3^{-1} - \sqrt[4]{81} + 0.25\right]^{-1}$

3. Problemas

Números racionales aplicados al contexto y la tecnología

Actualmente, la aplicación de los números racionales se lo utiliza diariamente, al momento de cocinar, la cual necesita seguir una receta en la que aparecen cantidades expresadas en fracciones, por ejemplo: $\frac{1}{4}$ parte de leche evaporada, $\frac{1}{3}$ de hielo molido.

Las aplicaciones cotidianas están siempre presentes como la hora, al señalar $\frac{1}{4}$ de hora.

Ejemplo:

La receta de la ensalada rusa, cuya cantidad de ingredientes es para 8 porciones, es la siguiente:

Ingredientes

- $\frac{1}{4}$ cucharadita de pimienta molida
- $\frac{1}{3}$ taza de aceite de oliva
- $2\frac{1}{2}$ cucharaditas sal
- 0.40 kg zanahorias
- $\frac{1}{2}$ kg de vainitas
- $\frac{1}{10}$ kg arvejas
- 3 dientes de ajo
- $\frac{1}{4}$ kg de papas

Fuente: Open AI, 2024

1. Ivan tiene 5 botellas, con capacidad de $\frac{3}{4}$ de litro, tiene otras 2 botellas con capacidad de $1\frac{1}{2}$ litro.

Si debe distribuir 6 litros de fresco de quisa en estas botellas, ¿le alcanza o le hacen falta botellas?

Si no le alcanzan y solo puede conseguir botellas con capacidad de $\frac{3}{4}$ de litro y de $1\frac{1}{2}$ litro, ¿cuántas botellas de cada una puede utilizar?

2. Si se sabe que con $\frac{1}{4}$ de galón se pueden pintar aproximadamente 8 m^2, ¿es suficiente comprar $\frac{1}{4}$ de galón de pintura?

Considerando estos ingredientes, ¿cuál es la cantidad en kilogramos total de verduras en las ocho porciones de la ensalada rusa?

Solución:

Se suman las cantidades correspondientes a vainitas, zanahorias, arvejas y papas:

$$\frac{1}{2}+0.40+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Por tanto, hay 1.25 kg de verduras en las 8 porciones de ensalada rusa.

VALORACIÓN

Respondemos las siguientes preguntas:

- En el caso de que se tengan solo sumas y restas, ¿cuál se hace primero?
- En el caso de que se tengan solo multiplicaciones y divisions, ¿cuál se hace primero?
- En el caso de que se tengan solo potencias y radicales, ¿cuál se hace primero?
- ¿Qué sabía antes de estos temas y qué sé ahora?
- ¿Cómo le puedo explicar a otra persona lo que aprendí?

PRODUCCIÓN

Para celebrar el cumpleaños de Alicia, Jazmín prepara una pizza casera y la divide en 8 partes iguales.

En la celebración se comen 5 pedazos de la pizza.

- ¿Qué parte de la pizza se comen Jazmín y sus amigas?
- ¿Qué parte de la pizza queda?
- ¿Una fracción representa un trozo o una porción de una unidad?
- ¿Cuáles son las partes de una fracción?

Representa con un círculo la pizza y colorea, las partes correspondientes a las que consumieron.

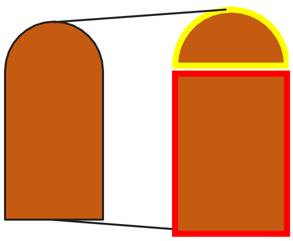
Fuente: Open AI, 2024

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

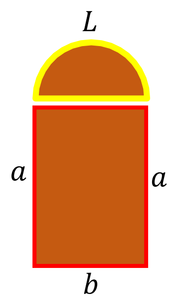
PRÁCTICA

En la naturaleza y en las edificaciones a lo largo de la historia, se puede observar la aplicación de formas geométricas. En algunas edificaciones arquitectónicas, como se observa en la imagen, se puede identificar el uso de patrones geométricos. Para encontrar la longitud de los espacios geométricos, se deben utilizar fórmulas ya conocidas y otras que se identificarán en el presente contenido.
En la puerta principal de la catedral encontramos, pintadas de rojo, azul y blanco, figuras geométricas: tres rectángulos y tres semicircunferencias.

Fuente: Open AI, 2024



Para encontrar la longitud (perímetro) de la puerta a la izquierda se aplica el siguiente procedimiento:



Para encontrar la longitud se suman los valores de a,b,a y L.
Sin embargo, para encontrar el valor de L se utiliza la siguiente fórmula, donde R es el radio: $L = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en base a la imagen:
- En la fórmula para encontrar la longitud de la semicircunferencia, se utiliza el número π, ¿porqué se asocia a π las formas circulares?
- ¿Porqué el número π no se puede representar como una fracción?
- ¿Cuál es el origen del número π?

TEORÍA

1. Los números irracionales y su clasificación

Nota

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}/a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$$

Los números irracionales no se pueden expresar como cociente de dos números enteros, contiene elementos numéricos que se expresan como decimales infinitos no periódicos.

- $\pi = 3.1415926\ ...$
- $e = 2.788281\ ...$
- $\sqrt{2} = 1.41421356\ ...$

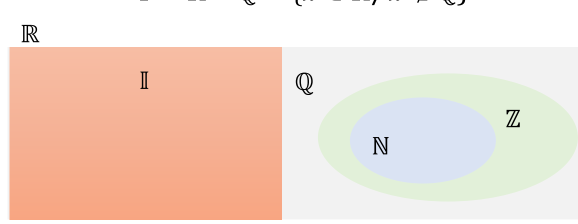
Número irracional

En los números irracionales, el decimal es infinito, pero no periódico. (ninguna serie de números se repite con frecuencias)

Se debe notar que las cifras decimales de un número irracional no son periódicos.
El conjunto de los números irracionales se denota con $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}/x \notin \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}/x \notin \mathbb{Q}\}$$



Actividad

Ordenamos y dibujamos los siguientes números en forma ascendente en la recta numérica.

$$\sqrt{7} + 2\sqrt{2}; 3\pi - 5; \frac{-7}{\sqrt{9}}; \frac{2e-5}{2}; -\frac{3}{2}; \sqrt{5} - \pi; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt[3]{5}}{2}; \frac{\sqrt{9}}{3}$$

Ejemplo:

Utiliza la escuadra para construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$.

- Dibuje un segmento $\overline{AB}$ de longitud 1 unidad.
- Trace un segmento perpendicular $\overline{AC}$ desde el punto A, de longitud 1 unidad.
- Se une con un segmento los puntos C y B, cuya longitud viene dada por el teorema de Pitágoras:

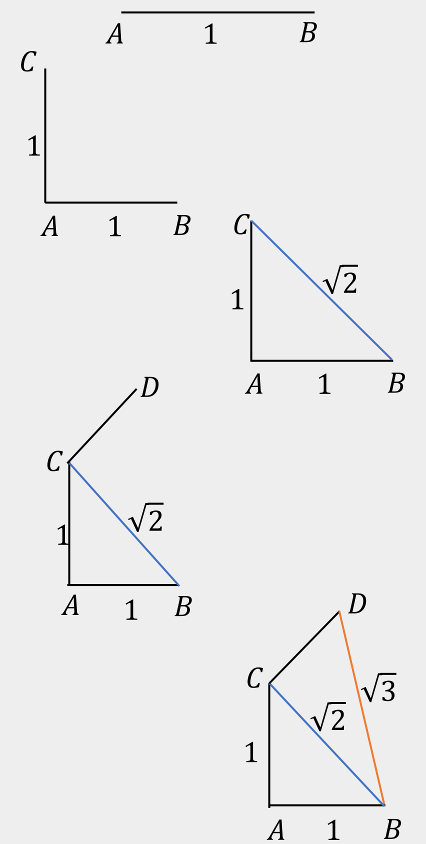
$$\overline{CB} = \sqrt{1\,u^2 + 1\,u^2} = \sqrt{2}\,u$$

Para $\sqrt{3}$:

- Trace el segmento $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{CB}$ de longitud 1 unidad.
- Una los puntos B y D para obtener el triángulo BCD con el ángulo recto ubicado en C, cuyos catetos tienen longitudes 1 unidad y $\sqrt{2}$ unidades. Del teorema de Pitágoras:

$$\overline{DB} = \sqrt{1\,u^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 u^2} = \sqrt{3}\,u$$

Construyendo $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$



Los números irracionales se clasifican en algebraicos y trascendentes.

Irracionales algebraicos

Un número irracional se denomina algebraico, cuando es raíz (o solución) de algún polinomio con coeficientes racionales.

Ejemplo:

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene como polinomio a $p(x) = x^2 - 2$ cuyos coeficientes son todos racionales y sus raíces son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Por tanto, $\sqrt{2}$ es algebraico.

Los siguientes números también son algebraicos: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Irracionales trascendentes

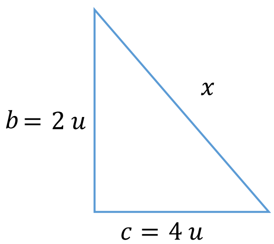
Un número irracional se denomina **trascendente**, cuando no es raíz (solución) de ningún polinomio con coeficientes racionales. Como:

$$e, \pi, ln(2), \varphi \ldots$$

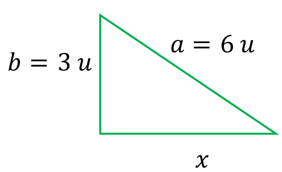
Teorema de Pitágoras cuyo enunciado es: “El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados del triángulo”; es un resultado geométrico para triángulos rectángulos. Quizás la consecuencia más importante de este teorema es haber encontrado a $\sqrt{2}$, siendo este considerado el primer número irracional de la historia.

Ejemplo:

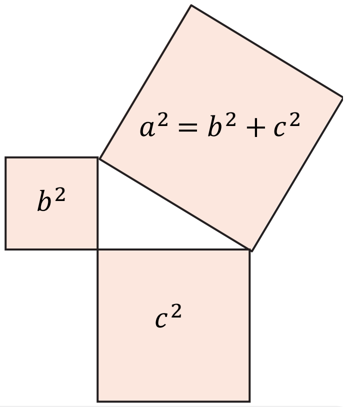
Halle el valor de “ x ” en los siguientes triángulos rectángulos.



$$x^2 = b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$x = \sqrt{2^2 + 4^2}$$
$$x = \sqrt{4 + 16}$$
$$x = \sqrt{20}\,u$$



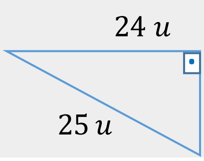
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$x = \sqrt{6^2 - 3^2}$$
$$x = \sqrt{36 - 9}$$
$$x = \sqrt{27}\,u$$



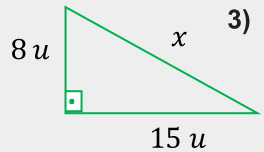
Actividad

A partir del ejemplo anterior, determinamos el valor de “ x ” de los triángulos rectángulos y observamos el resultado.

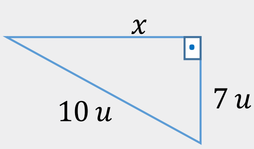
1)



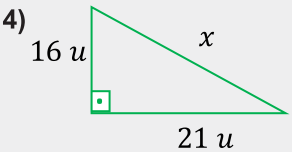
2)



3)



4)



Algunas propiedades más sobre los números irracionales

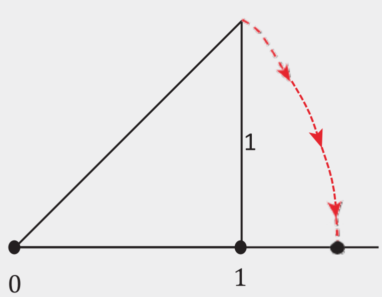
Si a es racional y b es irracional, entonces la suma $a+b$ *es irracional.*

Si $a \neq 0$ *es racional y* b *es irracional, entonces el producto ab es irracional.*

Caracteristicas de los números irracionales $\mathbb{I}$

- *Son infinitos*
- *Son ordenados*
- *Entre dos números racionales, existen una cantidad infinita de números irracionales.*

Gráfica de la raíz cuadrada de 2



2. Operaciones con números irracionales

Al ser parte de los números reales, podemos realizar operaciones de suma, resta multiplicación y división.

Suma y resta de números irracionales

Para la suma o resta se aplica la regla básica de los radicales semejantes.

Ejemplo:

$6\sqrt{7}+9\sqrt{7}-5\sqrt{7}$;tienen el mismo índice y el radicando.
$=(6+9-5)\sqrt{7}$;suman los coeficientes y se escribe el radical semejante.
$=10\sqrt{7}$;el resultado es un número irracional.

Multiplicación y división de números irracionales

Se aplica la propiedad de los índices radicales para raíces de igual o diferente índice.

Ejemplo:

Multiplicar la siguiente expresión:

Ejemplo:

$$5\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{11}=(5\cdot 6)\sqrt{3\cdot 11}=30\sqrt{33}$$

Dividir la siguiente expresión:

$$16\sqrt{9}\div 8\sqrt{3}=\left(\frac{16}{8}\right)\sqrt{\frac{9}{3}}=2\sqrt{3}$$

El **inverso aditivo** de un número irracional será siempre otro número irracional.

a) $\pi+(-\pi)=0$ b) $e+(-e)=0$ c) $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$

Ejemplo:

Los números irracionales $-\pi,-e,-\sqrt{2},\ldots$ son talque:

El **inverso multiplicativo** de un número irracional será siempre otro número irracional.

Ejemplo:

El número irracional $\frac{1}{e}$ es tal que: $e\cdot\frac{1}{e}=1$

Ejemplo:

El número irracional $\frac{1}{\sqrt{7}}$ es tal que: $\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{7}=1$

Actividad

Clasificamos cada número en racional ($\mathbb{Q}$) o irracional ($\mathbb{I}$).

1) 0.737 ________	**5)** $1.\widehat{23}$ ________	**9)** $154.\widehat{154}$ ________
2) 0 ________	**6)** -0.2468 ________	**10)** π ________
3) $-\sqrt{6}$ ________	**7)** $\sqrt{13}$ ________	**11)** $12.4\hat{6}$ ________
4) $\sqrt{36}$ ________	**8)** $23.242526\ldots$ ________	**12)** $\sqrt{2}$ ________

3. Racionalización

Es una operación que elimina raíces en el numerador o el denominador, se lo representa con una raíz equivalente.

Para la operación de racionalización se multiplica el numerador y el denominador por un factor que permita simplificar la raíz o raíces.

Racionalización del denominador

Ejemplos:

1) Racionalice el denominador de la fracción: $\frac{-11}{4\sqrt{3}}$

La fracción $\frac{-11}{4\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3}$, tanto en el numerador como en el denominador:

$$\frac{-11}{4\sqrt{3}}=\frac{-11}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-11\cdot\sqrt{3}}{4\sqrt{3^2}}=\frac{-11\cdot\sqrt{3}}{4\cdot 3}=-\frac{11\sqrt{3}}{12}$$

2) Racionalice el denominador de $\frac{2}{\sqrt[6]{4^2}}$ para obtener una expresión racional equivalente:

$$\frac{2}{\sqrt[6]{4^2}}=\frac{2}{\sqrt[6]{4^2}}\cdot\frac{\sqrt[6]{4^4}}{\sqrt[6]{4^4}}=\frac{2\cdot\sqrt[6]{4^4}}{\sqrt[6]{4^6}}=\frac{2\cdot\sqrt[6]{4^4}}{4}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{16}}{4}=\frac{\sqrt[3]{16}}{2}$$

3) Racionalice la siguiente fracción: $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

4) Racionalice la siguiente fracción: $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

$$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(3\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(3\sqrt{7}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{9(\sqrt{2})(\sqrt{7})+3(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})(\sqrt{7})}{(3\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{10(\sqrt{2})(\sqrt{7})+27}{63-2}$$

$$=\frac{10\sqrt{14}+27}{61}$$

Raíz cuadrada en el denominador

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Se amplifica por: $\sqrt{b}$

Raíz enésima en el denominador

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^x}}$$

Se amplifica por: $\sqrt[n]{b^{n-x}}$

con $n>x$

Suma o diferencia de raices cuadradas en el denominador

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Se amplifica por : $\sqrt{b}-\sqrt{c}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

Se amplifica por : $\sqrt{b}+\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}$$

Se amplifica por : $b-\sqrt{c}$

Actividad

Racionalizamos y simplificamos las siguientes fracciones:

1) $\frac{2b}{\sqrt{10b}}$	**4)** $\frac{50}{\sqrt{6}}$	**7)** $\frac{-3}{12\sqrt{2}}$	**10)** $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$	**13)** $\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$	**16)** $\frac{10a}{\sqrt[3]{5a^2}}$
2) $\frac{6y}{\sqrt[6]{12y^2}}$	**5)** $\frac{\sqrt[7]{9}}{3\sqrt[7]{4}}$	**8)** $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$	**11)** $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$	**14)** $\frac{1}{\sqrt{7}+3}$	**17)** $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$
3) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$	**6)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$	**9)** $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{30}-4}$	**12)** $\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2}$	**15)** $\frac{8-\sqrt{3}}{\sqrt{24}+4}$	**18)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$

Números

Números reales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4, \ldots\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1,0,1,2 \ldots\}$$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{\ldots -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$$

Números irracionales

$$\mathbb{I} = \{\ldots -\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi, e, \ldots\}$$

Adición
Sean a y b números reales, luego su suma se escribe $a+b$ y también es un número real.

Sustracción
Sean a y b números reales, La resta $a-b$ se define:

$$a - b = a + (-b)$$

Número irracional

Escribimos en forma numérica:

a) Setecientos cincuenta y tres millones novecientos cincuenta y un mil seiscientos cincuenta y cuatro.

b) Dos mil quinientos cuarenta y seis.

c) Noventa y cinco mil ochocientos setenta y seis.

d) Trescientos veintiséis.

Racionalización del numerador

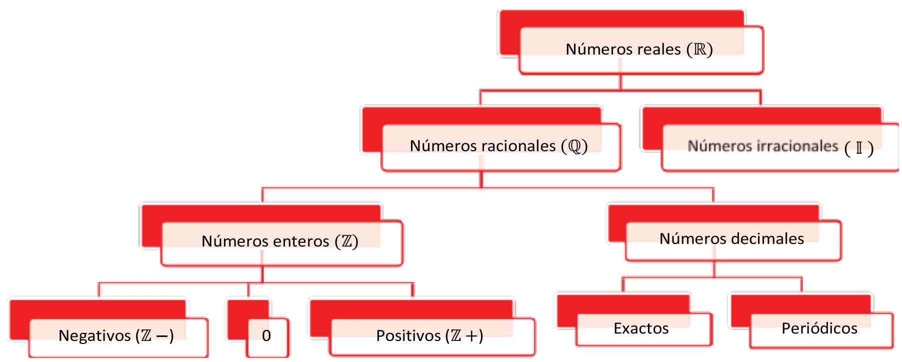
Ejemplo:

Racionalice la siguiente expresión: $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

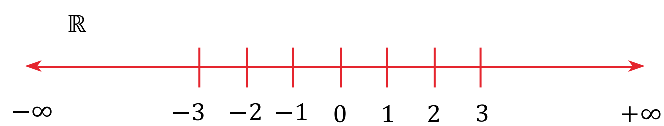
$$\frac{1+\sqrt{3}}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{-2}{3-3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}-3}$$

4. Los números reales y su relación de orden

Cuando unimos el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, obtenemos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.



Los números reales se pueden representar en la recta numérica:



Lectura y escritura

Billones			Millares de millón			Millones			Mil			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de mil de millón	Decenas de mil de millón	Unidades de mil de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades

La lectura se hace de izquierda a derecha.
Ejemplo:

178 325 176 se lee:

Millones			Mil			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades demil	Centenas	Decenas	Unidades
1	7	8	3	2	5	1	7	6

Se lee "ciento setenta y ocho millones trescientos veinticinco mil ciento setenta y seis".

5. Propiedades de los números reales

5.1 Propiedades de la adición de números reales

Propiedad	Simbología	Ejemplo
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$5 + 4 = 4 + 5$
Asociatividad	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(4 + 8) + 10 = 4 + (8 + 10)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$7 + 0 = 7$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$9 + (-9) = 0$

5.2 Propiedades de la multiplicación de números reales

Propiedad	Simbología	Ejemplo
Conmutatividad	$a \cdot b = b \cdot a$	$13 \cdot 5 = 5 \cdot 13$
Asociatividad	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 \cdot 6) \cdot 7 = 2 \cdot (6 \cdot 7)$
Elemento neutro	$a \cdot 1 = a$	$11 \cdot 1 = 11$
Inverso	$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$	$8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = 1$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$6 \cdot (5 + 3) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 3$
Producto con 0	$a \cdot 0 = 0$ $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$	$13 \cdot 0 = 0$

Propiedades

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n$

$a^n \div a^m = a^{n-m}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ con $b \neq 0$

$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ con $b \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n$ con b, c y $d \neq 0$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$ con $b \neq 0$

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ con $a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ con a y $b \neq 0$

$a^0 = 1$ con $a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ con a y $b \neq 0$

$a^1 = a$

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$ con $b \neq 0$

VALORACIÓN

La importancia de los números irracionales en la vida cotidiana

Los números irracionales, lejos de ser una mera abstracción matemática, son elementos esenciales para comprender el mundo que nos rodea, desde las estructuras de la naturaleza hasta las complejas teorías científicas y tecnológicas. Su estudio y aplicación nos permiten modelar la realidad con mayor precisión, resolver problemas complejos y avanzar en el conocimiento en diversos campos. Cabe destacar que los números irracionales también tienen aplicaciones en:

- Economía y finanzas: En modelos de crecimiento económico, mercados financieros y teoría del interés.
- Química y biología: En el estudio de estructuras moleculares, reacciones químicas y procesos biológicos.
- Teoría de la música: En la afinación de instrumentos y la composición musical.

PRODUCCIÓN

Los patrones de crecimiento de algunas plantas, como helechos y espirales de aloe vera, se basan en proporciones que involucran números irracionales, creando estructuras llamativas y eficientes:

- Investigamos acerca de como construir un herbario mostrando estas proporciones.
- ¿Cómo crees que sería la vida sin la aplicación de los números racionales e irracionales?

Fuente: Open AI, 2024

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

PRÁCTICA

Muchos juegos de mesa, como el ajedrez, utilizan números reales para representar valores de propiedades, puntuaciones o movimientos. Los números reales permiten realizar cómputos y tomar decisiones estratégicas durante el transcurso del juego.
En definitiva, los números reales son una herramienta fundamental para comprender y modelar el mundo que nos rodea. Sus aplicaciones son vastas y abarcan prácticamente todos los campos del conocimiento y la vida cotidiana.

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

En base a la lectura, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el valor material de las piezas en el tablero de ajedrez?
- ¿Qué otra aplicación puedes mencionar que utilicen a los números reales?
- ¿Cuáles son los valores que tienen las piezas del tablero de ajedrez?
- ¿Cómo crees que sería la vida sin la aplicación de los números reales?

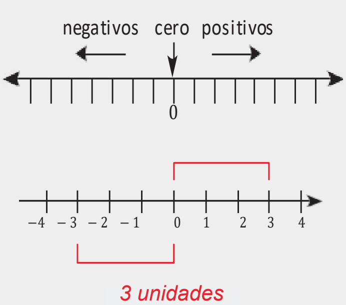
TEORÍA

Recuerda

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ / \ a \,\epsilon \mathbb{Z}; \ \ b\epsilon\mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)$$

La recta real



1. Operaciones con los números reales

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{11}{3}\right)=\left(\frac{2+8}{5}\right)-\left(\frac{9-22}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{10}{5}\right)-\left(\frac{-13}{6}\right)=2+\frac{13}{6}=\frac{12+13}{6}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$$

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{40+45+48}{60}\right)-\left(\frac{6-4+3}{12}\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{133}{60}\right)-\left(\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{133}{60}-\left(\frac{12}{5}\right)^{2}=\frac{133}{60}-\frac{144}{25}=\frac{665-1728}{300}$$

$$=\frac{-1063}{300}=-3\frac{163}{300}$$

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones:

$$0.8+1.\hat{3}-\sqrt{6.25}+2.\hat{3}$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{25}{4}}+\frac{7}{3}=\frac{4}{5}+\frac{4}{3}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}=\frac{24+40-75+70}{30}=\frac{59}{30}=1\frac{29}{30}$$

Actividad

Ubicamos los números en la recta real:

$1.\widehat{12}$; -7; 14.09; $\sqrt{13}$; 1; 0.75; $-\sqrt{27}$; -1; 0.12; $-0.\widehat{75}$; e; π

Calculamos:

1) $-1-\left(3-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}-6\right)$ **3)** $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+2-\frac{1}{2}$ **5)** $\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$ **7)** $\frac{15}{24}+\left(\frac{13}{6}-\frac{1}{4}\right)$

2) $6-\left(\frac{9}{5}-\frac{8}{3}\right)$ **4)** $\frac{7}{6}-\left(\frac{3}{2}+4\right)$ **6)** $\left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{15}{2}-\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)$ **8)** $\left(\frac{15}{7}-2+\frac{3}{5}\right)-\left(1-\frac{43}{140}\right)$

Potenciación de los números reales

Sea a un número real y n un número natural. El número real a^n que se lee "a elevado a la n" está definido como sigue:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{n-\text{veces}} \text{ con } a\in\mathbb{R}\ y\ n\ \in\mathbb{N}$$

Se definen las siguientes igualdades para las potencias entre algún valor y cero:

$$a^0 = 1;\ 0^n = 0;\ 0^0: \text{no definido}$$

Ejemplos:

$$3^5 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 243$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$$

$$(6^2)^{-1}\cdot(4^2)^{-2}\cdot(6\cdot4)^3 = (6)^{-2}\cdot(4)^{-4}\cdot(6)^3\cdot(4)^3 = (6)^1\cdot(4)^{-1} = 6\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

Elementos de la potencia

Exponente

$$\boldsymbol{a^n = b}$$

Base **Potencia**

Si la base de una potencia es negativa:

- *Si el exponente es par, el resultado es positivo.*
- *Si el exponente es impar, el resultado es negativo.*

Ejemplos:

$$(-3)^2 = 9$$

$$(-3)^3 = -27$$

Radicación

Es la operación matemática inversa a la potenciación. Consiste en encontrar un número que, elevado a una potencia dada, resulta en un número específico. En símbolos se escribe:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ con } a\in\mathbb{R}\ y\ n\ \in\mathbb{N}$$

Donde a es la base, m el exponente y n es el índice.

Ejemplos:

a) $5^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{5^7}$ b) $13^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{13}$ c) $9^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{9^2}$ d) $\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$ e) $\sqrt[4]{3x} = (3x)^{\frac{1}{4}}$

Simplificación de radicales

Ejemplo:

Simplifica el radical: $\frac{3}{2}\sqrt[4]{864}$

$$\frac{3}{2}\sqrt[4]{864} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{2^4\cdot54} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{54} = \frac{3}{2}(2)\cdot\sqrt[4]{54} = 3\sqrt[4]{54}$$

Ejemplo:

Simplifica el radical: $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{5}} = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{15}{5^2}} = \frac{2\sqrt{15}}{7\sqrt{5^2}} = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{15} = \frac{2}{35}\sqrt{15}$$

Recuerda

Radical

Índice $\sqrt[n]{a} = b$

Radicando **Raíz**

Propiedades:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Recuerda

$$\sqrt[2]{a^2} = |a|$$

Actividad

Realizamos las siguientes operaciones con radicales:

1) $4\sqrt[3]{5} - 7\sqrt[3]{5} + 13\sqrt[3]{5}$

2) $27\sqrt{3} - 5\sqrt{27} - 9\sqrt{12}$

3) $\sqrt{32} + \frac{13}{2}\sqrt{3} - \frac{11}{4}\sqrt{8} - \sqrt{12}$

4) $7\sqrt[5]{13} + 11\sqrt[5]{13} - 6\sqrt[7]{9} - 2\sqrt[7]{9}$

5) $3\sqrt{24} - \frac{1}{3}\sqrt{54} + \sqrt{150}$

6) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$

7) $\frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{8}{3}\sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

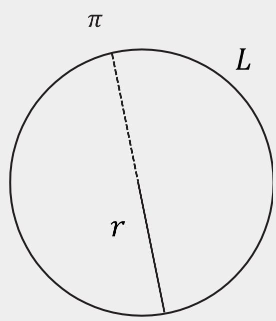
8) $\frac{1}{5}\sqrt{24} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{486}$

Multiplicación y división

$$x\sqrt[n]{a}\cdot y\sqrt[n]{b}=x\cdot y\sqrt[n]{ab}$$

$$x\sqrt[n]{a}\div y\sqrt[n]{b}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Números trascendentes



$$\pi=\frac{L}{2\cdot r}$$

El número e se obtiene al calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Reto

Simplifica:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}+\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}}}}}$$

Dato curioso

El número 142857, si lo multiplicamos por 7 el resultado es 999 999.

Además, si lo multiplicamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6, nos dará como resultado la misma serie de números en distinto orden.
¿Conoces más números que tengan propiedades similares?

Operaciones con radicales

La suma y resta de radicales deben operarse previamente haberse simplificado al máximo.

Ejemplo:

Reducimos la siguiente expresión: $8\sqrt[3]{40}-7\sqrt[3]{5}+13\sqrt[3]{625}-6\sqrt[3]{1080}$
Simplificamos cada radical que compone la expresión:

$$8\sqrt[3]{40}=8\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=8\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=8\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5}=16\sqrt[3]{5}$$

$$13\sqrt[3]{5^3\cdot 5}=13\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}=13\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5}=65\sqrt[3]{5}$$

$$-6\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 5}=-6\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{5}=-6\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{5}=-36\sqrt[3]{5}$$

Una vez simplificados los radicales se realiza las sumas y restas correspondientes:

$$8\sqrt[3]{40}-7\sqrt[3]{5}+13\sqrt[3]{625}-6\sqrt[3]{1080}=16\sqrt[3]{5}-7\sqrt[3]{5}+65\sqrt[3]{5}-36\sqrt[3]{5}$$
$$=(16-7+65-36)\sqrt[3]{5}=38\sqrt[3]{5}$$

Ejemplo:

Simplificamos la siguiente expresión: $-7\sqrt[3]{13}+18\sqrt[3]{13}-6\sqrt[3]{13}+2\sqrt[3]{13}$

$$-7\sqrt[3]{13}+18\sqrt[3]{13}-6\sqrt[3]{13}+2\sqrt[3]{13}=(-7+18-6+2)\sqrt[3]{13}=7\sqrt[3]{13}$$

La multiplicación y división de radicales se realiza operando los coeficientes.

Ejemplo:

Realizamos la multiplicación de los siguientes radicales: $5\sqrt{2};\ 3\sqrt{6};\sqrt{7}$

$$5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}=5\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{2\cdot 6\cdot 7}=15\sqrt{84}$$

Ejemplo:

Realizamos la división de los siguientes radicales: $\sqrt{72};\ \sqrt{4}$

$$\sqrt{72}\div\sqrt{4}=\sqrt{\frac{72}{4}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

En el conjunto de los números reales, existen los números algebraicos, que son solución de algún polinomio:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son racionales. Luego un número real z será algebraico cuando:

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0=0$$

Los números trascendentes son aquellos que no son algebraicos, es deir, no son solución o raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales.

Ejemplos:

El número $\pi=3.1415926535\ldots$, que representa la relación entre el perímetro y el diametro de una circunferencia y $e=2.71828182845904\ldots$, son trascendentes.

El número $C_{10}=12345678910111213141516171819 2021\ldots$, propuesto por el matemático inglés David Gawen Champernowne (1912-2000) es también trascendente.

2. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Veamos algunos ejemplos concretos de su importancia en la vida cotidiana:

a) Compras y finanzas:

- Calcular el precio total de nuestras compras en el mercado o en la tienda.
- Gestionar nuestro presupuesto mensual, controlando ingresos y gastos.
- Tomar decisiones financieras informadas, comparando precios y evaluando inversiones.

b) Cocina y recetas:

- Seguir las instrucciones de las recetas, que suelen incluir medidas en unidades como tazas, cucharadas, gramos y mililitros, todas ellas expresadas en números reales.
- Calcular los tiempos de cocción en función de la temperatura del horno o del fuego.

c) Salud y bienestar:

- Controlar nuestro peso y altura, expresados en kilogramos y centímetros, respectivamente.
- Tomar la dosis correcta de medicamentos, siguiendo las indicaciones del médico en miligramos o mililitros.
- Monitorear nuestra presión arterial y frecuencia cardíaca, valores numéricos que indican nuestro estado de salud.
- Llevar un registro de nuestras actividades físicas, como la distancia recorrida o las calorías quemadas.

d) Ocio y entretenimiento:

- Jugar juegos de mesa, que utilizan números reales para contar puntos, avanzar casillas o sumar letras.
- Escuchar música, donde la frecuencia y la duración de las notas se miden en números reales.

Fuente: Open AI, 2024

Fuente: Open AI, 2024

VALORACIÓN

Los números reales y los subconjuntos que lo componen tienen variadas aplicaciones, en especial el número trascendental π. Este número fue utilizado en la antigüedad y hasta la fecha se lo utiliza en diferentes áreas y disciplinas científicas como la economía, física, astronomía, informática y otros.

En el campo de la ciencia los números reales son la base para los cálculos en la órbita de los satélites, por su aplicación del cálculo y la aproximación al utilizar la mayor cantidad de dígitos.

Los problemas resueltos con la aplicación de las matemáticas en la actualidad tienen que ver con el uso de los celulares, que sin el uso del número π, no se podría descomponer una señal en sus frecuencias.

Fuente: Open AI, 2024

PRODUCCIÓN

Construimos un plan de actividades diarias tomando en cuenta:

- Estimar el tiempo que tardarás en cada actividad.
- Calcular tiempos de viaje.
- Gestionar citas y eventos.
- Planificar el presupuesto para las compras.
- Establecer metas de ejercicio.
- Planificar viajes.
- Disfrutar de la música y juegos.

Fuente: Open AI, 2024

ÁLGEBRA Y SUS TÉRMINOS

PRÁCTICA

Al revisar su mochila, Alan se dio cuenta que lamentablemente sus colores y marcadores se habían mezclado, por lo que decidió organizar sus materiales de la siguiente manera: 5 marcadores rojos, 3 marcadores verdes, 4 marcadores azules, 6 marcadores negros, 5 cuadernos, 2 reglas y un tajador.

Para anotar en una lista, todos sus materiales, procede a abreviarlos de la siguiente forma:

$$5\text{mr}, 3\text{mv}, 4\text{ma}, 6\text{mn}, 5\text{c}, 2\text{r}, 1\text{t}$$

Como puedes observar, el realizar la simple organización de nuestros materiales conlleva el uso del álgebra, que utiliza letras y símbolos para representar números y sus relaciones.

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

- ¿Qué conceptos matemáticos se aplican en la organización de tus materiales educativos?
- Analiza en qué otras áreas se utiliza los conceptos del algebra.
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos?

TEORÍA

Dato

Fuente: Open AI, 2024

El término "álgebra" proviene del vocablo árabe "al-Jabr", siendo su significado el de "recomposición" o "reintegración". Existen evidencias que los babilónicos ya resolvían ecuaciones complejas antes del 2000 a.C., a pesar de las dificultades ante la inexistencia de los números negativos y la imposibilidad de utilizar una manipulación simbólica. La introducción del término "álgebra" se atribuye al matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán Muhammad Al-Khwarizmi, quien utilizaba palabras y no símbolos, pero aun así sus métodos son similares a los utilizados en la actualidad (Stewart, 2007)

1. Nociones básicas de álgebra

El álgebra es una rama de la matemática que trata de cantidades y se conoce al árabe Al-Khwarizmi como el padre del álgebra.

Se deben distinguir dos lenguajes, el usual o habitual y el numérico.

Lenguaje usual	Lenguaje numérico
Cuatro dividido entre seis	$4 \div 6$
La suma de tres números	$a + b + c$

Ejemplo:

Lenguaje habitual o usual al lenguaje numérico:

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje numérico
El triple de ocho	$3 \cdot 8$
Nueve elevado al cubo	9^3
La quinta parte de treinta y tres	$\frac{33}{5}$

El álgebra combina la parte numérica con lo literal.

$$6x; \quad 4mn; \quad \frac{2}{3}a^3$$

Ejemplo:

El lenguaje algebraico utiliza letras combinadas con números y signos.

Ejemplo:

Lenguaje habitual o usual, al lenguaje algebraico:

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje numérico
Suma de tres números	$x + y + z$
El cubo de un numero	x^3
El cuadrado de un número más dos	$x^2 + 2$

2. Expresiones algebraicas y la modelización

La expresión algebraica es la combinación entre números reales (constantes) y letras (incógnitas), por ejemplo:

$$5x + 7y - 13$$

Para comprender de mejor manera la expresión algebraica, distinguimos dos lenguajes: el lenguaje numérico y el algebraico.

- El lenguaje numérico solo expresa números.
- El lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones de la vida cotidiana.

Ejemplo:

El largo de una sala excede a su ancho en 6 metros.
El enunciado lo expresamos en el lenguaje algebraico, el largo y ancho:

- La medida del ancho: “ x ”
- La medida del largo: “ $x + 6$ ”

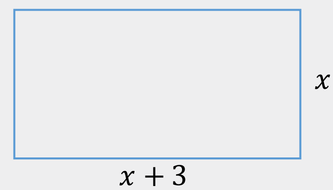
Ejemplo:

Lenguaje habitual o usual al lenguaje algebraico.

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje algebraico
La cuarta parte de un número	$\frac{x}{4}$
El cuadrado de la suma de dos números	$(x + y)^2$
El triple de la suma de dos números	$3(x + y)$
El inverso de un número menos ocho	$\frac{1}{x} - 8$
El triple de un número aumentado en una docena	$3x + 12$
Tercera parte de la edad de Alex más seis años	$\frac{x}{3} + 6$
Tres números consecutivos	$x; x + 1; x + 2$
Un número cualquiera	x
Un número cualquiera aumentado en trece	$x + 13$
La semisuma de dos números	$\frac{x + y}{2}$
Las dos terceras partes de un número disminuido en tres.	$\frac{2}{3}(x - 3)$

Nota

El proceso de crear un modelo matemático que represente una situación o fenómeno en el mundo real se conoce como modelización. Este modelo se construye utilizando expresiones algebraicas y gráficos, entre otros recursos matemáticos. El objetivo de la modelización es mejorar la comprensión del fenómeno o situación para poder hacer predicciones o tomar decisiones informadas.



Para poder manejar el lenguaje algebraico es necesario comprender los siguientes:

- *Se usan todas las letras del alfabeto.*
- *Las primeras letras del alfabeto o algunas del alfabeto griego, se determinan por regla general como constantes:*

$$a, b, c, \pi$$

- *Por lo regular las letras x,y y z se utilizan como las incógnitas de la función o expresión algebraica.*

El lenguaje algebraico es más preciso que el lenguaje numérico, ya que podemos expresar enunciados de una forma más breve.

Actividad

Expresamos al lenguaje algebraico:

1) El doble de un número.
2) Un número disminuido en 5 unidades.
3) Un número impar.
4) Un número cualquiera aumentado en su triple.
5) La suma de cuatro números consecutivos.
6) La suma de dos números pares consecutivos.
7) El cuadrado de, la diferencia entre x y la quinta parte de y.
8) El triple de un número, aumentado en el doble de otro.

Escribimos con palabras los siguientes enunciados en lenguaje algebraico:

1) $5a$

2) $\frac{2}{3}a$

3) $\frac{a}{2} + 2$

4) $(2a - 1) + (2(a + 1) - 1)$

5) $\frac{a + b}{2}$

6) $3(a + 5)$

Nota

Velocidad constante

Velocidad variable

Una expresión algebraica es una combinación de números, letras (que representan incógnitas) y operadores matemáticos (como suma, resta, multiplicación y división), que se utiliza para representar una cantidad o una relación matemática. Las expresiones algebraicas surgen al traducir el lenguaje ordinario al preciso lenguaje matemático.
Completa la tabla atendiendo a los siguientes enunciados:

- *Donato tiene x años.*
- *Su hijo tiene 25 años menos que él.*
- *Su padre tiene el doble de edad que él.*
- *Su padre le saca 6 años a su madre.*
- *Orlando tiene 5 años más que Donato.*

	Edad
Donato	x
El hijo	
El padre	
La madre	
Orlando	

3. Estudio de incógnitas y constantes

El álgebra tiene la combinación de números (constantes) y la parte literal o letras (incógnitas).

Ejemplo:

$$7x \qquad 13x \qquad \frac{5}{9}xyz$$

Las letras x,y o z son consideradas incógnitas y las cantidades $7, 13$ y $\frac{5}{9}$ son consideradas valores constantes.

Ejemplo:

Identifica las incógnitas y constantes:

Expresión	Incognitas	Constantes
$-3xy$	x, y	-3
$7x^2y$	x, y	7
$2\pi h$	h	$2, \pi$
$\frac{3}{2}xy^3$	x, y	$\frac{3}{2}$
$17mn$	m, n	17
$-11ab^3$	a, b	-11

Ejemplo:

Cristina decide vender manzanas y naranjas por unidad. Representemos cuánto se pagaría por la cantidad de alguna de las frutas usando un término algebraico. Enseguida representamos el precio de alguna cantidad como naranjas, asociando “$3n$” al primer conjunto donde el 3 representa el precio por cada naranja (constante) y “n” la cantidad de naranjas (incógnita).

Ejemplo:

La arroba de papa tiene un costo de Bs 35 (treinta y cinco), la familia de Amira realiza las siguientes compras:

Arroba	1	2	5	8	13
Costo (Bs)	35	70	175	280	445

La compra por arroba:

$$\left.\begin{array}{l} 35 \div 1 = 35 \\ 70 \div 2 = 35 \\ 175 \div 5 = 35 \\ 280 \div 8 = 35 \\ 445 \div 13 = 35 \end{array}\right\}$$ Bs 35 es la **constante**

El costo y la arroba son incógnitas y el precio de la arroba es constante. En la tabla se aprecia la cantidad de arroba comprados y como el costo aumenta, la división del costo entre la arroba que es 35.
El valor de la arroba es una variable independiente, el costo es la variable dependiente.

Actividad

Identificamos las incógnitas y constantes de:

1) $-65ab$
2) $6xy$
3) $3xy$
4) $2\pi r^2$
5) $-m^5xy^3z$
6) $6m^5xyz^3$
7) $-3bcd$
8) $6ab^2c^5$
9) $-10x$
10) $\frac{3}{7}ay^2$
11) $\frac{2}{5}ab^7$

4. Término algebraico

La expresión algebraica que no está separada por operadores de suma o resta, se denomina término algebraico y se compone por: "coeficiente" e "incógnita" o "parte literal y exponente".
Al término algebraico también se lo denomina monomio, por ejemplo, $-7x^2y^5$, que significa: -7 por x^2 por y^5.

Ejemplos:

Expresiones de un término algebraico:

$$2a^3;\ 3a^3b;\ 5x^4y^3z;\ -3mn^2;\ -7\,x^5y^2;\ -\frac{1}{2}xy^3z;\ \frac{7}{5}a^4b;\ \sqrt{3}m^6n^6$$

4.1. Elementos de un término algebraico

a) Signo

El signo puede ser positivo $(+)$ o negativo $(-)$. Cuando un término no tiene signo es positivo, por ejemplo:

$$3x^4;\qquad 2x^3yz;\qquad 7x^2;\qquad 8xy^3$$

b) Coeficiente

El coeficiente es un número, por ejemplo:

los coeficientes en $4ab$ y $-3bc$ son 4 y -3, respectivamente.

c) Incógnita o parte literal

Está representado por letras, es más común usar: a, b, c, x, y, z. La parte literal del término considerado incógnita puede tener exponentes, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\,x^2y^3;\qquad -8\,a\,x^4\,y^{-2};\qquad \frac{8}{14}\,m^5n^{-2}$$

d) Exponente

Son las potencias de la incógnita, si no tiene exponente se sobrentiende que es la unidad, por ejemplo:

para $-8x^5$, el exponente de x es 5

Ejemplo:

Identifica los elementos del término: $3x^4y^8$

- Signo: positivo
- Coeficiente: 3
- Incógnitas : x, y
- Exponentes: 4 y 8

Ejemplo:

Identifica las partes del término algebraico: $-\frac{3}{4}m^2n^2$

Signo: negativo $(-)$

Coeficiente: $-\frac{3}{4}$

Parte literal: m^2n^2

Término algebraico

El término algebraico se compone por:

Exponentes

Signo

$$\mathbf{4}\underbrace{\boldsymbol{x^3y^4}}$$

Coeficiente

Parte Literal

Nota

No es necesario escribir el número "1" como coeficiente.

$$1x^2 = x^2$$

Se lo sobreentiende.

Término algebraico	*Signo*	*Coeficiente*	*Parte literal*
$3c^2v^3$	$+$	3	c^2v^3
$-2n^4m^5$	$-$	-2	n^4m^5
$-23t^7h^3b$	$-$	-23	t^7h^3b
d^2r^3	$+$	1	d^2r^3
$-5x^4y$	$-$	-5	x^4y
$10c^{12}m$	$+$	10	$c^{12}m$
$-12n^4g^5$	$-$	-12	n^4g^5
$-f^5m^3$	$-$	-1	f^5m^3
-1	$-$	-1	
u^6r^3	$+$	1	u^6r^3
2	$+$	2	
$-21n^7h^2$	$-$	-21	n^7h^2

Actividad

Identificamos los elementos del término:

1) $2ab^3$

2) x^2y

3) $-a$

4) $-\frac{3}{4}xyz$

5) $\frac{ab}{3}$

6) $\frac{m^4}{3}$

7) 2^3x^2

8) $-2xyb^2$

9) $\frac{ab^2}{4}$

10) $\frac{2}{3}ab^2x^2y$

11) $\frac{-7a+2b-3c}{5}$

12) $-\frac{1}{2}m^2n^4$

5. Términos semejantes, reducción y su aplicación

Dos o más términos son semejantes si poseen idénticas incógnitas(letras), pudiendo tener diferentes coeficientes numéricos y diferentes signos.

Ejemplo:

Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus exponentes iguales, por lo tanto, son términos semejantes.

$3ab^2$ con $-7ab^2$; $0{,}5a^3bc^2$ con $\frac{a^3bc^2}{3}$; $13x^3yz^2$ con $\frac{7}{3}x^3yz^2$

5.1. Reducción de términos semejantes

Para reducir se toman expresiones con términos semejantes, luego se suman o restan los coeficientes.

Para reducir términos se presentan tres casos:

I. Los términos semejantes con el mismo signo se suman agregando sus coeficientes y luego se coloca la parte literal.

Ejemplo:

Para reducir o simplificar $3a + 6a + 7a + 2a$, los coeficientes $3,6,7,2$ se suman:

$$3a + 6a + 7a + 2a = 18a$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $18a$

Ejemplo:

Para reducir o simplificar $-7x^2y - 5xy^2 - 13x^2y - 9x^2y$, los coeficientes $-7, -5, -13, -9$ se suman:

$$-7x^2y - 5xy^2 - 13x^2y - 9x^2y = -34x^2y$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-34x^2y$

II. Los términos semejantes con diferente signo se restan agregando el signo del coeficiente mayor y luego se coloca la parte literal.

Ejemplo:

Para reducir o simplificar $17x - 8x$, los coeficientes 17 y 8 se restan y como el resultado es $17 - 8 = 9$, cuyo signo es positivo $(+)$:

$$17x - 8x = 9x$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $9x$

Ejemplo:

Para reducir o simplificar $25xyz - 33xyz$, los coeficientes 25 y -33, se restan y como el resultado es $25 - 33 = -8$, cuyo signo es negativo $(-)$:

$$25xyz - 33xyz = -8xyz$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-8xyz$

III. Dos o más términos semejantes que contienen términos con diferentes signos, se asocian tomando a aquellos con signo positivo y aquellos con signo negativo, para aplicar (I) o (II), según el caso.

Ejemplo:

Para reducir o simplificar $8ax + 2ax - 2ax + 5ax - 4ax + 7ax$, primero asociamos los positivos y luego los negativos:

$$8ax + 2ax + 5ax + 7ax - 4ax - 2ax = (8ax + 2ax + 5ax + 7ax) + (-4ax - 2ax)$$

Luego aplicamos (I) y (II):

$$= (8ax + 2ax + 5ax + 7ax) + (-4ax - 2ax) = 22ax - 6ax$$

Aplicando II:

$$(8ax + 2ax + 5ax + 7ax) + (-4ax - 2ax) = 22ax - 6ax = 16ax$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $16ax$

Nota

Términos semejantes

$10xz + \boxed{3y^2} - 4xz + \boxed{5y^2}$

Términos semejantes

Sólo se pueden agrupar términos con la misma parte literal.

- *No se pueden agrupar:*

  $2x + 3y$; $2x^2 - 2x$

- *Sí se pueden agrupar:*

  $$2x + 3x + 5x = (2x + 3x) + 5x = 2x + (3x + 5x)$$

Encierre todos los términos algebraicos que son semejantes a x^2y :

$-2xy^2$ $\quad -2x^2yz$

$-3x^2$ $\quad \frac{2}{3}ab^2x^2y$

$3x^2y$

xy^3 $\quad 3xy$

$\frac{x^2y}{2}$ $\quad -3x^2y$

Para el producto de dos términos, la ley de signos se reduce a lo siguiente:

- *El producto de signos iguales es positivo $(+)$.*
- *El producto de signos diferentes es negativo $(-)$.*

$(+)\cdot(+) = +$

$(-)\cdot(-) = +$

$(+)\cdot(-) = -$

$(-)\cdot(+) = -$

5.2. Reducción de términos semejantes de distinta base

Se agrupan términos semejantes y se aplican los puntos I, II y III, según el caso.

Ejemplo:

Reducir:
Primero asociamos los términos semejantes: a, b y los que tienen c

$$\underbrace{a+2a-4a}_{-a}\underbrace{+b+3b-5b}_{-b}\underbrace{+c-2c-2c}_{-3c}$$

Por lo tanto, el resultado es: $-a-b-3c$

Ejemplo:

Reducir: $\frac{2}{5}ax^2+0.4ax-\frac{5}{3}a^2x-2.4ax+\frac{4}{3}xa^2+\frac{5}{8}xa^2$

Primero asociamos los términos semejantes: a^2x, ax y los que tienen a^2x

$$=\frac{2}{5}ax^2-\frac{5}{3}ax^2+0.4ax-2.4ax+\frac{4}{3}xa^2+\frac{5}{8}xa^2$$
$$=\frac{2}{5}ax^2-\frac{5}{3}ax^2+\frac{2}{5}ax-\frac{12}{5}ax+\frac{4}{3}xa^2+\frac{5}{8}xa^2$$
$$=\left(\frac{2}{5}ax^2-\frac{5}{3}ax^2\right)+\left(\frac{2}{5}ax-\frac{12}{5}ax\right)+\left(\frac{4}{3}xa^2+\frac{5}{8}xa^2\right)$$
$$=\left(\frac{6-25}{15}ax^2\right)+\left(\frac{2-12}{5}ax\right)+\left(\frac{32+15}{24}xa^2\right)$$
$$=\frac{-19}{15}ax^2-2ax+\frac{47}{24}xa^2$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $\frac{-19}{15}ax^2-2ax+\frac{47}{24}xa^2$

Ejemplo:

Reducir: $xy+6yz-9xz-6xy+5xz-7yz+8xy+13yz-8xz$
Primero asociamos los términos semejantes: $xy;\ xz$ y los que tienen yz

$$=(xy+8xy-6xy)+(5xz-9xz-8xz)+(6yz-7yz+13yz)$$
$$=(3xy)+(-12xz)+(12yz)$$
$$=3xy-12xz+12yz$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $3xy-12xz+12yz$

Nota

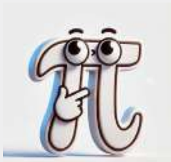
En el caso de que en una expresión haya más de un tipo de operación, el orden de prioridad en que hay que realizarlas es el siguiente:
- *Paréntesis y corchetes*
- *Potencias*
- *Productos y cocientes*
- *Sumas y restas*

Si en una operación no hay paréntesis se hacen antes los productos y divisiones que las sumas y restas.

Para hacer expresiones con muchas operaciones se hacen primeros los paréntesis y se sustituyen por su resultado, así se va simplificando la expresión.

El signo de multiplicación no suele ponerse entre las letras, ni entre números y letras, ni entre números y paréntesis.

xy *equivale a* $x\cdot y$
$2x$ *equivale a* $2\cdot x$
$2(x-2)$ *equivale a* $2\cdot(x-2)$



Fuente: Open AI, 2024

Actividad

Reduzcamos los siguientes términos:

1) $6ab-10ac+4bc-5ac+7ab$
2) $-15p^2+7p+p+4p^2-2p^3$
3) $mn+5mn-3nm+2n+4m$
4) $8tf+5ft-4fgt+10gft$
5) $5k-10h-2+40h-12k+9$
6) $d^3-34gx+23d^3-100xg^5+10xg-12g^5x$
7) $\frac{1}{2}s+\frac{2}{4}st^4-0.5s-0.5t^4s$
8) $x^5-\frac{3}{4}nm+\frac{1}{4}mn-36x^5$
9) $12e^4-100t^2+20e^4-0.5t^2$

VALORACIÓN

El álgebra proporciona un lenguaje simbólico para representar relaciones entre cantidades desconocidas y conocidas, lo que permite formular y resolver problemas matemáticos de forma precisa y eficiente, el álgebra fomenta el razonamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis sistemático.
- ¿Cómo se emplea el álgebra en la vida cotidiana?
- ¿Cómo utilizarías el álgebra en nuestro hogar?

PRODUCCIÓN

- Elaboremos un informe sobre las aplicaciones del algebra en tu diario vivir.
- Construyamos un organigrama sobre la jerarquía de las operaciones.

EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES

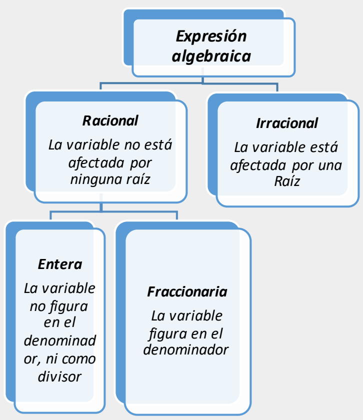
PRÁCTICA

Fuente: Open AI, 2024

Un mago me ordenó:
- Piensa un número cualquiera
- Súmale 3
- Multiplica el resultado por 2
- Réstale 8
- Divide entre 2

Nunca entenderás el truco del mago si no te inicias en el mágico arte del **álgebra**. El arte se basa en la posibilidad que te dan las matemáticas de trabajar con **cantidades desconocidas**.
¿Se puede razonar rigurosamente con cantidades desconocidas?
¿Cómo codificarías el ejemplo del mago?
¿Este truco será generalizable?

TEORÍA



Polinomio mónico: *Es aquel que presenta una sola incógnita y coeficiente principal igual a 1.*
Polinomio entero: *Es un polinomio cuyos coeficientes pertenecen al campo de los números enteros.*
Polinomio homogéneo: *Es aquel cuyo grado absoluto (llamado grado de homogeneidad) de cada uno de sus términos es el mismo.*
Polinomio idénticamente nulo: *Es aquel polinomio que se anula para cualquier valor de la incógnita, ya que sus coeficientes son iguales a cero. Se le representa así:* $P(x) = 0$
Polinomios idénticos: *Dos o más polinomios son idénticos si sus términos semejantes presentan los mismos coeficientes.*

1. Clasificación de las expresiones algebraicas

Las expresiónes algebraicas pueden clasificarse como sigue:

Nombre	Cantidad de términos	Expresión
Monomio	Un solo término	$-13x^2y^5$
Binomio	Dos términos	$11x^2 + 8y$
Trinomio	Tres términos	$x^2 + 4xy + y^2$
Polinomio	Dos o más términos	$3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 2$

2. Grado relativo y absoluto de un monomio y un polinomio

Grado relativo y absoluto de un monomio:
- El **grado absoluto (GA)** es la suma de los exponentes de las incógnitas (letras).
- El **grado relativo (GR)** es el exponente que tiene alguna de las incógnitas (letra).

Ejemplo:

Determinar el grado absoluto y relativo del monomio: $23t^3h^4b$
El grado absoluto es la suma de los exponentes: $3,4$ y 1

$3+4+1=8$ el monomio es de 8^{vo} grado

Los grados relativos correspondientes son:
- Con respecto a "t" es de 3^{er} grado
- Con respecto a "h" es de 4^{to} grado
- Con respecto a "b" es de 1^{er} grado

Grado relativo y absoluto de un polinomio

- El **grado absoluto (GA)** de un polinomio es igual al mayor de los grados absolutos de los monomios que lo componen.
- El **grado relativo (GR)** de un polinomio es igual al exponente de mayor valor con relación a la incógnita (letra).

Actividad

Completemos la siguiente tabla:

Expresión algebraica	Cantidad de términos	Clasificación	Grado de la expresión
$3c^2v^3 - 2n^4m^5$			
$-2n^4m^5 - 23t^7h^3b + a$			
$r^{10} - f^5m^3 - 12n^4g^5$			
$u^6r^3 + nb$			

Ejemplo:

Determina el grado absoluto y relativo del polinomio.

$$x^5+2x^4y^3-x^3y^2+5x^2y-x-1$$

Los grados absolutos de los monomios que componen el polinomio son $5, 7, 5, 3$ y 1, luego el grado absoluto del polinomio es 7.
El grado relativo del polinomio es:

Respecto a la incógnita "x", el polinomio es de 5^{to} grado.

Respecto a la incógnita "y", el polinomio es de 3^{er} grado.

3. Valor numérico

Se obtiene al reemplazar la parte literal o letra con el valor que le corresponda y después realizar la operación indicada.

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de la expresión:

$$a^3b^4c^5 \text{ si } a=3;\ b=\sqrt{3};\ c=\frac{2}{3}$$

Se reemplazan los valores de a, b, c y se efectúa las operaciones para obtener el valor numérico:

$$a^3b^4c^5=(3)^3\left(\sqrt{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^5=(27)(9)\left(\frac{32}{243}\right)=\frac{7776}{243}=32$$

El resultado de los valores para la expresión es: 32

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de la expresión:

$$-0.5x^2y^3z+\left[\left(\frac{1}{3}x^2z-x^2yz^3\right)+\frac{y^3z}{2}-8z^2\right];\text{si } x=3;\ y=4;\ z=\frac{1}{2}$$

Reemplazamos y realizamos las operaciones:

$$=-\frac{1}{2}x^2y^3z+\left[\left(\frac{1}{3}x^2z-x^2yz^3\right)+\frac{y^3z}{2}-8z^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(3)^2(4)^3\left(\frac{1}{2}\right)+\left\{\left[\frac{1}{3}(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)-(3)^2(4)\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]+\frac{(4)^3\left(\frac{1}{2}\right)}{2}-8\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}(9)(64)\left(\frac{1}{2}\right)+\left\{\left[\frac{1}{3}(9)\left(\frac{1}{2}\right)-(9)(4)\left(\frac{1}{8}\right)\right]+\frac{(64)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}-8\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=-144+\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}+16-2\right)=-144+(-3+16-2)$$

$$=-144+(11)=-133$$

El valor numérico de la expresión es: -133

MONOMIO
1 término algebraico

BINOMIO
2 términos algebraicos.

TRINOMIO
3 términos algebraicos.

POLINOMIO
Dos o más términos algebraicos con exponente. natural o cero.

MULTINOMIO
Unión de dos o más términos algebraicos con exponente $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.

Hallar el valor numérico de una expresión algebraica significa asignar un valor numérico a cada incógnita de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final.

No olvidar:

1º Reemplazar cada incógnita por el valor asignado.

2º Calcular las potencias indicadas.

3º Efectuar las multiplicaciones y divisiones.

4º Realizar las adiciones y sustracciones.

SIGNOS DE AGRUPACIÓN	
NOMBRE	**SÍMBOLO**
PARÉNTESIS	( )
CORCHETES	[ ]
LLAVES	{ }

En álgebra los paréntesis se usan para agrupar términos y separar operaciones.

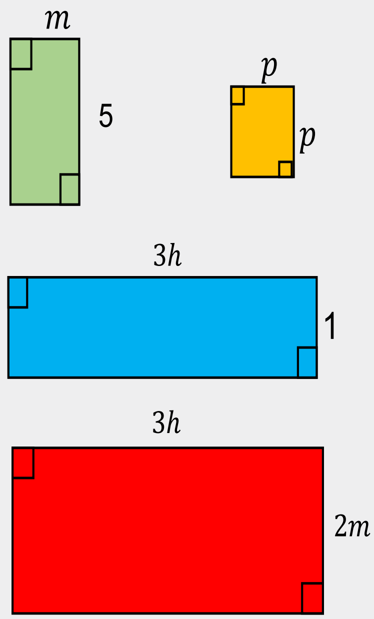
Para eliminar paréntesis debes fijarte en el signo que tengan.

Actividad

Completemos la siguiente tabla:

Polinomio	Grado absoluto	Grado relativo
$2x^3-x^2+x-2$		
$xyz+x^2y^3z^5-xyz^{12}$		
$-x^4+3x^2+2x-1$		
$x+2x^2-xyz-2$		

Considera los siguientes rectángulos y la medida de sus lados:



Si $m = 3, p = 2$ *y* $h = 5$*. Hallar el valor numérico de la expresión obtenida para calcular el perímetro total de los rectángulos.*

Encuentra el valor numérico de las siguientes fórmulas:

$V(a) = a^3$; Para $a = 5\ cm$

(V *: Volumen de un cubo)*

$L(r) = 2\pi r$; Para $r = 3\ cm$

(L: Perímetro de la circunfencia de radio r *)*

Ejemplo:

Hallar el valor numérico de $P(m,n) = 7m + 13n$ para $m = 4$ y $n = 2$.

El valor es: $P(m,n) = 7m + 13n$

$$P(4,2) = 7(4) + 13(2) = 28 + 26 = 54$$

El resultado para los valores es: 54

Ejemplo:

Sea $P(x,y) = 5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$ hallar $P(3,-3)$.

$$P(x,y) = 5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$$

$$P(3,-3) = 5\cdot(3)^2(-3) - 8\cdot(3)(-3)^2 - 9\cdot(-3)^3$$

$$P(3,-3) = -135 - 216 + 243 = -108$$

El resultado para los valores es: -108

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho, se expresa: $A(x,y) = xy$

Ejemplo:

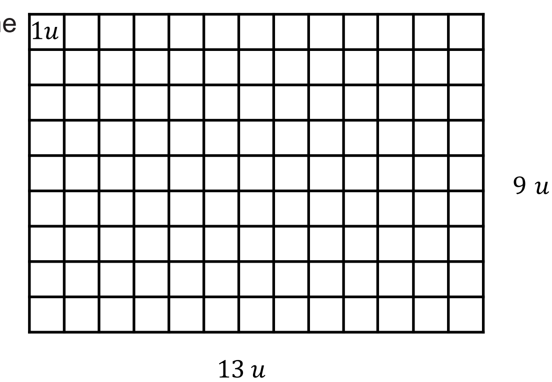
Calcular el área del rectángulo de 9 unidades de largo y 13 de ancho.

El área del rectángulo, viene dada por la fórmula:

$A(x,y) = xy$

Encontramos el valor numérico:

$$A(9u,13u) = 9u \cdot 13u$$
$$= 117u^2$$



Ejemplo:

Calcular el área de un trapecio cuyas dimensiones son, base $15\ mm$, base menor $9\ mm$ y altura $13\ mm$.

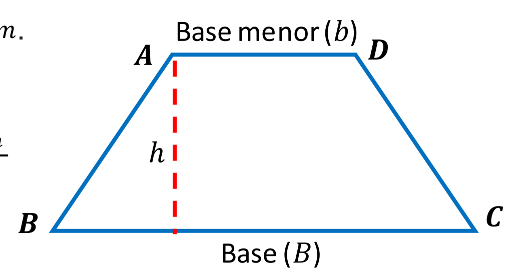
La unidad de medida está en mm.

$$S(B,b,h) = \frac{(B+b)h}{2}$$

$$S(15,9,13) = \frac{(15mm + 9mm)\,13mm}{2}$$

$$= \frac{(24mm)\,13mm}{2}$$

$$S(15,9,13) = 156mm^2$$



Actividad

Calculamos el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes, considerando:

Expresiones algebraicas	Reemplazar: $a = 7; b = 3; c = 6; d = -1;\ f = 1$	Resultado
$5a^2 - 2bc - 2d$		
$2a^2 - b^3 - c^3 - d^5$		
$3(a - b) + 2(c - d)$		
$\frac{c}{3} + \frac{b}{5} - \frac{a}{2}$		
$(b + d)^a$		

Dada la expresión algebraica, hallar el valor numérico:

1) $P(x)=7x^2-2x$; hallar $P(3)$ **2)** $P(y)=7y^3+8y^2$; hallar $P(-5)$ **3)** $P(z)=-13z^5+3z$; hallar $P(3)$

3.1. Prioridades en las operaciones

El cálculo del valor numérico de una expresión, toma en cuenta las siguientes reglas típicas para minimizar errores.

a) Si la expresión tiene signos de agrupación, el cálculo se comienza por el interior de estos.
b) Si hay potencias, se efectúan las potencias teniendo cuidado con el signo en caso de ser base negativa.
c) Si hay productos, primero se efectúan estos.
d) Se efectúan las sumas y restas.
e) Se simplifica si el resultado es una fracción reducible

3.2. Signos de agrupación

Se utilizan los signos de agrupación para indicar la cantidad en su interior.

a) Corchetes [ ]
b) Paréntesis ( )
c) Llaves { }
d) Vínculo –

3.3. Reglas para suprimir la agrupación

Si está el signo "+" delante del signo de agrupación, se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo.

$$+(-6x+7y-2z)=-6x+7y-2$$

Si está el signo " – " delante del signo de agrupación, se suprime y cambia el signo de cada cantidad que está dentro de él.

$$-(-6x+7y-2z)=6x-7y+2z$$

$$-\overline{13a-7b}=-(13a-7b)=-13a+7b$$

Ejemplo:

Simplificar:

$$5b-\{-2[3(a-2b)-\overline{2a-4}]+8a-[3(2a-3b)-2(a+b)]\}$$

Se suprime el vínculo:

$$=5b-\{-2[3(a-2b)-\overline{2a-4}]+8a-[3(2a-3b)-2(a+b)]\}$$

$$=5b-\{-2[3(a-2b)-2a+4]+8a-[3(2a-3b)-2(a+b)]\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$=5b-\{-2[3a-6b-2a+4]+8a-[6a-9b-2a-2b]\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$=5b-\{-6a+12b+4a-8+8a-6a+9b+2a+2b\}$$

Se suprimen las llaves:

$$=5b+6a-12b-4a+8-8a+6a-9b-2a-2b$$

Se agrupan y se reduce los términos semejantes:

$$=+6a+6a-4a-8a-2a+5b-12b-9b-2b+8$$

$$=-2a-18b+8$$

El resultado de la expresión simplificada es: $-2a-18b+8$

Nota

Fuente: Open AI, 2024

Se atribuye la creación de los signos de agrupación, principalmente los paréntesis, al matemático italiano Niccolò Fontana Tartaglia (1484-1557). Aunque ya existían algunos símbolos similares en escritos matemáticos anteriores, Tartaglia fue el primero en utilizarlos de manera sistemática y formal para indicar el orden de las operaciones en expresiones algebraicas.

Si una expresión algebraica tiene términos agrupados en paréntesis y ellos a su vez, dentro de otros signos de agrupación, se deben suprimir los paréntesis desde dentro hacia fuera.

Señala lo correcto, respecto a la supresión de signos de agrupación:

a) Si (+) antecede a un signo de agrupación, la expresión interna cambia.

b) Si (–) antecede a un signo de agrupación, la expresión interna no cambia.

c) Si (+) precede a un signo de agrupación, este no se puede suprimir.

d) Si (–) precede a un signo de agrupación, la expresión interna cambia de signo.

e) Ninguna de las anteriores.

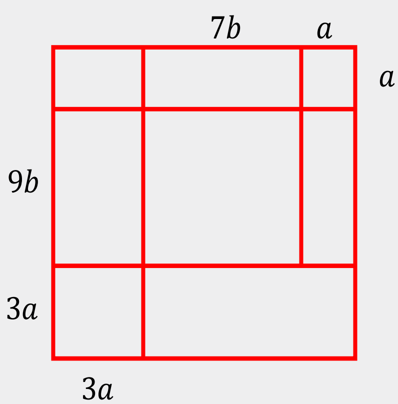
Nota

El uso de los paréntesis en álgebra, para clarificar la estructura de las expresiones matemáticas, fue formalizado en el siglo XVI, principalmente por Rafael Bombelli en su obra Algebra de 1572. Bombelli empleó los paréntesis para evitar ambigüedades en ecuaciones complejas, facilitando su resolución y comprensión (Boyer, 1968).

Los corchetes se empezaron a usar en el siglo XVII, principalmente para indicar intervalos o para agrupar términos en ecuaciones con varios tipos de operaciones.

Las llaves, por su parte, no se generalizaron hasta el siglo XVIII.

El perímetro de la figura está dado por:



$P = 2(3a + 9b + a + 3a + 7b + a)$

Ejemplo:

Simplificar

$$9x - \left\{7x - 3\left[-\frac{1}{2}y + 2z - \left(\frac{5}{7}x - \overline{9y + 5z}\right)\right] + \frac{3}{2}y - 9z - \left(\frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x\right)\right\}$$

Se suprime el vínculo:

$$9x - \left\{7x - 3\left[-\frac{1}{2}y + 2z - \left(\frac{5}{7}x - \overline{9y + 5z}\right)\right] + \frac{3}{2}y - 9z - \left(\frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x\right)\right\}$$

$$= 9x - \left\{7x - 3\left[-\frac{1}{2}y + 2z - \left(\frac{5}{7}x - 9y - 5z\right)\right] + \frac{3}{2}y - 9z - \left(\frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x\right)\right\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$= 9x - \left\{7x - 3\left[-\frac{1}{2}y + 2z - \frac{5}{7}x + 9y + 5z\right] + \frac{3}{2}y - 9z - \frac{1}{2}y - 6z + \frac{3}{4}x\right\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$= 9x - \left\{7x + \frac{3}{2}y - 6z + \frac{15}{7}x - 27y - 15z + \frac{3}{2}y - 9z - \frac{1}{2}y - 6z + \frac{3}{4}x\right\}$$

Se suprimen las llaves:

$$= 9x - 7x - \frac{3}{2}y + 6z - \frac{15}{7}x + 27y + 15z - \frac{3}{2}y + 9z + \frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x$$

Se agrupan y reducen los términos semejantes:

$$= 9x - 7x - \frac{15}{7}x - \frac{3}{4}x + 27y - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}y + 6z + 15z + 9z + 6z$$

$$= -\frac{25}{28}x + \frac{49}{2}y + 36z$$

El resultado de la expresión simplificada es: $-\frac{25}{28}x + \frac{49}{2}y + 36z$

Actividad

Simplificamos cada expresión:

1) $(a - b) - (b - a)$

2) $(2a + c - 3b) - (7a + 4b - 8c)$

3) $a + (b - c) + 2a - (a + b)$

4) $a - 5b - [-3b - (a - b) + 2a]$

5) $12m^3 - [5m^2 + m - 1 - (m^3 + 2m^2 - 3m + 7)]$

6) $-(x - 2y) - \{3x - (2y - z) - 4x - (3y - 2z)\}$

7) $3x + \{-5y - [-xy + (4x - 2xy - y)]\}$

8) $12x\{-6y - [-3z(9y - 12x + z)]\}$

9) $23x + \{-5y - [-2x + (-4x + 7y)]\}$

10) $8x - (5y + 16z - 12x) - (-13x + 2y) - (x + y + z)$

11) $3a + (a + 7b - 4c) - (3a + 5b - 3c) - (b - c)$

12) $-[3x - 2x + x] + 4x - x + (2x - x + 4x)$

13) $-4y^3 - \{7a^3 + [-5x^4 - (7y^3 - 9a^3 - 12x^4) - 8m^2] + y^3\}$

14) $-\{[3a + 6x - (2m - 5x)] - [5z - 8m + 6a - (7x - 6m)]\}$

15) $8x - (\frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x) - (-\frac{3}{5}x + 2y) - (x + \frac{3}{4}y + z)$

16) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \left(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y\right)$

17) $\frac{1}{5}x - \left[\frac{1}{2}x - (\frac{2}{3}x + x)\right]$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las expresiones algebraicas se utilizan de diferentes maneras en la cotidianidad, son utilizadas para resolver problemas simples hasta tareas más complejas, permite la toma de decisiones y comprender de mejor manera la información adquirida.

Ejemplo:

Mateo tenía 6 veces la cantidad de bolígrafos que tiene Ismael y luego le regalaron 3. Si Ismael tiene 7 bolígrafos, ¿cuántos bolígrafos tiene ahora Mateo?.
La expresión que permite responder la pregunta es:

$$6 \cdot 7 + 3$$

El uso de expresiones numéricas para describir situaciones cotidianas es un paso previo al trabajo con expresiones algebraicas. Si en el ejemplo anterior variamos la cantidad de bolígrafos que tiene Ismael, suponiendo que tiene 9 en vez de 7, entonces la expresión numérica que describe el número de bolígrafos de Mateo es $6 \cdot 9 + 3$. En la siguiente tabla, podemos ver las distintas expresiones numéricas para la cantidad de bolígrafos de Mateo, al variar el número de bolígrafos de Ian en un cierto rango, suponiendo siempre que se cumple la relación: Mateo tenía 4 veces el número de bolígrafos que tiene Ian y luego le regalaron 3:

Bolígrafos de Ismael	Bolígrafos de Mateo
7	$6 \cdot 7 + 3$
8	$6 \cdot 8 + 3$
9	$6 \cdot 9 + 3$
10	$6 \cdot 10 + 3$

La expresión numérica describe la relación entre las bolitas de Mateo e Ismael y si no conocemos el número de bolígrafos que tiene Ismael, de todas maneras, podemos proponer una expresión para la cantidad de bolitas que tiene Mateo, usando esta relación: $6 \cdot b + 3$ donde b es el número de bolígrafos de Ismael.

Nota

El uso del lenguaje algebraico nos facilita describir situaciones sin las ambigüedades del lenguaje natural.

La propiedad fundamental de las expresiones algebraicas es que nos permiten generalizar. Así, mediante ellas podemos:
- *Expresar fórmulas.*
- *Describir propiedades.*
- *Describir situaciones provenientes de distintos contextos.*
- *Expresar regularidades.*

Las letras o incógnitas siempre representan números.

Las incógnitas pueden ser denotadas por distintas letras, sin que cambie su significado.

Evaluar una expresión es dar valor a sus incógnitas. Evaluar nos ayuda a entender la validez de propiedades y de manipulaciones algebraicas.

Esta relación de cantidades en situaciones de la cotidianidad se la relaciona con las expresiones algebraicas.

Actividad

Representamos las siguientes situaciones con expresiones algebraicas:

Megan tenía inicialmente “M” muñecas, de los cuales “p” eran de plástico y el resto de trapo “t”. Ella pierde $\frac{1}{3}$ de sus muñecas de plástico “p”, $\frac{1}{4}$ de sus muñecas de trapo “t” y luego le regalan una caja con 6 muñecas de plástico, ¿cuántas muñecas tiene ahora Megan?

Un terreno tiene una longitud de largo de 13 metros y ancho de $x\,m$. Represente el área del terreno con una expresión algebraica.

Adriana llevó 5 sillas y su hermana 2. Si una silla pesa “y” kilogramos, represente el peso total de sillas que llevaron Adriana y su hermana.

VALORACIÓN

El lenguaje algebraico, a pesar de parecer complejo y abstracto, está presente en nuestra vida diaria de maneras más sutiles de lo que imaginamos.

PRODUCCIÓN

Analizamos y respondemos los siguientes planteamientos

- ¿Cómo el lenguaje algebraico se entreteje en nuestra vida diaria?
- ¿Cómo se desarrolló la ciencia y tecnología con ayuda del algebra?
- Averigua quienes fueron los precursores del algebra
- Investiga sobre las múltiples aplicaciones del algebra en nuestro diario vivir.
- Plantea expresiones algebraicas con la actividad de compras al mercado.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

TÍTULO TEMA 1: LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

Representar gráficamente las siguientes fracciones:

1) $\frac{4}{10}$

2) $\frac{4}{7}$

3) $\frac{8}{3}$

4) $\frac{6}{5}$

5) $\frac{4}{5}$

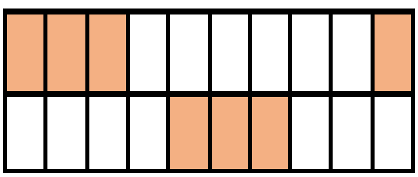
6) $\frac{7}{5}$

7) $\frac{2}{23}$

8) $\frac{1}{8}$

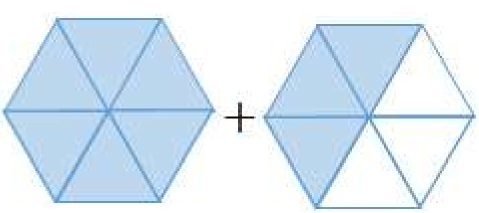
Indica la fracción que representa a la parte sombreada en cada figura:

1)

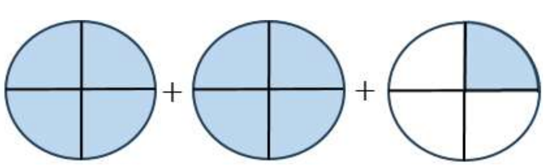


2)

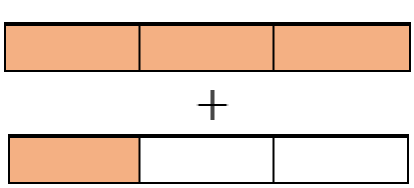
3)



4)



5)



Operaciones

Efectuar las operaciones:

1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}$

2) $\frac{-3}{4}-\frac{-2}{5}-\frac{1}{2}$

3) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{17}{10}+\frac{1}{2}$

4) $2\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}-\frac{5}{3}$

5) $\frac{8}{9}+\frac{1}{9}-\frac{7}{9}+\frac{1}{9}$

6) $\frac{9}{12}+\frac{5}{3}-\frac{11}{8}$

7) $\frac{5}{6}-\frac{4}{18}-\frac{2}{9}$

8) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

9) $\frac{7}{9}-\frac{4}{5}+\frac{6}{7}-\frac{4}{9}+\frac{3}{10}$

10) $\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{3}$

11) $\frac{15}{7}\cdot\frac{3}{6}$

12) $\frac{23}{9}\cdot\frac{8}{12}$

13) $2\frac{13}{5}\cdot 5\frac{17}{10}\cdot 8\frac{2}{3}\cdot 4\frac{5}{7}$

14) $1\frac{1}{3}\cdot 7\ \frac{3}{2}\cdot 3\ \frac{17}{5}\cdot 4\ \frac{-2}{5}\cdot 3\frac{1}{2}$

15) $\frac{23}{9}\cdot\frac{8}{12}$

16) $\frac{28}{5}\div\frac{14}{30}$

17) $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{7}\div\frac{1}{2}$

Operaciones combinadas

Resolvemos:

1) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{12}\right)$

2) $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)$

3) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)+\frac{3}{4}$

4) $\left(\frac{9}{7}+\frac{8}{3}\right)\div\frac{4}{5}$

5) $-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{-1}{2}$

6) $\frac{2}{3}+\left(\frac{-1}{8}+\frac{3}{4}\right)$

7) $\left(-1\frac{1}{3}+\frac{7}{8}\right)+\frac{2}{3}$

8) $\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot 1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{-4}{3}$

9) $\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}\right)-\left[4\frac{1}{5}-\left(2\frac{1}{2}+1\frac{3}{5}\right)\right]$

10) $\frac{1}{8}+\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{8}+2-\frac{3}{50}\right)-1\frac{2}{3}\right]$

11) $\frac{3}{10}-\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{5}\right]-\frac{2}{3}$

12) $\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{-3}{4}-\left(\frac{-1}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 10\right)-1\right]$

13) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\div\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]$

Problemas

1) Una botella contiene dos litros y un medio $\left(2\frac{1}{2}\right)$ de bebida, que se desean repartir en vasos cuya capacidad es de un octavo $\left(\frac{1}{8}\right)$ de litro cada uno. ¿Cuántos vasos llenos se ocupan?

2) Una tableta de chocolate se divide en tres. El primer trozo es igual a los $\frac{4}{7}$ del la tableta original y el segundo es igual a la mitad del primero, ¿qué fracción de la tableta representa el tercer trozo?

3) ¿Qué número sumado con sus $\frac{2}{9}$ partes y con sus $\frac{3}{8}$ partes es 318?

4) El jueves perdí los $\frac{4}{3}$ de lo que perdí el miércoles y el viernes los $\frac{6}{4}$ de lo que perdí el jueves. Si en los tres días perdí Bs 3500, ¿cuánto perdí cada día?

5) La edad de Mathew es $\frac{2}{5}$ de la edad de su padre Rolando y hace 8 años la edad de Mathew era los $\frac{2}{7}$ de la edad Rolando. Calcular las edades actuales del Rolando y Mathew.

6) Donato tiene 40 años y su hijo Reynaldo 15, ¿dentro de cuántos años la edad de Reynaldo será los $\frac{4}{9}$ de la edad de Donato?

7) Un tanque de reserva de agua contiene $\frac{1}{6}$ de su capacidad, si se agregan 85 litros llega hasta la mitad, ¿cuál es la capacidad del tanque de reserva?

8) Después de gastar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$ del dinero que tenía, me quedan Bs 1200, ¿cuánto dinero tenía?

TÍTULO TEMA 2: CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Operaciones: Ubicar en una recta numérica a los siguientes números irracionales:

1) $\sqrt{2}$ **2)** $\sqrt{2+6}$ **3)** $\sqrt{5}$ **4)** $\sqrt{10}$

5) $\pi+5$ **6)** $\frac{\pi}{4}$ **7)** $\sqrt{37}$ **8)** $\sqrt{3}$

TÍTULO TEMA 3: CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Operaciones

Hallar el resultado:

1) $\sqrt{7\pi} \div (\sqrt{49\pi})$

2) $28.21 - 6.81 + 8.4$

3) $44.261 - 5.238$

4) $-3.14 - (-8.4)$

5) $7.3 + 1.4 - 9.\widehat{52}$

6) $2.31 + 12.6\widehat{73}$

Resolvemos:

1) $5 + \left(0.5 + \frac{3}{8}\right) \div \left(\frac{9}{7} - 2\right) - 5$

2) $6 - [-5 - (10 - 4 \cdot 2) - 1]$

3) $-\left\{-\left[-\left(0.3 - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{8}{13}\right]\right\}$

4) $\frac{3}{11} \cdot \left[\left(2.3 + \frac{5}{17}\right) - 6.3\right] \div \frac{7}{11}$

Operaciones con radicales

Resolvemos:

1) $\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$

2) $8\sqrt{24} - 2\sqrt{36} + 7\sqrt{32}$

3) $3\sqrt{2}\,(5\sqrt{2} - \sqrt{6} - 7)$

4) $(2\sqrt{3} - 8\sqrt{2})(\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$

5) $(4\sqrt{5} - 7\sqrt{10})^2$

TITULO TEMA 4: ÁLGEBRA Y SUS TÉRMINOS

Lenguaje algebraico

Indica, por medio de símbolos, los enunciados:

Expresión verbal	Expresión algebraica
El doble del primero por el segundo	
La quinta parte de un número	
Un número aumentado en uno	
La suma de un número más su mitad	
La suma de dos números pares consecutivos	
La cuarta parte de un número menos la quinta parte de lo que queda	
Un número reducido un 25%	
La suma de los cuadrados de dos números consecutivos	
El triple del cuadrado de un número	

Escribimos una expresión algebraica que represente a cada enunciado:

1) El perímetro de un triángulo equilátero de lado x.
2) El perímetro de un rectángulo de base x cuya altura mide 1 cm menos que su base.
3) El área de un rectángulo de base x cuya altura mide 6 cm menos que su base.
4) El triple de un número es el doble de otro.
5) La séptima parte de un número es 87.
6) Dos números se diferencian en 3 unidades.
7) El cuadrado de un número más el doble del mismo número.
8) El cubo de un número menos la mitad de otro número.
9) Un número más su siguiente es el cuadrado de dicho número.
10) La suma de los cuadrados de dos números.
11) La diferencia de un número y de su cuadrado.

Traducción de lenguaje

1) El doble de un número menos su quinta parte.
2) El quíntuplo de un número más su quinta parte.
3) La edad de una señora es el doble de la de su hijo menos 5 años.
4) Dos números se diferencian en 13 unidades.
5) Dos números suman 13.
6) Un hijo tiene 22 años menos que su padre.
7) Dos números cuya suma es 25.
8) La cuarta parte de la mitad de un número.
9) Dimensiones de un rectángulo en el que su largo tiene 6 metros más que el ancho.
10) Un tren tarda tres horas menos que otro en ir de Madrid a Barcelona.
11) Repartir una caja de manzanas entre seis personas.
12) Un número es 10 unidades mayor que otro.
13) Un número menos su mitad más su doble.
14) Un número 5 unidades menor que otro.
15) El cuadrado de un número.
16) Un número y su opuesto.
17) Un número y su inverso.
18) Veinticinco menos el cuadrado de un número.
19) El cuadrado de un número menos su cuarta parte.
20) Dividir 25 en dos partes.
21) La suma de un número al cuadrado con su consecutivo.

Reducción de términos semejantes

Reducimos los términos semejantes en cada expresión:

1) $3x^3 + 5x^3 - 2x^2y^2 + 2x^2y^2$
2) $-12x^3 + 4x^3 - 12x + 2x$
3) $4m^2n^2 - 5n^2 - 5m^2 + 20m^2n^2 - 15m^2$
4) $13p^5q^3 - 3p^5q^3 + p^5q^3 - 2p^5q^3$
5) $15x^7 - 10x^7 + 6x^3 - 8x^3 + 5x^3x^7 - 3x^3x^7$
6) $200x^3 + 35x^3x^7 - 20x^2y + 4x^2y$
7) $-4x^2y + 4x - 2x^2 + 2x$
8) $-(19m^2n^2 + 3m^2n^2) - 3m^2n^2 + m^2n^2$
9) $4x^3y^3 - 3y^3 + x^3y^3 - y^3 + 4y^3$

TÍTULO TEMA 5: EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES

Expresiones algebraicas. Completar la tabla:

Polinomio	Grado Absoluto	Clase de polinomio	Variables
$5a^2b - 7ab^2$			
$6x^3 + 5xy - 9y^2$			
$-7x^3y^4z$			
$3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x$			
$2a^4 + 8a^3 + 5a^2 - 5a$			
$\frac{3}{4}m^2n^2 + 5x$			
$5a^2 - 2bc - 2d$			

Desglosamos cada uno de los términos algebraicos según los elementos que lo componen y completa la tabla. Puede guiar por el ejemplo del primer término:

Término Algebraico	Signo	Factor Numérico	Factor Literal	Grado
$3x^4y^8$	$+$	3	x^4y^8	12
$-5mn^5$				
$\sqrt{3}m^6n^6$				
$-3mn^2$				
$4x^3y^5$				
a^3b				
$-\frac{1}{2}xy^3z$				

Una con una línea, los términos de la columna A con el término semejante de la columna B

Columna A	Columna B
$6m^3nx^2$	$8xy$
$24m^2n$	$\frac{a}{3}$
$-2xy$	$-12m^2n$
$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{3}xyz$
$3x^2y^3z^5$	$15abc$
$\frac{3}{2}xyz$	$-m^3nx^2$
$-5abc$	$-3x^2y^3z^5$

Valor numérico
Calcular el valor numérico para cada expresión:

1) $a^d + b^c$ Si: $a = -3, b = 1, c = -2, d = 3$
2) $2x^3 - x^2 + x - 2$ Si: $x = 2$
3) $(2a - 1) + (2(a + 1) - 1)$ Si: $a = \frac{6}{5}$
4) $\frac{a-b}{2}$ Si: $a = \frac{3}{2}, b = \frac{2}{3}$
5) $x + 2x^2 - xyz - 2$ Si: $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 3$
6) $a + 3b - 4a - 5b + 2a + b$ Sean: $a = \frac{3}{7}, b = \frac{8}{3}$
7) $-0.5abc + \left(\left(\frac{1}{3}a - abc\right) + \frac{ab}{2} - 0.25a\right)$
8) Si: $a = 0.25,\ b = 0.6,\ c = \frac{7}{9},\ d = \frac{13}{3}$
9) $\frac{3}{4}m^2n^2 + 5n$ Si: $m = \frac{5}{6},\ n = \frac{6}{11}$
10) $R = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ Si: $r_1 = 4, r_2 = 6$
11) $\left(-\frac{2}{11}a^8b^3c^5\right)\left(\frac{3}{8}a^4b^7c\right)$ Si: $a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{8}{3}, d = \frac{3}{8}$
12) $a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4$ Si: $a = \frac{5}{7}, x = 9$
13) $a^2 = b^2 + c^2$ Si: $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{2}$
14 $\frac{\frac{3}{5}m^4n^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{6}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4}{\frac{8}{3}m^2n}$ Si: $m = \frac{5}{4}, n = \frac{4}{5}$

Simplificación de expresiones algebraicas

Simplificar las expresiones algebraicas a su mínima expresión:

1) $6ab - 10ac + 4bc - 5ac + 7ab$
2) $11m - 10m + 14m + 15m$
3) $8a + 4p - 7a + 20p + 15a + 24p$
4) $11x^3y - 4x^3 + 7x^3y - 5x^3 + 18x^3y - 9x^3$
5) $\frac{2}{5}x^2y + 31 + \frac{3}{8}xy^2 - \frac{3}{5}y^3 - \frac{2}{5}x^2y - \frac{1}{5}xy^2 + \frac{1}{4}y^3$
6) $4.5a - 7b - 1.4b + 0.6a + 5.3b + b$
7) $8x - 6x + 3x - 5x + 4 - x$
8) $-15p^2 + 7p + p + 4p^2 - 2p^3$
9) $mn + 5mn - 3nm + 2n + 4m$
10) $-8tf + 5ft - 4fgt + 10gft$
11) $12ax^2 + 4ax - 5a^2x - 12ax + 4xa^2 + 5ax^2$
12) $5k - 10h - 2 + 40h - 12k + 9$
13) $d^3 - 34gx + 23d^3 - 100xg^5 + 10xg - 12g^5x$
14) $\frac{1}{2}s + \frac{2}{4}st^4 - 0.5s - 0.5t^4s$
15) $12e^4 - 100t^2 + 20e^4 - 0.5t^2$
16) $x^5 - \frac{3}{4}nm + \frac{1}{4}mn - 36x^5$

Suprimir los signos de agrupación reduciendo los términos semejantes en cada caso:

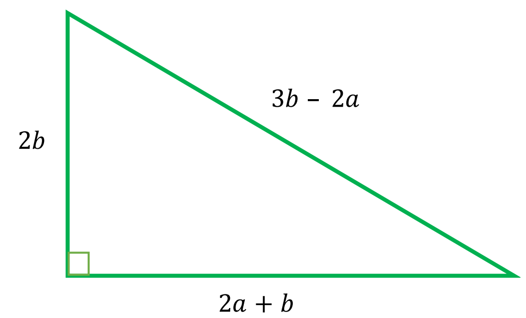
1) $(a^2 - 2b) + (a^2 - 3a + b)$
2) $(a - b) + 3 \cdot (a + b)$
3) $(x - 2) + (x - 2) + x \cdot (2 - x) - 8x^2$
4) $(2x^4 - 2x^2 + 3x) - (3x^4 - 3x^2 - 2x - 1)$
5) $\frac{1}{3}xy - \left\{\frac{1}{5}x^2 - \left[\frac{3}{2}xy + y^2 - 2\left(\frac{7}{3}xy + 5x^2\right)\right]\right\}$
6) $-\left\{0.5x + \left[\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}x + 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y\right)\right]\right\}$
7) $-[3m - 2mn + n - (-3m + n)]$
8) $[-(2x - y) + (5x + y) - (-4x - 3y)]$
9) $\frac{x}{2} + \frac{3y}{7} - \left\{-\left[4x - 2y + \frac{3z}{5} + \left(x - \frac{2}{3}x + \frac{z}{2}\right)\right]\right\}$
10) $\frac{a}{5} + \left\{\frac{3b}{4} - \left[a - \left(\frac{5b}{4} + \frac{c}{5}\right)\right] - \left[-\frac{5}{4}c + \overline{3a - 4b}\right]\right\}$
11) $-\{[5a^x + 4a^y - (a^x - 9a^y)] + 35a^x - 13a^y + 5\}$
12) $\left[-\left(\frac{1}{5}a + \frac{1}{2}b\right) + \left(\frac{3}{4}c - \frac{1}{3}b + \frac{7}{4}a\right) - \left(\frac{2}{3}a - \frac{2}{5}b - \frac{2}{7}c\right)\right]$

Reducimos los términos semejantes, según corresponda:

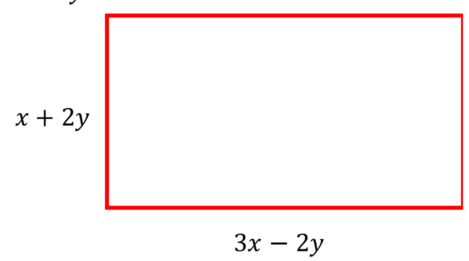
1) $\frac{8}{9}x + \frac{7}{3}x + \frac{1}{8}x$
2) $\frac{13}{2}a^3 - 5a^3 + \frac{8}{5}a^3$
3) $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{5}x + \frac{1}{8}xy$
4) $\frac{8}{5}m^4n + \frac{11}{5}m^4n - \frac{13}{7}m^4n + \frac{19}{7}m^4n - 5m^4n$
5) $3xyz + 8xyz - 2xy + 13xy - 12yz + 17yz$
6) $0.25x^2y - 0.35x^2y + 0.15x^2y$
7) $0.7x^3y^2 + \frac{21}{5}x^2y + \frac{17}{3}x^2y - \frac{8}{11}x^3y^2$

Para cada figura determine su perímetro como expresión algebraica y de acuerdo con el valor asignado a la incógnita halle su valor numérico.

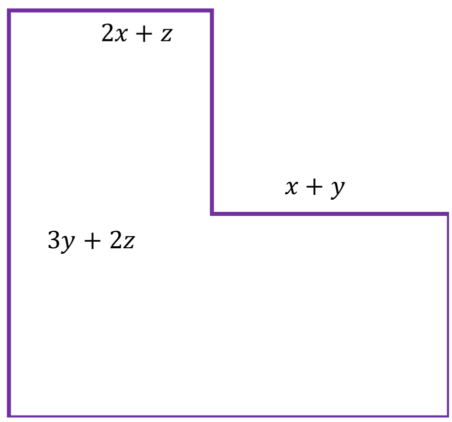
1) $a = 1, \quad b = 4$



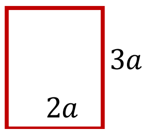
2) $x = 5, \quad y = 2$



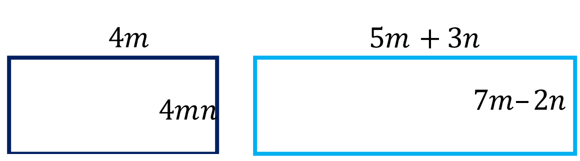
3) $x = 2; \; y = 4 \;$ y $\; z = 1$



4) $a = \frac{8}{3}$



5) $m = \frac{4}{5}, \quad n = \frac{9}{7}$



OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

Fuente: Open AI, 2024

Sandra va a preparar una ensalada de frutas, esta es una actividad divertida y saludable. Además de disfrutar de un delicioso postre, también podrá utilizar esta tarea como una oportunidad para poner en práctica los conocimientos de expresiones algebraicas para elaborar la ensalada de frutas.

Cantidad de ingredientes: Si queremos preparar una ensalada de frutas para x personas y tenemos a nuestra disposición diferentes tipos de fruta. Por ejemplo: Manzanas "m", naranjas "n", plátanos "p", uvas "u", etc.

Podemos utilizar expresiones algebraicas para representar la cantidad de cada fruta que necesitamos:

$$\frac{13}{2}m+\frac{15}{2}n+\frac{34}{5}p+8u$$

Actividad

Analizamos y respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Es la suma de esta expresión igual al total de frutas que hay en la ensalada?
- ¿Cómo apoyan las aplicaciones algebraicas en la vida diaria?

Dato histórico

Fuente: Open AI, 2024

La notación de la multiplicación era muy diferente antes del siglo XV. En 1489, Johann Widman, un matemático alemán, introdujo los símbolos "+" y "-" en las matemáticas. Antes de esta notación, se usaban palabras y letras para representar la adición y la sustracción, lo que hacía que las expresiones algebraicas fueran menos concisas y más propensas a errores.

Curiosidad

Google, el buscador más famoso del mundo, ¿es una ecuación o una expresión algebraica? Sí, es una ecuación que resuelve más de dos mil millones de términos y más de quinientos millones de incógnitas. Además de buscar las palabras solicitadas, también evalúa su importancia

1. Operaciones con expresiones algebraicas

Las operaciones que se puedan dar entre expresiones algebraicas son: suma, resta, multiplicación y división de monomios y polinomios entre sí.

a) Adición

Adición de monomios

Para realizar la adición algebraica de monomios se efectúan las operaciones indicadas de suma y resta con los coeficientes de cada término, el resultado mantiene la parte literal correspondiente. En otras palabras, cuando sumamos y restamos monomios simplemente estamos reduciendo términos semejantes.

Ejemplos:

1) $2x^2; -3x;\ 5x^2; x; -3x^2;\ 4x;\ x^3; 2x^2; -8x; 3x^3$

$2x^2-3x+5x^2+x-3x^2+4x+x^3+2x^2-8x+3x^3$

$=4x^3+6x^2-6x$

2) $2a^2b;\ -5a^2bc^3;\ 3a^2b; -2a^2bc^3;\ -7bc^3;\ \frac{1}{2}a^2bc^3;\ 5bc^3;\ \frac{2}{3}a^2b;\ \frac{3}{2}a^2bc^3;$

$$2a^2b-5a^2bc^3+3a^2b-2a^2bc^3-7bc^3+\frac{1}{2}a^2bc^3+5bc^3+\frac{2}{3}a^2b+\frac{3}{2}a^2bc^3$$

$$5a^2b+\frac{2}{3}a^2b-7a^2bc^3+\frac{1}{2}a^2bc^3+\frac{3}{2}a^2bc^3-2bc^3=\frac{17}{3}a^2b-5a^2bc^3-2bc^3$$

3) $\frac{2}{3}p^2;\ \frac{5}{8}p^2;\ -\frac{9}{7}p^2;\ 7p^2;\ -\frac{1}{6}p^2; -8p^2;\ -\frac{1}{3}p^2; 17p^2;\ \frac{1}{2}p^2; \frac{11}{7}p^2; 13p^2$

$$=\frac{2}{3}p^2+\frac{5}{8}p^2-\frac{9}{7}p^2+7p^2-\frac{1}{6}p^2-8p^2-\frac{1}{3}p^2+17p^2+\frac{1}{2}p^2+\frac{11}{7}p^2+13p^2$$

$$=\frac{2}{3}p^2+\frac{5}{8}p^2+\frac{1}{2}p^2+\frac{11}{7}p^2+13p^2+17p^2+7p^2-\frac{9}{7}p^2-\frac{1}{6}p^2-\frac{1}{3}p^2-8p^2$$

$$=\frac{565}{168}p^2+37p^2-\frac{75}{42}p^2-8p^2=\frac{6781}{168}p^2-\frac{137}{42}p^2=\frac{6233}{168}p^2=37\frac{17}{168}p^2$$

Actividad

Encontramos el resultado de sumar los siguientes monomios:

1) $5a^3; 8b^3;\ -a^3;\ -2b^3;\ -6a^3; 17b^3;\ 8a^3;\ -6b^3;\ -13a^3;\ -11b^3;\ 7a^3; 15b^3;\ 11a^3;\ -12b^3;\ -9a^3$

2) $9\frac{1}{3}n;\ -8\frac{4}{3}m; \frac{1}{5}m; 5n; -\frac{6}{7}m;\ \frac{1}{4}m;\ -5\frac{11}{2}m;\ -9m; 7\frac{23}{2}n;\ -6\frac{5}{3}n; 8n;\ -11\frac{5}{2}m$

Adición de polinomios

El resultado de sumar dos o más polinomios es otro polinomio que se obtiene reduciendo los términos semejantes en los sumandos.
Para sumar dos o más polinomios se colocan las expresiones uno de bajo del otro, de tal modo que los términos semejantes queden en una misma columna.
Después se suman o se restan los coeficientes dependiendo de los signos de todos los términos, en lo posible todos los polinomios se deben ordenar en forma descendente. En la adición de polinomios se pueden considerar tres métodos para encontrar el resultado: de forma horizontal, vertical y de coeficientes separados.

Dato

Para sumar se debe:
Ordenar de mayor a menor los términos de los polinomios, dejando huecos para los términos ausentes.
Se suman o restan los monomios semejantes.
La suma del polinomio

$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

y el polinomio

$B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$

donde $n \leq$ *, es el polinomio:*

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_m x^m$$

Ejemplos:

Método clásico, de forma horizontal:

1. $3a+5b-8c;\ -7a+2b-9c;13a-15b+4c;-11a+5b+13c$
Método clásico, de forma horizontal:

$$3a+5b-8c-7a+2b-9c+13a-15b+4c-11a+5b+13c=-2a-3b+0c$$

2. $4a^3+5a-6a^2-5;\ 5a^3-2a+5a^2-7;\ \ -a^3+7a^2-4a+13$

Método clásico, de forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4a^3-6a^2+5a-5 \\ 5a^3+5a^2-2a-7 \\ -a^3+7a^2-4a+13 \\ \hline 8a^3+6a^2-a+1 \end{array}$$

Método de coeficientes separados:

$$\begin{array}{r} 4-6+5-5 \\ 5+5-2-7 \\ -1+7-4+13 \\ \hline 8+6-1+1 \end{array}$$

3. Sean los polinomios: $A(x) = 5 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^4;\ B(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{7}x - 2 + \frac{5}{2}x^4 + 7x^3$
Hallamos: $A(x)-B(x)$

Método clásico, de forma vertical:

$$\begin{array}{r} -\frac{2}{7}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 0x^2 - \frac{3}{8}x + 5 \\ -\frac{5}{2}x^4 - 7x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{7}x + 2 \\ \hline -2\frac{11}{14}x^4 - 6\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{27}{56}x + 7 \end{array}$$

Operaciones auxiliares:

$$-\frac{2}{7} - \frac{5}{2} = -\frac{-4-35}{14} = -\frac{39}{14} = 2\frac{11}{14}$$

$$\frac{1}{3} - 7 = \frac{1-21}{3} = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$$

$$-\frac{3}{8} + \frac{6}{7} = \frac{-21+48}{56} = \frac{27}{56}$$

4. Sean los polinomios: $P(x)=x^5+2x^4-3x^3-2;\ \ Q(x)=3x^4-5x^2-3+x-3x^5;\ \ R(x)=2x^4-8x+x^3$
Hallamos:

$$\begin{array}{rl} & P(x)-Q(x)+R(x)= \\ P(x): & x^5+2x^4-3x^3+0x^2+0x-2 \\ -Q(x): & 3x^5-3x^4+0x^3+5x^2-x+3 \\ R(x): & 0x^5+2x^4+x^3+0x^2-8x+0 \\ \hline & 4x^5+x^4-2x^3+5x^2-8x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 3P(x)+2Q(x)-3R(x)= \\ 3P(x): & 3x^5+6x^4-9x^3+0x^2+0x-6 \\ 2Q(x): & -6x^5+6x^4+0x^3-10x^2+2x-6 \\ -3R(x): & 0x^5-6x^4-3x^3+0x^2+24x+0 \\ \hline & -3x^5+6x^4-12x^3-10x^2+26x-12 \end{array}$$

Actividad

Determinamos el resultado de sumar los siguientes monomios:

1) $2y^3 - 3y^2 + 4y - 5;\ \ -y^3 + 2y^2 - 2y + 4;\ \ y^3 + y^2 - 6y + 2;\ \ -5y^3 + 13y^2 - 2y + 9$

2) $\frac{3}{2}x^5y^4 + \frac{5}{2}x^2y^3 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{5}y;\ \ \frac{5}{4}x^5y^4 - \frac{3}{7}x^2y^3 + \frac{8}{3}xy - \frac{2}{5}y;\ \ -\frac{1}{2}x^5y^4 + \frac{3}{7}x^2y^3 - \frac{5}{7}xy + \frac{8}{7}y$

Dados los polinomios en la primera columna, operamos:

$A(x) = -2x^3 + 5x^2 + x + 7$
$B(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9$
$C(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - 13$
$D(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$

1) $A(x) + B(x) + C(x) + D(x) + E(x)$
2) $3A(x) - 2B(x) - 3C(x)$
3) $-2A(x) + 3D(x) - 5E(x)$
4) $-B(x) - 2C(x) + 3D(x)$
5) $-A(x) - B(x) - C(x) - D(x)$
6) $C(x) - D(x) - E(x)$
7) $4A(x) - 2B(x) - 3E(x)$
8) $-C(x) - 3D(x) - 2E(x)$

Dato histórico

El matemático italiano Luca Pacioli (1447-1517) popularizó el uso de los símbolos "+" y "–" en su obra "Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita" publicada en 1494.
El símbolo "+" deriva de la letra griega "plus", que significa "más".
Se usa símbolos para representar operaciones matemáticas desde tiempos muy antiguos, con civilizaciones como los egipcios y babilonios utilizando sus propios sistemas de notación.

Recordemos

Si los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le asigna el mismo signo.
Si los números tienen signos diferentes, se restan sus valores y al resultado se le asigna el signo de mayor valor.

Ejemplo de aplicación

Un ejemplo de la utilidad de las expresiones algebraicas sería obtener nuevas fórmulas. Como sabemos, el volumen de los prismas y los cilindros es el producto del área de la base A_b y la altura h:

$$V = A_b \cdot h$$

Podemos sustituir en esa fórmula el área de la base, pues $A_b = \pi \cdot r^2$. Así, en una sola fórmula el volumen del cilindro es:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

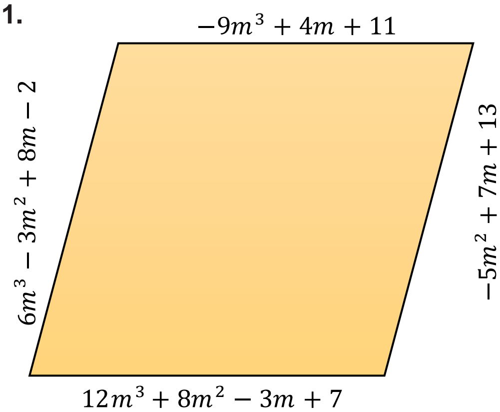
Aplicación geométrica

La aplicación de la adición de polinomios ésta dado en encontrar el perímetro de una figura regular o irregular

Ejemplo:

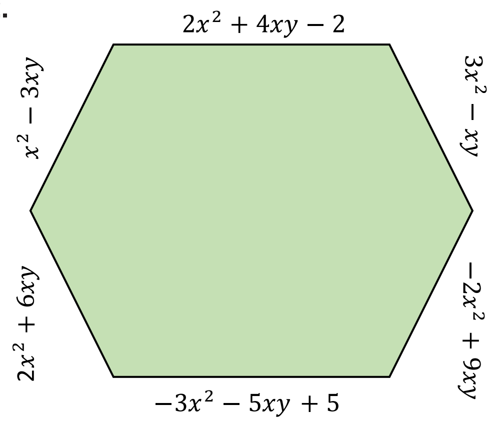
Calculamos el perímetro de:

1.



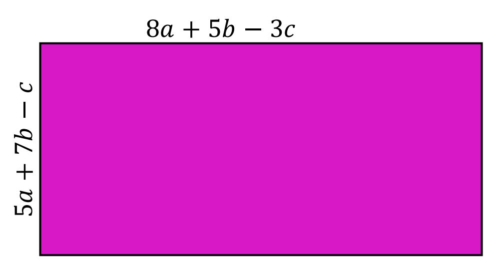
$$\begin{array}{rrrr}
-9m^3 & +\,0m^2 & +\,4m & +\,11 \\
0m^3 & -\,5m^2 & +\,7m & +\,13 \\
12m^3 & +\,8m^2 & -\,3m & +\,7 \\
6m^3 & -\,3m^2 & +\,8m & -\,2 \\
\hline
P = 9m^3 & +\,0m^2 & +\,16m & +\,29
\end{array}$$

2.



$$\begin{array}{rrr}
2x^2 & +\,4xy & -\,2 \\
3x^2 & -\,xy & +\,0 \\
-2x^2 & +\,9xy & +\,0 \\
-3x^2 & -\,5xy & +\,5 \\
2x^2 & +\,6xy & +\,0 \\
x^2 & -\,3xy & +\,0 \\
\hline
P = 3x^2 & +\,10xy & +\,3
\end{array}$$

3.

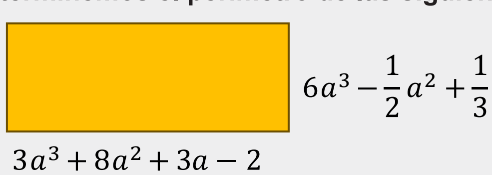


$$\begin{array}{rrr}
8a & +\,5b & -\,3c \\
5a & +\,7b & -\,c \\
8a & +\,5b & -\,3c \\
5a & +\,7b & -\,c \\
\hline
P = 26a & +\,24b & -\,8c
\end{array}$$

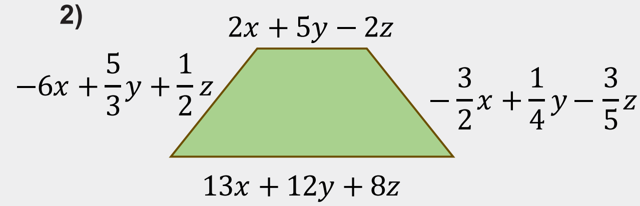
Actividad

Determinemos el perímetro de las siguientes figuras:

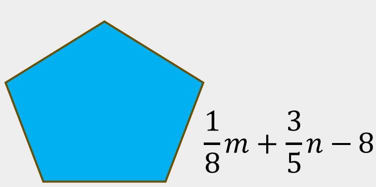
1)



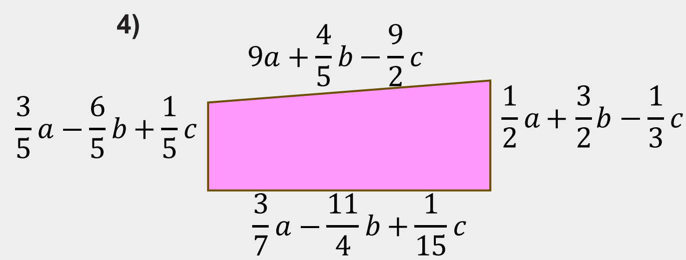
2)



3)



4)



b) Multiplicación

Monomio por monomio

Para multiplicar monomios entre sí, se multiplican los coeficientes (parte numeral), luego se multiplican las incógnitas (parte literal) aplicando las reglas correspondientes, recordando que el producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene la misma base y el exponente se obtiene sumando los exponentes de los factores.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

Multiplicar:

1) $5x \cdot 8x = (5 \cdot 8)(x \cdot x) = 40x^2$

2) $(-3ab)(7a^3b) = (-3 \cdot 7)(ab \cdot a^3b) = -21a^4b^2$

3) $\left(\frac{9}{5}mn^3p^2\right)\left(\frac{7}{3}m^2n\right) = \left(\frac{9}{5} \cdot \frac{7}{3}\right)(mn^3p^2 \cdot m^2n) = \frac{63}{15}m^3n^4p^2 = \frac{21}{5}m^3n^4p^2$

4) $\left(3\frac{9}{2}x^3y^2\right)\left(-\frac{29}{4}x^2y^3\right) = \left(\frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{29}{4}\right)\right)(x^3y^2 \cdot x^2y^3) = -\frac{435}{8}x^5y^5$

5) $\left(\frac{11}{9}a^2b^{-2}c^5\right)\left(\frac{3}{13}a^{-1}b^7c^{-3}\right) = \left(\frac{11}{9} \cdot \frac{3}{13}\right)(a^2b^{-2}c^5 \cdot a^{-1}b^7c^{-3})$

$$= \frac{33}{117}ab^5c^2 = \frac{11}{39}ab^5c^2$$

Monomio por polinomio

En la multiplicación de un monomio por un polinomio, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, se utiliza también la regla de signos para coeficientes y propiedades de potencias para la parte literal.

Ejemplos:

1) $(2a^5b^6)(3a^4b^{-6} - 2a^3b^5 + 6a^{-2}b^4 - 8ab^3 - b^{-4})$

$= 6a^9 - 4a^8b^{11} + 12a^3b^{10} - 16a^6b^9 - 2a^5b^2$

2) $(4ax^2)(3x^2 - 6x + 7) = 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2$

3) $(-2a^2x)(a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4) = -2a^5x^2 + 8a^4x^3 - 10a^3x^4 + 2a^2x^5$

4) $(11a^{2n})(-5a^{3n} + 9a^{2n} - 7a^n + 2) = -55a^{5n} + 99a^{4n} - 77a^{3n} + 22a^{2n}$

5) $(7x^2y)(6x^4 - 10x^2y^2 + 11y^3) = 42x^6y - 70x^4y^3 + 77x^2y^4$

6) $\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{11}{12}a^2 + \frac{3}{5}ab - \frac{5}{2}b^2\right) = \frac{22}{84}a^2 + \frac{6}{35}ab - \frac{10}{14}b^2 = \frac{11}{42}a^2 + \frac{6}{35}ab - \frac{5}{7}b^2$

7) $\left(\frac{5}{7}a^2b\right)\left(\frac{4}{5}ax - \frac{3}{7}a^3b^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{35}a^3bx - \frac{15}{49}a^5b^3 - \frac{20}{21}a^3b^2 + \frac{10}{21}a^2b$

$= \frac{4}{7}a^3bx - \frac{15}{49}a^5b^3 - \frac{20}{21}a^3b^2 + \frac{10}{21}a^2b$

8) $\left(-\frac{3}{8}x^2yz\right)\left(\frac{13}{9}x^5y^2z^3 + \frac{6}{5}x^4yz^4 - \frac{15}{4}x^3y^5\right) = -\frac{39}{72}x^7y^3z^4 - \frac{18}{40}x^6y^2z^5$

$+\frac{45}{32}x^5y^6z = -\frac{13}{24}x^7y^3z^4 - \frac{9}{20}x^6y^2z^5 + \frac{45}{32}x^5y^6z$

Para multiplicar

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.

$(2a^5b^6)(3a^4b^{-6}) = 6a^9b^0 = 6a^9$

$(2a^5b^6)(-2a^3b^5) = -4a^8b^{11}$

$(2a^5b^6)(6a^{-2}b^4) = 12a^3b^{10}$

$(2a^5b^6)(-8ab^3) = -16a^6b^9$

$(2a^5b^6)(-b^{-4}) = -2a^5b^2$

Recordemos

Regla de los signos

$+ \cdot + = +$

$+ \cdot - = -$

$- \cdot + = -$

$- \cdot - = +$

Si los signos son iguales, el resultado es positivo.
Si los signos son diferentes, el resultado es negativo.
Propiedad distributiva:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Cuando multiplicamos incógnitas o letras, debemos tomar en cuenta la siguiente propiedad:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$y^3 \cdot y^2 = y^{3+2} = y^5$$

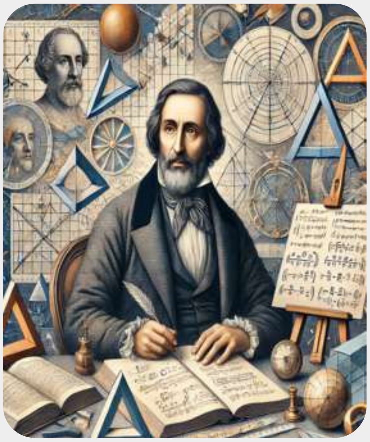
$$m^8 \cdot m^5 = y^{8+5} = y^{13}$$

Actividad

Simplifiquemos cada expresión:

1) $(3x)(-5ab)$
2) $(2ab)(7abc)$
3) $(-6mn)(12x^4y^3z^2)$
4) $\left(\frac{5}{8}ab\right)\left(\frac{8}{9}x^{m+1}y^{n+1}z^n\right)$
5) $(12m^3n)(5r^2t^3s^2)$
6) $\left(-\frac{5}{9}xyz\right)(x^2y - 2y^2z - 2xz^2)$
7) $\left(\frac{9}{13}x^4\right)(4x - 2xy - y)$
8) $\left(\frac{13}{7}m^3n\right)(9y - 12x + z)$
9) $(8x^2y)(5y + 16z - 12x)$
10) $\left(-\frac{11}{9}ab^3c\right)(3a + 5b - 3c)$
11) $\left(\frac{9}{13}x^2y\right)\left(\frac{2}{3}xy - \frac{4}{5}x^2 + \frac{13}{2}yz^7\right)$
12) $\left(\frac{23}{5}a^{-2}mn\right)\left(\frac{7}{2}y^3 - \frac{9}{2}a^3 - \frac{12}{5}x^4\right)$
13) $\left(\frac{6}{11}a^7m^2z^{11}\right)(-5z - 8m + 6a)$
14) $\left(\frac{15}{4}x^2y^3z^7\right)\left(\frac{1}{2}y + 6z - \frac{3}{4}x\right)$
15) $\frac{2}{3}xy - \left(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y + \frac{21}{5}xy\right)$

Dato histórico



Fuente: Open AI, 2024

Francois Viète aplicó el álgebra a la geometría, demostrando que muchos problemas geométricos podían resolverse mediante técnicas algebraicas. Esto unificó y simplificó las matemáticas, mostrando la conexión profunda entre ambas áreas

Para multiplicar

Ordenamos los polinomios y los acomodamos uno debajo del otro. Realizamos las multiplicaciones de los coeficientes, sumamos los exponentes (grado de la incógnita) y finalmente hacemos la suma de polinomios verticalmente.

La multiplicación de polinomios verifica la ley de cierre (el producto de dos polinomios es otro polinomio).

Polinomio por polinomio

Al igual que en el caso anterior, cuando el multiplicador es un polinomio, se aplica también la propiedad distributiva de la multiplicación para cada uno de los términos del multiplicador; luego se realiza la reducción de términos semejantes. Todos los polinomios deben estar ordenados en forma descendente.

La multiplicación de polinomios se puede realizar de dos maneras: vertical y horizontal

Ejemplos:

Multiplicar:

1. $(x-2)(x-1)=$

Multiplicación de manera horizontal

$$(x-2)(x-1)=x^2-x-2x+2$$

Multiplicación de manera vertical:

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x-1 \\ \hline x^2-2x \\ -x+2 \\ \hline x^2-3x+2 \end{array}$$

2. Efectúe el siguiente producto: $(2m^3-m+1)(3m^2-m+4)$

$$\begin{array}{l} 2m^3-m+1 \\ \qquad\qquad 3m^2-m+4 \\ \hline 6m^5-3m^3+3m^2 \\ \qquad -2m^4+m^2-m \\ \qquad 8m^3 \qquad -4m+4 \\ \hline 6m^5-2m^4+5m^3+4m^2-5m+4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ -1+1 \\ 3\ -1+4 \\ \hline 6\ -3\ +3 \\ -2\ -1-1 \\ 8 \qquad -4\ +4 \\ \hline 6\ +3\ +2\ -5\ +4 \end{array}$$

$$(2m^3-m+1)(3m^2-m+4)=6m^5-2m^4+5m^3+4m^2-5m+4$$

3. Efectúe el siguiente producto:

$$\begin{array}{l} \quad 3a^4+2a^3 \qquad -4a-4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^3-2a^2-2 \\ \hline \quad 3a^7+2a^6 \qquad -4a^4-4a^3 \\ \qquad -6a^6-4a^5 \qquad +8a^3+8a^2 \\ \qquad\qquad -6a^4-4a^3 \qquad +8a+8 \\ \hline \quad 3a^7-4a^6-4a^5-10a^4+8a^2+8a+8 \end{array}$$

$$(3a^4+2a^3-4a-4)(a^3-2a^2-2)=3a^7-4a^6-4a^5-10a^4+8a^2+8a+8$$

Actividad

Multipliquemos:

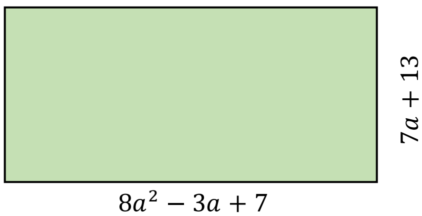
1) $(5x+y)\cdot(-4x-3y)$
2) $(a^2-2b)\cdot(a^2-3a+b)$
3) $(3a-b)\cdot(a+2b)$
4) $(x-2a)\cdot(x-2b)$
5) $(2x^4-2x^2+3x)\cdot(3x^4-3x^2-2x-1)$
6) $\left(\frac{7}{3}xy+5x^2-\frac{1}{3}y^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}xy+y^2-2\right)$
7) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{4}y\right)\cdot\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}x+3\right)$
8) $(-3m+n)\cdot(3m-2mn+n)$
9) $\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{z}{2}\right)\cdot\left(4x^2-2y+\frac{3z}{5}+\frac{x}{2}+\frac{3y}{7}\right)$
10) $\left(-\frac{5}{4}c+3a-4b\right)\cdot\left(\frac{a}{5}+\frac{3b}{4}-\frac{c}{5}\right)$
11) $(5y+16z-12x)\cdot(-13x+2y)$
12) $(x+y+z)\cdot(2x-y+4z)$
13) $(a^3+7b-4c)\cdot(3a+5b^2-3c)$
14) $(3m^3-2n+p^2x)\cdot(2m-5x)$
15) $(7y^3-9a^3-12x^4)\cdot(-5x^4-8m^2-4y^3)$
16) $(5z-8m+6a)\cdot(3a^5+6x^2)$
17) $\left(\frac{1}{2}y+6z-\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}x+2y\right)$
18) $\left(x+\frac{3}{4}y+z\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y\right)$
19) $\left(\frac{1}{5}a+\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(\frac{3}{4}c-\frac{1}{3}b+\frac{7}{4}a\right)$
20) $(a^x-9a^y)\cdot(5a^x+4a^y)$

Aplicación geométrica

Una aplicación geométrica de la multiplicación de polinomios, pasa por encontrar el área de una figura regular. Conociendo los lados de la figura y reemplazando en las diferentes fórmulas podemos encontrar su área.

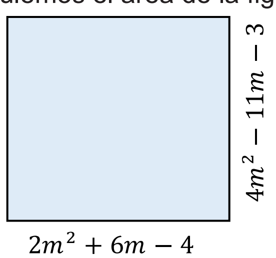
Ejemplos:

1) Determinemos el área del rectángulo



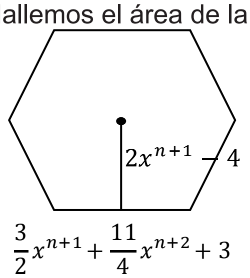
$$\begin{array}{r} 8a^2 - 3a + 7 \\ 7a + 13 \\ \hline 56a^3 - 21a^2 + 49a \qquad\qquad \\ 104a^2 - 39a + 91 \\ \hline 56a^3 + 83a^2 + 10a + 91 \end{array}$$

2) Calculemos el área de la figura.



$$\begin{array}{r} 2m^2 + 6m - 4 \qquad\qquad \\ 4m^2 - 11m - 3 \qquad\qquad \\ \hline 8m^4 + 24m^3 - 16m^2 \qquad\qquad\qquad \\ -22m^3 - 66m^2 + 44m \qquad \\ -6m^2 - 18m + 12 \\ \hline 8m^4 + 2m^3 - 88m^2 + 26m + 12 \end{array}$$

3) Hallemos el área de la figura:

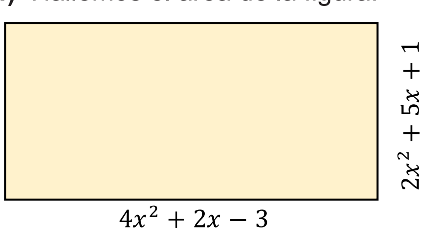


$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^{n+1} + \frac{11}{4}x^{n+2} + 3 \qquad\qquad \\ 2x^{n+1} - 4 \qquad\qquad \\ \hline 3x^{2n+2} + \frac{11}{2}x^{2n+3} + 6x^{n+1} \qquad\qquad\qquad \\ -6x^{n+1} - 11x^{n+2} - 12 \\ \hline 3x^{2n+2} + \frac{11}{2}x^{2n+3} \qquad\qquad - 11x^{n+2} - 12 \end{array}$$

Como la figura tiene 6 lados, el área será: $A = \frac{6\left(3x^{2n+2} + \frac{11}{2}x^{2n+3} - 11x^{n+2} - 12\right)}{2}$

$= 3\left(3x^{2n+2} + \frac{11}{2}x^{2n+3} - 11x^{n+2} - 12\right) = 9x^{2n+2} + \frac{33}{2}x^{2n+3} - 33x^{n+2} - 36$

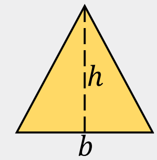
4) Hallemos el área de la figura:



$$\begin{array}{r} 4x^2 + 2x - 3 \\ 2x^2 + 5x + 1 \\ \hline 8x^4 + 4x^3 - 6x^2 \qquad\qquad \\ 20x^3 + 10x^2 - 15x \qquad \\ 4x^2 + \ \ 2x - 3 \\ \hline 8x^4 + 24x^3 + 8x^2 - 13x - 3 \end{array}$$

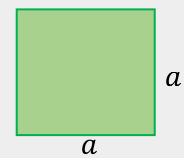
Áreas de polígonos

Triángulo



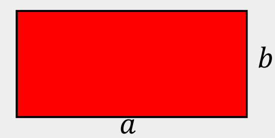
$A = \frac{b \cdot h}{2}$

Cuadrado



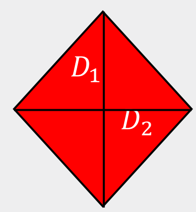
$A = a^2 = a \cdot a$

Rectángulo



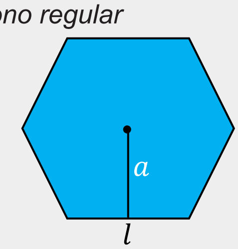
$A = a \cdot b$

Rombo



$A = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$

Polígono regular

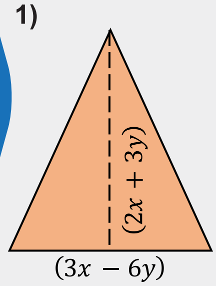


$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$

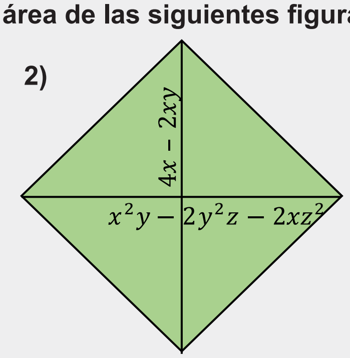
Actividad

Determinamos el área de las siguientes figuras:

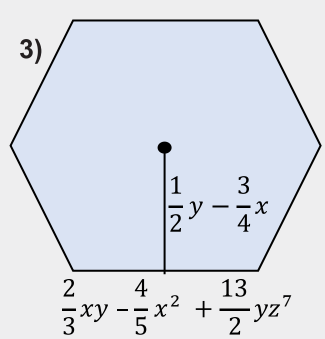
1)



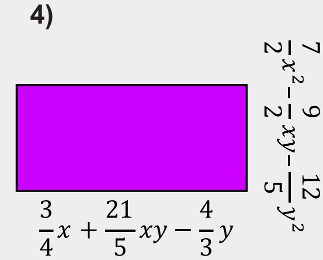
2)



3)



4)



Propiedad

Cuando dividimos incógnitas o letras, debemos tomar en cuenta lo siguiente:

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$y^7 \div y^4 = y^{7-4} = y^3$$

$$m^{12} \div m^7 = y^{12-7} = y^5$$

Para dividir

$$(a+b) \div c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

*La **división algebraica** de polinomios tiene los mismos elementos que una división aritmética; tiene un **divisor**, un **cociente**, un **dividendo** y los demás elementos. Por lo tanto, también se puede representar como una fracción con un numerador y un denominador*

c) División

Monomio entre monomio

Para dividir monomios entre sí, primero se multiplican los signos si hubiese, luego los coeficientes numéricos. En seguida se dividen las partes literales aplicando las reglas operatorias, especialmente las que corresponden al cociente de potencias de la misma base, recordemos que el cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene la misma base y el exponente se obtiene restando los exponentes de los factores.

Ejemplos:

Dividir

1) $126x^2y^4z^6 \div 42xy^2z^3 = \frac{126x^2y^4z^6}{42xy^3z^4} = 3xyz^2$

2) $9x^ay^b \div 3x^{2a}y^{b-2} = \frac{9x^ay^b}{3x^{2a}y^{b-2}} = 3x^{-a}y^2$

3) $\frac{1}{2}a^{x-1}b^{2x+3} \div (-4a^{x-3}b^{x-1}) = \frac{\frac{1}{2}a^{x-1}b^{2x+3}}{-4a^{x-3}b^{x-1}} = -\frac{1}{8}a^2b^{x+4}$

4) $\frac{2}{3}a^yb^{x+2} \div \frac{11}{3}a^{2y}b^{x-1} = \frac{\frac{2}{3}a^yb^{x+2}}{\frac{11}{3}a^{2y}b^{x-1}} = \frac{2}{11}a^{-y}b^3$

5) $(-0.2x^2y^{3a}) \div (-0.3xy^a) = \frac{-\frac{1}{5}x^2y^{3a}}{-\frac{3}{10}xy^a} = \frac{2}{3}xy^{2a}$

6) $\left(-\frac{2}{3}x^3y^2z\right) \div \left(-\frac{2}{5}xy^3z\right) = \frac{-\frac{2}{3}x^3y^2z}{-\frac{2}{5}xy^3z} = \frac{5}{3}x^2y^{-1}$

Polinomio entre monomio

Para realizar la división de un polinomio por un monomio, en primera instancia se opera con la regla de signos, se aplica la propiedad distributiva de la división respecto de la adición algebraica, pero sólo cuando el divisor es un monomio.

Ejemplos:

Dividir

1) $(36a^2 + 12a) \div 2a = \frac{36a^2}{2a} + \frac{12a}{2a} = 18a + 6$

2) $(27x^4 - 15x^3 - 21x^2 + 30x) \div 3 = \frac{27x^4}{3} - \frac{15x^3}{3} - \frac{21x^2}{3} + \frac{30x}{3} - \frac{9}{3} = 9x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 10x - 3$

3) $(91x^{12} + 147x^8 - 105x^6 + 133x^2) \div (-7x^2) = \frac{91x^{12}}{-7x^2} + \frac{147x^8}{-7x^2} - \frac{105x^6}{-7x^2} + \frac{133x^2}{-7x^2} = -13x^{10} - 21x^6 + 15x^4 - 19$

4) $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 30x\right) \div \left(-\frac{3}{2}x\right) = \frac{\frac{1}{2}x^4}{-\frac{3}{2}x} - \frac{\frac{3}{5}x^3}{-\frac{3}{2}x} - \frac{\frac{2}{3}x^2}{-\frac{3}{2}x} + \frac{30x}{-\frac{3}{2}x} = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{9}x - 20$

5) $\left(0.5x^{a-1}y^{2a} - \frac{1}{2}xy^{3a} + 0.1x^{a+1}y^{a-1}\right) \div (0.3x^2y^a) == \frac{\frac{1}{2}x^{a-1}y^{2a}}{\frac{1}{10}x^2y^a} - \frac{\frac{1}{2}xy^{3a}}{\frac{1}{10}x^2y^a} + \frac{\frac{1}{10}x^{a+1}y^{a-1}}{\frac{1}{10}x^2y^a} = 5x^{a-3}y^a - 5x^{-1}y^{2a} + x^{a-1}y^{-1}$

Actividad

Dividimos:

1) $(555x^2y^6) \div (5xy)$
2) $(-24x^5y^8) \div (-8x^6y^7)$
3) $(-8a^{-4}b^7c^4) \div (2a^3b^2c^{-2})$
4) $(108a^8b^{11}c^{10}) \div (6a^4b^6c^3)$
5) $(540x^{-2}y^7z^4) \div (36x^4y^2z)$
6) $\left(\frac{7}{3}m^7n^{-3}p^4\right) \div \left(\frac{3}{2}m^5n^{-4}p^2\right)$
7) $\left(-\frac{5}{4}a^{-2}b^{2n}c^4\right) \div \left(\frac{1}{2}a^{-5}b^nc^{-2}\right)$
8) $\left(6\frac{2}{3}a^{5m}b^{3n-1}c^{3m+2n}\right) \div \left(\frac{1}{2}a^{2m}b^{n-1}c^{m+n}\right)$
9) $\left(\frac{5}{3}x^{2a+b}y^{3a-1}z^{3a+2b}\right) \div \left(\frac{15}{7}x^{2b}y^{a+1}z^{a+2b}\right)$
10) $(52y^5 + 16y^3 - 12y^2) \div (-2y^2)$
11) $\left(3a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + 0.2a^2b^2\right) \div (-3ab)$
12) $(-4x^3 + 5x^2 + 3x - 5) \div (x)$
13) $(36m^3n - 12mn + 6mn^2) \div (2mn)$
14) $(7x^4y^3 - 9x^3y^2 - 12x^2y) \div (-5xy^2)$
15) $\left(\frac{12}{15}x^2y^7 + \frac{3}{4}x^4y^9 + x^6y^{11}\right) \div \left(\frac{4}{3}x^2y^3\right)$
16) $\left(\frac{3}{4}a^{16}b^{10}c^{-2} - \frac{1}{3}a^6b^8c^{-1} + \frac{7}{4}a^4b^4c^2\right) \div \left(\frac{1}{2}a^3b^2c^{-4}\right)$

División de polinomios entre polinomios

Cuando la división es entre polinomios, el procedimiento es similar al que se ha empleado en la división de números naturales.

Método clásico

Para dividir por este método, se sigue los siguientes pasos:

- Se ordenan tanto el dividendo como el divisor y se completan si es necesario de forma descendente.
- El primer término del dividendo se divide por el primer término del divisor.
- Se multiplica el número obtenido por todos los términos del divisor, los productos se trasladan con signo cambiado hacia el dividendo, a continuación, se reducen términos semejantes.
- Se divide nuevamente el primer término del resto del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el cociente de nuestra division, cuyo grado debe ser menor que el grado del polinomio divisor.

Ejemplos:

1) Realizar las siguientes divisiones: $(x^3-5x^2+3x+14)\div(x-3)$

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+3x+14 & x-3 \\ \hline
-x^3+3x^2 \qquad\qquad & x^2-2x-3 \\
-2x^2+3x \qquad & \\
2x^2-6x \qquad & \\
-3x+14 & \\
3x-9 & \\
\boxed{5} &
\end{array}$$

Residuo: 5

2) $(6a^4+7a^3-2a^2+8a-3)\div(2a^2+3a-1)$

$$\begin{array}{r|l}
6a^4+7a^3-2a^2+8a-3 & 2a^2+3a-1 \\ \hline
-6a^4-9a^3+3a^2 \qquad\qquad & 3a^2-a+2 \\
-2a^3+a^2 \qquad\qquad & \\
2a^3+3a^2-a \qquad & \\
4a^2+7a \qquad & \\
-4a^2-6a+2 & \\
\boxed{a+2} &
\end{array}$$

Residuo: $a+2$

3) $(m^3+6m^2+6m+5)\div(m^2+m+1)$

$$\begin{array}{r|l}
m^3+6m^2+6m+5 & m^2+m+1 \\ \hline
-m^3-m^2-m \qquad & m+5 \\
5m^2+5m \qquad & \\
-5m^2-5m-5 & \\
\boxed{0} &
\end{array}$$

División exacta: $\dfrac{(m^3+6m^2+6m+5)}{(m^2+m+1)}=m+5$

¿Cómo dividir?

Polinomio dividendo → $D(x)$ | Polinomio divisor → $d(x)$

$$\begin{array}{l|l}
D(x) & d(x) \\ \hline
\vdots & C(x) \\
R(x) &
\end{array}$$

Polinomio cociente → $C(x)$

Polinomio resto (residuo) → $R(x)$

Si la división es inexacta $R(x)\neq0$, la división se debe escribir:

$$\frac{D(x)}{d(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{d(x)}$$

$$D(x)=C(x)d(x)+R(x)$$

Si la división es exacta $R(x)=0$, la división se escribe:

$$\frac{D(x)}{d(x)}=C(x)$$

$$D(x)=C(x)d(x)$$

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

Determinamos el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:

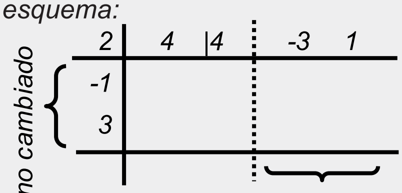
1) $(3x^2+2x-8)\div(x+2)$
2) $(28x^2-30y^2-11xy)\div(4x-5y)$
3) $(a^6-5a^5+31a^2-8a+21)\div(a^3-2a-7)$
4) $(x^4+x^3y-8x^2y^2+20xy^3-15y^4)\div(x^2-3xy-5y^2)$
5) $(15z^5-27z^2-7z^4-7z+6)\div(5z^2+z-1)$
6) $(6a^4-8a^2-a^3+a+2)\div(2a^2-a-1)$
7) $(p^3+48p-64-12p^2)\div(p^2+16-8p)$
8) $(a^6+6a^3-2a^5-7a^2-4a+6)\div(a^4-3a^2+2)$
9) $(p^5-5p^4q+20p^2q^3-16pq^4)\div(p^2-2pq-8q^2)$
10) $(y^5+4y^2-5y^3-8)\div(y^2-y-2)$
11) $(b^4+64)\div(b^2+8-4b)$
12) $(n^2-2n-24)\div(n-6)$
13) $(a^4+5a^2+9)\div(a+a^2+3)$
14) $(a^3-b^3)\div(a-b)$
15) $(14a^2-12+22x)\div(7x-3)$
16) $(x^2+3x+2)\div(x+1)$
17) $(9m^2+6m+1)\div(3m+1)$
18) $(x^4-22x^2+23x+40)\div(x+5)$

Ejemplo

Dividir: $\frac{(4b^3+4b^2-3b+1)}{(2b^2+b-3)}$

Pasos:

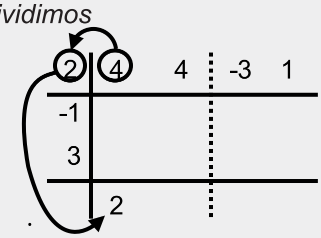
Ubicamos los coeficientes en el esquema:



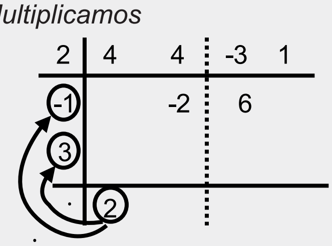
2 espacios porque el grado del divisor es 2.

Procedemos:

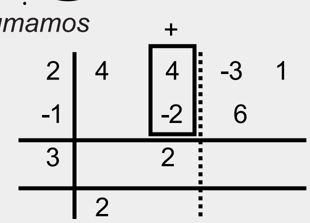
Dividimos



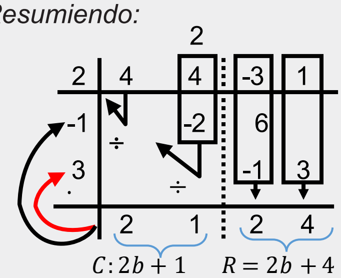
Multiplicamos



Sumamos

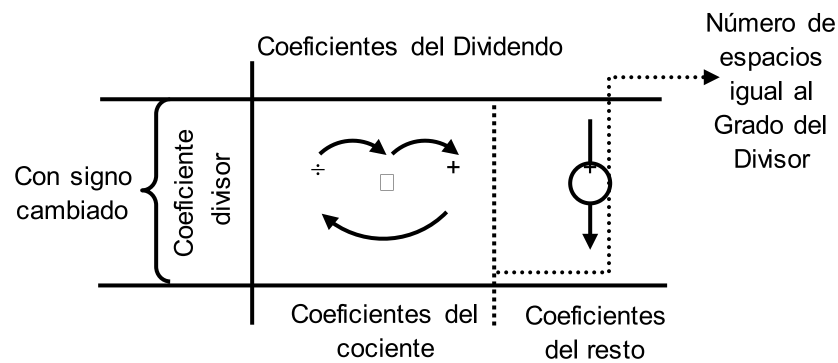


Resumiendo:



Método de Horner

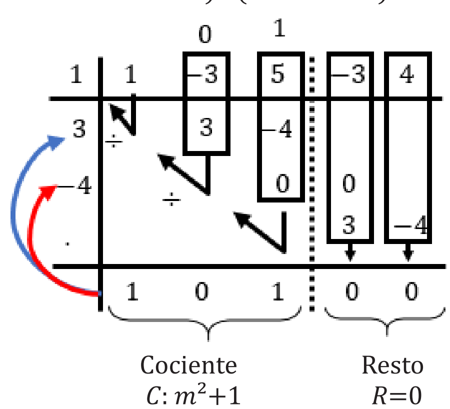
Es un método general para dividir polinomios, debemos verificar que los dos polinomios estén completos ordenados de forma decreciente. Tomamos en cuenta la siguiente estructura para acomodar el dividendo y el divisor.



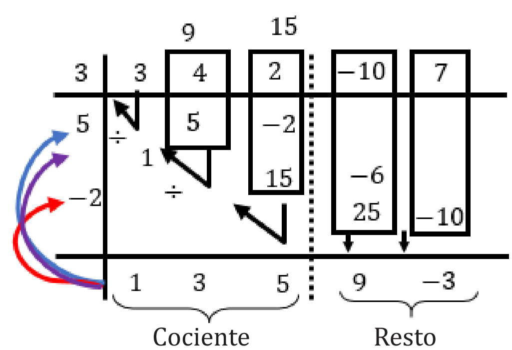
Ejemplos:

Dividir por el método de Horner:

1) $(m^4-3m^3+5m^2-3m+4)\div(m^2-3\,m+4)$



2) $(3a^5+4a^4+2a^3-10a^2+7)\div(3a^2-5a+2)$



$C = a^2 + 3a + 5$

$R = 9a - 3$

Actividad

Dividimos las siguientes expresiones por el método de Horner:

1) $(a^5+4a^2-5a^3-8)\div(a^2-a-2)$
2) $(y^2-2y-24)\div(y-6)$
3) $(s^4+5s^2+9)\div(s+s^2+3)$
4) $(14t^2-12+22t)\div(7t-3)$
5) $(u^2+3u+2)\ \div(u+1)$
6) $(9x^2+6x+1)\div(3x+1)$
7) $(b^4-22b^2+23b+40)\div(b+5)$
8) $(x^4-2x^3-11x^2+30x-20)\div(x^2+3x-2)$
9) $(20x^3-23x^2+31x-15)\div(5x-2)$
10) $(5x^4-3x^3+2x-3)\div(x-1)$
11) $(-r^5-3r^2-r+1)\div(r^2+r+1)$
12) $(3a^3+13a^2-13a+2)\div(3a-2)$
13) $(6m^5+m^4+4m^2-7m+1)\div(2m^2+m-3)$
14) $(3n^2+2n-8)\div(n+2)$
15) $(b^6-5b^5+31b^2-8b+21)\div(b^3-2b-7)$
16) $(15w^5-27w^2-7w^4-7w+6)\div(5w^2+w-1)$
17) $(6t^4-8t^2-t^3+t+2)\div(2t^2-t-1)$
18) $(m^3+48m-64-12m^2\ )\div(m^2+16-8m)$
19) $(x^6+6x^3-2x^5-7x^2-4x+6)\div(x^4-3x^2+2)$
20) $(y^5-5y^4+20y^2-16y)\div(yvvv^2-2y-8)$

Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

La división sintética o regla de Ruffini es una regla práctica que permite determinar los coeficientes del cociente y el residuo de la división de un polinomio por un binomio.

Ejemplos:

Dividir mediante Ruffini las siguientes expresiones:

1) $(a^4-2a^3-3a+10)\div(a+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 & 10 \\ -2 & & -2 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & \boxed{-2} & 0 & -3 & 10 \\ & & + & & & \\ -2 & & \boxed{-2} & & & \\ \hline & 1 & -4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 & 10 \\ -2 & & -2 & 8 & & \\ \hline & 1 & -4 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & \boxed{0} & -3 & 10 \\ & & & + & & \\ -2 & & -2 & \boxed{8} & & \\ \hline & 1 & -4 & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 & 10 \\ -2 & & -2 & 8 & -16 & \\ \hline & 1 & -4 & 8 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & \boxed{-3} & 10 \\ & & & & + & \\ -2 & & -2 & 8 & \boxed{-16} & \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -19 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 & 10 \\ -2 & & -2 & 8 & -16 & 38 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -19 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 & \boxed{10} \\ & & & & & + \\ -2 & & -2 & 8 & -16 & \boxed{38} \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -19 & \boxed{48} \end{array}$$

Cociente: $a^3-4a^2+8a-19$ Residuo: 48

2) $(2b^5-3b^4-5b-4b^2+17)\div(b-1)$

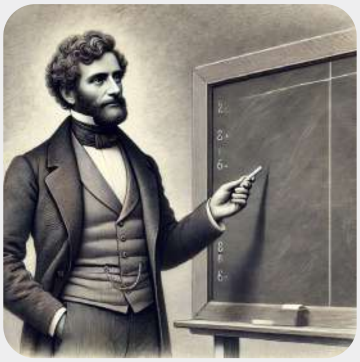
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & -3 & 0 & -4 & -5 & \boxed{17} \\ & & & & & & + \\ 1 & & 2 & -1 & -1 & -5 & \boxed{-10} \\ \hline & 2 & -1 & -1 & -5 & -10 & \boxed{7} \end{array}$$

Cociente: $2b^4-b^3-b^2-5b-10$ Residuo: 7

Resumen del método de Ruffini

La división por este método se realiza tomando en cuenta el siguiente procedimiento:

- *Verificar que el divisor sea un binomio de la forma* $(x\pm a)$ o $(cx\pm b)$, *donde* a *es divisor del término independiente del polinomio dividendo.*
- *Se ordena y se completa si es necesario el polinomio dividendo en forma descendente, de igual manera se ordena el divisor.*
- *Se copian los coeficientes de los términos del dividendo en la parte superior y se anota con signo cambiado el segundo término del divisor en la parte izquierda.*
- *Se baja el primer coeficiente para multiplicar en forma diagonal y sumar o restar dependiendo del signo en forma vertical.*
- *El último número de la regla es el residuo de nuestra división y los coeficientes hacia la derecha son parte del cociente.*



Fuente: Open AI, 2024

Actividad

Utilizamos el método de Ruffini para encontrar el cociente y el residuo de las divisiones:

1) $(3b^4-2b^3+4b-1)\div(b+3)$
2) $(-2m^3+4m^2+m)\div(2m+1)$
3) $(t^5+4t^2)\div(t+3)$
4) $(2a^4+2a^3-5)\div(a+4)$
5) $(-3c^4+2c^2-7c)\div(c-2)$
6) $(3n^5+2)\div(n-1)$
7) $(s^5+4s^4-5s+1)\div(s+1)$
8) $(-2w^4+3w^2-5)\div(w-3)$
9) $(2y^5-3y^4-5y^3-4y^2+17)\div(y-2)$
10) $(a^3-2a^2-7+a)\div(a-3)$
11) $(c^3-2c^2-5+3c)\div(c-1)$
12) $(2b^2-5b+3b^3-8)\div(b+2)$
13) $(w^4-7w+10+2w^2+6w^3)\div(w-2)$
14) $(2c^3-c^4-4c^2+20-5c)\div(c+4)$
15) $(t^4-3t^2-2+3t)\div(2t-1)$
16) $(3n^3-2n^2+10+3n)\div(3n+2)$
17) $(12r^4-36r^2-2+4r+r^3)\div(2r+3)$
18) $(m^3-4m^2+3m-1)\div(m-0.5)$

Dato histórico

René Descartes, en el Libro III de su obra "Discurso del Método", introdujo el ***Teorema del Resto****, también conocido como* ***Teorema de Descartes.***

Es importante destacar que, aunque el teorema se atribuye a Descartes, existen registros de trabajos previos de matemáticos chinos como Zhu Shijie y Shen Kuo que exploraron conceptos similares. Sin embargo, la formalización y difusión del teorema por parte de Descartes lo consolidó como una herramienta fundamental en el desarrollo del álgebra moderna

Recordemos

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$
$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

Pasos para dividir:

1º Verificamos que el divisor sea un binomio.
2º Encontramos el valor de la incógnita, ya sea x, y, m, etc., despejando su valor.
3º Este valor encontrado se reemplaza en todas las incógnitas.
4º Se toma en cuenta la secuencia lógica de las operaciones aritméticas para encontrar el resultado.
5º Este resultado encontrado es el residuo de la división.

Teorema del resto

Así como es posible hallar el cociente y el residuo de una división indicada aplicando la regla de Ruffini, también es posible hallar el resto o residuo por simple inspección o valor numérico, este procedimiento recibe el nombre de teorema del resto.
El residuo de dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x \pm a)$ se obtiene sustituyendo el valor opuesto $(\mp a)$del término independiente del divisor por la incógnita del dividendo (x).

Ejemplo:

Hallar el residuo de las siguientes divisiones.

1) $(3n^2+2n-8)\div(n+2)$

Igualando el divisor a 0 y despejando n:

$$n+2=0 \implies n=-2$$

Reemplazamos en el dividendo:

$$P(n)=3n^2+2n-8$$
$$P(-2)=3(-2)^2+2(-2)-8=12-4-8=0$$

Residuo: 0

2) $(a^4-4a^3+5a+6)\div(a+1)$

Igualando el divisor a 0 y despejando a:

$$a+1=0 \implies a=-1$$

Reemplazamos en el dividendo:

$$P(a)=a^4-4a^3+5a+6$$
$$P(-1)=(-1)^4-4(-1)^3+5(-1)+6=1+4-5+6=6$$

Residuo: 6

3) $(y^2+12y-5)\div(y-1)$

Igualando el divisor a 0 y despejando y:

$$y-1=0 \implies y=1$$

Reemplazamos en el dividendo:

$$P(y)=y^2+6y-5$$
$$P(1)=(1)^2+6(1)-5=2$$

Residuo: 2

4) $[(y+3)^7+(y^2-y-7)^8-y-2]\div(y+2)$

Igualando el divisor a 0 y despejando y:

$$y+2=0 \implies y=-2$$

Reemplazamos en el dividendo:

$$P(y)=[(y+3)^7+(y^2-y-7)^8-y-2]$$
$$P(-2)=[((-2)+3)^7+((-2)^2-(-2)-7)^8-(-2)-2]$$
$$=[(1)^7+(4+2-7)^8+2-2]=[1+(-1)^8=2]$$

Residuo: 2

Actividad

Hallar el residuo de las siguientes divisiones:

1) $(x^3+3-5x+3x^2)\div(x-1)$
2) $(-2a^3+a^4-3a+10)\div(a+2)$
3) $(10c^5-7-16c^3+12c^2)\div(c+2)$
4) $(2b^3-b^4+2b^2+1-7b)\div(b+4)$
5) $(w^4-7w-5+2w^2+4w^3)\div(3+w)$
6) $(2s^5-5s+17-3s^4-4s^2)\div(s-1)$
7) $(3r^5-7r+1-4r^4-3r^2)\div(r+5)$
8) $(t+3t+1-2t^4-4t^2)\div(t-3)$
9) $(3y^4-2y^3+4y-1)\div(y+3)$
10) $(-2z^3+4z^2+z)\div(2z+1)$
11) $(w^5+4w^2)\div(w+3)$
12) $(2m^4+2m^3-5)\div(m+4)$
13) $(-3n^4+2n^2-7n)\div(n-2)$
14) $(3p^5+2)\div(p-1)$
15) $(q^5+4q^4-5q+1)\div(q+1)$
16) $(-2a^4+3a^2-5)\div(a-3)$
17) $(2b^5-3b^4-5b^3-4b^2+17)\div(b-2)$

2. Operaciones algebraicas combinadas

También se pueden trabajar combinando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios, pero debemos tener en cuenta el signo negativo de la resta cambiando los signos del polinomio.

Ejemplos:

Sean los polinomios:

$$P(a)=\frac{5}{2}a^4-7a^3-\frac{1}{2}a+6;\quad Q(a)=3a^3-3a+5$$

$$R(a)=3a^4+\frac{5}{3}a^2-5a-5;\quad S(a)=\frac{1}{5}a^2-2a-\frac{3}{2};\quad T(a)=a+3$$

Encontrar el resultado de las siguientes operaciones:

1) $(P-Q+R)\cdot T$

$P-Q+R$:

$$\begin{array}{rl} P: & \frac{5}{2}a^4-7a^3+0a^2-\frac{1}{2}a+6 \\ -Q: & \quad\ -3a^3+0a^2+3a-5 \\ R: & 3a^4+0a^3+\frac{5}{3}a^2-5a-5 \\ \hline & \frac{11}{2}a^4-10a^3+\frac{5}{3}a^2-\frac{5}{2}a-4 \end{array}$$

$(P-Q+R)\cdot T$:

$$\begin{array}{r} \frac{11}{2}a^4-10a^3+\frac{5}{3}a^2-\frac{5}{2}a-4 \\ a+3 \\ \hline \frac{11}{2}a^5-10a^4+\frac{5}{3}a^3-\frac{5}{2}a^2-4a \\ \frac{33}{2}a^4-30a^3+5a^2-\frac{15}{2}a-12 \\ \hline \frac{11}{2}a^5-\frac{13}{2}a^4-\frac{85}{3}a^3+\frac{5}{2}a^2-\frac{23}{2}a-12 \end{array}$$

El resultado es: $(P-Q+R)\cdot T=\frac{11}{2}a^5-\frac{13}{2}a^4-\frac{85}{3}a^3+\frac{5}{2}a^2-\frac{23}{2}a-12$

2) $(2S+3R-P)\div T$

Primero calculamos $2S+3R-S$ que está dentro del paréntesis:

$$\begin{array}{rl} 2S: & \frac{2}{5}a^2-4a-3 \\ 3R: & 9a^4+5a^2-15a-15 \\ -P: & -\frac{5}{2}a^4+7a^3+0a^2+\frac{1}{2}a-6 \\ \hline & -\frac{5}{2}a^4+16a^3+\frac{27}{5}a^2-\frac{37}{2}a-24 \end{array}$$

Por tanto, obtenemos: $2S+3R-P=-\frac{5}{2}a^4+16a^3+\frac{27}{5}a^2-\frac{37}{2}a-24$

Ahora procedemos con la division: $(2S+3R-P)\div T$

$$\begin{array}{l|l} -\frac{5}{2}a^4+16a^3+\frac{27}{5}a^2-\frac{37}{2}a-24 & a+3 \\ \cline{2-2} \frac{5}{2}a^4+\frac{15}{2}a^3 & -\frac{5}{2}a^3+\frac{47}{2}a^2-\frac{651}{10}a+\frac{884}{5} \\ \quad \frac{47}{2}a^3+\frac{27}{5}a^2-\frac{37}{2}a-24 & \\ \quad -\frac{47}{2}a^3-\frac{141}{2}a^2 & \\ \qquad -\frac{651}{10}a^2-\frac{37}{2}a-24 & \\ \qquad \frac{651}{10}a^2+\frac{1953}{10}a & \\ \qquad\quad \frac{884}{5}a-24 & \\ \qquad\quad -\frac{2772}{5} & \end{array}$$

Así: $(2S+3R-P)\div T=\left(-\frac{5}{2}a^3+\frac{47}{2}a^2-\frac{651}{10}a+\frac{884}{5}\right)(a+3)-\frac{2772}{5}$

Operaciones combinadas

1º Debemos ordenar todos los polinomios de forma descendente, si faltan términos debemos completar.

2º Resolvemos primeramente las operaciones que estén dentro los signos de agrupación.

3º Convenientemente se debe utilizar el método de coeficientes separados.

Observaciones

Para $(2S+3R-P)\div T$, igual se verifica el teorema del resto:

Igualando el divisor a 0 y despejando a:

$$a+3=0 \implies a=-3$$

Reemplazamos en el dividendo:

$$P(a)=-\frac{5}{2}a^4+16a^3+\frac{27}{5}a^2-\frac{37}{2}a-24$$

$$P(-3)=-\frac{5}{2}(-3)^4+16(-3)^3+\frac{27}{5}(-3)^2-\frac{37}{2}(-3)-24=-\frac{2772}{5}$$

Residuo: $-\frac{2772}{5}$

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

Sean los polinomios: $A(x)=-4x^3-2x+x^2-5$ $B(x)=5+4x+9x^2+0.5\,x^3$
$C(x)=7x^3-3x+5x^2+1$ $D(x)=4x^3+7x+9x^2+2$ $E(x)=5x^2-7x^3+3x$

Determinamos el valor de las siguientes operaciones:

1) $(A+B)\cdot C=$

2) $(C+D)\cdot E=$

3) $(A+C)-(B+D)=$

4) $(D-E)+(C-B)=$

5) $(A-B+C)\cdot E=$

6) $(B+C-D)\cdot E=$

7) $(E+D-A)\cdot B=$

8) $(C-A+E)\cdot D=$

9) $(D-B)\cdot C+(E-A)\cdot C=$

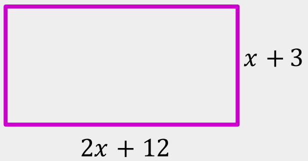
10) $(C+D)\cdot A+(B-E)\cdot C=$

11) $(2A+3B)-(3C-2D)+(2E-3B)=$

12) $\left(\frac{1}{2}A+2B\right)\cdot E-\left(\frac{1}{2}D+3E\right)\cdot C+(D-B-C)=$

Ejercicios resueltos

Expresar algebraicamente el área y el perímetro de las siguientes figuras:



Área:

$$A=(2x+12)(x+3)$$
$$=2x^2+18x+36$$

Perímetro:

$$P=2(2x+12)+2(x+3)$$
$$P=6x+30$$

Para tomar en cuenta

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 *admiten actualmente dos simbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."*

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos hechos se utilizará el punto decimal como separador. Ejemplos:

3.14; 0.71; -0.5; ....

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

El álgebra es una herramienta fundamental en la matemática y en la vida cotidiana. Su comprensión y aplicación resultan esenciales para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, así como para la resolución de problemas cotidianos, además están expresados en forma de expresiones algebraicas los cuales son resueltos siguiendo los pasos que corresponde y aplicados a diferentes situaciones y contextos.

Ejemplos:

1) La fraternidad envía a confeccionar trajes para la entrada tradicional. Para la confección de estos trajes "t", el costo de producción en bolivianos viene modelado por el polinomio $C(t)=-\frac{4}{5}t^2+8t$ y el precio por unidad al que se pueden vender las "t" unidades por el polinomio $P(t)=-\frac{1}{2}t^2+38$.

- La ganancia según los "t" (trajes), producidos y vendidos viene dado por:

$$G(t)=Ingreso-Costo$$
$$=\left(-\frac{1}{2}t^2+38\right)t-\left(-\frac{4}{5}t^2+8t\right)=-\frac{1}{2}t^3+38t+\frac{4}{5}t^2+8t$$

Por tanto: $G(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{4}{5}t^2+46t$

- Si se producen y venden 9 unidades:

$$G(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{4}{5}t^2+46t \quad \text{si} \quad t=9$$
$$\Rightarrow G(9)=-\frac{1}{2}(9)^3+\frac{4}{5}(9)^2+46(9)=-\frac{729}{2}+\frac{324}{5}+414=\frac{1143}{10}=114.3$$

Habrá una ganancia de Bs 114 aproximadamente.

2) Alexander está ayudando en el taller de su papá, en la construcción de puertas rectangulares de superficie $2.25\,m^2$ y $\left(\frac{9}{4}m^2\right)$, el metro lineal del trayecto horizontal tiene un costo de Bs 58 y el del trayecto vertical de Bs 78.

Para expresar el costo de la mesa en función de la longitud "b" del trayecto horizontal, sabemos que la superficie de la puerta es de $\frac{9}{4}$, la longitud de la distancia horizontal es b, entonces la longitud la distancia vertical será $\left(\frac{9}{4b}\right)$. Luego el costo es:

$$C(b)=58\cdot 2b+78\cdot 2\frac{9}{4b}=116b+\frac{351}{b}=\frac{116b^2+351}{b}$$

3) Un agricultor quiere maximizar el área de cultivo en un terreno rectangular cuyo lado mide x. Para ello necesita conocer la expresión algebraica que modela el área que necesita para cultivar. Sabiendo que su perímetro es igual a 50 m, entonces el área del terreno para cultivo viene dada por el polinomio:

$$A(x)=x(50-x)=-x^2+50x$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Un pintor cobra Bs 50 al iniciar el trabajo y Bs 35 por metros cuadrados pintados. Expresamos mediante una fórmula el costo del trabajo en función del número de m^2 pintados y calculamos, aplicando la fórmula, el costo de pintar $100\,m^2$ de pared.

2) Consideramos un rectángulo de 67 metros de base y 33 metros de altura: Escribimos la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base en "x" metros y disminuir su altura en "y" metros para calcular el área del rectángulo obtenido al aumentar la base en $7\,m$ y disminuir la altura en $9\,m$.

3) El costo en bolivianos de fabricar "p" pares de zapatos vienen dados por la expresión:

$$C(p)=5p^2-20p+200; p\geq 0$$

¿Cuáles son los costos totales para cada par de pantuflas cuando se fabrican 30 pares?

VALORACIÓN

Aplicaciones de las operaciones con polinomios

Las expresiones algebraicas, a menudo vistas como un conjunto de símbolos y ecuaciones abstractas, resultan ser un lenguaje universal que se esconde en nuestro entorno cotidiano de maneras más sutiles y diversas de lo que imaginamos. Más allá de las matemáticas, estas herramientas nos permiten modelar, analizar y comprender situaciones del mundo real, brindándonos soluciones prácticas e ingeniosas.

En ingeniería forestal, no solo necesitamos geometría para calcular el área de un bosque, sino también polinomios para calcular cuántos árboles necesitamos replantar después de haber talado.

En el campo de la física, se utiliza para calcular la trayectoria de proyectiles (estos son parabólicos) o para calcular las órbitas de satélites o cohetes.

Las rectas de regresión en estadística se expresan como ecuaciones lineales, pero también pueden ser polinomios con más de una incógnita, como en la regresión lineal múltiple.

En el campo de la salud, los polinomios se utilizan para una variedad de propósitos, incluido el cálculo de la dosis más apropiada de un medicamento o el peso de un paciente enfermo en función del tiempo.

Citemos, mencionemos y respondemos las siguientes preguntas:

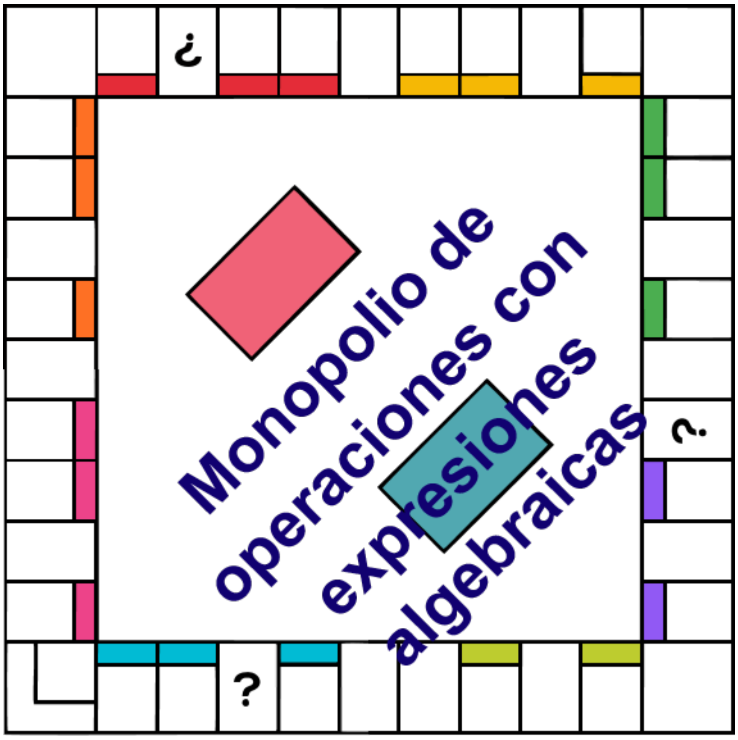
1) Citamos tres ejemplos y explicamos en la clase en qué situaciones diarias se utilizan las operaciones de suma y resta algebraica.

2) Mencionamos una situación tecnológica en la que se aplican la multiplicación y/o la división algebraica, compartir los datos con tus compañeras y compañeros de clase y discutir cada tema que se puso en juego.

3) ¿Cuál es la importancia de las operaciones algebraicas en nuestro diario vivir?

PRODUCCIÓN

Construimos un monopolio de operaciones con expresiones algebraicas usando la estructura tradicional del juego de monopolio:



Con este material el estudiante podrá trabajar manipulando y simplificando expresiones algebraicas, para adquirir destrezas en el trabajo con operaciones con expresiones algebraicas.
Recuerda que los polinomios son una combinación de varios términos que pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse (siempre que el divisor no sea nulo).

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

PRÁCTICA

Rolando está planificando un viaje, por lo cual es importante considerar el presupuesto:

Gastos totales: G
Gastos en alojamiento: A
Gastos en comida: C
Gastos en transporte: T
Gastos en actividades: D

Estimando una cantidad para los gastos totales G, el quisiera saber su gasto en transporte, habiendo calculado ya su gasto en comida, transporte, actividades y alojamiento.

Ecuación: $T = G - A - C - D$

donde T es la incógnita.

Fuente: Open AI, 2024

TEORÍA

Ecuaciones lineales con una incógnita

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Se debe encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ *que satisface la igualdad (con* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$).

- *Si* $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, *la ecuación tiene una única solución.*
- *Si* $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, *la ecuación NO tiene una única solución, por lo tanto, se presentan dos casos:*

⇒ *Si* $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, *la ecuación NO tiene solución.*

⇒ *Si* $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, *la ecuación tiene infinitas soluciones.*

Una ecuación es de primer grado, denominada también como ecuación lineal, si todas sus incógnitas o incógnitas tienen exponente uno.

Las ecuaciones que estudiaremos en esta sección son las ecuaciones lineales de una incógnita y tiene la siguiente forma:

$$ax+b=0; \; donde \; a\neq 0$$

1. Definición de igualdad

Es la expresión correspondiente para dos cantidades o expresiones algebraicas que tienen el mismo valor.

$x=a+b$ $\qquad$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$ $\qquad$ $x=5a+2$

Identidad algebraica

Es una igualdad válida para cualquier valor que tomen sus incógnitas.

Ejemplos:

Veamos las siguientes identidades

1) $(x-4)^2=x^2-8x+16$

Verifiquemos para: $x=-2$

$\Longrightarrow (-2-4)^2=36$ y $(-2)^2-8(-2)+16=36$, luego $36=36$

Es una identidad para el valor dado.

2) $\dfrac{27a^3+125b^3}{3a+5b} = 9a^2 - 15ab + 25b^2$

Verifiquemos para: $a=3$ y $b=-2$

$$\Longrightarrow \frac{27(3)^3+125(-2)^3}{3(3)+5(-2)} = 9(3)^2 - 15(3)(-2) + 25(-2)^2$$

$$271 = \frac{729-1000}{9-10} = 81 + 90 + 100 = 271$$

2. Definición de ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado o ecuación lineal, es una igualdad algebraica cuya potencia es equivalente a uno, su solución es el valor de la incógnita que satisface la igualdad.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma:

$$ax = b \quad a \text{ y } b \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0$$

Donde x es la incógnita. (el valor que no sabemos o el valor desconocido)

Actividad

Encontramos el resultado de sumar los siguientes monomios:

1) Si $(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\cdot 5$ verifiquemos para: $x = \dfrac{1}{2}$

2) Si $(3x+2)(3x+4)=(3x)^2+(2+4)3x+2\cdot 4$ verifiquemos para: $x = \dfrac{3}{5}$

3) Si $(6x+10)(6x-10)=36x^2-100$ verifiquemos para: $x = \dfrac{6}{7}$

4) Si $\dfrac{x^3+8y^3}{x+2y} = x^2 - 2xy + 4y^2$ verifiquemos para: $x=-2$ e $y=5$

3. Lenguaje matemático

Una de las razones que dificultan el aprendizaje de la matemática es porque se expresan en un lenguaje especial, que es un dialecto del lenguaje natural. El lenguaje matemático es una forma de comunicación a través de símbolos especiales para realizar cálculos matemáticos.

- En el lenguaje natural, sumar es aumentar y restar es disminuir. En el lenguaje matemático, sumar es aumentar o disminuir (si se suma un número negativo).
- El lenguaje matemático o algebraico, requiere una interpretación para traducir las palabras o ideas en expresiones y ecuaciones matemáticas. Existen muchas palabras y frases que sugieren operaciones aritméticas.

4. Elementos de una ecuación

En una ecuación lineal de primer grado, se pueden distinguir varios elementos:

- **Incógnita:** Es la incógnita o letra que aparece en la ecuación.
- **Constante:** Son los términos independientes de cada miembro, son los números que no acompañan a la incógnita o incógnita.
- **Términos:** Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
- **Miembro:** Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo.

Términos

Incógnita — Incógnita

$$\underbrace{8x + 10}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{3x - 5}_{\text{Segundo miembro}}$$

a) Miembros de una ecuación

Se llama primer miembro de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad y segundo miembro a la expresión que está a la derecho:

$$\underbrace{\mathbf{15 - 6x}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\mathbf{4x - 5}}_{\text{Segundo miembro}}$$

b) Transposición de términos

Este proceso consiste en llevar los términos de una ecuación de un primer miembro al otro. Esta transposición de términos tiene cuatro posibilidades. Este método resulta controversial, se trata de comprender que cada una de las operaciones tiene otra operación inversa, así:

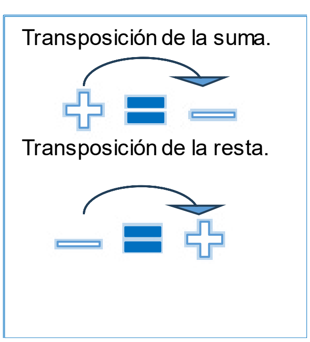
La operación inversa de la adición es la sustracción.

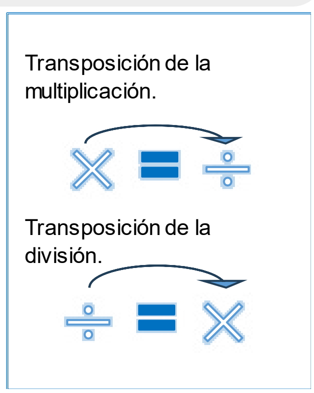
La operación inversa de la sustracción es la adición.

La operación inversa de la multiplicación es la division.

La operación inversa de la división es la multiplicación.

Así que cuando decimos "pasa al otro miembro a…", comprenderemos que en realidad se está "aplicando la operación inversa" de cada operación.





Despejes

Cuando se resuelve una ecuación se trasladan los términos de un miembro a otro, se traslada siempre con la operación opuesta; es decir, si está sumando pasa restando; y si ésta multiplicando pasa dividiendo y viceversa:

$$x + a = b \Longrightarrow x = b - a$$

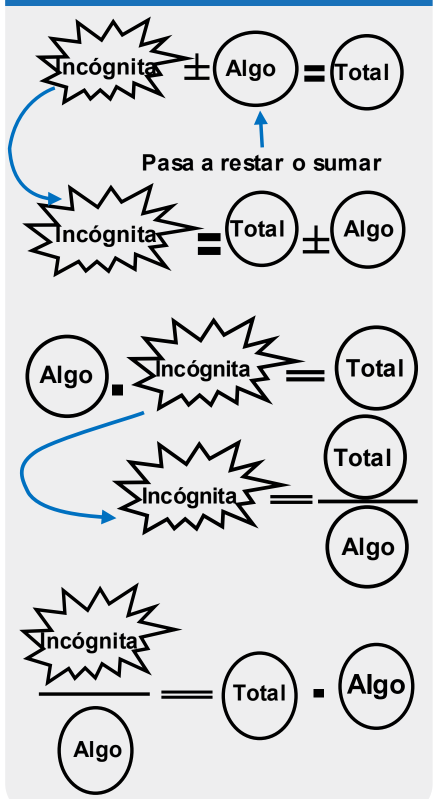
$$x - a = b \Longrightarrow x = b + a$$

$$x - a = b \Longrightarrow x = b + a$$

$$x \cdot a = b \Longrightarrow x = \frac{b}{a}$$

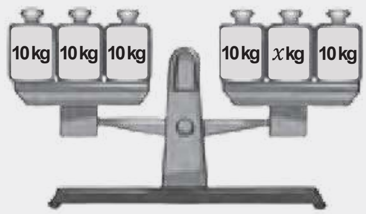
$$\frac{x}{a} = b \Longrightarrow x = b \cdot a = a \cdot b$$

Infograma



Ejemplo

Escribe la ecuación que representa cada balanza en equilibrio.



$10+10+10=10+x+10$ o
$30=x+20$

Verificando:
$30=x+20$
$10+10+10=x+20$
$10+10+10=x+10+10$

Por tanto: $x=10$

5. Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación significa determinar el valor que la incógnita toma de tal modo que satisfaga la igualdad.

a) Ecuaciones lineales sencillas

Para resolver ecuaciones de primer grado, debemos separar las letras en el primer miembro y los números en el segundo miembro, tomando en cuenta la transposición de términos. Por lo general se dice que para resolver una ecuación lineal de primer grado las incógnitas en x se transponen a un miembro y los números al otro. A veces es necesario verificar la respuesta, de modo que, el valor encontrado se debe reemplazar en la ecuación dada. Si se cumple una identidad, entonces el valor es correcto, caso contrario es probable que debamos revisar nuestros procedimientos para corregir y hallar el valor verdadero para que se cumpla la igualdad.

Ejemplos:

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1)
$$8x + 7 - 2x + 5 = 4x + 12 - (x - 30)$$
$$8x + 7 - 2x + 5 = 4x + 12 - x + 30$$
$$8x - 2x - 4x + x = -7 - 5 + 12 + 30$$
$$3x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{3} \Rightarrow x = 10$$

2)
$$2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$$
$$6x - 4 - x - 3 = 8$$
$$6x - x = 8 + 4 + 3$$
$$5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} \Rightarrow x = 3$$

3)
$$3 \cdot (2x - 6) - [(x - (3x - 8) + 2) - 1] = 2 - (3 - 2x)$$
$$6x - 18 - [x - 3x + 8 + 2 - 1] = 2 - 3 + 2x$$
$$6x - 18 - x + 3x - 8 - 2 + 1 = 2 - 3 + 2x$$
$$6x - x + 3x - 2x = 2 - 3 + 18 + 8 + 2 - 1$$
$$6x = 26 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$$

4)
$$3 \cdot (2x - 6) - [(x - (3x - 8) + 2) - 1] = 2 - (3 - 2x)$$
$$6x - 18 - [x - 3x + 8 + 2 - 1] = 2 - 3 + 2x$$
$$6x - 18 - x + 3x - 8 - 2 + 1 = 2 - 3 + 2x$$
$$6x - x + 3x - 2x = 2 - 3 + 18 + 8 + 2 - 1$$
$$6x = 26 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$$

5)
$$\frac{3x + 1}{6x - 2} = \frac{2x + 5}{4x - 13}$$
$$(3x + 1)(4x - 13) = (2x + 5)(6x - 2)$$
$$12x^2 - 39x + 4x - 13 = 12x^2 - 4x + 30x - 10$$
$$12x^2 - 35x - 13 = 12x^2 + 26x - 10$$
$$-13 + 10 = 12x^2 - 12x^2 + 35x + 26x$$
$$-3 = 61x \Rightarrow x = -\frac{3}{61}$$

Actividad

Encontramos el valor de las incógnitas en las siguientes ecuaciones:

1) $-4x+30=-3x-10$
2) $x+1=2x-7$
3) $7x+9=3+9x$
4) $9x+8=7x+6$
5) $6x+6=4+8x$
6) $x-8=2x-11$
7) $4x+3=3x+5$
8) $2x+17=3x+7$
9) $5x-11=15x-19$
10) $25-2x=3x+20$
11) $9+9x=17+5x$
12) $4x+1=3x+3$
13) $x+16=41$
14) $47-3x=5+11x$
15) $30-9x=-7x+21$
16) $25-2x=3x-35$
17) $2-6x=3x-1$
18) $5+8x=2x+20$
19) $3-4x=2x-93$
20) $x+12=4x+17$
21) $x+9=3+9x$
22) $9x+8=7x+6$

b) Ecuaciones de primer grado con signos de agrupación

Para resolver ecuaciones con signos de agrupación, debemos tomar en cuenta que:

- Se hacen desaparecer los signos de agrupación aplicando la propiedad distributiva, regla de signos y en algunos casos desarrollando productos notables.
- Se trasponen los términos de un miembro a otro miembro, la incógnita en un miembro y los números al otro.
- Se reducen términos semejantes y se despeja la incógnita para encontrar el valor de la incógnita que satisface la ecuación.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $12\left(\frac{3}{4}x+4\right)=12\left(\frac{5}{6}x+\frac{20}{6}\right)$

$\frac{36}{4}x+48=\frac{60}{6}x+\frac{240}{6}$ Se eliminan los paréntesis

$9x+48=10x+40$ Operando las fracciones

$9x-10x=40-48$ Transponiendo términos

$-x=-8$ Simplificando

$x=8$ Multiplicando por $-\mathbf{1}$ a ambos miembros

2) $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6)$

$5-3x+4x-6=8x+11-3x+6$ Se eliminan los paréntesis

$x-1=5x+17$ Agrupando términos semejantes

$x-5x=17+1$ Transponiendo términos

$-4x=18$ Agrupando términos semejantes

$x=-\frac{9}{2}$ Despejando la incógnita

3) $0.8-\left[x-\left(\frac{3}{5}+0.75\right)\right]=3.5x+(3.9-x)$

$\frac{4}{5}-\left[x-\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{7}{2}x+\left(\frac{39}{10}-x\right)$ Se pasa a fracciones

$\frac{4}{5}-\left[x-\frac{27}{20}\right]=\frac{7}{2}x+\frac{39}{10}-x$ Se eliminan los paréntesis

$\frac{4}{5}-x+\frac{27}{20}=\frac{7}{2}x+\frac{39}{10}-x$ Se eliminan los corchetes

$-x+x-\frac{7}{2}x=\frac{39}{10}-\frac{4}{5}-\frac{27}{20}$ Transponiendo términos

$-\frac{7}{2}x=\frac{7}{4}$ Simplificando términos semejantes

$\frac{7}{2}x=-\frac{7}{4}$ Multiplicando por $-\mathbf{1}$ a ambos miembros

$\frac{7}{2}x=-\frac{7\cdot 2}{4\cdot 7}$ Despejando la incógnita

$x=-\frac{1}{2}$

Recuerda

Cuando tenemos un "$-$" delante de un paréntesis, equivale a que todo lo que está dentro del paréntesis esté multiplicado por -1, por lo que se elimina el signo menos junto con el paréntesis y se cambia el signo a cada uno de los términos que estaban dentro del paréntesis.

1º Se hacen desaparecer signos de agrupación:

$\{[(\ )]\}$

2º Se trasladan las letras a la izquierda y los números o constantes a la derecha:

$$Letras\ (x)=Números$$

3º Se reducen términos semejantes.

4º Se despeja la incógnita para encontrar de forma reducida el valor de la incógnita.

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $3[2x-(3x+1)]=x+1$
2) $2x+3(2x-1)=x+67$
3) $60x-1=3(1+12x)$
4) $3(12-x)-4x=2(11-x)+9x$
5) $2(3x+2)=4[2x-5(x-2)]$
6) $2(3-4x)=2x-9$
7) $3(x+4)=4x+1$
8) $(x-15)=3(x-19)$
9) $3-2x(5-2x)=4x(2+x)-30$
10) $5x-2(3x-4)=25-3(5x+1)$
11) $x-3(x-2)=6x-2$
12) $2(2+4x)=3+12x$
13) $2+5(x-13)=x-3$
14) $2(3x-49)=-x+14$
15) $5(x-1)+10(x+2)=45$
16) $12x+3(2x-4)=60$
17) $x-3(x+5)=3x+10$
18) $15x=2(1+9x)-3$
19) $10+5(x-3)=3(x+1)$
20) $3(x-2)-5(2x-1)-2(3x+4)+10=0$

Curiosidad

¿Qué ocurre si al resolver una ecuación obtenemos que 0 es igual a un número distinto de 0?

Cuando resolvemos una ecuación, también puede ocurrir que, al simplificar términos semejantes en cada uno de los miembros de la ecuación, se anulen los términos con x entre sí, pero no lo hagan los términos sin x, obteniendo que 0 es igual a un número distinto de 0, como por ejemplo $0=5$.
Obviamente la igualdad no es cierta (cero no es igual que cinco) y en ese caso, la ecuación no tiene solución, ya que no hay ningún valor de la incógnita x que haga que se cumpla la igualdad.

$$2x+3=1+2x-5$$
$$2x-2x=1-5-3$$
$$0=-7$$

Dato importante

*El **mínimo común denominador** (m.c.d.) de un conjunto de denominadores es el número más pequeño que pueden dividir a los denominadores sin dejar como resultado un residuo es decir su **mínimo común múltiplo** (m.c.m.).*

c) Ecuaciones lineales con coeficiente fraccionario

Para resolver ecuaciones de primer grado con fracciones, es necesario seguir los siguientes pasos:

- Si hay signos de agrupación se hacen desaparecer aplicando la propiedad distributiva y la regla de signos.
- Se saca el común denominador de todas las fracciones.
- Se multiplican todas las fracciones por el mínimo común denominador (m.c.d) para eliminar los denominadores de todos los términos.
- Si una fracción tiene por delante el signo negativo, se cambian los signos de los términos de la fracción.
- Se transponen las incógnitas o incógnitas a un lado y los números en el otro.
- Se reducen términos semejantes y se despeja la incógnita para encontrar la solución de la ecuación.

Ejemplos:

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$

$60\left(\frac{x-1}{2}\right)-60\left(\frac{x-2}{3}\right)-60\left(\frac{x-3}{4}\right)=-60\left(\frac{x-5}{5}\right)$	Multiplicando por el m.c.m. (60)
$30(x-1)-20(x-2)-15(x-3)=-12(x-5)$	Simplificando
$30x-30-20x+40-15x+45=-12x+60$	Eliminando paréntesis
$-5x+55=-12x+60$	Reducimos términos semejantes
$-5x+12x=60-55$	Agrupando términos semejantes
$7x=5$	Reduciendo términos semejantes
$x=\frac{5}{7}$	Despejando la incógnita

2) $\frac{x}{4}+\left(-\frac{2}{3}\right)-x=\frac{2+x}{4}$

$12\left(\frac{x}{4}\right)+12\left(-\frac{2}{3}\right)-12(x)=12\left(\frac{2+x}{4}\right)$	Multiplicando por el m.c.m. (12)
$3x-8-12x=3(2+x)$	Simplificando
$-8-9x=6+3x$	Eliminando paréntesis
$-9x-3x=6+8$	Transponiendo términos
$-12x=14$	Agrupando términos semejantes
$-12x=14$	Multiplicando por: $-\frac{1}{12}$
$x=-\frac{7}{6}$	Simplificando

3) $\frac{2(x-3)+5}{8}=\frac{3x+9}{4}$

$8\left(\frac{2(x-3)+5}{8}\right)=8\left(\frac{3x+9}{4}\right)$	Multiplicando por el m.c.m. (8)
$2(x-3)+5=2(3x+9)$	Simplificando
$2x-6+5=6x+18$	Eliminando paréntesis
$2x-6x=18+6-5$	Transponiendo términos
$-4x=19$	Agrupando términos semejantes
$x=-\frac{19}{4}$	Multiplicando por: $-\frac{1}{4}$

Actividad

Determinamos el valor de x en las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{x+3}{4}=\frac{x-2}{3}$

2) $2-\frac{x-3}{5}=\frac{x+3}{6}+\frac{x}{3}$

3) $\frac{3}{4}+\frac{x}{6}=\frac{x+1}{4}$

4) $\frac{x}{7}+\frac{1}{2}=\frac{x}{14}+1$

5) $\frac{3x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}-7$

6) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+1=\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}$

7) $\frac{x}{3}-\frac{x}{6}+\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=5$

8) $\frac{x-3}{6}+\frac{2x-1}{3}=5x-5$

9) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-5=2$

d) Ecuaciones de primer grado con denominadores compuestos

En este tipo de ecuaciones lineales, es necesario y obligatorio factorizar los denominadores de todas las fracciones para después resolverla como una ecuación fraccionaria.

Ejemplos:

Determinar los valores de x en las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{x}{4}-\frac{x^2-8x}{4x-5}=\frac{7}{4}$

$4(4x-5)\left(\frac{x}{4}\right)-4(4x-5)\left(\frac{x^2-8x}{4x-5}\right)=4(4x-5)\left(\frac{7}{4}\right)$ Multiplicando por el m. c. d. $4(4x-5)$

$(4x-5)(x)-4(x^2-8x)=(4x-5)(7)$ Simplificando

$4x^2-5x-4x^2+32x=28x-35$ Eliminando paréntesis

$4x^2-5x-4x^2+32x-28x=-35$ Transponiendo términos

$-x=-35$ Reduciendo términos semejantes

$x=35$ Multiplicando por -1

2) $\frac{5}{1+x}-\frac{3}{1-x}-\frac{6}{1-x^2}=0$

$\frac{5}{1+x}-\frac{3}{1-x}-\frac{6}{(1+x)(1-x)}=0$

$(1+x)(1-x)\frac{5}{1+x}-(1+x)(1-x)\frac{3}{1-x}-(1+x)(1-x)\frac{6}{(1+x)(1-x)}=(1+x)(1-x)\cdot 0$

$(1-x)(5)-(1+x)(3)-6=0$

$5-5x-3-3x-6=0$

$-5x-3x=6+3-5$

$-8x=4$

$x=-\frac{4}{8}$

$x=-\frac{1}{2}$


Fuente: Open AI, 2024

3) $\frac{1+2x}{1+3x}-\frac{1-2x}{1-3x}=-\frac{3x-14}{1-9x^2}$

$\frac{1+2x}{1+3x}-\frac{1-2x}{1-3x}=-\frac{3x-14}{(1+3x)(1-3x)}$

$(1+3x)(1-3x)\frac{1+2x}{1+3x}-(1+3x)(1-3x)\frac{1-2x}{1-3x}=-(1+3x)(1-3x)\frac{3x-14}{(1+3x)(1-3x)}$

$(1-3x)(1+2x)-(1+3x)(1-2x)=-(3x-14)$

$1-3x+2x-6x^2-(1-2x+3x-6x^2)=-3x+14$

$1-3x+2x-6x^2-1+2x-3x+6x^2=-3x+14$

$-2x=-3x+14$

$-2x+3x=14$

$x=14$

Dato

Cuando en una ecuación con denominadores haya términos que aparezcan sin denominador, es aconsejable ponerles de denominador 1 para evitar cometer el error de no tenerlos en cuenta al hacer mínimo común denominador.

Muy importante

Hay que tener mucho cuidado cuando alguno de los términos en forma de fracción tiene un «-» delante ya que, al quitar los denominadores, ese «-» afecta a todo el numerador de la fracción y, por lo tanto, cambia el signo de todos los términos que tenga éste.
Si quitamos los denominadores antes de aplicar la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis, como he hecho yo en este ejemplo, es más difícil que cometamos algún error (siempre y cuando utilicemos correctamente la regla de signos al aplicar la propiedad distributiva).

Actividad

Resolvemos:

1) $\frac{1}{3x^2+3x-28}-\frac{1}{x^2+12x+35}=\frac{3}{x^2+x-20}$

2) $\frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x+5}{x-1}-\frac{x}{x+4}$

3) $3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=\frac{5x(x-1)}{x^2-3x-4}$

4) $\frac{4x+1}{4x-1}-\frac{6}{16x^2-1}=\frac{4x-1}{4x+1}$

5) $\frac{1}{6-2x}-\frac{4}{5-5x}=\frac{10}{12-4x}-\frac{3}{10-10x}$

6) $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{5x-20}=\frac{1\frac{1}{2}}{3x-12}-\frac{2}{x+3}$

7) $\frac{x-4}{x+5}-\frac{x+1}{x-2}=-\frac{12(x+3)}{(x+5)^2}$

8) $\frac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{2(7x+1)}{x^2-2x-3}$

9) $\frac{7}{2x+1}-\frac{3}{x+4}=\frac{2}{x+1}-\frac{3(x+1)}{2x^2+9x+4}$

10) $\frac{x-2}{(x+1)(x+7)}=\frac{2x-5}{(x+7)(x-7)}-\frac{x-2}{(x+1)(x-7)}$

11) $2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)=\frac{x^2+78}{2x^2-x-6}$

12) $\frac{10x-7}{15x+3}=\frac{3x+8}{12}-\frac{5x^2-4}{20x+4}$

¿Qué ocurre si al resolver una ecuación obtenemos 0=0?

Al resolver una ecuación puede ocurrir que, al simplificar términos semejantes en cada uno de los miembros, se anulen todos entre sí y obtengamos $0=0$.

En este caso habría infinitas soluciones posibles, es decir, cualquier valor que demos a la incógnita x *hace que se cumpla la igualdad (*$0=0$ *es una verdad).*

Lo que tenemos realmente no es una ecuación, sino una identidad: expresión algebraica que se verifica siempre para cualquier valor de las incógnitas o incógnitas (de las letras).

$$3x+5=-x+5+4x$$
$$3x+x-4x=5-5$$
$$0=0$$

e) Ecuaciones literales de primer grado

Son ecuaciones en la que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas que figuran en la ecuación están representadas usualmente por letras: a, b, c, d, m y n, donde x es la incógnita o incógnita desconocida. Este tipo de ecuaciones se resuelven siguiendo las mismas reglas que se aplican a las ecuaciones numéricas.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $ax-4=bx-2$

$ax-bx=-2+4$ Transponemos términos

$x(a-b)=2$ Factorizando

$x=\dfrac{2}{(a-b)}$ Despejamos la incógnita

2) $ax+b^2=a^2-bx$

$ax+bx=a^2-b^2$ Transponemos términos

$x(a+b)=(a+b)(a-b)$ Factorizando

$x=\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}\Rightarrow x=(a-b)$ Despejamos la incógnita y simplificando

3) $-(x+a)^2=a(a-7x)$

$x^2-2ax+a^2-(x^2+2ax+a^2)=a^2-7ax$ Suprimiendo paréntesis

$x^2-2ax+a^2-x^2-2ax-a^2=a^2-7ax$ Suprimiendo paréntesis

$-4ax=a^2-7ax$ Reduciendo términos semejantes

$-4ax+7ax=a^2$ Transponiendo términos

$3ax=a^2$ Reduciendo términos semejantes

$x=\dfrac{a^2}{3a}\Rightarrow x=\dfrac{a}{3}$ Despejamos la incógnita y simplificando

4) $\dfrac{x+a}{3}=\dfrac{(x-b)^2}{3x-a}+\dfrac{3ab-3b^2}{9x-3a}=\dfrac{x^2-2bx+b^2}{3x-a}+\dfrac{3ab-3b^2}{9x-3a}$ Suprimiendo paréntesis

$\dfrac{x+a}{3}=\dfrac{x^2-2bx+b^2}{3x-a}+\dfrac{3ab-3b^2}{3(3x-a)}$ Factorizando

$\dfrac{3(3x-a)}{1}\cdot\dfrac{x+a}{3}=\dfrac{3(3x-a)}{1}\cdot\dfrac{x^2-2bx+b^2}{3x-a}+\dfrac{3(3x-a)}{1}\cdot\dfrac{3ab-3b^2}{3(3x-a)}$ Multiplicando por el m.c.m. $3(3x-a)$

$(3x-a)(x+a)=3(x^2-2bx+b^2)+3ab-3b^2$ Reduciendo términos semejantes

$3x^2+2ax-a^2=3x^2-6bx+3b^2+3ab-3b^2$ Suprimiendo paréntesis

$3x^2+2ax-a^2=3x^2-6bx+3ab$ Reduciendo términos semejantes

$3x^2+2ax-3x^2+6bx=3ab+a^2$ Transponiendo términos

$2ax+6bx=3ab+a^2$ Reduciendo términos semejantes

$2x(a+3b)=a(3b+a)$ Factorizando

$x=\dfrac{a(a+3b)}{2(a+3b)}\Rightarrow x=\dfrac{a}{2}$ Despejando la incógnita y simplificando

Actividad

Determinamos el valor de x en las siguientes ecuaciones:

1) $a(x+1)=1$

2) $x^2+a^2=(a+x)^2-a(a-1)$

3) $m(n-x)-m(n-1)=m(mx-a)$

4) $x-a+2=2ax-3(a+x)-2(a-5)$

5) $a(x-a)-2bx=b(b-2a-x)$

6) $ax+bx=(x+a-b)^2-(x-2b)(x+2a)$

7) $x(a+b)-3-a(a-2)=2(x-1)-x(a-b)$

8) $(m+4x)(3m+x)=(2m-x)^2+m(15x-m)$

9) $(x+b)^2-(x-a)^2-(a+b)^2=0$

10) $(x+n)^3-12n^3=-(x-n)^3+2x^3$

11) $\frac{a}{x}+\frac{b}{2}=\frac{4a}{x}$

12) $\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{n}{x}+1$

13) $\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x}$

14) $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$

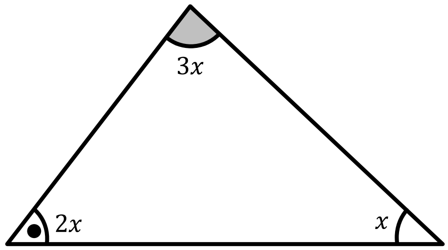
15) $\frac{2a+3x}{x+a}=\frac{2(6x-a)}{4x+a}$

f) Aplicaciones geométricas

Ejemplos:

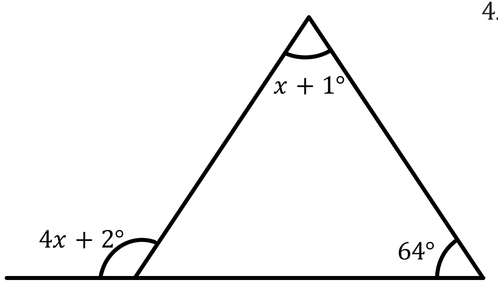
Resolvemos los siguientes problemas sobre geometría plana aplicando ecuaciones de primer grado:

1) Encontramos el valor de x en el siguiente triángulo:
Sabemos que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180º.



$$\alpha+\beta+\theta=180°$$
$$x+2x+3x=180°$$
$$6x=180°$$
$$x=\frac{180°}{6}$$
$$x=30°$$

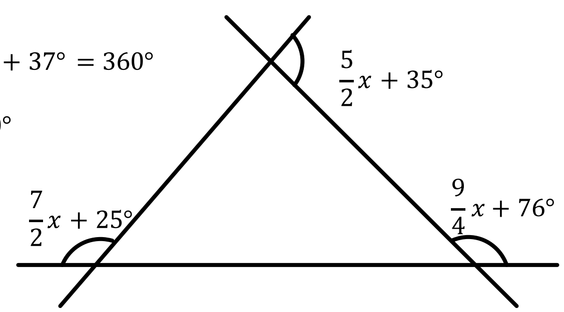
2) Calculamos el valor de x en el siguiente triángulo:
En un triángulo el ángulo exterior es la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes:



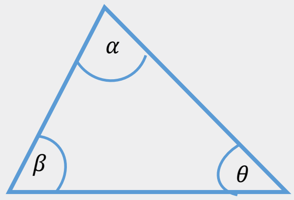
$$4x+2°=64°+x+1°$$
$$4x-x=64°+1°-2°$$
$$3x=63°$$
$$x=\frac{63°}{3}$$
$$x=21°$$

3) Calcular "x" en el tringulo:

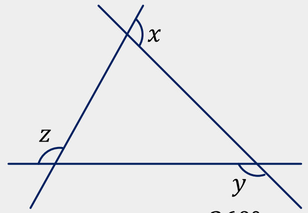
$$x+y+z=360°$$
$$\frac{7}{2}x+25°+\frac{5}{2}x+34°+\frac{9}{4}x+37°=360°$$
$$\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}x+96°=360°$$
$$\frac{33}{4}x=360°-96°$$
$$\frac{33}{4}x=264°$$
$$x=\frac{264°\cdot 4}{33}$$
$$x=32°$$



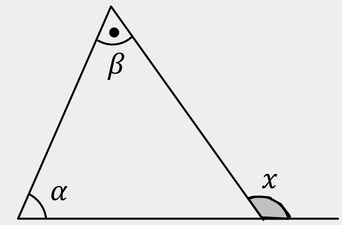
Muy importante



$$\alpha+\beta+\theta=180°$$



$$x+y+z=360°$$



$$x=\alpha+\beta$$

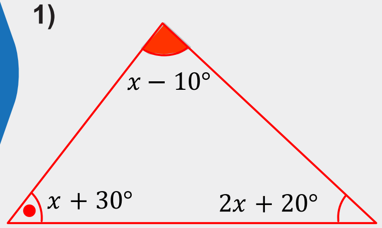
Lenguaje coloquial y simbólico

Lenguaje coloquial
Es el que usamos normalmente, que puede ser oral o escrito y está formado por las distintas palabras del idioma.
Lenguaje simbólico
Se denomina así a las ideas matemáticas expresadas con un símbolo o grupo de símbolos.
En matemática constantemente pasamos del lenguaje simbólico al coloquial y viceversa, puesto que esto permite el planteamiento y la resolución de distintas situaciones problemáticas.

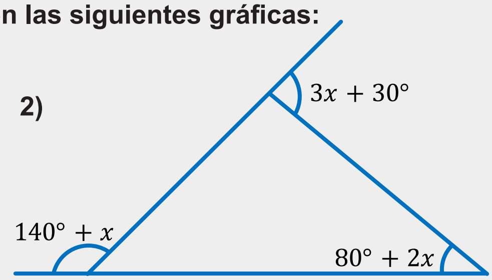
Actividad

Encontramos el valor de x en las siguientes gráficas:

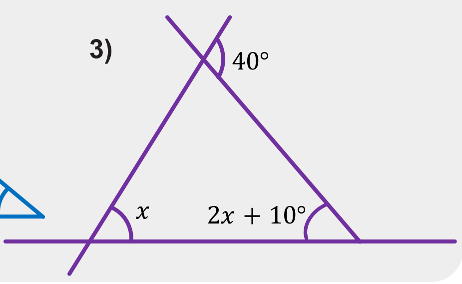
1)



2)



3)



Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Un número	x
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
El cuádruplo de un número	$4x$
Un número aumentado en … unidades	$x + \ldots$
Un número disminuido en … unidades	$x - \ldots$
El anterior de un número	$x-1$
El siguiente de un número	$x+1$
Números consecutivos	$x;\ x+1$

Guía para la resolución de problemas

1º Entiende el problema.
Lee el problema con detenimiento al menos dos veces.
De ser posible, has un bosquejo para ilustrar el problema. Etiqueta la información obtenida.
Anota en forma de lista la información que te pueda ayudar en la solución del problema.
2º Traduce el problema a lenguaje matemático.
A menudo esto implicará expresar el problema de manera algebraica. En algunas ocasiones esto implicará utilizar una fórmula en particular.
3º Lleva a cabo los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.
4º Verifica la respuesta obtenida en el paso 3.
5º Responde la pregunta.

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Algunas veces un problema describe una sucesión de acciones sobre números, es decir se da el resultado y se pide el número original. Un problema se puede resolver aplicando estrategias, técnicas, métodos o procedimientos distintos y de cualquier naturaleza, pero todos estos recursos que se emplean para encontrar el valor de las incógnitas llevan al mismo resultado.
Para plantear y resolver un problema mediante ecuaciones lineales, es recomendable seguir los siguientes pasos:

- Leer el problema hasta comprender y entenderlo, luego plantear la ecuación: para ayudarnos a entender el problema podemos realizar lo siguiente.
- Traducir del lenguaje escrito al lenguaje simbólico de la matemática.
- Resolver la ecuación planteada, verificar el resultado y dar respuesta al problema.

Ejemplos:

1) En la reunión del curso 3ro de secundaria hay el del doble número de estudiantes del paralelo "B" que de estudiantes del paralelo "A" y triple del número de estudiantes del paralelo "C" que de los paralelos "A" y "B" juntos. ¿Cuántos son del paralelo "B", paralelo "A" y paralelo "C" si la reunión la componen 96 estudiantes?

Solución:

El número de estudiantes del paralelo "A": x
El número de estudiantes del paralelo "B": $2x$
El número de estudiantes del paralelo "C": $3\cdot(x+2x)=9x$
Así:

$$x + 2x + 9x = 96 \Longrightarrow 12x = 96 \Longrightarrow x = \frac{96}{12} = 8$$

Por lo tanto:
El número de estudiantes del paralelo "A" es: $x=8$
El número de estudiantes del paralelo "B" es: $2x=16$
El número de estudiantes del paralelo "C" es: $9x=72$

2) En la librería, Sindel compra el libro de matemática con la tercera parte de su dinero y un cancionero con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tiene un saldo de Bs 32, ¿cuánto dinero tenía Sindel?.

Solución:

Tomemos el total del dinero como nuestra incógnita x.
El costo del libro representa: $\frac{1}{3}x$
El costo del cancionero representa: $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)x = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{4}{9}x$
Así:

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x + 32 = x \Longrightarrow 3x + 4x + 288 = 9x$$
$$3x + 4x - 9x = -288 \Longrightarrow -2x = -288 \Longrightarrow x = 144$$

Sindel tenía Bs 144.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas sobre ecuaciones lineales de primer grado:

1) Ivar pierde los $\frac{3}{8}$ de las canicas que tenía, con lo cual le quedan 22, ¿cuántas canicas tenía al principio?
2) Los estudiantes del 3º de secundaria van a visitar un museo, repartiéndose de la siguiente forma: el martes acuden la cuarta parte y el miércoles van los $\frac{2}{3}$ de los que quedaban. ¿Qué fracción de estudiantes se queda sin ver el museo?
3) Encontrar dos números consecutivos cuya suma sea 77.
4) En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Hallar el número de conejos y gallinas.

En resumen:

Ecuaciones de primer grado

- **Forma general**
  - $ax + b = 0; \quad a \neq 0$
- **Elementos**
  - x: **Variable o incógnita**
  - a: **Coeficiente principal**
  - b: **Término independiente**
- **Casos**
  - Si $a = 0$ y $b = 0$ ⇕ **COMPATIBLE INDETERMINADA**
  - Si $a = 0$ y $b \neq 0$ ⇕ **INCOMPATIBLE**

Regla de tres simple

Las ecuaciones de primer grado están presentes en diversas situaciones de la vida cotidiana.
En la cocina:

Fuente: Open AI, 2024

Escenario: *Una receta de galletas requiere 2 tazas de harina para 24 galletas. ¿Cuántas tazas de harina se necesitan para 36 galletas?*
Ecuación:
Sea "x" la cantidad de tazas de harina necesarias para 36 galletas.

$$x = \frac{2\ tazas \cdot 36\ galletas}{24\ galletas}$$

$$x = 3\ tazas$$

Se necesitan 3 tazas de harina para 36 galletas.

VALORACIÓN

Aunque parecen un concepto abstracto que solo se emplea en las matemáticas, las ecuaciones de primer grado son muy importantes en nuestra vida diaria. Son herramientas esenciales que nos permiten modelar y resolver situaciones de la vida real que incluyen relaciones entre incógnitas e incógnitas y el primer paso para alguien interesado en profundizar en la modelización matemática.

Respondemos de manera reflexiva y crítica las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el propósito de resolver ecuaciones de primer grado?
- ¿Cómo crees que abordaríamos los problemas de producción, tecnología, economía, etc., si no fueran las ecuaciones lineales?
- ¿De qué manera podemos utilizar la resolución de ecuaciones de primer grado en nuestro día a día?

PRODUCCIÓN

Construimos el laberinto en cartulina y recorre el laberinto, pasando únicamente por las casillas que tienen una igualdad verdadera, pinta el camino por donde avances.

Inicio	$0 \cdot x = x$	$1+2x=3x$	$x^2=2x$	$x^2=x+x$	$x+x=x^2$
$5x^2=5 \cdot x \cdot x$	$4x=x+3x$	$2x \cdot 2x=4x$	$5x=5x^2-x$	$3x+5x=8x^2$	$2x=x^2$
$x+2x=3x^2$	$3x^2=x \cdot 3x$	$5 \cdot x \cdot 3=8x$	$4x=5x-x$	$2x+7-2x=7$	$x \cdot x \cdot x=x^3$
$x+2x=3x$	$3x+5x=8x$	$x=6x-5x$	$x^2=x \cdot x$	$x=6x-5$	$x+x=2x$
$x+2x=2x^2$	$2x+2x=4x^2$	$x^2-x^2=x$	$-3x-5x=8x$	$3x-3x=6x$	Final

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

TÍTULO TEMA 1: OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Adición y sustracción

Determinar el resultado de las siguientes operaciones con polinomios:

1) $5x^4 - 3x^4 + \frac{2}{3}x^4$

2) $7x^3y^2 - 3y^2x^3 + 9x^3y^2$

3) $\frac{3}{4}x^6 + \frac{5}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^6$

4) $\frac{4}{5}x^4y^3z - \frac{7}{8}y^3zx^4 + \frac{7}{12}zx^4y^3$

5) $-3x^4 + 4x^4 - \frac{2}{3}x^4$

6) $5x^3 - 4x^3 - \frac{1}{5}x^3$

7) $-8x^9 + 4x^9 - 7x^9$

8) $(2x^2y - 3xy^2 + 5xy) - (6xy + 2x^2y - 3xy^2)$

9) $(2a + 3b - 5ab) + (5a - 4b + 2ab) - (7a + b - ab)$

10) $(x^3 - 5x^2 + 3) - (2x^2 + 3x - 7) - (8x + 2)$

Dados los siguientes polinomios:

$$A(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{5}y^2;\ B(x,y) = \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{3}{10}y^2;$$

$$C(x,y) = \frac{-3}{5}x^2 + \frac{14}{15}xy - y^2$$

Calcular las siguientes adiciones y sustracciones:

1) $A(x,y)+B(x,y)+C(x,y)$

2) $A(x,y)-[(B(x,y)+C(x,y))]$

3) $A(x,y)+[(B(x,y)-C(x,y))]$

4) $A(x,y)-B(x,y)-C(x,y)$

5) $A(x,y)+B(x,y)-C(x,y)$

6) $[A(x,y)-B(x,y)]-C(x,y)$

Multiplicación

Multiplicar los siguientes polinomios:

1) $(4x^3 - 2x+1)\cdot(6x^2)$

2) $(9x^3 - 3x + 4)\cdot\left(\frac{-5}{4}x^4\right)$

3) $(5x-2)\cdot(x^3-4x^2+2x-1)$

4) $(3x-x^3+3)\cdot(x^2-3x+1)$

5) $(5-3x^2+4x)\cdot(x^3-2x-2)$

6) $(3x+2)\cdot(3x-2)$

7) $(x^2-x)\cdot(x^2+x)$

8) $(a+b)\cdot(a-b)$

9) $(x+y)\cdot(x+y)$

10) $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{5y}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{5y}{2}\right)$

11) $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{5}\right)$

12) $(2x - 3)\cdot(2x + 3)$

13) $(4x - 3x^3 + 2x^2 - 1)\cdot(4x + 2x^2 + 3)$

División método clásico

Encontrar el cociente y el residuo mediante división normal de los siguientes polinomios:

1) $(12x^3-9x^2+3x)\div(3x)$

2) $(5x^2y^4-10x^5y^6+25x^3y)\div(5xy)$

3) $(10a^4b^3-4a^4b-2a^2b)\div(2a^2b)$

4) $(12a^5b^2-10a^4b^3+8a^6b^7-6a^2b^5)\div(2a^2b^2)$

5) $(20m^4n^5+8m^3n^4-4mn^2)\div(4mn^2)$

6) $(5a^4b^5-10a^7b+25a^3b)\div(5a^2b)$

7) $(10x^3y^4+6x^4y^5-4x^2y^3)\div(2xy^3)$

8) $(6x^3+8x^2-10x-3)\div(2x-4)$

9) $(4x^5-2x^4+6x^3-2x^2+4x-3)\div(2x^2-4x)$

10) $(x^5-4x^4+2x-4)\div(x^2-3x+1)$

11) $(x^6-3x^3)\div(x^4-3x^2+2x+1)$

Método de Horner

Determinar el cociente y el residuo mediante el método de Horner de los siguientes polinomios:

1) $(4x^5-3x^4+2x^3-x^2-x+1)\div(x^2+x-2)$

2) $(7x^6-8x^5-4x^3+3x^2+4x-9)\div(x^2+2x-1)$

3) $(3x^5-4x^3+2x-1)\div(x^2-3)$

4) $(2x^4-3x^3+x^2-2x+1)\div(x^2+3x+1)$

5) $(12x^6-3x^5+4x^4-2x^3+x)\div(x^2+x-1)$

6) $(x^4-3x^3+2x^2+1)\div(x^2-2x+3)$

7) $(6x^4+x^3-25x^2-4x+4)\div(3x^3-x^2-12x+4)$

8) $(8x^5-14x^4-5x^3)\div(2x^2-5x+3)$

9) $(x^4-2x^3-11x^2+30x-20)\div(x^2+3x-2)$

10) $(x^6+5x^4+3x^2-2x)\div(x^2-x+3)$

11) $(x^5+2x^3-x-8)\div(x^2-2x+1)$

12) $(4x^2-19x+4x^3)\div(-3-2x)$

13) $\left(\frac{3}{2}x^4 + \frac{19}{8}x^3 - \frac{11}{12}x^2 + \frac{2}{3}x - 3\right)\div\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)$

14) $\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\right)\div\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + 3\right)$

Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

Hallar el cociente y el residuo aplicando Ruffini a las siguientes divisiones:

1) $(x^3+2x+70)\div(x+4)$

2) $(x^5-32)\div(x-2)$

3) $(x^4-3x^2+2)\div(x-3)$

4) $(x^5-2x^2-3)\div(x-1)$

5) $(2x^4-2x^3+3x^2+5x+10)\div(x+2)$

6) $(x^4-2x^3+x^2+x-1)\div(x-1)$

7) $(x^3-5x-1)\div(x-3)$

8) $(3x^4-8x^2+5x-1)\div(x-2)$

9) $\left(x+\frac{3}{2}x^4+2x^5-\frac{13}{4}x^3\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

10) $(3x^5-4x^3+6x-8)\div(x+1)$

11) $(x^3-5x^2+6x-3)\div(x-2)$

12) $(x^4-3x^2+7)\div(x-3)$

Teorema del resto

Calcular el residuo mediante el Teorema del residuo en los siguientes polinomios:

1) $(8x^3+6x^2+6x+2)\div(2x+1)$

2) $(x^3-x^2+11x-10)\div(x-2)$

3) $(8x^3-3x+x^4+20+12x^2)\div(x+3)$

4) $(6x^4+20x^3-41x^2+50x+20)\div(x+5)$

5) $\left(a+\frac{3}{2}a^4+2a^5-\frac{13}{4}a^3\right)\div\left(a-\frac{1}{2}\right)$

6) $(20-22x^3+5x^5)\div(x-2)$

7) $\left(\frac{1}{2}n^6+\frac{2}{5}n^5-3n^4-\frac{5}{6}n^3+\frac{2}{3}n+4\right)\div(n-2)$

8) $\left(7s^2+\frac{2}{3}s^5+\frac{11}{12}s-\frac{15}{4}s^3+\frac{1}{2}\right)\div(s+3)$

9) $(x^2-3x^4+3-x)\div(x-3)$

10) $\left(\frac{9}{4}r^5-\frac{45}{8}r^3+\frac{3}{2}-r^2\right)\div\left(r-\frac{2}{3}\right)$

11) $\left(\frac{3}{4}s^5-\frac{2}{3}s^4-\frac{5}{2}s^3-s^2+\frac{2}{3}s+\frac{3}{4}\right)\div(s+1)$

Operaciones algebraicas combinadas

Sean los polinomios:

1) $A(x,y)=\frac{1}{3}x^2y-\frac{3}{2}xy^2+3xy$

2) $B(x,y)=\frac{5}{6}x^2y-\frac{1}{3}xy+\frac{7}{5}xy^2$

3) $C(x,y)=\frac{3}{4}xy^2+\frac{3}{4}x^2y-\frac{5}{6}xy$

4) $D(x,y)=\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{5}y^2$

5) $E(x,y)=\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{10}y^2$

6) $F(x,y)=\frac{-3}{5}x^2+\frac{14}{15}xy-y^2$

Realizar las siguientes operaciones combinadas entre polinomios:

1) $(A(x,y)+B(x,y)+C(x,y)$

2) $B(x,y)-D(x,y)-E(x,y)$

3) $F(x,y)-(A(x,y)+C(x,y))$

4) $D(x,y)+E(x,y)-A(x,y)$

5) $D(x,y)\cdot[\,E(x,y)-F(x,y)]-[\,\vdash A(x,y)-B(x,y)]$

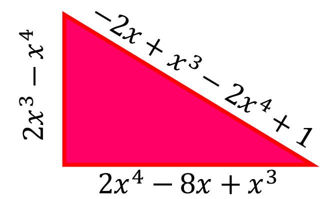
6) $C(x,y)\cdot[-A(x,y)]+E(x,y)\cdot[\,E(x,y)-F(x,y)]$

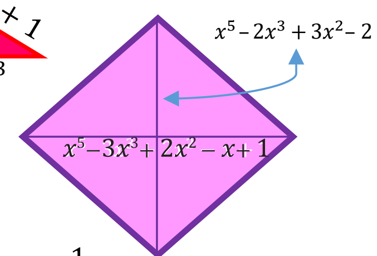
7) $[F(x,y)-A(x,y)]-F(x,y)\cdot[\,A(x,y)-E(x,y)]$

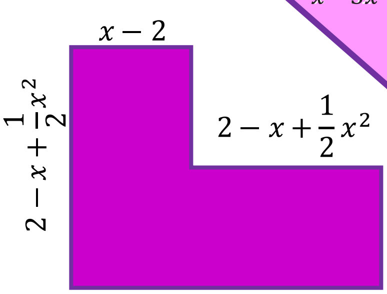
8) $[D(x,y)-F(x,y)]-B(x,y)\cdot[A(x,y)-E(x,y))$

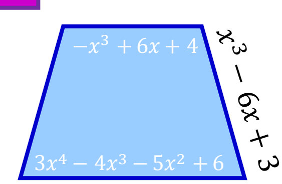
Aplicaciones geométricas

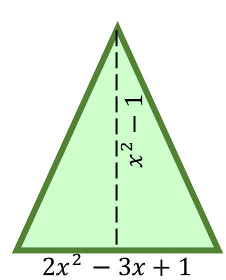
Determinar el perímetro y área de las siguientes figuras:

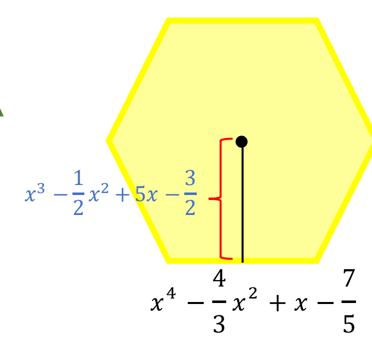












TÍTULO TEMA 5: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Resolución de ecuaciones

Ecuaciones de primer grado con signos de agrupación

Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

1) $3(x-7)=5(x-1)-4x$

2) $3x+8-5x-5=2(x+6)-7x$

3) $4(x-2)+1=5(x+1)-3x$

4) $3(x-1)-2x=5(2-x)-12$

5) $5(2-x)+3(x+6)=10-4(6+2x)$

6) $7(2x+4)=10x+2(x+15)$

7) $2(x+3)+5(x-2)=2+3(x-4)+10$

8) $5x-(1+3x)-2(x-1)=0$

9) $3x-2(1-5x)+15=7x-4(x-2)$

10) $10(1-3x)+15=25-35x$

11) $2(x+3)+5(x-2)=2+3(x-4)+10$

Ecuaciones lineales con fracciones

Determinar el valor de x en:

1) $\frac{x+2}{3}-\frac{3x+4}{2}=\frac{4-x}{6}$

2) $\frac{x}{2}+\frac{3}{5}=\frac{4}{3}-\frac{x}{6}$

3) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{2x}{15}+7$

4) $\frac{x+1}{2}+\frac{5+x}{2}=1+\frac{9-2x}{3}$

5) $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=\frac{4}{3}$

6) $\frac{x-7}{4}+\frac{x-1}{3}=x-5$

7) $3-\frac{2x}{5}=x-\frac{3x-1}{2}$

8) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{1-x}{5}=x+\frac{3}{10}$

9) $\frac{6-x}{4}-\frac{4-x}{2}=\frac{x+6}{12}$

10) $\frac{x}{2}+\frac{1}{5}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{10}+\frac{8}{15}$

11) $x-8=\frac{x}{2}-\frac{x-6}{3}$

12) $3(x+1)-\frac{6(x-2)}{3}=5$

13) $\frac{3x-5}{2}-1-\frac{2x-1}{3}+\frac{x+3}{4}=\frac{5x-1}{8}$

Ecuaciones de primer grado con denominadores compuestos

Determinar la incógnita en las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{\frac{3x}{5}-12}{x+1}=6$

2) $\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3}{2x}$

3) $\frac{2x-10}{3x-20}=\frac{7}{8}$

4) $\frac{x-7}{x+3}=\frac{10}{x+3}-3$

5) $\frac{3}{x+1}=\frac{x}{x-1}-1$

6) $\frac{15}{x+10}-\frac{5}{x+2}=0$

7) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{2x+2}{x^2-1}$

8) $\frac{2}{x+1}+\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{7}{x+1}$

9) $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$

10) $\frac{15}{x-2}-\frac{12x+6}{x^2-4}=\frac{18}{x+2}$

11) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$

12) $\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3}{2x}$

13) $\frac{10}{x+5}+\frac{3+4x}{x+5}=3$

14) $\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=-\frac{2}{5}$

15) $\frac{\frac{a}{6-a}+\frac{6-a}{a}}{\frac{6-a}{a}-\frac{a}{6-a}}=-\frac{5}{3}$

16) $\frac{r^3-27}{4r+9-\frac{r}{1-\frac{r}{r-1}}}=2$

Ecuaciones literales de primer grado

Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

1) $(a-4)x+(a-5)x=(x-5)a+(x-4)a$

2) $abx=a-x(a^2+b^2)-b(ax-1)$

3) $(b-1)x+(c-1)x=(x-1)b+(x-1)c$

4) $m^2(x-2)-n^2(x-2)=n(m^2-n^2)$

5) $m^2x=n(1+n)+x(m^2-n^2)$

6) $\frac{m-x}{m}+\frac{n-x}{n}+\frac{p-x}{p}=3+\frac{1}{mnp}$

7) $\frac{x}{2a}+\frac{2x}{3b}-\frac{1}{ab}=0$

8) $\frac{3(m-x)}{n}-\frac{2(n-x)}{m}=\frac{2n^2-6m^2}{nm}$

9) $\frac{x(c-1)}{c}+2=3c-\frac{x}{2}$

10) $\frac{nx-2n^2}{n^2}+\frac{2}{n}=\frac{x}{n^3}$

11) $(x+b)^3+(x-b)^3=2x^3+12b^3$

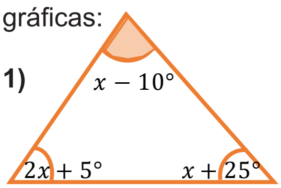
12) $2-\frac{x-a}{x-b}=\frac{x+a}{x+b}$

13) $(p-q)(px+qx)=p+q$

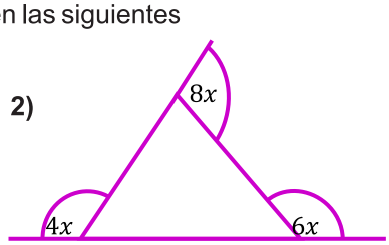
Aplicaciones geométricas

Encontrar el valor de x en las siguientes gráficas:

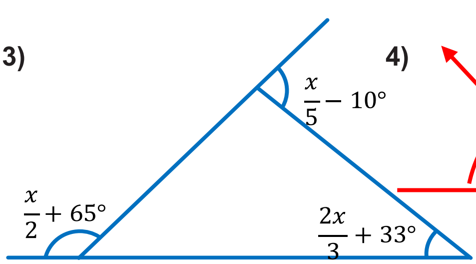
1)



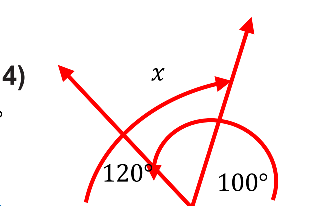
2)



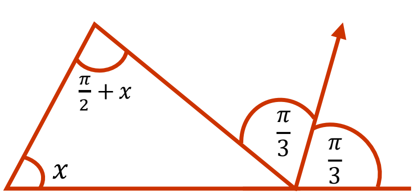
3)



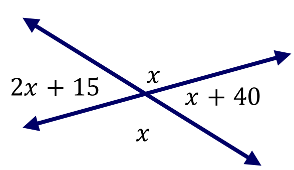
4)



5)



6)



Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Plantear una expresión algebraica y resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones lineales:

1) Un padre tiene el doble de edad que su hijo. Hace 17 años, tenía el triple. Hallar la edad de ambos.

2) Calcular las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 80 m y la altura es $\frac{2}{3}$ de la base.

3) La edad de Cesar es actualmente el quíntuple de la de su hijo Asael. Hace 5 años, la edad de Cesar era nueve veces la de su hijo. Hallar la edad actual de ambos.

4) La edad de Orlando es la mitad de Reynaldo, la de José es 3 veces la edad de Orlando y la de Marcelo es el doble de la edad de José. Todas suman 132.

5) En un corral se cuentan 88 patas y 30 cabezas. Si lo único que hay son gallinas y conejos, ¿cuál es la diferencia entre el número de gallinas y el de conejos?

6) En una reunión se cuentan tantos aristócratas como 3 veces el número de cortesanas. Después que se retiran 8 parejas el número de aristócratas que aún quedan es igual a 5 veces el número de cortesanas, ¿cuántos aristócratas había inicialmente?

7) En el curso 3º de secundaria de "n" estudiantes; "m" duermen, "p" cuentan chistes y el resto escucha las clases, ¿cuál es el exceso de los que duermen y cuentan chistes sobre los que atienden?

8) Un vehículo de transporte parte del punto A con dirección al punto B y llega a la Plaza F con 43 pasajeros. Sabiendo que cada pasaje cuesta Bs 2 que ha recaudado en total Bs 120 y en cada parada bajaba un pasajero, pero subían tres, ¿cuántos pasajeros partieron del punto A?

Relaciona cada enunciado con su correspondiente ecuación y con su solución:

Enunciado	Ecuación	Solución
El triple de un número es 21.	$2x+\frac{x}{3}=7$	$x=9$
Un número más su consecutivo suman 19.	$x-5=15$	$x=20$
Un múltiplo de 5 más 4 suman 24.	$5x+4=24$	$x=4$
Hace 5 años, Alberto tenía 15 años.	$5-\frac{x}{10}=4$	$x=8$
La cuarta parte de un número más 1 suma 3.	$\frac{x}{4}+1=3$	$x=2$
El doble de la suma de un número más 3 es 10.	$x+x+1=19$	$x=3$

TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES

PRÁCTICA

Los triángulos son figuras geométricas fundamentales en la arquitectura y la ingeniería, especialmente en la construcción, su uso se basa en dos propiedades clave como son la estabilidad y eficiencia, razón por la cual Mayela construyó un escorpión hidráulico con palitos de madera, en la construcción utilizo triángulos de diferentes formas.
Los triángulos son elementos esenciales en la construcción debido a su rigidez, eficiencia en el uso de materiales y versatilidad para crear estructuras diversas. Su presencia en obras de arquitectura e ingeniería de todo el mundo es un testimonio de su importancia en el diseño y construcción de estructuras seguras, duraderas y estéticas.
Los triángulos se utilizan en la construcción de vigas, columnas, arcos, puentes, torres y otros elementos estructurales.

Fuente: Open AI, 2024

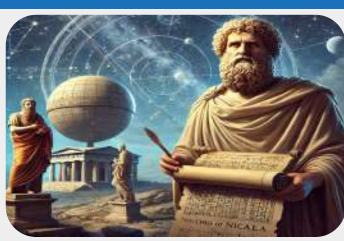
Actividad

Respondemos las preguntas y realizamos la actividad:

- ¿En qué otras situaciones se emplea el triángulo?
- ¿Cuál es la razón detrás del uso de triángulos para representar la estructura humana?
- Investigamos la importancia de las estructuras triangulares.

TEORÍA

Dato histórico



Fuente: Open AI, 2024

Se considera a Hiparco de Nicea (190 a.C. - 120 a.C.) como el "padre de la trigonometría". Este astrónomo y matemático griego realizó importantes contribuciones al desarrollo de esta rama de las matemáticas, sentando las bases para su uso en la astronomía y otras áreas.

Aportes de Hiparco a la trigonometría:

- *Creación de la tabla de cuerdas.*
- *Descubrimiento de la precesión de los equinoccios.*
- *Desarrollo de técnicas de medición angulares.*

La obra de Hiparco tuvo un impacto profundo en el desarrollo de la trigonometría y la astronomía. Sus trabajos fueron fundamentales para posteriores matemáticos y astrónomos, como Tolomeo, que se basaron en ellos para desarrollar sus propios sistemas trigonométricos.

1. Definición de triángulo

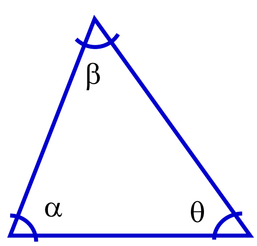
Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados, tres ángulos y tres vértices.
Un **ángulo** es la abertura entre dos rectas que se intersectan en un vértice y se miden en grados (°).
Un **vértice** es el punto en el que se encuentran dos o más rectas, formando un ángulo.

Triángulos y su clasificación

Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos.

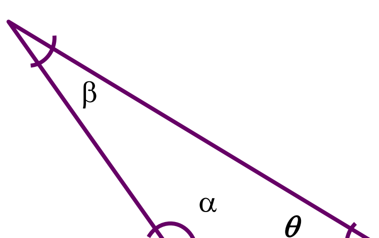
a) Según sus ángulos

Se toma como parámetro de clasificación al ángulo de 90°.



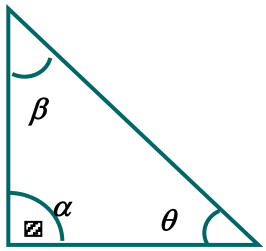
$\alpha < 90°$
$\beta < 90°$
$\theta < 90°$

Actángulo
Todos sus ángulos son menores a 90 grados



$\alpha > 90°$
$\beta < 90°$
$\theta < 90°$

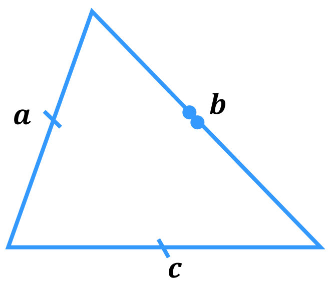
Obtusángulo
Tiene un ángulo mayor a 90 grados



$\alpha = 90°$
$\beta < 90°$
$\theta < 90°$

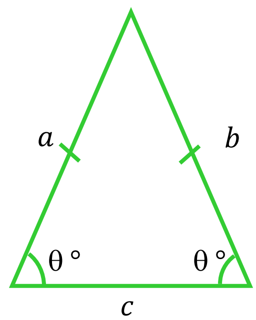
Rectángulo Tiene un ángulo que mide 90 grados

b) Clasificación según sus lados



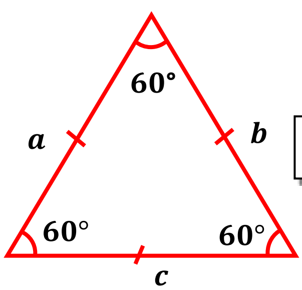
$\boxed{a \neq b \neq c}$

Escaleno o con todos sus lados diferentes



$\boxed{a = b \neq c}$

Isósceles o con dos de sus lados iguales y uno diferente

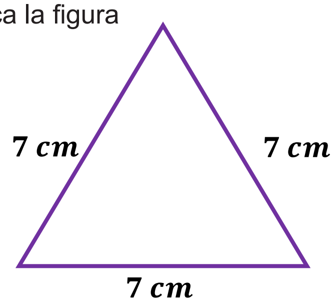


$\boxed{a = b = c}$

Equilátero o con los tres lados iguales

Ejemplo:

Hallamos el perímetro de un triángulo equilátero de lado igual a 7 cm como indica la figura



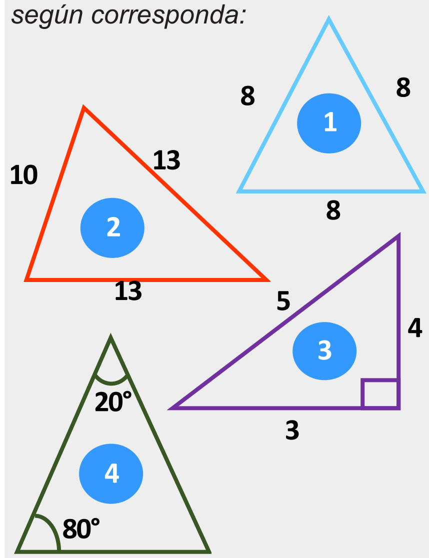
Desarrollo:

$P = 7cm + 7cm + 7cm$

$\Rightarrow P = 21\ cm$

Ejercicio

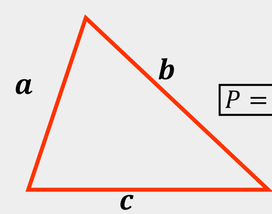
Dados los siguientes triángulos, complete el cuadro que se da a continuación con un sí o con un no según corresponda:



TRIÁNGULO	1	2	3	4
EQUILÁTERO				
ISÓSCELES				
ESCALENO				
RECTÁNGULO				
ACUTÁNGULO				
OBTUSÁNGULO				

Perímetro

El perímetro (P) de una figura se define como la suma de las medidas de sus lados que dibujan su contorno.

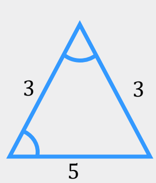


$\boxed{P = a + b + c}$

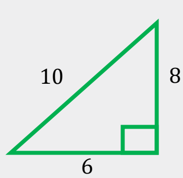
Actividad

Calculamos el valor de los perímetros en los siguientes triángulos:

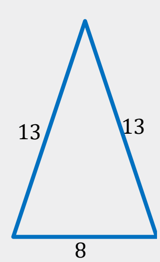
1)



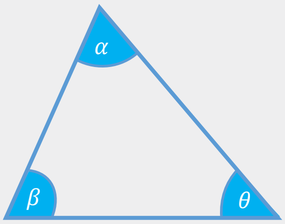
2)



3)

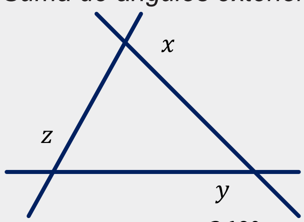


Suma de ángulos interiores:

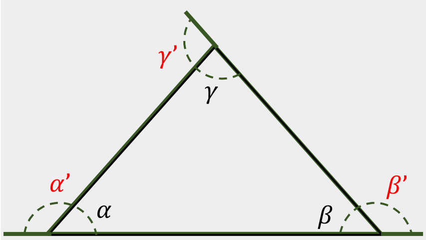


$\alpha + \beta + \theta = 180°$

Suma de ángulos exteriores:



$x + y + z = 360°$

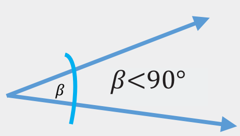


$\boldsymbol{\alpha' = \gamma + \beta}$
$\boldsymbol{\beta' = \alpha + \gamma}$
$\boldsymbol{\gamma' = \alpha + \beta}$

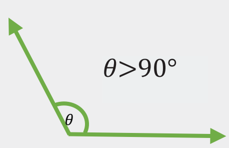
Clases de ángulos

Ángulo recto:

Ángulo agudo:

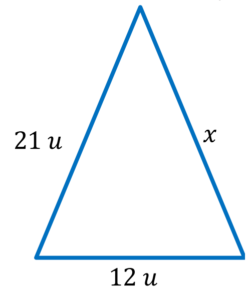


Ángulo obtuso:



Ejemplo:

Hallamos el valor de x y el perímetro del triángulo isósceles:



Como se trata de un triángulo isósceles tiene dos lados son iguales, es decir:

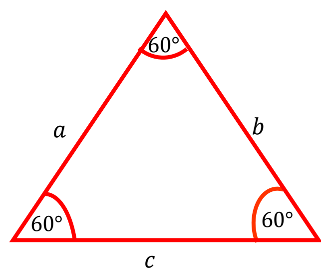
$x=21\ u$

Luego:

$P=21\ u+21\ u+12\ u$
$\Longrightarrow P=54\ u$

Ejemplo:

Sabiendo que el perímetro del triángulo equilátero es $51\ u$, encontramos el valor de sus lados.



En un triángulo equilátero todos los lados son iguales, entonces:

$$P = a + b + c \Longrightarrow 51\ u = a + a + a$$

$$51\ u = 3a$$

$$\frac{51\ u}{3} = a$$

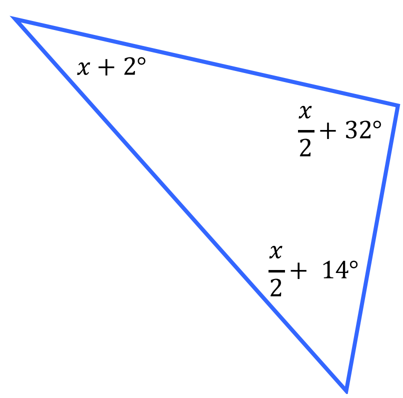
$$a = 17\ u$$

3. Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo siempre será igual a 180 grados.

Ejemplo:

Hallamos el valor de "x" de la figura.



Por la suma de ángulos interiores:

$$(x + 2°) + \left(\frac{x}{2} + 32°\right) + \left(\frac{x}{2} + 14°\right) = 180°$$

$$\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) + (2° + 14° + 32°) = 180°$$

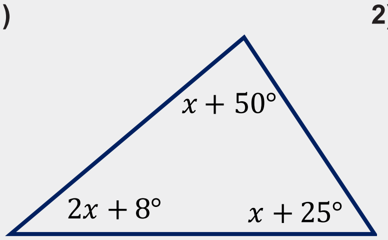
$$2x + 48° = 180°$$

$$2x = 180° - 48° \Longrightarrow 2x = 132°$$

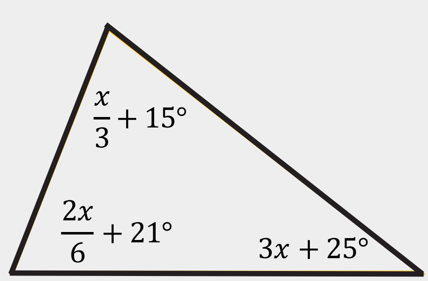
$$x = \frac{132°}{2} = 66°$$

Encontramos el valor de "x" en los siguientes triángulos:

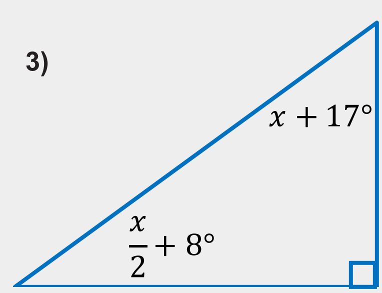
1)



2)

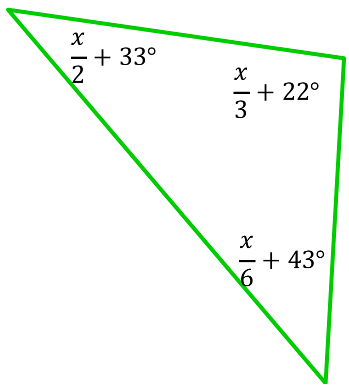


3)



Ejemplo:

Encontramos el valor del ángulo que falta en el siguiente triángulo:



Se conoce:

$$\left(\frac{x}{2}+33°\right)+\left(\frac{x}{3}+22°\right)+\left(\frac{x}{6}+43°\right)=180°$$

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}\right)+(33°+43°+22°)=180°$$

$$x+98°=180°$$

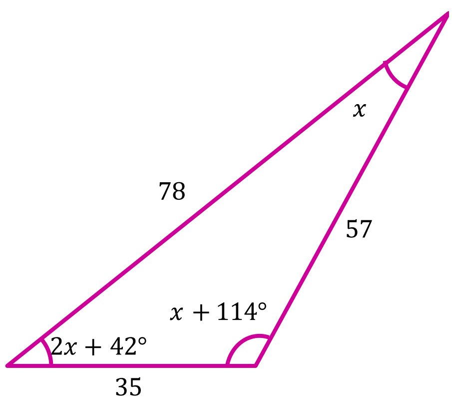
$$x=180°-98°$$

$$x=82°$$

Ejemplo:

Hallamos el perímetro y el valor del ángulo que falta en el siguiente triángulo:

Sumando los ángulos interiores e igualando a $180°$:



$$x+(2x+42°)+(x+114°)=180°$$

$$(x+2x+x)+42°+114°=180°$$

$$4x+156°=180°$$

$$4x=180°-156° \Longrightarrow 4x=24°$$

$$x=\frac{24°}{4}=6°$$

Calculando el perímetro:

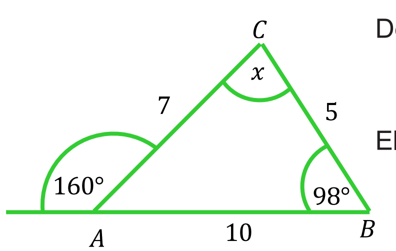
$$P=a+b+c$$

$$P=35\ u+57\ u+78\ u$$

$$P=170\ u$$

Ejemplo:

Encontramos el perímetro y el valor de x en el siguiente triángulo:



De la figura, para $\alpha'=160°$, $\beta=x$ y $\gamma=98°$:

$$160°=x+98° \Longrightarrow 160°-98°=x$$

$$x=62°$$

El perímetro es:

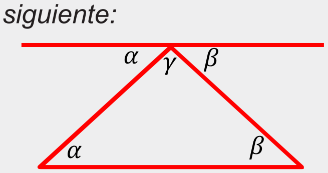
$$P=a+b+c=10\ u+7\ u+5\ u$$

$$P=22\ u$$

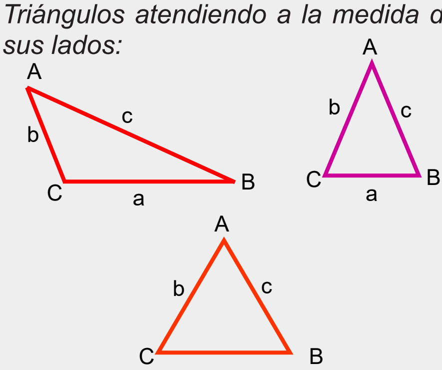
Tipos de ángulos

Tipos de ángulos	*Descripción*	*Ejemplo*
Ángulo nulo	*Es aquel que mide 0°.*	*0°*
Ángulo agudo	*Un ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.*	*30º, 45º, 15º*
Ángulo recto	*Es el ángulo que mide 90°.*	*90º*
Ángulo obtuso	*Un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.*	*100º,170º*
Ángulo llano o extendido	*Un ángulo que mide exactamente 180°.*	*180º*
Ángulo reflejo o cóncavo	*Es un ángulo que mide más de 180°.*	*210°,220°*
Ángulo completo	*Es aquel que mide 360°.*	*360°*

Los tres ángulos de un triángulo suman 180º como puede comprobarse con la figura siguiente:



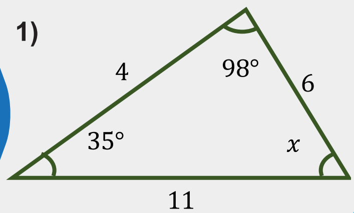
Triángulos atendiendo a la medida de sus lados:



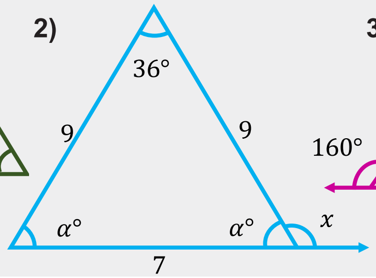
Actividad

Encontramos el perímetro y el valor de "x" de los triángulos:

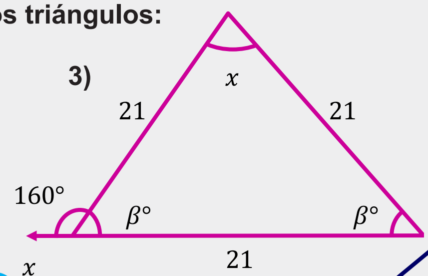
1)



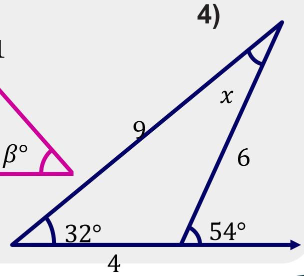
2)



3)

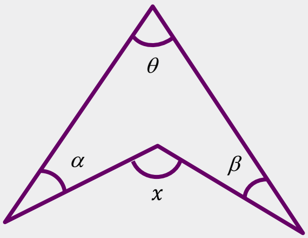


4)



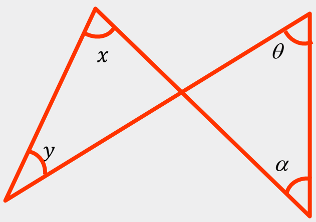
Dato curioso

Propiedad cuadrilátero cóncavo:



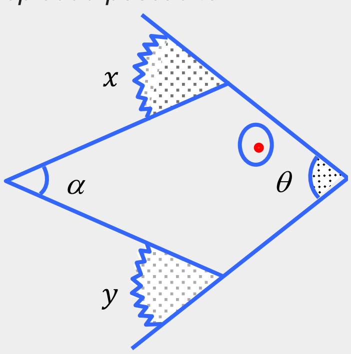
$x = \alpha + \theta + \beta$

Propiedad mariposa:



$x + y = \theta + \alpha$

Propiedad pescadito:



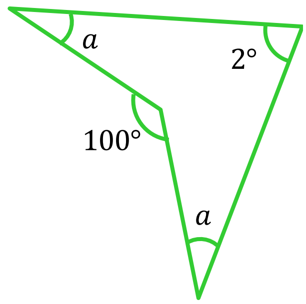
$x + y = \alpha + \theta$

4. Propiedades adicionales de un triángulo cualquiera

Utiliza las propiedades adicionales para encontrar el dato que falta en los triángulos:

Ejemplo: (Propiedad cuadrilátero cóncavo)

Encontrar el valor de a en el siguiente triángulo:



$100° = 2° + a + a$

$100° - 2° = 2a$

$98° = 2a$

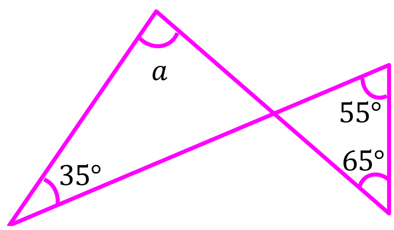
$2a = 98°$

$a = \frac{98°}{2}$

$a = 49°$

Ejemplo: (Propiedad mariposa)

Hallar el valor de a



Reemplazando:

$x + y = \alpha + \theta$

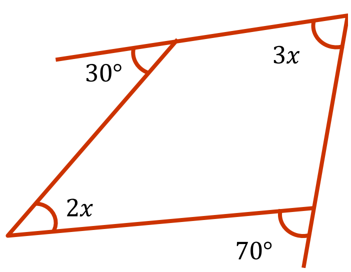
$a + 35° = 65° + 55°$

$a = 65° + 55° - 35°$

$a = 85°$

Ejemplo: (Propiedad pescadito)

Calcular x:



Reemplazando:

$x + y = \alpha + \theta$

$30° + 70° = 2x + 3x$

$100° = 5x$

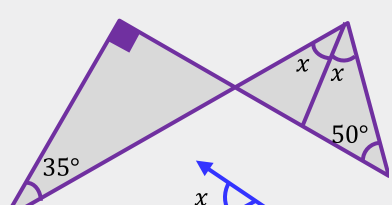
$\frac{100°}{5} = x$

$x = 20°$

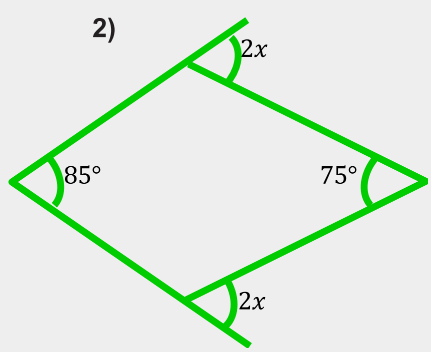
Actividad

Determinamos el valor de "x" en las siguientes figuras:

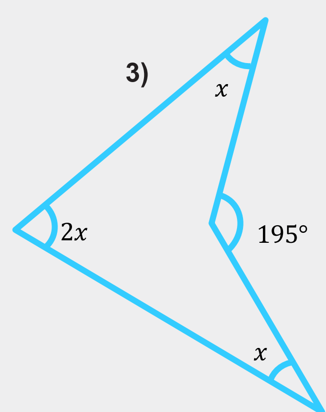
1)



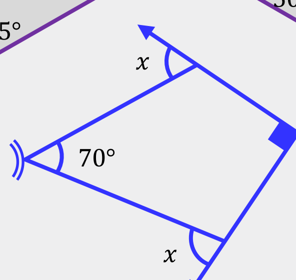
2)



3)



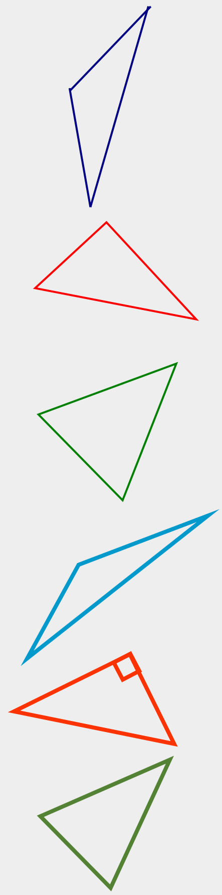
4)



VALORACIÓN

Unimos según corresponda:

Triángulo isósceles.	Tiene sus 3 lados de igual medida.
Triángulo equilátero.	Tiene 2 de sus lados de igual medida
Triángulo escaleno.	Tiene sus 3 lados de diferente medida.
Triángulo acutángulo.	Tiene un ángulo recto.
Triángulo obtusángulo.	Tiene un ángulo obtuso.
Triángulo rectángulo.	Tiene 3 ángulos agudos.



Fuente: Open AI, 2024

Fuente: Open AI, 2024

Aplicaciones de los triángulos en nuestra vida diaria:

Arquitectura e Ingeniería:
Edificios: Los triángulos se utilizan en vigas, marcos y techos para proporcionar mayor resistencia a las fuerzas como el viento y los terremotos.
Puentes: La forma triangular de muchas estructuras de puentes se debe a su gran capacidad para soportar cargas pesadas y distribuir el peso de manera uniforme.
Torres: Las torres de alta tensión y las antenas suelen tener estructuras triangulares para garantizar su estabilidad y resistencia a las inclemencias del tiempo.

Respondemos las siguientes preguntas:
- ¿Qué construcciones famosas en Bolivia, contienen figuras triangulares?
- ¿Cómo se llama la disciplina que analiza los triángulos?
- ¿Por qué los triángulos se utilizan en construcción?
- ¿De qué manera influye la trigonometría en la predicción de los signos zodiacales?

PRODUCCIÓN

Los triángulos son mucho más que simples figuras geométricas. Son la base de diversas estructuras y objetos que utilizamos a diario y su importancia radica en su capacidad para proporcionar estabilidad, resistencia y seguridad.

En base a los conocimientos adquiridos, es decir utilizando triángulos, construye estructuras como torres, pirámides, etc. con materiales reciclables (papel, lanas, palitos de helado, palitos chinos etc.).

Fuente: Open AI, 2024

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

PRÁCTICA

Las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos se estudian en la rama de la matemática conocida como trigonometría. Aunque puede parecer abstracta, sus aplicaciones son muy concretas y abarcan una amplia gama de áreas, desde la arquitectura y la ingeniería hasta la astronomía y la navegación.
Un ejemplo sencillo es la construcción de una mesa de camping con triángulos, lo cual es una idea innovadora y resistente. Los triángulos son una forma geométrica muy robusta, ideal para soportar peso y resistir las inclemencias del tiempo.
El diseño básico de esta mesa incluirá: una base que puede ser un triángulo equilátero o isósceles grande para mayor estabilidad y la parte superior puede ser rectangular o triangular, apoyada sobre las patas.

Fuente: Open AI, 2024

Actividad

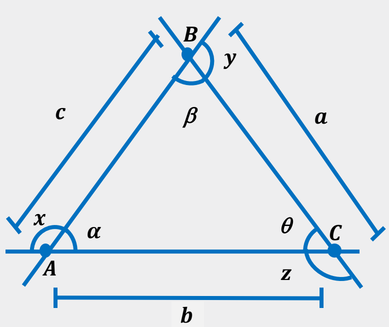
Respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el propósito del análisis de los triángulos en situaciones diarias?
- ¿En qué lugar de tu vecindario o comunidad puedes notar el uso de triángulos rectángulos?

Dialogamos en clases sobre las diferencias que notamos: por la mañana, al mediodía y por la tarde observando nuestra sombra parados en un mismo lugar.

TEORÍA

Recordemos



Notación:

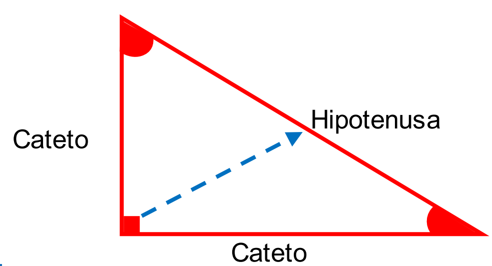
- *⊿ ABC: Triángulo A, B, C*
- *Lados:* $\overline{AB}, \overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$
- *Ángulos internos:* α, β *y* θ
- *Ángulos externos:* x, y, z
- *Perímetro:* $P=a+b+c$

Los triángulos rectángulos son una forma geométrica fundamental. Descubrir y demostrar las características de estos triángulos ha sido el trabajo de los matemáticos y científicos a lo largo de la historia, lo que ha permitido su uso en una variedad de campos del conocimiento.

Triángulo rectángulo

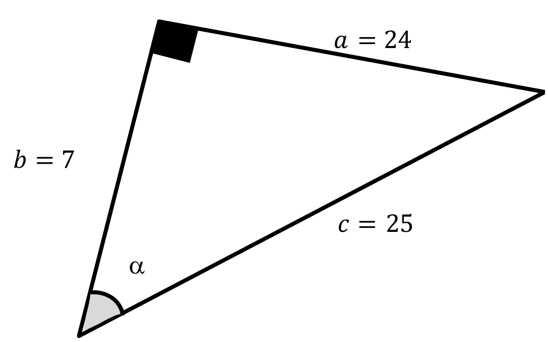
1. Definición

Un triángulo rectángulo se caracteriza por tener un ángulo igual a $90°$. El lado que se encuentra al frente del ángulo de $90°$ es el lado más largo del triángulo y se conoce como hipotenusa, los otros dos lados se llaman catetos.



Ejemplo:

En el siguiente triángulo reconocer la hipotenusa y los catetos.



"a" es un cateto
"b" es un cateto
"c" es la hipotenusa

Para resolver un triángulo rectángulo se debe saber que la sumatoria de los tres ángulos internos del triángulo es igual a 180°, también saber el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

2. Teorema de Pitágoras

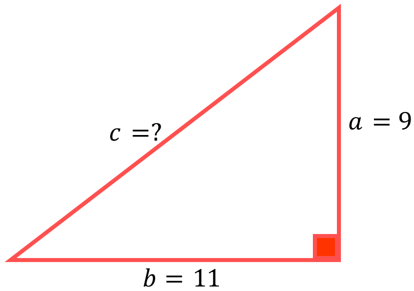
El teorema de Pitágoras nos indica que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado.

$$c^2=a^2+b^2$$

Este teorema nos sirve para encontrar los lados del triángulo rectángulo.

Ejemplo:

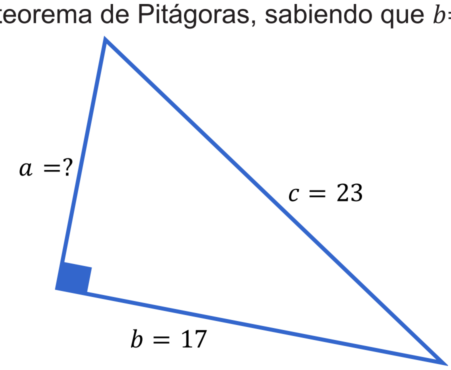
Dado el siguiente triángulo rectángulo calcular el valor de c aplicando el teorema de Pitágoras, sabiendo que $a=9$ y $b=11$:



$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=9^2+11^2$$
$$c^2=81+121$$
$$c^2=202$$
$$c=\sqrt{202}=14.21$$

Ejemplo:

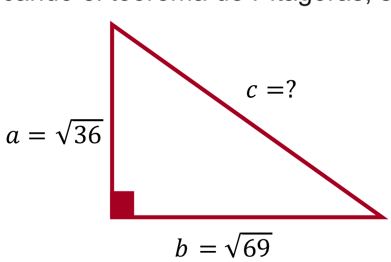
Dado el siguiente triángulo rectángulo calculamos el valor a aplicando el teorema de Pitágoras, sabiendo que $b=17$ y $c=23$:



$$c^2=a^2+b^2$$
$$\Rightarrow a^2=c^2-b^2$$
$$a^2=23^2-17^2$$
$$a^2=529-289$$
$$a=\sqrt{240}\approx 15.49$$

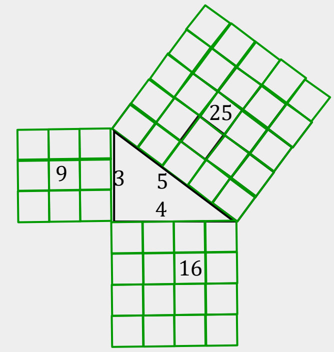
Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo calculamos el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras, sabiendo que $a=\sqrt{36}$ y $b=\sqrt{69}$:



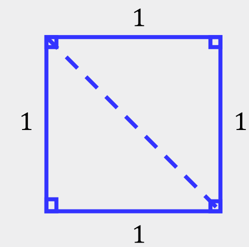
$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=\left(\sqrt{36}\right)^2+\left(\sqrt{69}\right)^2$$
$$c^2=6^2+69=36+69$$
$$c^2=105$$
$$c=\sqrt{105}\approx 10.25$$

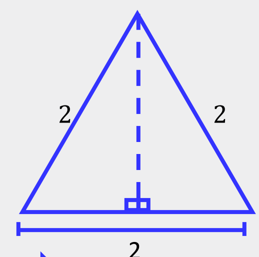
Representación gráfica del teorema de Pitágoras

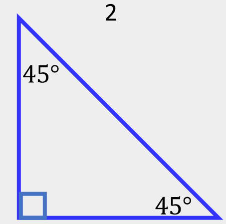


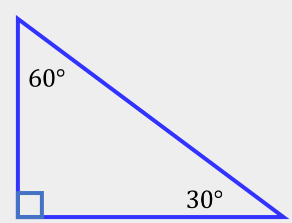
$$c^2=a^2+b^2$$

Algunas variantes del triángulo rectángulo:





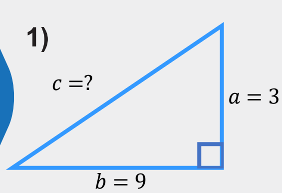




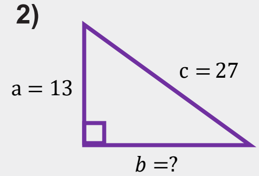
Actividad

En los triángulos rectángulos encontramos el lado que falta aplicando el teorema de Pitágoras:

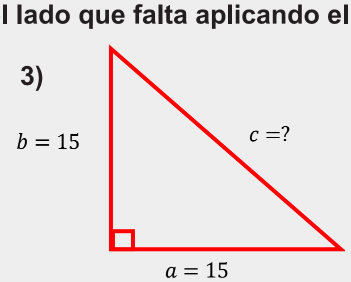
1)



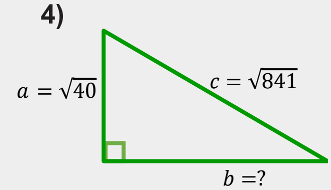
2)



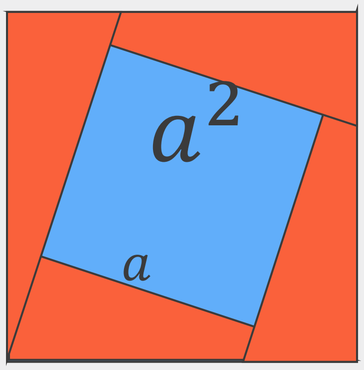
3)

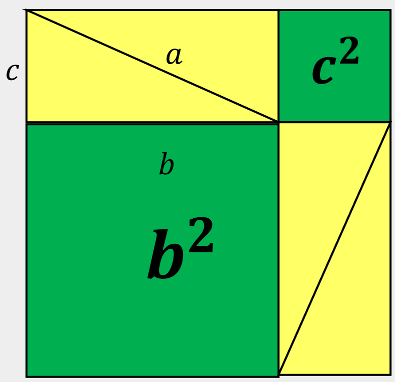


4)



Teorema de Pitágoras

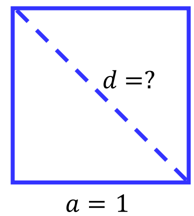




Pitágoras fundó una escuela filosófica y religiosa en Crotona, Italia, conocida como la Escuela Pitagórica.
Los pitagóricos creían que los números eran la esencia de todas las cosas y que el universo estaba ordenado según patrones numéricos, además de la matemática, se interesaban por la filosofía, la música y la astronomía.

Ejemplo:

Dado el siguiente cuadrado calcular el valor de la diagonal aplicando el teorema de Pitágoras:



Como se trata de un cuadrado dos de los lados son iguales.

Datos:

$a=1$

$d=?$

$d^2=a^2+b^2$

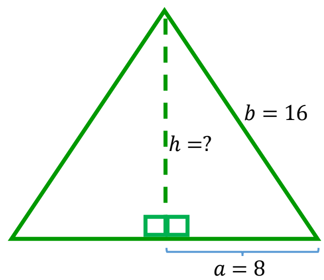
$d^2=1^2+1^2$

$d^2=2$

$d=\sqrt{2}\approx 1.41$

Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo calcular el valor de su altura aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $c=16$ y $a=8$.



Datos:

$a=8$

$b=16$

$h=?$

$b^2=a^2+h^2$

$h^2=b^2-a^2$

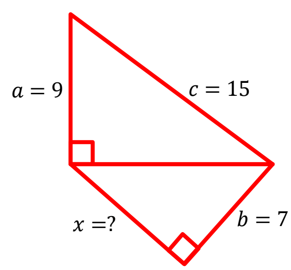
$h^2=16^{\ 2}-8^2$

$h^2=192$

$h=\sqrt{192}=8\sqrt{3}=13.86$

Ejemplo:

Dada la siguiente figura compuesta por triángulos rectángulos, calcular el valor de x e y aplicando el teorema de Pitágoras.



Datos:

$a=9$
$b=15$
$c=15$
$x=?$
$y=?$

En el primer triangulo:

$c^2=a^2+y^2 \Longrightarrow y^2=c^2-a^2$

$y^2=15^2-9^2=144$

$\Longrightarrow y=\sqrt{144}=12$

En el segundo triangulo, donde $y=12$:

$y^2=x^2+b^2 \Longrightarrow x^2=y^2-b^2$

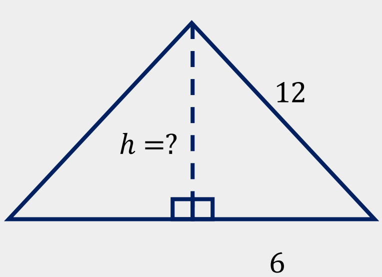
$x^2=12^2-7^2=95$

$x=\sqrt{95}\approx 9.75$

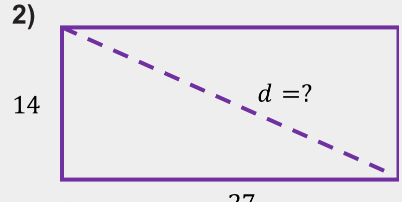
Actividad

Calculamos el valor faltante, aplicando el teorema de Pitágoras:

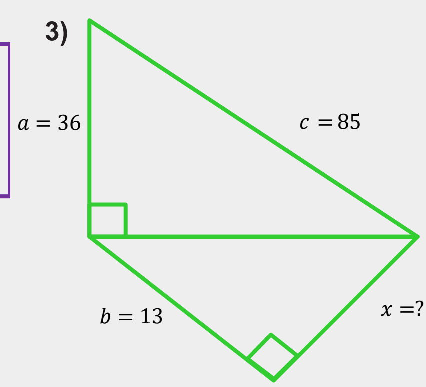
1)



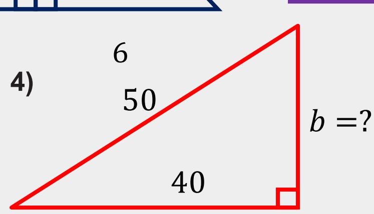
2)



3)



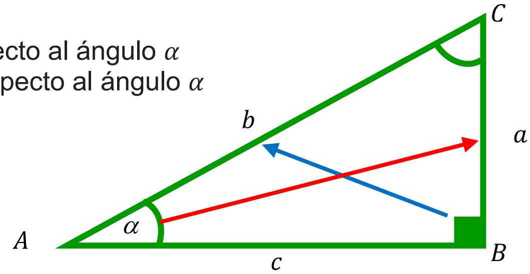
4)



3. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo son seis, las tres últimas son el recíproco de las tres primeras.

b= Hipotenusa (H)
a= Cateto opuesto (CO) respecto al ángulo α
c= Cateto adyacente (CA) respecto al ángulo α



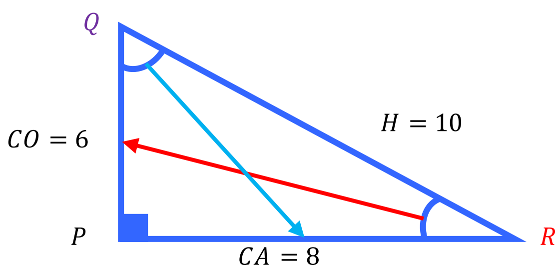
$$sen\ \alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{b} \qquad cosec\ A = \frac{H}{CO} = \frac{b}{a}$$

$$cos\ A = \frac{CA}{H} = \frac{c}{b} \qquad sec\ A = \frac{H}{CA} = \frac{b}{c}$$

$$tan\ A = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{c} \qquad cotan\ A = \frac{CA}{CO} = \frac{c}{a}$$

Ejemplo:

Encontrar las razones trigonométricas en el siguiente triángulo con respecto al ángulo β:



$$sen\ \beta = \frac{CO}{H} = \frac{6}{10} \qquad cosec\ \beta = \frac{H}{CO} = \frac{10}{6}$$

$$cos\ \beta = \frac{CA}{H} = \frac{8}{10} \qquad sec\ \beta = \frac{H}{CA} = \frac{10}{8}$$

$$tan\ \beta = \frac{CO}{CA} = \frac{6}{8} \qquad cotan\ \beta = \frac{CA}{CO} = \frac{8}{6}$$

También es posible encontrar las seis razones trigonométricas, del anterior triángulo, para el ángulo Q de la siguiente forma:

$$sen\ \gamma = \frac{CO}{H} = \frac{8}{10} \qquad cosec\ \gamma = \frac{H}{CO} = \frac{10}{8}$$

$$cos\ \gamma = \frac{CA}{H} = \frac{6}{10} \qquad sec\ \gamma = \frac{H}{CA} = \frac{10}{6}$$

$$tan\ \gamma = \frac{CO}{CA} = \frac{8}{6} \qquad cotan\ \gamma = \frac{CA}{CO} = \frac{6}{8}$$

Teorema de Pitágoras

La razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como el cociente que se obtiene al dividir las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo con respecto a uno de los ángulos agudos.

$$cos\alpha = \frac{1}{5} \Longrightarrow sec\alpha = 5$$

inversas

Para nombrar los ángulos, se utilizan letras mayúsculas para identificar los vértices, letras minúsculas para nombrar los ángulos en sí mismos se suelen utilizar las letras griegas.

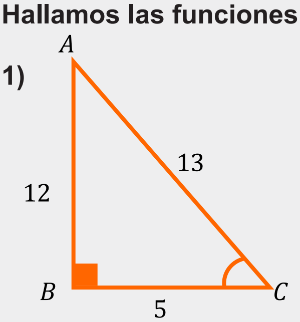
El Alfabeto Griego

Nombre de letra	Mayúsculas	Minúsculas
Alfa	Α	α
Beta	Β	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Épsilon	Ε	ε
Zheta	Ζ	ζ
Eta	Η	η
Theta	Θ	θ
Iota	Ι	ι
Kappa	Κ	κ
Lambda	Λ	λ
Mi	Μ	μ

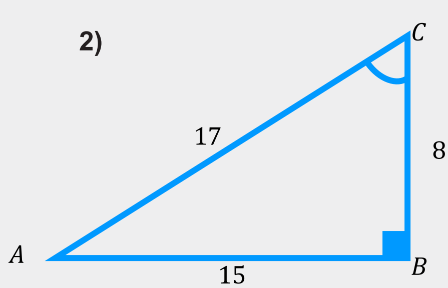
Actividad

Hallamos las funciones trigonométricas del ángulo "γ" en cada uno de los triángulos:

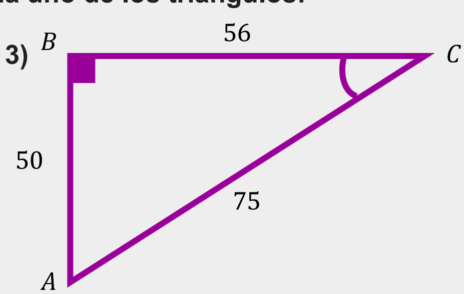
1)



2)



3)



Recordemos la definición de las funciones trigonométricas

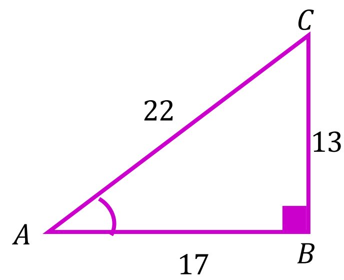
$sen\ A = \frac{CO}{H}$
$cos\ A = \frac{CA}{H}$
$tan\ A = \frac{CO}{CA}$
$cosec\ A = \frac{H}{CO}$
$sec\ A = \frac{H}{CA}$
$cotan\ A = \frac{CA}{CO}$

La trigonometría surgió de la necesidad de establecer relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estas relaciones, conocidas como razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante), permitieron resolver una amplia variedad de problemas, desde la medición de distancias inaccesibles hasta la predicción de eclipses.

Las razones trigonométricas han sido una herramienta esencial para el desarrollo de la humanidad, desde sus orígenes hasta la actualidad. Su capacidad para relacionar medidas lineales y angulares las ha convertido en una herramienta fundamental en diversas disciplinas.

Ejemplo:

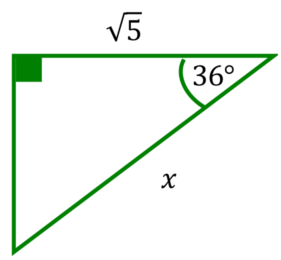
Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A del siguiente triángulo:



$$sen\ \gamma = \frac{13}{22}$$
$$cos\ \gamma = \frac{17}{22}$$
$$tan\ \gamma = \frac{13}{17}$$
$$cosec\ \gamma = \frac{22}{13}$$
$$sec\ \gamma = \frac{22}{17}$$
$$cotan\ \gamma = \frac{17}{13}$$

Ejemplo:

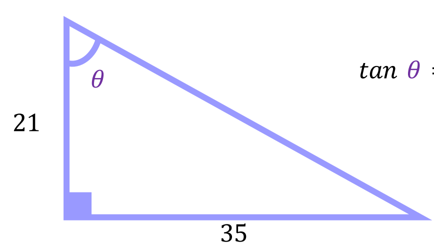
En el siguiente triángulo, encontramos el valor de “x”:
Paso 1: Primero observamos, los datos conocidos en el triángulo.
Paso 2: Identificamos la función que se puede ser utilizada en función de los datos.
Paso 3: Reemplazamos los datos en la función.
Paso 4: Despejamos la incógnita y encontramos el resultado con ayuda de la calculadora.



$$cos\ 36° = \frac{\sqrt{5}}{x} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{cos\ 36°}$$
$$\Longrightarrow x \approx 2.76$$

Ejemplo:

Encontrar el valor del ángulo θ en el triángulo:

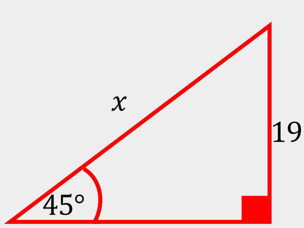


$$tan\ \theta = \frac{CO}{CA} \Longrightarrow tan\ \theta = \frac{35}{21}$$
$$\Longrightarrow tan\ \theta \approx 1.67$$
$$\Longrightarrow \theta = \arctan 1.67 \approx 59.09$$

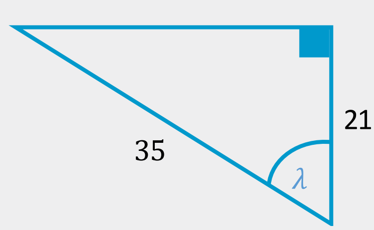
Actividad

Hallamos los datos que faltan en los siguientes triángulos:

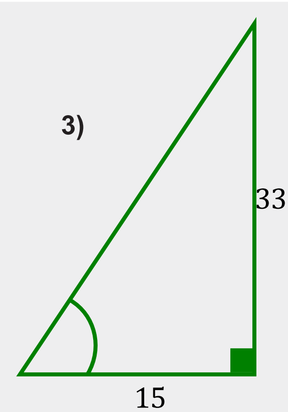
1)



2)

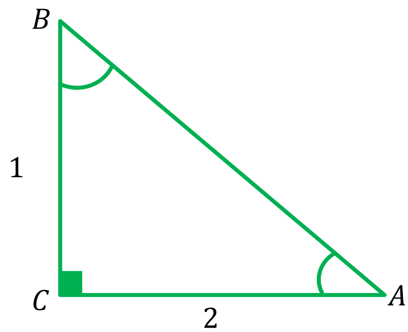


3)



Ejemplos:

Hallar los valores de α y β en el triángulo.



Para el ángulo β:

$$\tan\beta = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\beta = 0.5$$

$$\beta = \arctan 0.5$$

$$\beta = 26°33'54.18''$$

Para el ángulo α:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$\alpha = 180° - 90° - 26°33'54''$$

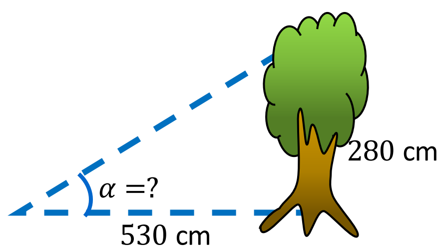
$$\alpha = 63°26'5.82''$$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver problemas, es importante leer detenidamente y comprender qué es lo que se nos pide encontrar. De esta manera, evitaremos enfocarnos en datos innecesarios. También será necesario conocer las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Ejemplo:

Un árbol de 280 cm de altura proyecta una sombra de 530 cm, ¿cuál es el ángulo de elevación del sol?.

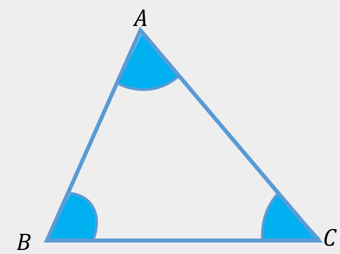


Para el ángulo α:

$$\tan\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{280}{530} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{280}{530}$$

$$\alpha = 27°50'51''$$

Suma de ángulos internos



$$A + B + C = 180°$$

Regla nemotécnica:
SOH*: que significa*
"seno_opuesto_hipotenusa"
CAH: *que significa*
"coseno_adyacente_hipotenusa"
TOA: *significa*
"tangente_opuesto_adyacente"

Esta regla nos permite relaciones rápida y fácilmente los lados del triángulo rectángulo con la función trigonométrica.

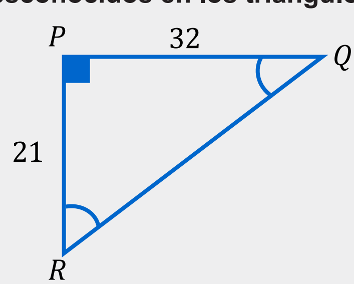
En la práctica

Al explorar la calculadora encontrarás una tecla que marca grados, minutos y segundos como se escriben en los libros

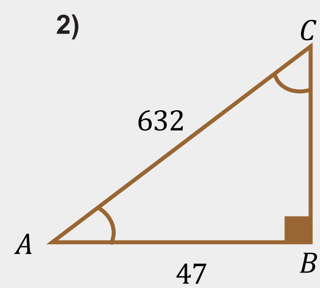
Actividad

En equipos de trabajo, encontramos todos los valores desconocidos en los triángulos:

1)

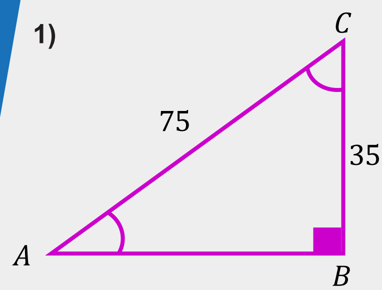


2)

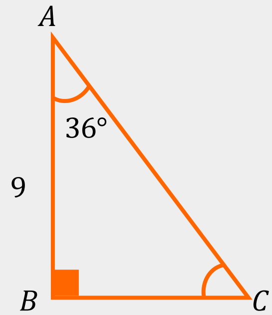


Hallamos el lado que falta del siguiente triángulo:

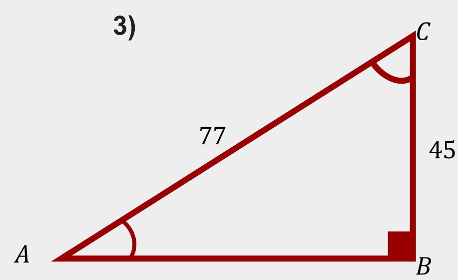
1)

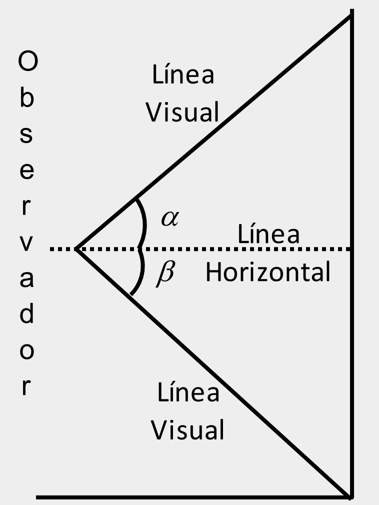


2)



3)





Para resolver situaciones cotidianas que involucren triángulos rectángulos, es importante tener en cuenta los ángulos de elevación y de depresión.

Llamamos ángulo de elevación (α) al que forman la horizontal del observador y el lugar observado cuando este está situado arriba del observador y ángulo de depresión (β) al que se va a medir por debajo de la horizontal.

Recomendaciones

Algunos consejos para resolver ejercicios de aplicación:

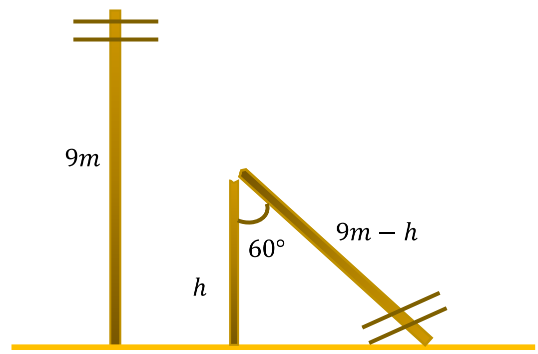
- *Dibuja un diagrama.*
- *Identifica el triángulo. rectángulo.*
- *Elige la función trigonométrica adecuada.*

5. Propiedades adicionales de un triángulo cualquiera

Utiliza las propiedades adicionales para encontrar el dato que falta en los triángulos.

Ejemplo:

Un poste de luz de $9m$ de altura es alcanzado por un rayo partiéndolo a una altura " h " del suelo. La parte superior se desploma quedando unida a la parte inferior formando un ángulo de $60°$ con ella, ¿cuánto mide la parte rota más larga del poste de luz?.



$$cos\ 60° = \frac{CA}{H} = \frac{h}{9-h}$$

$$h = 9 \cdot cos60° - h \cdot cos60°$$

$$h + h \cdot cos60° = 9 \cdot cos60°$$

$$h\left(1+\frac{1}{2}\right) = 9 \cdot \frac{1}{2}$$

$$h = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

La parte rota más larga del poste de luz mide: $9m - h = 9m - 3m = 6\ m$

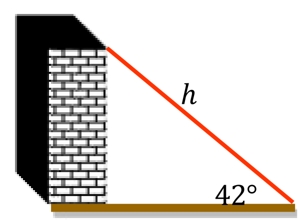
Ejemplo:

Una edificación proyecta sobre el piso una sombra de $5.2\ m$. Si en la esquina superior derecha del edificio se ha colocado un cable con ángulo de $42°$ que tambien une el extremo de la sombra en ese momento del dia con la cornisa, ¿cuál es la altura del edificio?.

La relación trigonométricas es: $cos\ 42° = \frac{CA}{H} = \frac{5,2}{h}$

Despejando h: $h = \frac{5,2}{cos\ 42°}$

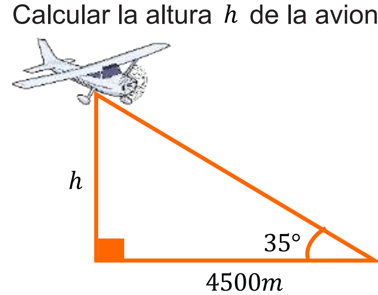
$$h \approx 7m$$



$5.2m$

Ejemplo:

Calcular la altura h de la avioneta:



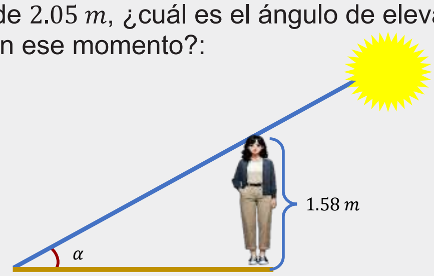
$$tan\ A = \frac{CO}{CA} = \frac{h}{4500}$$

$$tan\ 35° \cdot 4500 = h$$

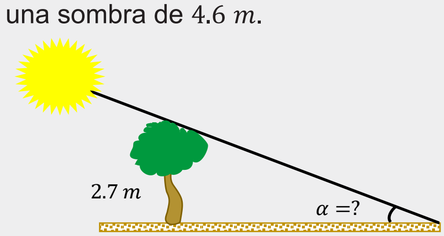
$$h = 3150.9\ m$$

Actividad

1) Una persona que mide $1.58\ m$, proyecta una sombra de $2.05\ m$, ¿cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?:

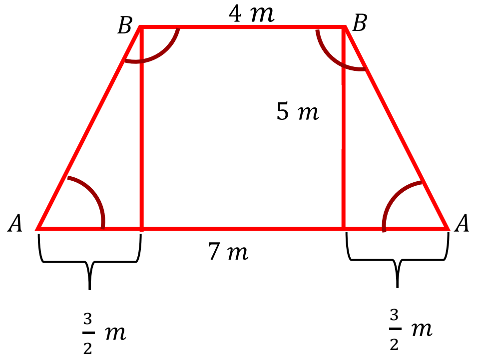


2) Calcula el ángulo de elevación del sol, en cierto momento del día, si un árbol de $2.7\ m$ de altura proyecta una sombra de $4.6\ m$.



Ejemplo:

Las bases de un trapecio isósceles miden 7 y 4 metros, su altura mide 5 metros. Halla los ángulos del trapecio.



$$tan\ A = \frac{CO}{CA} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$tan\ A = \frac{10}{3}$$

$$A = arctan\ 3.3$$

$$A = 73°\ 8'\ 29.76''$$

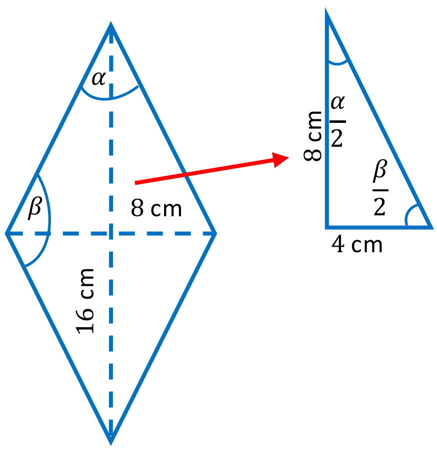
Se conoce que $2A + 2B = 360°$

$$\Rightarrow B = \frac{360° - 2A}{2} = \frac{360° - 2(73°8'29.76'')}{2}$$

$$B = 106°51'\ 30.24''$$

Ejemplo:

Determina los ángulos de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 8 *cm* y 16 *cm.*



$$tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{\alpha}{2} = arctan\ 0.5 = 26°33'54.18''$$

$$\Rightarrow \alpha = 53°7'48.37''$$

$$tan\ \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 63°26'6''$$

$$\beta = 126°52'12''$$

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas y realizamos la actividad:

- ¿Por qué es tan importante la trigonometría?
- ¿De qué manera influye la trigonometría en el avance de la ciencia?
- Mencionamos un ejemplo especifico de la trigonometría que se observa en tu barrio, comunidad y ciudad.

VALORACIÓN

La trigonometría, esa rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, está más presente en nuestra vida cotidiana de lo que imaginamos. Aunque parezca un tema abstracto y lejano, sus aplicaciones son fundamentales en numerosos campos y actividades. Aquí algunos ejemplos:

- Construcción civil, los albañiles y carpinteros utilizan la trigonometría para calcular ángulos y pendientes.
- Navegación satelital, cada vez que consultamos un mapa en nuestro teléfono, estamos utilizando la trigonometría.
- Al escuchar música, la generación y reproducción de sonido se basa en principios trigonométricos.
- Al ver una película en 3D, los efectos visuales en 3D se crean utilizando cálculos trigonométricos.

La trigonometría es una herramienta fundamental que nos permite comprender y modelar el mundo que nos rodea. Desde la construcción de edificios hasta la exploración del espacio, la trigonometría juega un papel crucial en numerosos aspectos de nuestra vida cotidiana.

PRODUCCIÓN

Taller, construcción de un teodolito casero

Este proyecto de clase es una actividad práctica que involucra la construcción de un teodolito casero utilizando las razones trigonométricas, a través de esta actividad, los estudiantes aprenderán sobre las razones trigonométricas básicas, como el seno, coseno y tangente y cómo se aplican en la construcción de un teodolito casero, además, los estudiantes trabajarán en equipo, fomentando la colaboración y el aprendizaje autónomo.

Fuente: Open AI, 2024

LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

PRÁCTICA

Los cuerpos geométricos son figuras tridimensionales que nos rodean. Desde una simple caja hasta un balón de fútbol, todos estos objetos tienen formas geométricas definidas. Los cuerpos geométricos tienen aplicaciones en diversas áreas, como el diseño de edificios, puentes, maquinaria, vehículos, muebles, envases, juguetes y mucho más.

Fomentando la creatividad y el cuidado del medio ambiente, en el área de matemáticas se propone crear o construir objetos utilizando cuerpos geométricos conocidos, empleando materiales reciclados como cajas de cartón, botellas de plástico o palos de helado.

Fuente: Open AI, 2024

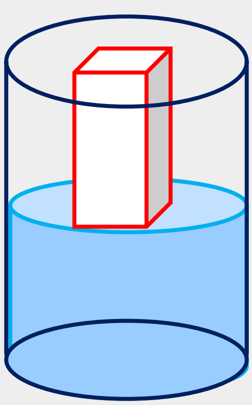
Actividad

- ¿Qué materiales utilizarías para construir estructuras con cuerpos geométricos?
- ¿Qué te gustaría saber sobre los cuerpos geométricos?
- ¿Conoces alguna aplicación de la realidad virtual?
- ¿Sabes cómo se crean los efectos especiales en las películas?

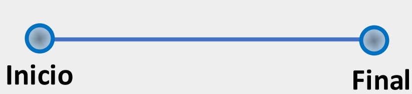
TEORÍA

3D

Un objeto es tridimensional (3D) si tiene tres dimensiones, es decir cada uno de sus puntos puede ser localizado especificando tres datos: ancho, alto y profundidad.



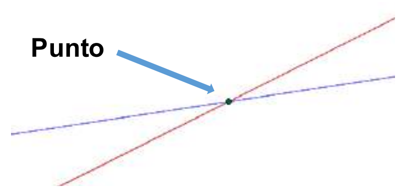
Segmento



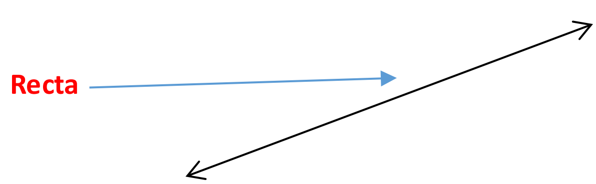
1. El espacio tridimensional: punto, recta, segmento y plano

En geometría podemos ver diferentes tipos de figuras geométricas, para ello debemos conocer los elementos básicos que las constituyen. Estos carecen de una definición formal, mas ellos pueden ser representados gráficamente.

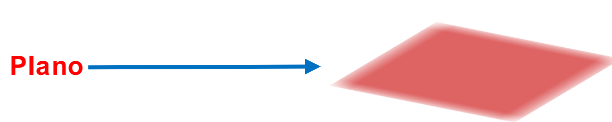
Punto



Recta (Constituida por puntos)

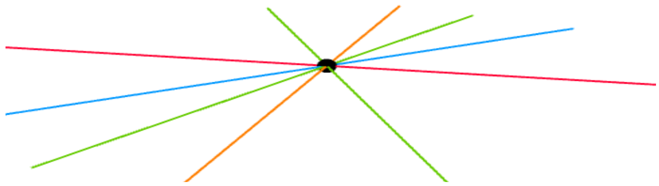


Plano (Constituido por puntos y rectas)

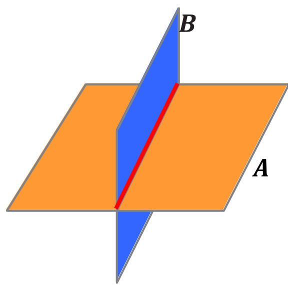


Postulados sobre rectas, planos y puntos

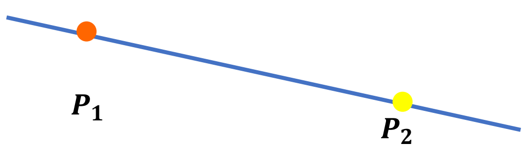
a) Existen infinitas rectas que pueden pasar por un punto.



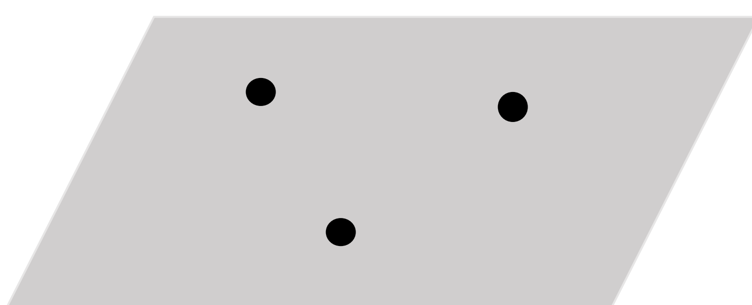
b) Por una recta pueden pasar infinitos planos.



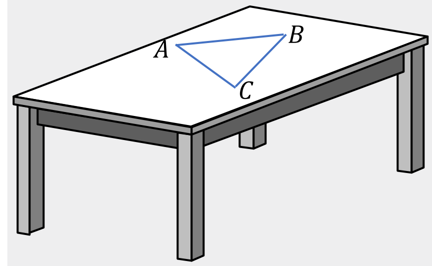
c) Dos puntos distintos determinan una recta.



e) Tres o más puntos distintos determinan un plano.



Tres puntos no alineados determinan un único plano.



Perímetro

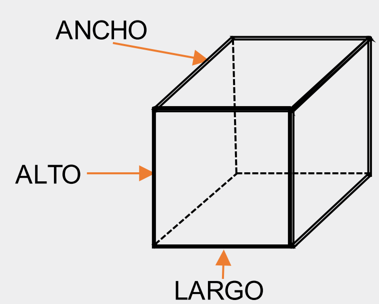
Es la suma de todos los lados de una figura geométrica.

Área

Es toda región que está conformada por una figura geométrica.

Cuerpos geométricos

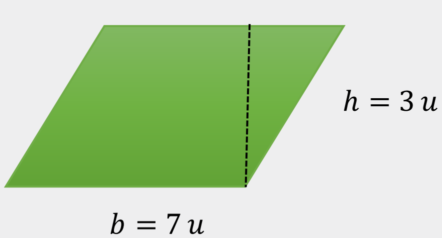
Los cuerpos geométricos son aquellos que ocupan un lugar en el espacio y son tridimensionales, es decir, tienen sus tres dimensiones: alto, ancho y largo.



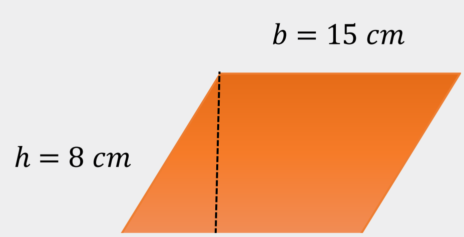
Actividad

Encontramos el área de un paralelogramo con las siguientes medidas:

1)

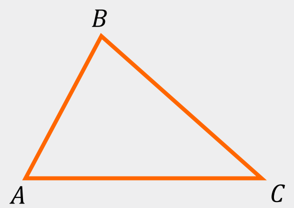


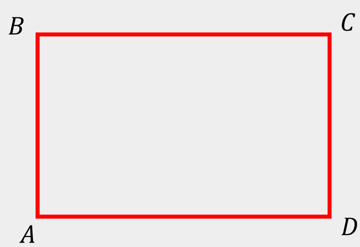
2)

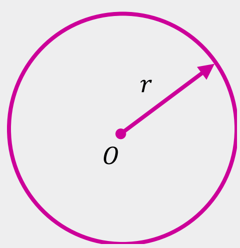


Tipos de geometría

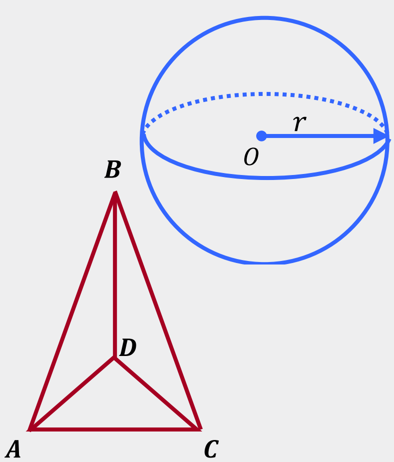
Geometría plana. Estudia las figuras planas, por ejemplo:



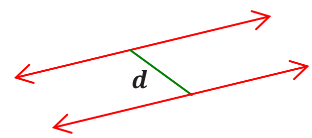




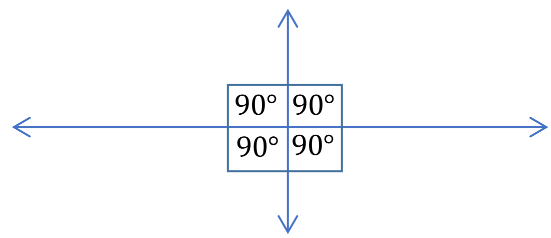
Geometría del espacio: Estudia a los sólidos geométricos (pirámides, esferas, etc).



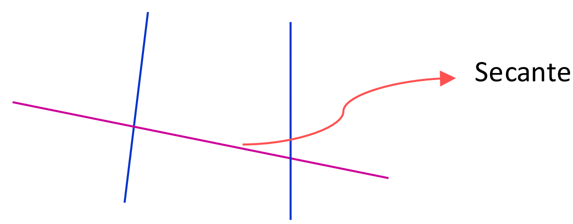
Rectas paralelas: Son aquellas rectas que mantienen una distancia entre sí y no llegan a cortarse nunca.



Rectas perpendiculares entre sí: Son rectas que forman un ángulo de 90° al cortarse.



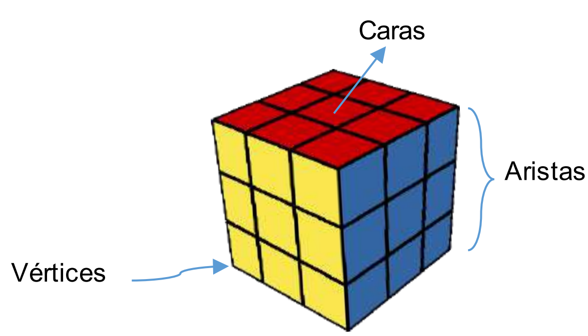
Recta secante: Es aquella recta que corta a otras dos o más rectas.



2. Clasificación de los cuerpos geométricos

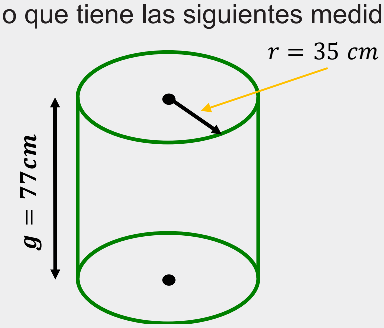
Estos se clasifican en poliedros y cuerpos redondos.
Poliedros: Tenemos al cubo, prisma y pirámide.

a) Cubo: Es un cuerpo geométrico de 8 caras cuadradas planas, todas del mismo tamaño. Por ejemplo, el cubo de Rubik.

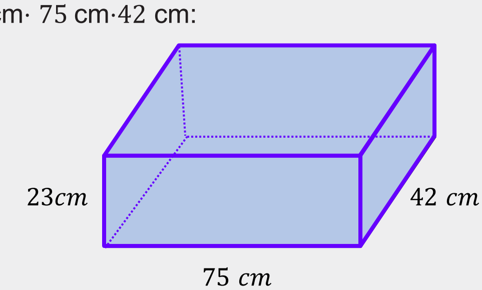


Actividad

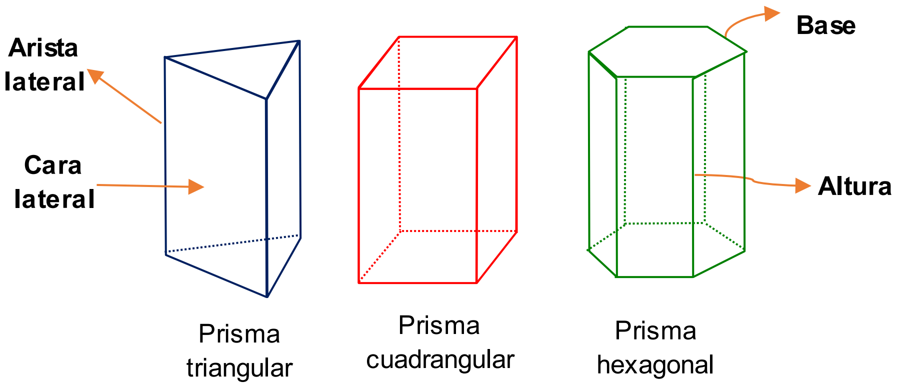
1) Encontramos el volumen de un cilindro, sabiendo que tiene las siguientes medidas:



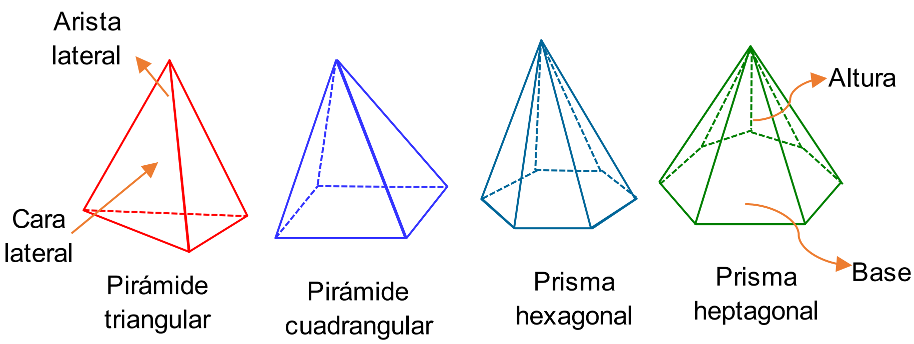
2) Hallamos el volumen y área de una caja de 23 cm· 75 cm·42 cm:



b) Prisma: Tiene dos caras iguales y paralelas que son las bases, las otras caras son paralelogramos. Existen prismas con bases que puede ser triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos, etc.



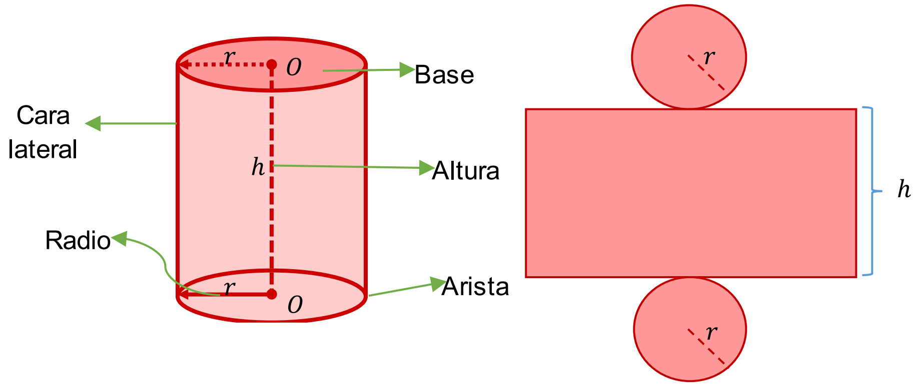
c) Pirámide: Son cuerpos que pueden tener de base cualquier polígono, sus caras laterales se unen en un punto en común llamado vértice.



Cuerpos redondos

Tenemos a los cilindros, conos y esferas.

a) Cilindro: Tienen 2 bases circulares y superficie lateral un rectángulo:



b) Conos: Tienen una base circular y se forma cuando uno de los catetos de un triángulo rectángulo gira sobre su propio eje.

Dato


Fuente: Open AI, 2024

Algunas civilizaciones que destacaron en el estudio de la geometría:
Antiguo Egipto: *Los egipcios utilizaron conocimientos geométricos para construir pirámides y otros monumentos impresionantes.*
Babilonios: *Desarrollaron sistemas de medición y cálculos geométricos para la agricultura y la astronomía.*
Griegos: *Los griegos, especialmente Euclides, sistematizaron el estudio de la geometría en su obra "Los Elementos", estableciendo los fundamentos de la geometría euclidiana que aún se estudia hoy en día.*
Aunque no se puede atribuir el descubrimiento de todos los cuerpos geométricos a una sola persona, los ***sólidos platónicos*** *(tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) se asocian con la* ***escuela pitagórica****. Los pitagóricos creían que estos sólidos representaban los elementos fundamentales del universo.*

Actividad

Dibujamos la figura según lo pedido en el siguiente cuadro:

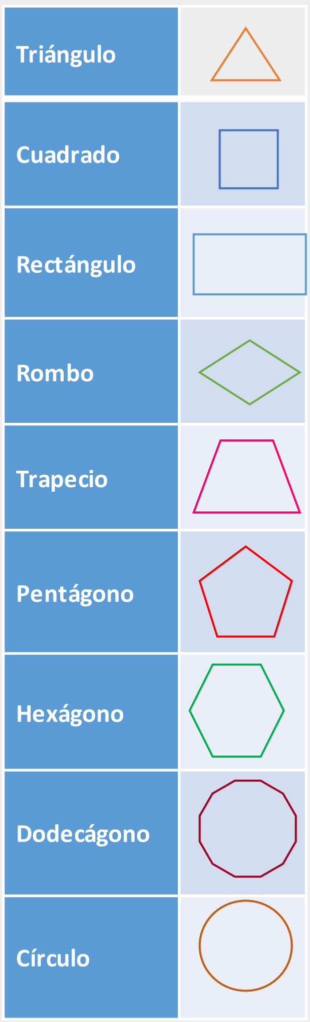
Cuadriláteros	Figura
Cuadrado	
Rectángulo	
Rombo	
Romboide	
Trapecio	

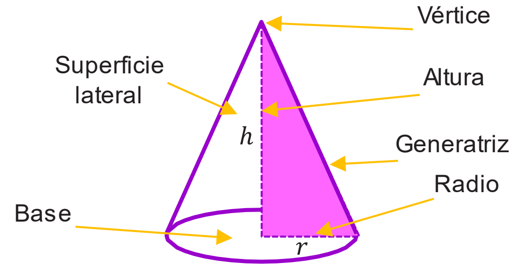
Cuadriláteros	Figura
Triángulo	
Cuadrilátero	
Pentágono	
Hexágono	
Octágono	

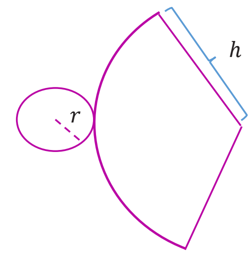
Figuras geométricas

Son aquellas que tienen dos dimensiones y delimitan alguna superficie plana.

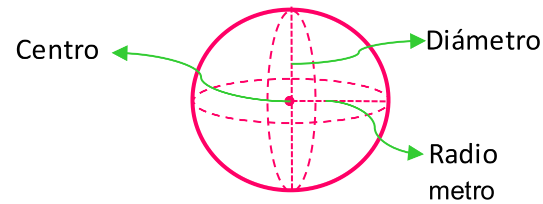
Ejemplos:







c) Esfera: Es un cuerpo geométrico que no tiene caras, ya que se forma con un conjunto de puntos que mantienen la misma distancia a un punto fijo llamado centro.



3. Características de los cuerpos geométricos

Tienen tres dimensiones: Alto, largo, ancho y ocupan un lugar en el espacio. Estos a su vez cuentan con lados, aristas, altura, bases y vértices.

a) Cubo

- 6 caras
- 8 vértices
- 12 aristas
- Lados iguales y paralelos entre si

b) Prisma, las características de los prismas varían de según su forma, por ejemplo.

Un prisma rectangular tiene:

- 6 caras rectangulares
- 8 vértices
- 12 aristas caras paralelas e iguales de dos en dos

Un prisma pentagonal tiene:

- 7 caras, 5 caras rectangulares y 2 caras pentagonales
- 10 vértices
- 15 aristas

c) Pirámide, al igual que los prismas, varían de acuerdo a la figura geométrica plana que ocupa su base, por ejemplo.

Pirámide de base triangular:

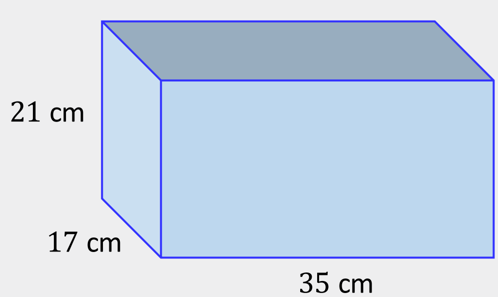
- Cuatro lados que son triángulos equiláteros
- 6 aristas
- 4 vértices

Pirámide de base cuadrada:

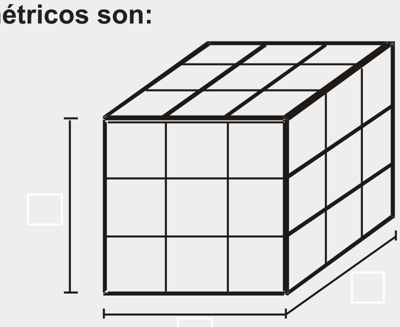
- 1 base cuadrada y 4 caras triangulares
- 5 vértices
- 8 aristas

Actividad

1) Encontramos el perímetro de la siguiente figura, si sus medidas son:



2) Los valores del siguiente cuerpo geométricos son:



d) Cilindro, cualquier cilindro presenta en su forma:
- 2 caras circulares y 1 cara rectangular.
- No tiene vértices.
- 2 aristas curvas.

e) Cono, cualquier cono presenta en su forma:
- 1 base circular.
- 1 vértice.
- 1 radio en la base.
- 1 superficie lateral (cara curva).
- 1 generatriz (la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman la altura y el radio).

f) Esfera
- No tiene aristas y no tiene vértices.
- Tiene una superficie totalmente curva.
- No tiene base.

4. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Área y volumen de un cubo

Para hallar el área de un cubo de arista "a", se necesita conocer el área de cualquiera de sus caras cuadradas y luego multiplicarla por 6.
Para hallar el volumen se calcula la tercera potencia de la arista "a":

Área	$A=6 \cdot a^2$
Volumen	$V=a^3$

Área y volumen de un prisma

El área de un prisma resulta de sumar el área de sus dos bases más el área de sus caras laterales, sean estas la figura que sea, mientras que el volumen es el producto del área de la base por la altura "h".

Área	$A = 2 \cdot A_{base} + \sum A_c$ A_c: Área de las caras laterales A_{base}: Área de la base
Volumen	$V = A_{base} \cdot h$; A_{base}: Área de la base

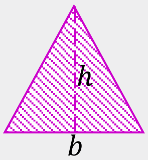
Área y volumen de una pirámide

El área de una pirámide es igual a área de su base más el área de todas sus caras, mientras que el volumen de una pirámide es el área de la base por la altura sobre 3.

Área	$A = A_b + \sum A_T$ A_T: Área de las caras triangulares
Volumen	$\frac{A_{base} \cdot h}{3}$ A_{base}: Área de la base

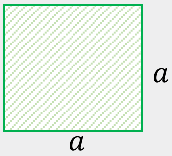
Áreas

Triángulo



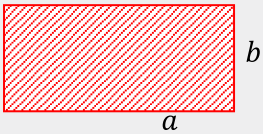
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Cuadrado



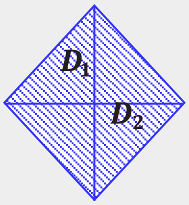
$$A = a^2 = a \cdot a$$

Rectángulo



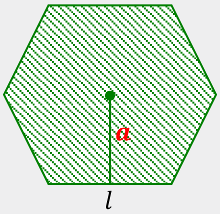
$$A = a \cdot b$$

Rombo



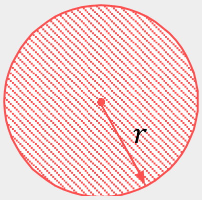
$$A = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$$

Polígono regular



$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

Circunferencia



$$A = \pi r^2$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas en el aula:

1) Una moneda de Bs 1 se puede considerar como un cilindro de radio 11 mm y altura 2 mm. Si se amontonan 100 monedas encima uno del otro, calcula las dimensiones del volumen resultante.
2) ¿Cuál es el número de caras, de aristas y de vértices de un tetraedro?
3) Se tiene una figura con 15 caras, 9 vértices y 21 aristas, ¿se trata de un poliedro?.
4) Para una construcción se necesita 7.82 m^3 de arena, ¿cuáles deben ser las medidas de la carrosa del camión que transportará la arena a su destino?.
5) Si el área de las caras laterales de un cubo es de 52 m^2, calcular el perímetro y el volumen de dicho cubo.

Dato histórico

*El matemático **Leonhard Euler** encontró que los elementos de un poliedro (caras, vértices y aristas) verifican la siguiente relación:*

$$N^{o}\ de\ caras + N^{o}\ de\ vértices = N^{o}\ de\ aristas + 2$$

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

*El número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos. Esta relación se conoce como la **fórmula de Euler**.*

Familias de poliedros convexos

***Sólidos platónicos,** son los únicos poliedros regulares convexos y solo existen 5 de ellos.*

***Sólidos arquimedianos**, sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos y tienen sus vértices uniformes. La mayoría se ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos. Existen 13 sólidos arquimedianos.*

***Sólidos de Catalán,** sus caras son polígonos irregulares iguales. Son poliedros duales de los arquimedianos. Existen 13 sólidos de Catalan.*

***Sólidos de Johnson,** sus caras son polígonos regulares. No hace falta que todas sus caras sean iguales o que sus aristas o vértices sean uniformes. Existen 92 sólidos de Johnson.*

***Prismas,** tienen dos caras iguales y paralelas llamadas bases y caras laterales que son paralelogramos. Tienen sus vértices uniformes. Existen infinitos prismas.*

***Antiprismas,** tienen dos bases, pero estas están giradas y las caras laterales son triángulos. Tienen sus vértices uniformes. Existen infinitos antiprismas.*

Área y volumen de un cilindro

El área del cilindro es la suma del área de sus 2 bases circulares más el área de su cara lateral, mientras que el volumen será igual a la altura por el área de la base.

Área	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Volumen	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Área y volumen de un cono

Para encontrar el área de un cono se suma el área de su base más el área de su cara lateral.
El volumen es el área de su base por la altura sobre 3.

Área	$A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \alpha$
Volumen	$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3}$

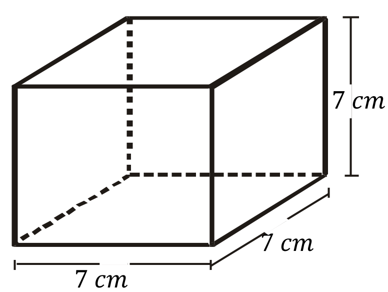
Área y volumen de una esfera

El área y el volumen de una esfera son

Área	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
Volumen	$V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

Ejemplo:

Hallamos el área y volumen del cubo que tiene 7 cm de arista.



$A = L^2 \cdot 6$

$A = 7^2\, cm^2 \cdot 6$

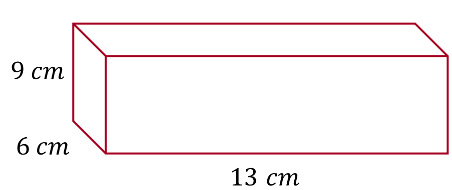
$A = 294\ cm^2$

$V = a^3$

$V = (7cm)^3 = 343\ cm^3$

Ejemplo:

Hallamos el área y volumen del la figura:



$A_{base} = 2 \cdot 6cm \cdot 9cm = 54cm^2$

$A_{c_1} = 6cm \cdot 13cm = 78\ cm^2$

$A_{c_2} = 9cm \cdot 13cm = 117cm^2$

$A_t = 2 \cdot (54cm^2 + 78\ cm^2 + 117\ cm^2)$

$= 108\ cm^2 + 156cm^2 + 234\ cm^2$

$A_{total} = 498\ cm^2$

Así el área de la figura es: $498\ cm^2$

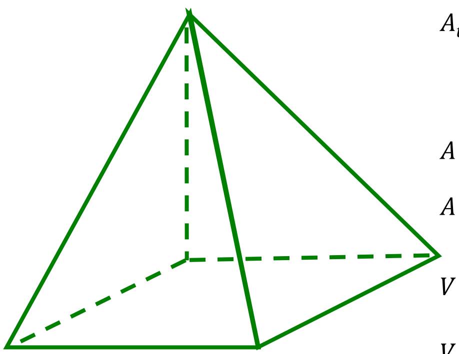
Ahora hallamos el volumen:

$$V = A_{base} \cdot h = 54\ cm^2 \cdot 13cm = 702\ cm^3$$

Así el volumen del prisma es: $702\ cm^3$

Ejemplo:

Halla el área total de la pirámide regular cuya base es un cuadrado de 14 cm de lado la altura es de h=9 cm y la altura de las caras laterales es 12 cm.



$$A_{total} = A_b + \left(A_{c_1} + A_{c_2} + A_{c_3} + A_{c_4}\right)$$

$$A_{total} = (14\ cm)^2 + 4 \cdot \left(\frac{14\ cm \cdot 12\ cm}{2}\right)$$

$$= 196\ cm^2 + 2 \cdot (14\ cm \cdot 12\ cm)$$

$$A = 196\ cm^2 + 336\ cm^2$$

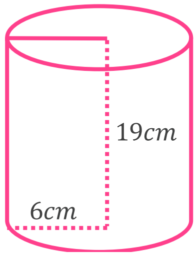
$$A = 532\ cm^2$$

$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{196\ cm^2 \cdot 9\ cm}{3}$$

$$V = 588\ cm^3$$

Ejemplo:

Un florero con forma cilíndrica tiene un radio interior de $6\ cm$ y su altura es de $19\ cm$. Queremos llenarlo hasta los $\frac{2}{3}$ de su capacidad, ¿cuántos litros de agua necesitamos?.



Calculando el volumen del cilindro:

$V=\pi \cdot r^2 \cdot h=\pi \cdot (6\ cm)^2 \cdot 19\ cm$

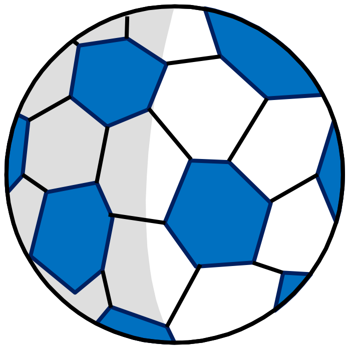
$V=2148.85 cm^3$

Transformando cm^3 a L :

$2148.85\ cm^3=2.15$ L

Luego se necesitan $\frac{2}{3} \cdot 2.15$ L$=1.4$ L, es decir se necesita casi un litro y medio de agua para llenar el recipiente en dos terceras partes de su capacidad.

Ejemplo Javier compro un balón de futsal y un balón de futbol y desea saber el volumen y área de los balones, si sus diámetros son de 20 cm y 22 cm respectivamente.



Área y volumen del balón de futsal:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot (10\ cm)^2$$

$$A = 1256.64\ cm^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10\ cm)^3}{3}$$

$$V = 4188.79\ cm^3$$

Área y volumen del balón de futbol:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot (11\ cm)^2$$

$$A = 1520.53\ cm^2$$

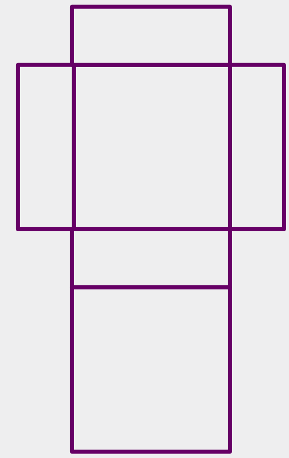
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

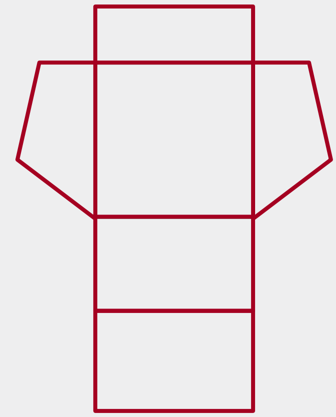
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (11\ cm)^3}{3}$$

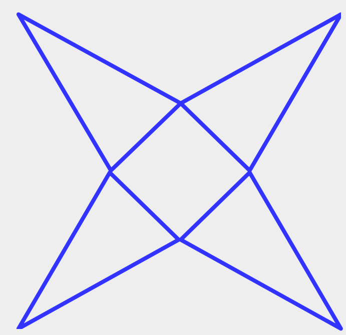
$$V = 5575.28\ cm^3$$

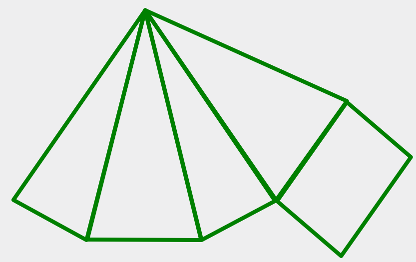
Actividad

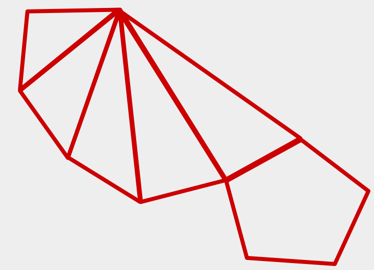
Construye el cuerpo geométrico con las siguientes figuras:











Datos

El número pi (π) es una constante matemática fascinante, llena de curiosidades:

Historia y origen

Antiguos cálculos, *las primeras aproximaciones de π se remontan a las civilizaciones egipcia y babilónica, quienes lo utilizaban para construir pirámides y templos.*

El símbolo π, *aunque el concepto de π es antiguo, el símbolo que lo representa fue introducido por el matemático galés William Jones en 1706 y popularizado por Leonhard Euler.*

Una obsesión, *el matemático holandés-alemán Ludolph Van Ceulen dedicó gran parte de su vida a calcular los primeros 36 dígitos de π, los cuales fueron grabados en su lápida.*

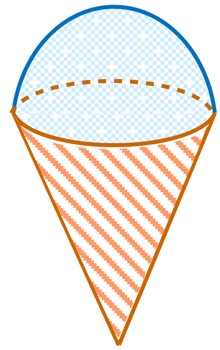
Aproximaciones históricas, a lo largo de la historia se han utilizado diversas aproximaciones de pi, como $\frac{22}{7}$ o el valor bíblico de 3.

Récords de cálculo, *gracias a las computadoras, se han calculado billones de decimales de π, pero el número exacto sigue siendo desconocido.*

π en la cultura popular, *ha inspirado obras de arte, música y literatura, convirtiéndose en un símbolo de la complejidad y belleza de las matemáticas.*

Ejemplo:

Encontrar el volumen del siguiente cono de helado de 6 cm de diámetro, sabiendo que el cono tiene una altura de 10 cm.



$$\frac{1}{2}V_{esfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot (3\ cm)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (36\ cm^3) = 56.55\ cm^3$$

$$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3\ cm)^2 = 28.27\ cm^2$$

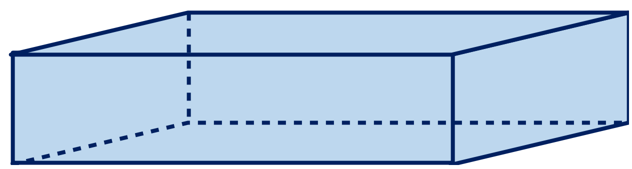
$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{28{,}27\ cm^2 \cdot 10\ cm}{3}$$

$$V = 94.23\ cm^3$$

Ejercicios propuestos

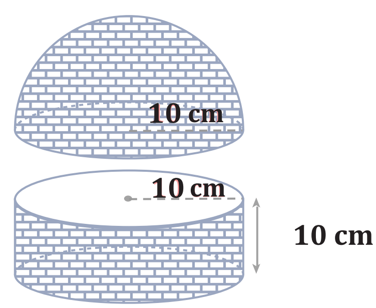
Ejercicio:

Una piscina tiene forma de prisma rectangular de dimensiones $3360\ m^3$, ¿cuántos litros de agua son necesarios para llenar los $\frac{4}{5}$ de su volumen?



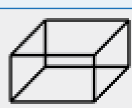
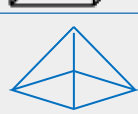
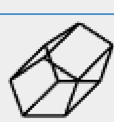
Ejercicio:

Carlos quiere hacer sombreros de cumpleaños, en forma de iglú. Si el diámetro de su cabeza es de $20\ cm$, ¿qué medida tendrá que tener el área del sombrero, si de altura tendrá $12\ cm$?



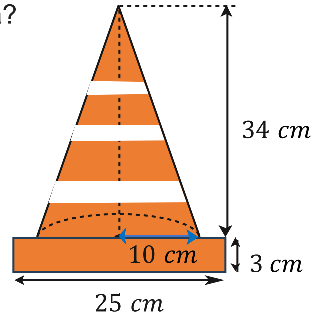
Actividad

Completamos la siguiente tabla:

Cuerpo	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
			
			
			

Ejercicio:

¿Cuál es el área y volumen de un cono de tránsito sabiendo que sus medidas son las de la siguiente figura?

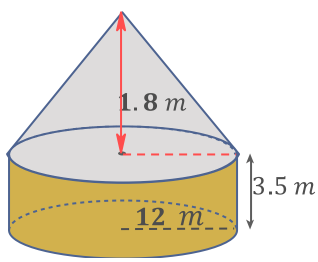


Ejercicio:

Si el radio de la tierra es de 6370 km, calcular el volumen de nuestro planeta utilizando las aproximaciones del número π.

Ejercicio:

Calcular el área y volumen de la vivienda circular teniendo en cuenta las medidas.



Ejemplos en la vida real

Prismas: *Cajas, libros, bloques, edificios.*
Pirámides: *Techo de una casa, pirámides de Egipto.*
Cilindros: *Latas, tubos, rollos de papel.*
Conos: *Hielo, conos de tráfico, sombreros de fiesta.*
Esferas: *Balones, naranjas, globos terráqueos.*

Fuente: Open AI, 2024

Fuente: Open AI, 2024

VALORACIÓN

Los cuerpos geométricos son la base de todo lo que nos rodea. Desde los objetos más simples hasta las estructuras más complejas, las formas geométricas están presentes en cada aspecto de nuestra vida.

El estudio de los cuerpos geométricos es fundamental para nuestra comprensión del mundo y para el desarrollo de diversas habilidades. Al comprender las formas tridimensionales que nos rodean, podemos:

- Desarrollar el pensamiento espacial: La geometría nos ayuda a visualizar y representar objetos en tres dimensiones, lo que es esencial para resolver problemas y tomar decisiones en la vida cotidiana.
- Facilitar la comprensión de conceptos científicos: Muchos conceptos en física, química y biología se basan en la geometría. Por ejemplo, la estructura de los cristales, las órbitas de los planetas y la forma de las moléculas están relacionadas con formas geométricas.

El estudio de los cuerpos geométricos nos proporciona una herramienta poderosa para comprender el mundo que nos rodea y para resolver problemas de manera creativa y eficiente. Al desarrollar nuestras habilidades geométricas, estamos mejor preparados para enfrentar los desafíos del día a día.
¿En qué áreas se aplican los conocimientos de los cuerpos geométricos?

PRODUCCIÓN

Taller construcción:
Construir modelos de cuerpos geométricos utilizando diferentes materiales y técnicas como:
- Cartulina: Para crear caras planas y armar los cuerpos geométricos.
- Plastilina: Para modelar cuerpos redondos.
- Palillos y pompones: Para representar aristas y vértices.
- Figuras 3D con origami: El origami es una técnica japonesa de plegado de papel que permite crear una gran variedad de figuras geométricas.

Fuente: Open AI, 2024

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

TÍTULO TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Triángulos y su clasificación:

Lee atentamente y responde según corresponda, justificando su respuesta:

1) Un triángulo es obtusángulo, cuando:
- a) Tiene dos ángulos interiores que miden 90°
- b) Tiene al menos un ángulo obtuso
- c) Tiene todos sus lados iguales

2) ¿Qué tipo de ángulo mide menos de 90°?
- a) Ángulo recto
- b) Ángulo agudo
- c) Ángulo obtuso

3) Los triángulos escalenos, se caracterizan por:
- a) Tener todos sus lados de diferente medida.
- b) Tener dos lados de igual medida.
- c) Tener todos sus lados iguales.

4) ¿Qué nombre recibe el triángulo que tiene todos sus lados iguales?
- a) Escaleno
- b) Isósceles
- c) Equilátero

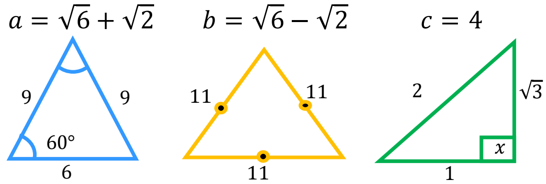
5) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?
- a) 120°
- b) 180°
- c) 360°

Perímetro

Calculamos el perímetro de los siguientes triángulos:

1) $a = 12$	$b = 23$	$c = 36$
2) $a = 3$	$b = 4$	$c = 5$
3) $a = 77$	$b = 98$	$c = 112$
4) $a = 8$	$b = 10$	$c = 15$
5) $a = 17$	$b = 17$	$c = 13$
6) $a = 23$	$b = 23$	$c = 23$
7) $a = 15$	$b = 16$	$c = 19$
8) $a = 3$	$b = 3$	$c = 3\sqrt{2}$
9) $a = 6$	$b = 2$	$c = 2\sqrt{10}$
10) $a = \sqrt{6}+\sqrt{2}$	$b = \sqrt{6}-\sqrt{2}$	$c = 4$

11)



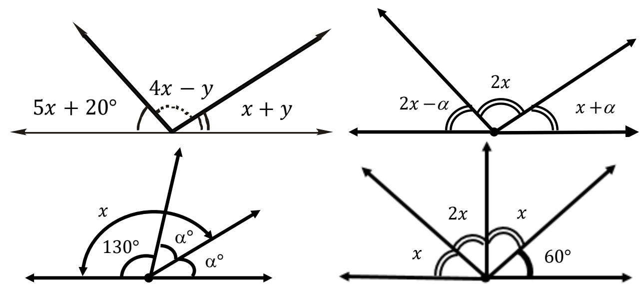
Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

Encontrar el valor de cada ángulo para cada uno de los siguientes casos:

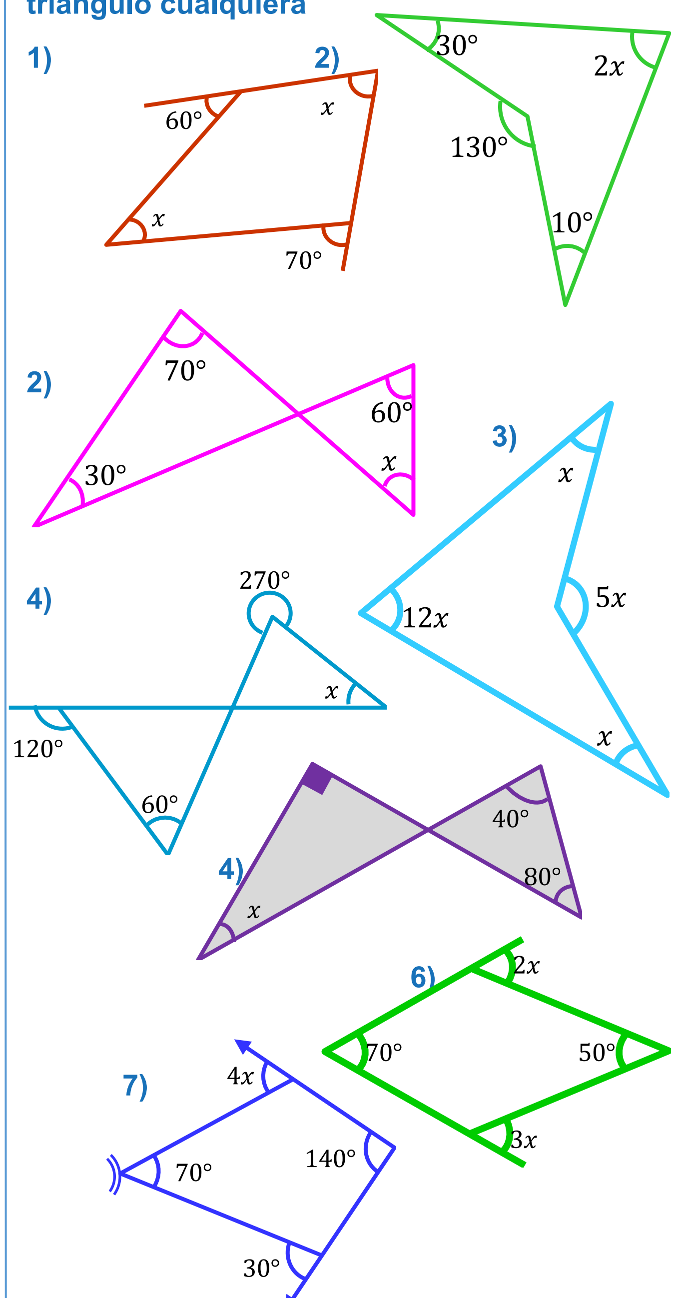
1) $A=70°$	$B=20°$	$C=x$
2) $A=60°$	$B=x$	$C=60$
3) $A=52°-x$	$B=3x$	$C=48°$
4) $A=2x$	$B=78°+2x$	$C=35°$
5) $A=30$	$B=x$	$C=55$

Ángulos suplementarios

Calculamos el valor de los ángulos complementarios si la suma de estos es igual a 180°.



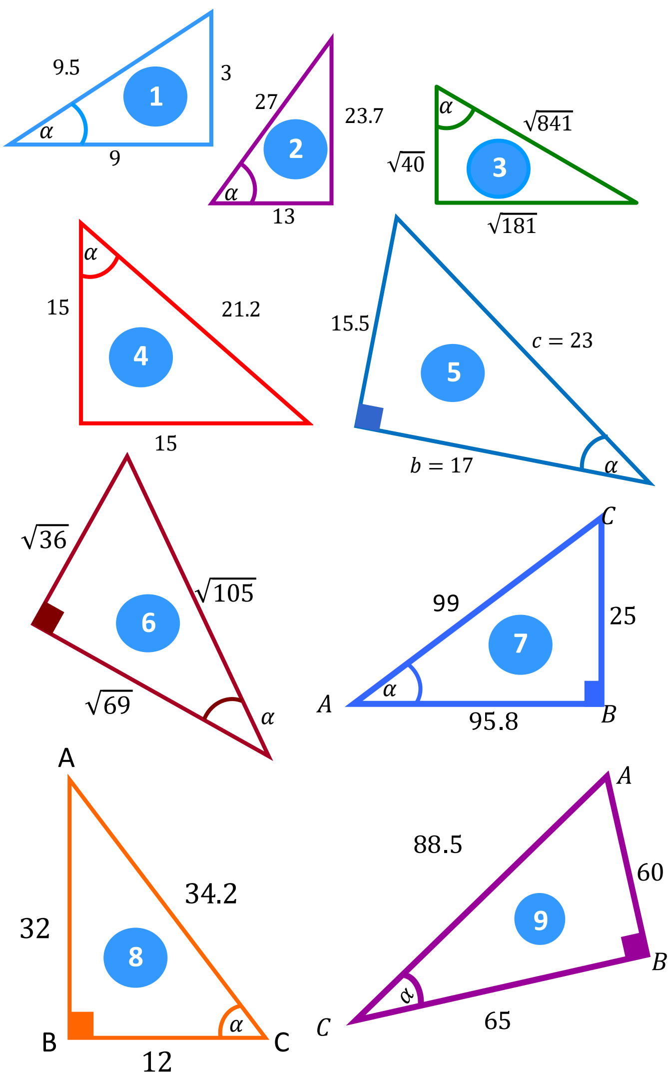
Propiedades de ángulos externos para un triángulo cualquiera



TÍTULO TEMA 2: INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

Triángulos rectángulos

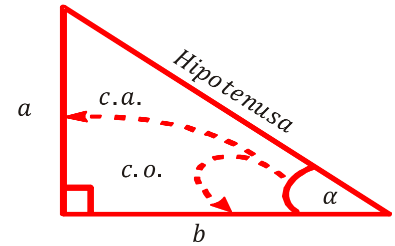
Dados los siguientes triángulos identifica la hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto:



Triangulo	Hipotenusa	Cateto opuesto	Cateto adyacente
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Teorema de Pitágoras

Completamos la siguiente tabla, tomando en cuenta el triángulo:



N°	Hipotenusa	Cateto opuesto	Cateto adyacente
1	85		84
2		5	12
3	10	6	
4		2	3
5	25		24
6	15	9	

Razones trigonométricas

De la anterior tabla encontrar los datos que nos piden a continuación:

N°	Sen α	Cos α	Tan α
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Resolvemos los siguientes problemas de triángulos rectángulos.

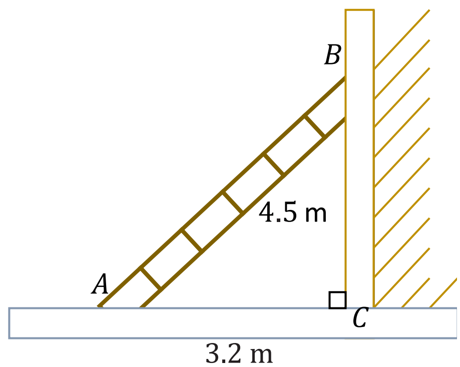
1) Un hombre de $1.68\ m$ de estatura observa su sombra, cuando el sol esta elevado en $36°$. Calcular la longitud de la sombra.

2) ¿Cuál es la altura de una torre de $65\ m$ de sombra cuando el sol esta elevado en $48°30'$?

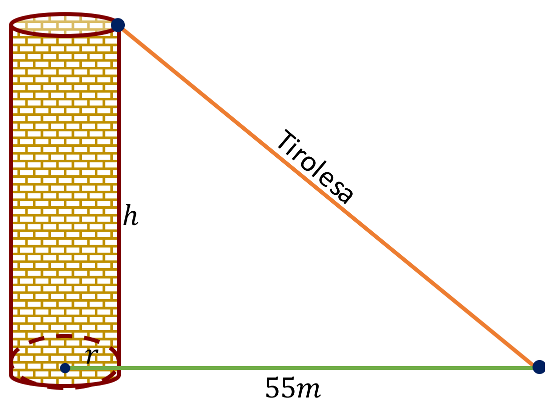
3) Un árbol se ha roto formando con el piso un triángulo rectángulo. La copa del árbol hace con el piso un ángulo de $38°$ y la distancia de la punta hasta la raíz del tronco es de 600 pulgadas. Calcular la longitud del árbol.

4) Una roca en la orilla de un río está a $44\ yardas$ sobre el nivel del agua. Desde un punto opuesto a la roca, al otro lado del río se mide un ángulo de elevación de la cima de la roca: $48°26'$. Calcular el ancho del río.

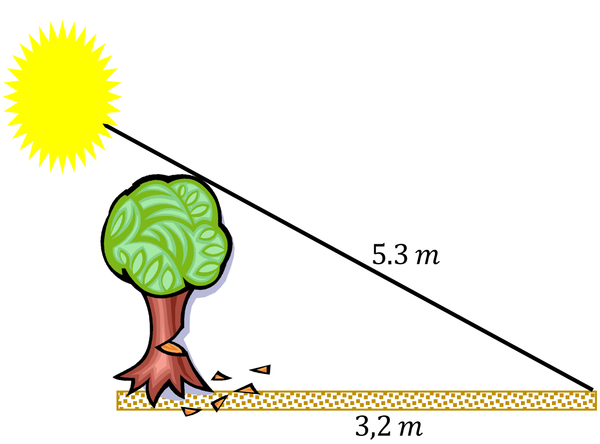
5) En una construcción se necesita poner una escalera de madera apoyada en el punto A y el punto B. ¿Qué longitud mínima y que ángulo de inclinación debe tener si la altura es de $4.5\ m$ y la distancia del punto A a C es $3.2\ m$?



6) Un parque de diversiones quiere construir una nueva atracción que consiste en una tirolesa que parte desde la base superior de una columna con forma cilíndrica. Si el radio de la columna es $r = 1.5\ m$ y el área de su lateral es de $140\ m^2$, calcular la longitud del cable de la tirolesa para que alcance el suelo a $55\ m$ de distancia de la columna.



7) Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de $3.5\ m$ de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?.



TÍTULO TEMA 5: LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

Punto, recta y plano

Dibuje 3 objetos que ilustren lo siguiente:

	Objetos
Punto	
Recta	
Segmento	
Plano	
Rectas paralelas	
Rectas perpendiculares entre sí	
Recta secante	

Clasificación de cuerpos geométricos

Dibujamos el cuerpo geométrico que puede ser visto en el diario vivir según lo pedido en el siguiente cuadro.

Cuerpos geométricos	Objeto del diario vivir
Cubo	
Prisma triangular	
Prisma cuadrangular	
Prisma hexagonal	
Pirámide triangular	
Prisma hexagonal	
Prisma heptagonal	
Cilindro	
Cono	
Esfera	

Características de los cuerpos geométricos

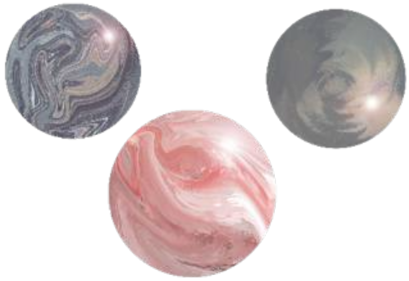
Completamos el siguiente cuadro:

Figura	Caras	Vértice	Arista
Cubo			
Prisma rectangular			
Prisma pentagonal			
Pirámide de base triangular			
Pirámide de base cuadrada			
Cilindro			
Cono			

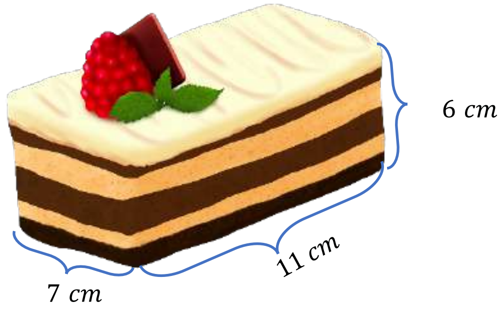
Áreas, perímetro y volumen de cuerpos geométricos

Resuelve los siguientes problemas:

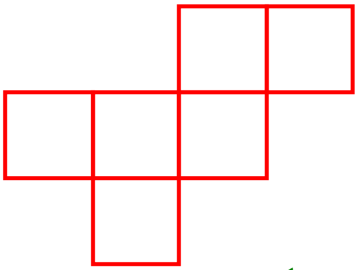
1) Asael tiene canicas de colores y quiere comprarse seis más, pero Ian se las quiere vender según su volumen y área, ¿cuál es el volumen y área de cada una si tienen como radio 1.8 cm?.

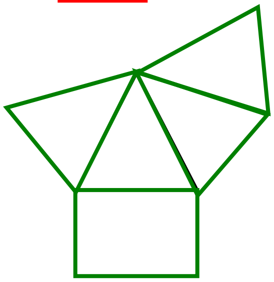


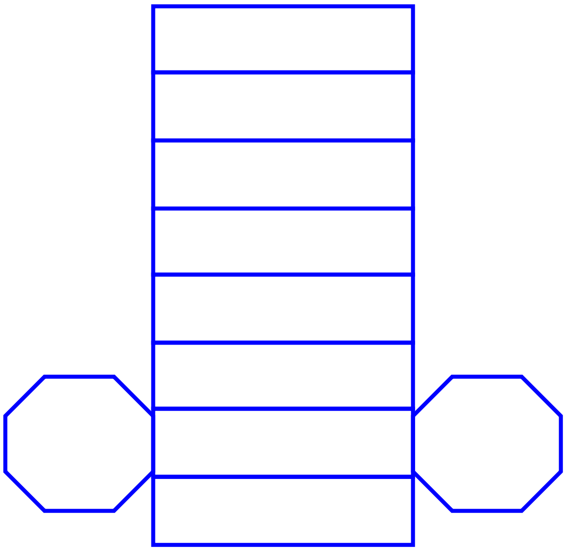
2) Una pastelería necesita empaquetar 7 cajas de pasteles rectangulares cada una con 12 pasteles, si cada pastel tiene las siguientes medidas. ¿Cuál será el volumen de cada caja?

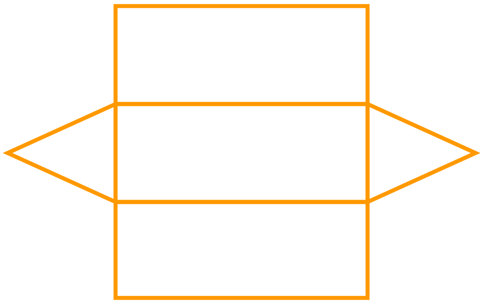


Observe las siguientes figuras geométricas que se relacionan con la superficie de algunos cuerpos geométricos. Escriba debajo de cada figura, el nombre del cuerpo geométrico correspondiente y la fórmula de su área y volumen:









BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson Educación de México.

Allen, R. A. (2007). *Álgebra elemental*. Pearson.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.

Ministerio de Educación. (2023). *Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. (2023). *Prontuario de mis aprendizajes: Matemática*.

Ministerio de Educación. (2023). Subsistema de Educación Regular. Educación Secundaria Comunitaria Productiva: *Texto de aprendizaje. (3º año, primero, segundo y tercer trimestre)*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. (2024). Subsistema de Educación Regular. *Solucionario de Matemática: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz, Bolivia.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **2 DO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Vicenta Calle Barron

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

Biología - Geografía
Judith Benegas Peña

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

SEGUNDO TRIMESTRE

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

Biología - Geografía
Jose Luis Chambi Barrientos

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

TERCER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Vannia Sirusnay Arroyo Lopez

Matemática
Marlon Cori Callisaya

Biología - Geografía
Judith Benegas Peña

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol