ÁREA:

MATEMÁTICA

4to

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Texto de aprendizaje. 4to año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Olga Marlene Tapia Gutiérrez
Directora General de Educación Primaria
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria
Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Gloria Velazco Gomez

DIAGRAMACIÓN:
Javier Angel Pereyra Morales

Depósito legal:
4-1-23-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2024). Texto de aprendizaje. 4to año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

ECUACIONES ALGEBRAICAS

PRÁCTICA

Sonia es la casera del barrio y vende alimentos a los clientes, específicamente frutas. Para adquirir su mercadería recibió una cantidad de papayas de un tamaño similar a un solo precio, de acuerdo a esa compra ella desea determinar el precio unitario no solo de ese fruto, sino también de otros con las mismas características de pago.

Actividad

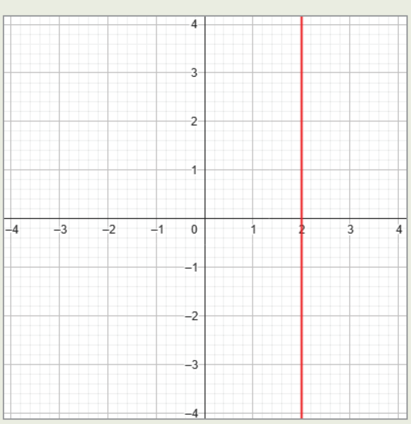
Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo determinarías el costo unitario de cada papaya si cuenta con 50 unidades y el precio total de la mercadería es de Bs.250?
- Si Sonia compró 20 papayas adicionales a Bs. 80, ¿cuál el precio base de cada papaya?

TEORÍA

DATO

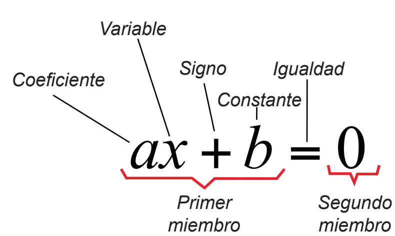
Una ecuación lineal con una incógnita, geométricamente representa una línea recta vertical.



1. Ecuación lineal

Una ecuación es una combinación de dos o más términos separados por una igualdad. En el caso de una ecuación lineal, la misma cumple el concepto de ecuación, salvo que la o las variables deben tener a la unidad como exponente.

En general una ecuación lineal (con una incógnita) toma la siguiente forma:



Donde
$a, b \in R \wedge a \neq 0$

Igualdad

Es aquella en la que dos expresiones algebraicas poseen el mismo valor mediante el signo "="; así mismo, una igualdad puede expresarse de dos maneras con las siguientes características:

- **Ecuación**

Es aquella igualdad que se verifica para ciertos valores, por ejemplo:

$$7x + 2 = 16 \text{ verifica únicamente para } x = 2$$

- **Identidad**

Es aquella igualdad que se verifica para todos los valores correspondientes, tal es el caso de los productos y cocientes notables.

Ejemplo:

La igualdad: $(x - y)^2 = x^2 - 2x * y + y^2$ es una identidad

Para: $x = 1$; $y = 2$, así: $(1 - 2)^2 = 1^2 - 2(1)(2) + 2^2$, luego

$$(-1)^2 = 1 - 4 + 4$$

$$1 = 1 \quad \text{verdadero}$$

Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita

a) Ecuaciones lineales

Para resolver ecuaciones lineales, se siguen los pasos:

Paso 1: *Identificamos los términos que contienen una variable y las constantes.*

Paso 2: *Transponemos los términos que poseen la variable o incógnita a un miembro de la ecuación y los términos conocidos (constantes) al otro, con la regla de transposición de términos de suma o resta.*

Paso 3: *Reducimos términos semejantes en ambos miembros.*

Paso 4: *Despejamos la incógnita enviando el coeficiente a dividir o multiplicar al otro miembro (según la regla de transposición de términos de multiplicación y división).*

REGLA PRÁCTICA DE TRANSPOSICIÓN DE SIGNOS

$+ \quad = \quad -$	*De sumar pasa al otro miembro a restar*
$- \quad = \quad +$	*De restar pasa al otro miembro a sumar*
$\times \quad = \quad \div$	*De multiplicar pasa al otro miembro a dividir*
$\div \quad = \quad \times$	*De dividir pasa al otro miembro a multiplicar*

En general, la resolución de ecuaciones lineales busca hallar el valor de la variable (incógnita) para que cumpla la igualdad en la ecuación inicial.

Ejemplo:

La transposición de signos se aplica de la siguiente manera:

$3x + 5 = 0 \longrightarrow 3x = -5$	$3x = 18 \longrightarrow x = \frac{18}{3}$
$x - 8 = 0 \longrightarrow x = 8$	$\frac{x}{7} = 10 \longrightarrow x = 10 \times 7$

Ahora efectuaremos la resolución de una ecuación lineal para hallar el valor de la incógnita:

$3x - 5 = 10$	Planteamiento del ejercicio.
$3x = 10 + 5$	La constante -5 pasa al otro miembro como +5.
$3x = 15$	Efectuamos la suma en el segundo miembro.
$x = \frac{15}{3}$	El coeficiente de x pasa a dividir al otro miembro.
$x = 5$	Efectuamos la división y obtendremos el resultado del ejercicio.

SOBREENTENDIDO

Considere la siguiente ecuación lineal:

$$x - 4 = 9$$

Se considera que:

- *La variable x tiene como coeficiente el valor de 1*
- *La variable x y la constante 9 tienen el signo + por delante*
- *La variable x tiene como exponente el valor de 1*

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación: $\mathbf{2x - 5(x - 10) = -5 - [2 - 7(2x - 4)]}$

$2x - (5)(x) - 5(-10) = -5 - [2 - (7)(2x) - 7(-4)]$	Propiedad distributiva de la multiplicación
$2x - 5x + 50 = -5 - [2 - 14x + 28]$	Multiplicamos términos
$2x - 5x + 50 = -5 - 2 + 14x - 28$	Eliminamos los paréntesis
$-3x + 50 = 14x - 35$	Reducción de términos
$-3x - 14x = -35 - 50$	Transposición de términos (suma → resta)
$-17x = -85$	Reducción de términos semejantes
$x = \frac{(-85)}{(-17)}$	Transposición de términos (multiplicación → división)
$x = 5$	División y resultado final

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita:

- $4x - 10 = 2$
- $x - (2 - 3y) = 11y - 4$
- $3z - 2 = 2(2 - 7z)$
- $(u + 1)^2 = (u + 1)(u - 1)$
- $(5v - 3)^2 + 2(v - 1)^2 = 2v(8v - 3) + 11v(v - 2)$
- $2w - (w + 1) + (w + 4) = 1 + [2w - (w - 1)]$
- $-2x - 1 - \{-3 - [18x - (3x - 15)]\} = -10 - (-14 + 12x)$
- $4 - (0{,}2 + a) = -0{,}2(1 - 0{,}5a) - 0{,}1a$

b) Ecuaciones fraccionarias y con coeficiente fraccionario

Para resolver ecuaciones fraccionarias o con coeficientes fraccionarios, se siguen los pasos:

Paso 1: Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, esto es factorizar dichos denominadores.

Paso 2: Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por el común denominador.

Paso 3: Operamos algebraicamente para despejar la incógnita.

Ejemplo 1

Se pide resolver la ecuación con coeficiente fraccionario: $\frac{\boldsymbol{x}}{2} + \frac{\boldsymbol{x}}{5} = 4$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 4 \quad //(10)$	Multiplicamos ambos miembros por 10
$5x + 2x = 40$	Operamos algebraicamente
$7\text{x} = 40$	Transponemos términos
$\text{x} = \frac{40}{7}$	Resultado del ejercicio

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación con coeficiente fraccionario:

$$\boldsymbol{\frac{u-1}{2} - 1 = \frac{u+5}{3} + 3(u-2)}$$

$$\frac{(u-1) - 1(2)}{2} = \frac{(u+5) + 3(u-2)(3)}{3}$$

$$\frac{u-1-2}{2} = \frac{u+5+9(u-2)}{3}$$

$$\frac{u-3}{2} = \frac{u+5+9u-18}{3}$$

$$\frac{u-3}{2} = \frac{10u-13}{3}$$

$$3(u-3) = 2(10u-13)$$

$$(3)(u) - (3)(3) = 2(10u) - 2(13)$$

$$3u - 9 = 20u - 26$$

$$3u - 20u = -26 + 9$$

$$-17u = -17$$

$$u = 1$$

CURIOSIDAD

Diofanto de Alejandría

(Siglo III) Matemático griego, sus escritos contribuyeron de forma notable al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo del álgebra de su época.

De su obra se conservan varios volúmenes de la Aritmética, libro de inspiración colectiva, pero redactada por un solo autor.

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación fraccionaria: $\frac{\boldsymbol{p^2-3}}{\boldsymbol{2p^2+12p+18}}-\frac{\boldsymbol{(p-1)^2}}{\boldsymbol{p^2-9}}=-\frac{\boldsymbol{p+5}}{\boldsymbol{2p+6}}$

$$\frac{(p^2-3)}{2(p^2+6p+9)}-\frac{(p-1)^2}{(p-3)(p+3)}=\frac{-(p+5)}{2(p+3)}$$

$$\frac{p^2-3}{2(p+3)^2}-\frac{p^2-2p+1}{(p-3)(p+3)}=\frac{-p-5}{2(p+3)}$$

$$\frac{(p^2-3)(p-3)-2(p+3)(p^2-2p+1)}{2(p+3)^2(p-3)}=\frac{-p-5}{2(p+3)}$$

$$(p^2)(p)+p^2(-3)-(3)(p)-(3)(-3)-(2p+6)(p^2-2p+1)=\frac{2(p+3)^2(p-3)(-p-5)}{2(p+3)}$$

$$p^3-3p^2-3p+9-(2p)(p^2)-(2p)(-2p)-(2p)(1)-6(p^2)-6(-2p)-6(1)=(p^2-9)(-p-5)$$

$$p^3-3p^2-3p+9-2p^3+4p^2-2p-6p^2+12p-6=(p^2)(-p)+(p^2)(-5)-(9)(-p)-(9)(-5)$$

$$-p^3-5p^2+7p+3=-p^3-5p^2+9p+45$$

$$-p^3-5p^2+7p+p^3+5p^2-9p=45-3$$

$$-2p=42$$

$$p=\frac{42}{-2}$$

$$p=-21$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias con una incógnita:

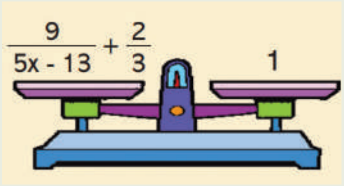
a) $\frac{2y}{y-1}+\frac{3y}{y+2}=5$

b) $\frac{2x-1}{x^2-4x+4}=\frac{2(x-1)}{x^2-4}$

c) $\frac{2w-1}{w^2-4w+4}=\frac{w+1}{\frac{w^2+4}{2}}$

d) $\frac{\frac{1}{2}+z}{0{,}5z^3}-\frac{1}{z^2}=\frac{2}{z(2z-1)}$

!INTÉNTALO!



Para que esto se cumpla, x debe ser 8 estrictamente.

Otro valor desequilibra la balanza.

c) Ecuaciones con radicales

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Transponemos términos: en un miembro aquellos que tienen radicales y en otro aquellos que no lo tienen.

Paso 2: Eliminamos los radicales elevando ambos miembros a la potencia que lleva el índice del radical y efectuando el desarrollo de binomios o trinomios si se presentasen.

Paso 3: Despejamos la incógnita en cuestión mediante la transposición de términos.

Ejemplo:

Se pide resolver la siguiente ecuación: $\sqrt{\boldsymbol{x}-5}=4$

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2=(4)^2 \quad //(\quad)^2$	Elevamos cada miembro a la potencia que indica el índice para eliminar el radical
$x-5=16$	Transponemos términos
$\mathrm{x}=16+5$	Realizamos operaciones algebraicas
$\mathrm{x}=21$	Resultado del ejercicio

PROPIEDADES IMPORTANTES:

1) $\sqrt{a} = b \Rightarrow a = b^2$

2) $\sqrt[3]{a} = b \Rightarrow a = b^3$

3) $\sqrt[4]{a} = b \Rightarrow a = b^4$

$\vdots$

4) $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow a = b^n$

Si n es par, $a \geqslant 0$

Si n es impar, $a \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación: $\sqrt{\boldsymbol{x+1}} + \sqrt{\boldsymbol{x}} = \mathbf{3}$

$$\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2 = 3^2 \; //(\quad)^2$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}\right) + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 9$$

$$x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x)} + x = 9$$

$$2\sqrt{(x)(x) + (1)(x)} = 9 - x - 1 - x$$

$$2\sqrt{x^2 + x} = 8 - 2x$$

$$\left(2\sqrt{x^2 + x}\right)^2 = (8 - 2x)^2$$

$$(2)^2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^2 = (8)^2 - 2(8)(2x) + (2x)^2$$

$$4(x^2 + x) = 64 - 32x + 4x^2$$

$$4x^2 + 4x = 64 - 32x + 4x^2$$

$$4x^2 + 4x + 32x - 4x^2 = 64$$

$$36x = 64$$

$$x = \frac{64}{36} \rightarrow x = \frac{16}{9}$$

GEORGE POLYA

(1887-1985)

Matemático, trabajó en una gran variedad de temas matemáticos, incluidas las series, la teoría de números, geometría, álgebra, análisis matemático, la combinatoria y probabilidad.

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales racionales con una incógnita:

a) $2\sqrt{2p + 1} = 10$

b) $\sqrt{z + 3} = \sqrt{z} + 3$

c) $m + 2 = \sqrt{m^2 + 1}$

d) $\sqrt{14 - u} + \sqrt{11 - u} = \frac{3}{\sqrt{11-u}}$

e) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt[3]{a - 5}}} = 3$

f) $\dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = -1$

2. Resolución de problemas

Una ecuación también puede formar parte de un contexto de la vida real, es por ello que su aplicación es base para todas las ciencias exactas siendo lo más importante al margen de "despejar la incógnita", plantear correctamente cual es la incógnita dependiendo el problema, además de la interacción con otros términos, signos o constantes.

Consideraciones para el planteamiento de problemas

- Entender plenamente la situación planteada.
- Identificar las cantidades conocidas y desconocidas.
- Elegir una letra para representar la incógnita.
- Identificar la igualdad y operaciones.
- Formular la ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Establecer la solución del problema.

Problema

La edad de Inés es el triple de la edad de Natalia, si ambas edades suman 56 años, ¿qué edad tiene cada una?

Planteamos el problema de la siguiente forma:

Edad de Natalia: x

Edad de Inés = 3 [edad de Natalia] = 3x

[Edad de Natalia] + [Edad de Inés] =56

x + 3x = 56 Planteamiento del problema

4x = 56 Reducción de términos semejantes

$x = \frac{56}{4}$ = 14 Transposición de términos y resultado final

Si la edad de Natalia es x, entonces la edad de Natalia es 14 [años]

Si la edad de Inés es 3x, entonces la edad de Inés es 3 · (14), es decir 42 [años]

LENGUAJE MATEMÁTICO

Sabías que, para resolver problemas debes comprender el lenguaje lógico matemático, así si te dicen "el doble de un número" se debe pensar algebraicamente en "2x", donde x puede ser cualquier número o cantidad.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

- Encontremos 3 números enteros consecutivo cuya suma sea 60.
- Se distribuyen 400 naranjas en tres canastas, sabiendo que la primera tiene 80 menos que la segunda y esta tiene 60 menos que la tercera, averigua cuántas naranjas tiene cada canasta.
- La edad de un padre es el doble de la edad de su hijo y el doble de la suma de las edades es 132 años. Halle las edades del padre y del hijo.
- Juan puede hacer una obra en 4 horas, Marcos en 6 horas y Pablo en 12 horas. ¿Cuánto tardarán si trabajan juntos?

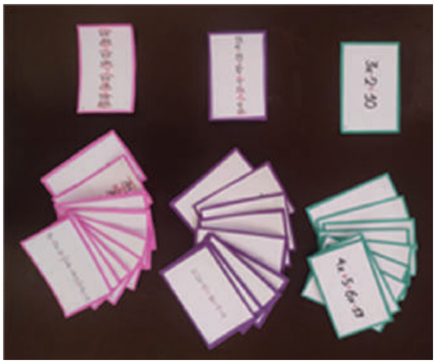
VALORACIÓN

Los babilonios resolvieron problemas relacionados con áreas y superficies de terrenos que poseían, del mismo modo otras culturas utilizaron las ecuaciones para resolver problemas variados.

- ¿De qué manera aplicarías las ecuaciones lineales de una incógnita en la vida real?

PRODUCCIÓN

Jugando al cálculo mental.



Elaboremos un conjunto de 30 tarjetas clasificadas en tres colores:

- Las primeras 10 (color verde) contienen ecuaciones de nivel básico.
- Las segundas 10 (color morado) contienen ecuaciones de nivel intermedio.
- Las terceras 10 (color rojo) contienen ecuaciones de mayor dificultad.

El juego consiste en resolver mentalmente cada ecuación planteada entre 2 o más participantes; la persona que resuelva la ecuación lineal correspondiente, se quedará con la tarjeta y el que posea la mayor cantidad de tarjetas ganará el juego.

- Podemos escribir nuevas reglas y jugar con las mismas tarjetas.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

PRÁCTICA

A menudo, las personas realizamos inversiones monetarias para lograr beneficios económicos, por ejemplo, colocar nuestro dinero en instituciones bancarias, para así obtener ganancias a futuro por los intereses que el banco nos proporciona por depositar nuestros ahorros.

Veamos el siguiente caso: Javier tiene $us.50.000 para invertir y tiene esta opción en dos bancos. El banco A paga una tasa de interés simple anual de 5% y el banco B paga una tasa de interés de 6,2% anual. Si la fórmula del cálculo del Interés Simple es:

$$I = c * i * t$$

Donde:

c = capital, i = tasa de interés simple y t = tiempo

Actividad

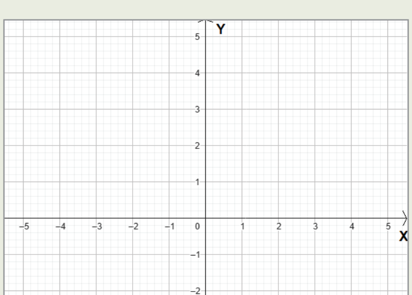
Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el valor de interés que ganaría Javier en un año en cada Banco?
- ¿Cuál de los bancos es la mejor opción para invertir?

TEORÍA

SISTEMA CARTESIANO

Creado por Descartes, es la intersección de dos rectas (ejes) divididas cada una en infinitos segmentos con valores positivos en el lado superior y derecho y negativos en el lado inferior e izquierdo de forma perpendicular (90°). La recta que está alineada de forma horizontal, se denomina "eje de abscisas" y el que esta alineado de forma vertical se denomina "eje de ordenadas". Usualmente se los representa con las letras "x" (eje de abscisas) y "y" (eje de ordenadas).



1. Ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas "x", "y" tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = 0$$

Donde:

$$a, b, c \in R \text{ y } a \neq 0, b \neq 0$$

Representación geométrica

Geométricamente una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta, el cual es graficada por la unión de dos o más puntos mediante el trazo de una línea.

Para proceder a graficar, realizamos los siguientes pasos:

Paso 1: Realizamos el despeje de una variable en concreto (usualmente las ecuaciones lineales vienen dadas con las variables "x" y "y"). A la variable que ha sido despejada la nombramos "variable dependiente" y la que no ha sido despejada "variable independiente".

Paso 2: Asignamos valores a la variable independiente y calculamos el correspondiente valor de la variable dependiente, en función a la ecuación de la variable despejada (pares de puntos).

Paso 3: Ubicamos los pares de puntos en el plano cartesiano y mediante una línea unimos dichos puntos.

Ejemplo:

La gráfica de la ecuación lineal de 2 variables x + 2y - 6 = 0 es la siguiente:

1. Despejamos una variable en concreto

$$\boldsymbol{x+2y-6=0}$$

Donde:

$$\boldsymbol{2y=6-x}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{6-x}{2}}$$

y: será nuestra variable dependiente.

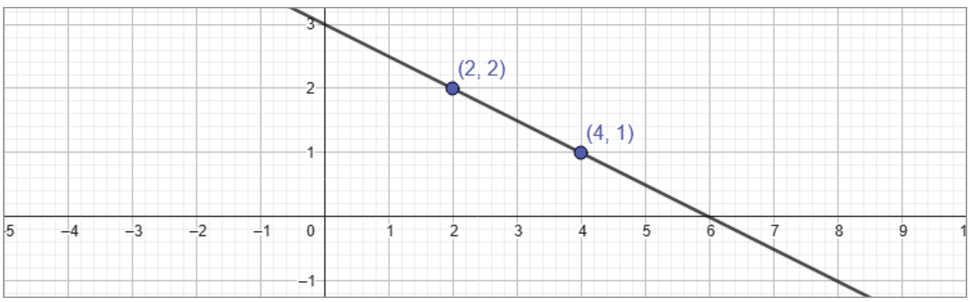
x: será nuestra variable independiente.

2. Ahora asignamos valores a x para obtener su correspondiente valor de y

Si $\boldsymbol{x=2}$, entonces $\boldsymbol{y=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2}$, por lo cual el par de puntos es $(\mathbf{2,2})$

Si $\boldsymbol{x=4}$, entonces $\boldsymbol{y=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1}$, por lo cual el par de puntos es $(\mathbf{4,1})$

3. Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos una línea que pase por ambos puntos:



Actividad

Realizamos la gráfica de las siguientes ecuaciones lineales de 2 incógnitas:

a) $2x-y=0$

b) $\frac{x+3}{3}-\frac{x-y}{6}=3$

c) $0{,}4-(0{,}2-x)=0{,}1(0{,}5-0{,}5y)$

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Es el conjunto de varias ecuaciones, donde generalmente hay igual cantidad de ecuaciones para una cantidad de incógnitas.

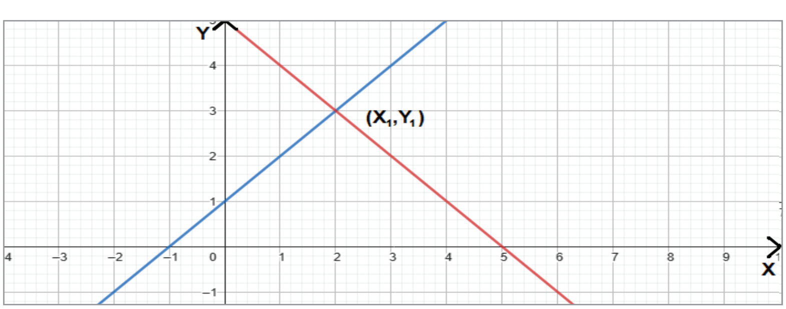
3. Resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas está dado por:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

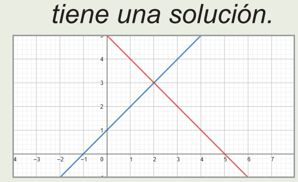
$$a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\ \in R\ y\ \ a_1\neq 0,b_1\neq 0,a_2\neq 0,b_2\neq 0$$

Geométricamente cada ecuación representa una recta en el plano cartesiano, la intersección de dos rectas es un punto (x_1 , y_1) común entre ellas.

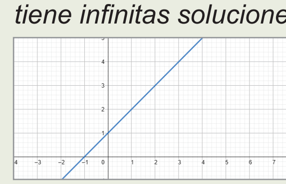


TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES:

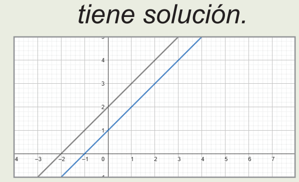
Sistema consistente, determinado. *Es aquella que tiene una solución.*



Sistema consistente, indeterminado. *Aquella que tiene infinitas soluciones.*



Sistema inconsistente o incompatible. *Aquella que no tiene solución.*



Entre los métodos de resolución más comunes tenemos a:

Método de reducción

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 8x + y = -4 & (1) \\ 2x + 3y = 10 & (2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

Paso 1: Eliminar una de las variables igualando los coeficientes de una de las incógnitas. En nuestro sistema igualamos los coeficientes de "y" en ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x + y = -4 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \quad (-3) \rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} -24x - 3y = 12 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \\ \hline -22x \quad = 22 \\ x = -\frac{22}{22} \\ x = -1 \end{array}$$

Por lo tanto, ***x* = - 1**

Paso 2: Reemplazar x = -1 en cualesquiera de las ecuaciones (1) o (2) (elegir la más sencilla)

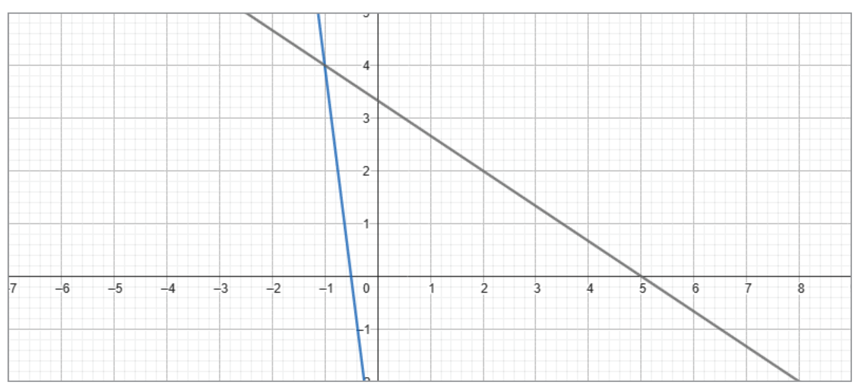
Entonces: en $2(-1) + 3y = 10 \quad \rightarrow \quad -2 + 3y = 10 \quad \rightarrow \quad 3y = 10 + 2 \quad \rightarrow \quad 3y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{3}$

Por lo tanto ***y* = 4**

La solución del sistema es: ***x* = -1 ,*y* = 4**

Punto de intersección de las rectas P(-1, 4)

Gráficamente:



HABITUALMENTE

Todo sistema de dos ecuaciones con dos variables se representa por el arreglo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = g \end{cases}$$

Donde a, b, c, d, e, g, son números reales o coeficientes.

NO OLVIDAR QUE

El sistema está compuesto por L_1 y L_2, rectas tales que:

$$L_1: a\,x + b\,y = c$$
$$L_2: d\,x + e\,y = g$$

Deben ser graficadas en un solo plano cartesiano.

Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x = 1 - 2y \\ x = 5 + y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 3y + 7 \\ 3x = 5 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x - \frac{2y}{3} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{3x+2y}{x+y-15} = -9 \\ \frac{4x}{3} - \frac{5(y-1)}{8} = -1 \end{cases}$

Método de igualación

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \dots\dots(1) \\ 4x - 3y = 2 \dots\dots(2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

Paso 1: Despejar la misma variable de ambas ecuaciones, en este caso:

Despejamos "x" de (1): $2x - y = 7 \ \rightarrow x = \frac{7+y}{2} \dots\dots(3)$

Despejamos "x" de (2): $4x - 3y = 2 \ \rightarrow x = \frac{2+3y}{4} \dots\dots(4)$

Paso 2: Igualamos las ecuaciones (3) y (4):

$$\frac{2+y}{2} = \frac{2+3y}{4} \rightarrow \quad 4(2+y) = 2(2+3y) \rightarrow \quad 8 + 4y = 4 + 6y$$

$4y - 6y = 4 - 8 \ \rightarrow \ -2y = -4 \ \dots(-1) \ \rightarrow \ 2y = 4 \ \rightarrow \ y = \frac{4}{2} = 2,$ por lo tanto ***y* = 2**

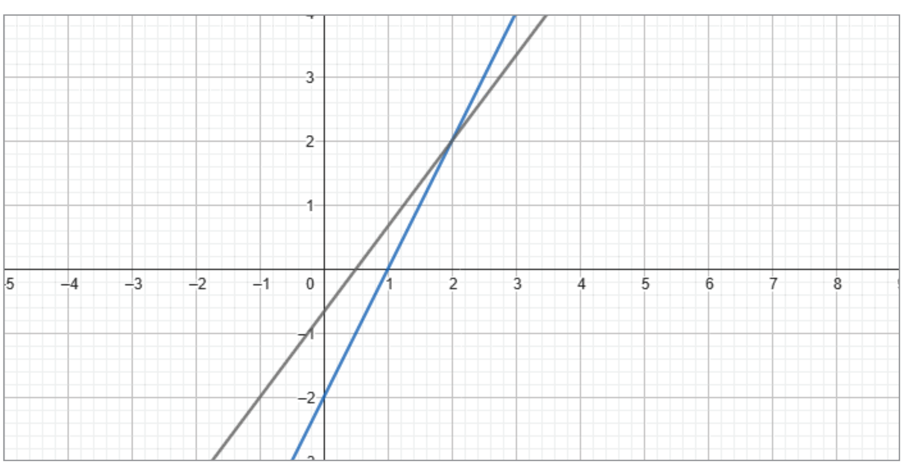
Paso 3: Sustituimos el valor *y* = 12 en (3) o (4): en este caso en (4), tenemos:

$x = \frac{2+3(2)}{4} = \frac{2+6}{4} = \frac{8}{4} = 2,$ por lo tanto, ***x* = 2**

La solución del sistema es: ***x* = 2 ,*y* = 2**

Punto de intersección de las rectas P(2, 2)

Gráficamente:



¿CÓMO GRAFICAR UNA ECUACIÓN DE DOS VARIABLES?

Para graficar

-x + 3y = 6

Se debe despejar "y"

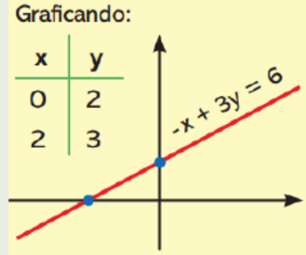
$$3y = x + 6$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

Graficando:

x	y
0	2
2	3



Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x - 12 = 4y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} + 3 = y \\ 3(x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

Método de sustitución

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 & (1) \\ x - y = 6 & (2) \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

Paso 1: Despejar una de las variables "x" o "y" en este caso de (1) despejamos "x" entonces: *x=2-3y...* (3)

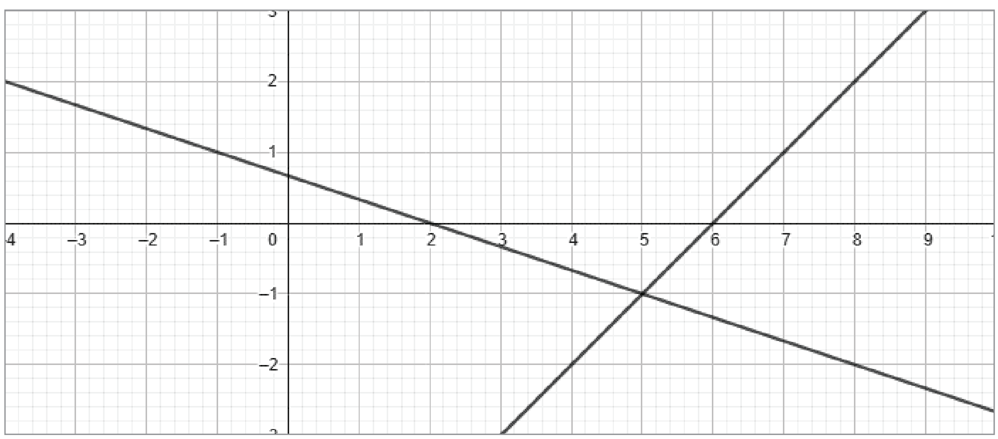
Paso 2: Reemplazar (3) en *(2): (2 - 3y) -y = 6* de donde $2 - 4y = 6 \rightarrow -4y = 6 - 2 \rightarrow$ y = $\frac{4}{-4}$ $\rightarrow$ **y = -1**

Paso 3: Reemplazar en (3): $x = 2 - 3(-1) \rightarrow x = 2 + 3 \rightarrow x = 5$

La solución del sistema es: $x = 5, y = -1$

Punto de intersección de las rectas P(5, -1)

Gráficamente:



Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2x}{5} + \frac{y-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{7x-9y}{2} - \frac{2x+4}{2} = -15 \\ 5(x - 1 + y) = 25 \end{cases}$

Método de determinantes

Un determinante es un arreglo rectangular de números, un determinante de orden 2 está dispuesto de dos filas y dos columnas como se muestra en la figura:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Donde los elementos a_1 y b_2 forman la diagonal principal. El valor de la diagonal está definido como el producto de las cantidades de la diagonal principal menos el producto de las cantidades en la otra diagonal, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

A partir de: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Paso 1: *Se calcula los siguientes determinantes:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \ \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Paso 2: *Dividir los siguientes determinantes para obtener el resultado final:*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x - 3y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots . . (2) \end{cases}$$

1ro Calculamos el determinante "Δ" (DELTA)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = +(2) * (-3) - (1)(6) = -6 - 6 = -12$$

2do Calculamos la incógnita "x"

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = +(2) * (-3) - (6)(7) = -6 - 42 = -48,$$

Entonces, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-48}{-12} = 4$, por lo tanto $\boldsymbol{x = 4}$

3ro Calculamos la incógnita "y"

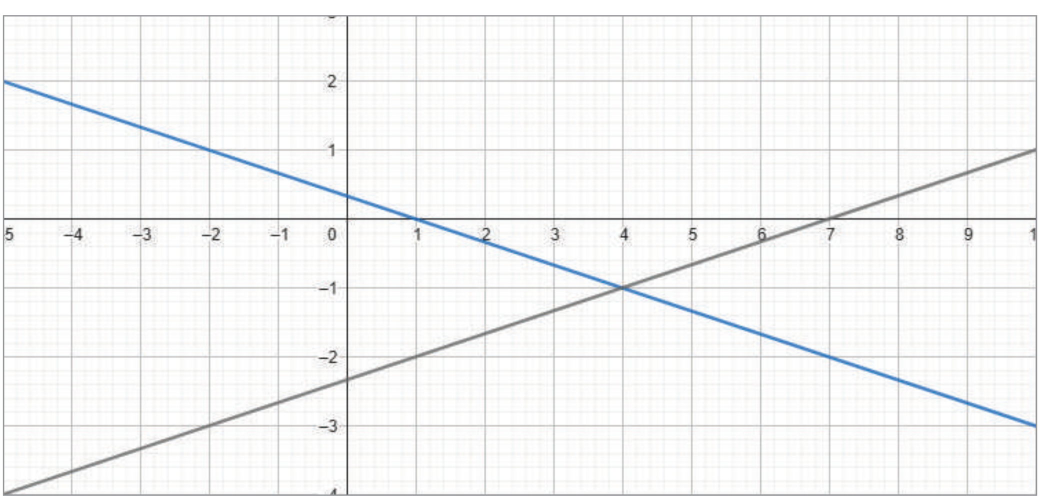
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = +(2) * (7) - (2) * (1) = 14 - 2 = 12,$$

Entonces, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1$, por lo tanto $y = \boldsymbol{-1}$

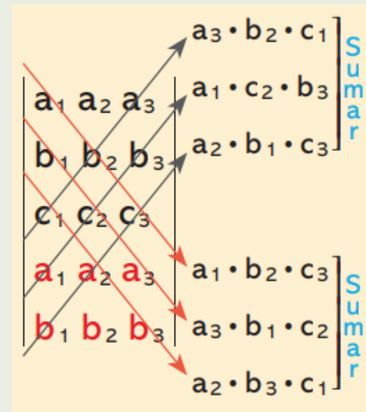
La solución del sistema es: ***x = 4, y = -1***

Punto de intersección de las rectas P(4, -1)

Gráficamente:



CONSULTA CON TU MAESTRA O MAESTRO SOBRE ESTA ESTRATEGIA:



DELTA

Δ, cuarta letra del alfabeto griego, es la letra D que representa al determinante principal de un sistema de ecuaciones.

Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de determinantes:

a) $\begin{cases} x + y0 = 25 \\ \quad 2x = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{7}{4} \end{cases}$

Método gráfico

Consiste en ubicar gráficamente el punto donde intersectan las rectas que corresponde a cada ecuación. Cabe resaltar que el método no brinda un resultado exacto en muchos casos.

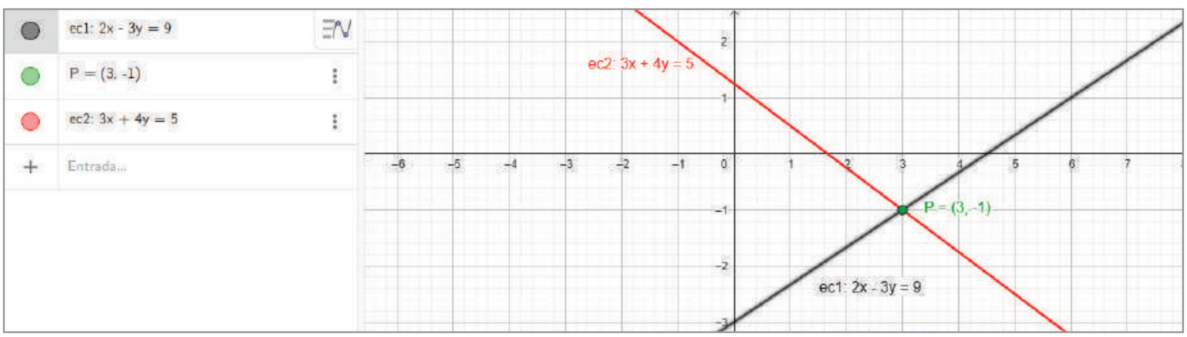
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

Procedemos a graficar ambas rectas

Para $2x - 3y = 9$ Despejando x: $2x - 9 = 3y \rightarrow \frac{2x-9}{3} = y \rightarrow y = \frac{2x-9}{3}$ Evaluando puntos: Si $x = 0 \rightarrow y = \frac{2(0)-9}{3} = \frac{-9}{3} = -3 \rightarrow y = -3 \rightarrow P(0,-3)$ Si $x = 3 \rightarrow y = \frac{2(3)-9}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow y = -1 \rightarrow P(3,-1)$	Para $3x + 4y = 5$ Despejando x: $4y = 5 - 3x \rightarrow y = \frac{5-3x}{4}$ Evaluando puntos: Si $x = 3 \rightarrow y = \frac{5-3(3)}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \rightarrow y = -1 \rightarrow P(3,-1)$ Si $x = -1 \rightarrow y = \frac{5-3(-1)}{4} == \frac{8}{4} = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(-1,2)$

Gráficamente observamos que la intersección del sistema en el plano cartesiano es: x= 3,y = -1

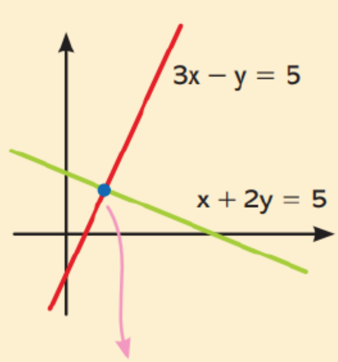


Punto de intersección de las rectas P(3,-1)

ATENCIÓN

El método gráfico es muy limitado, muchas soluciones pueden ser confundidas, por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$



Solución

x = 2,14

y = 1,43

Aproximadamente

Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - \frac{1}{3}(3x - 2) = -\frac{4}{3} \\ \frac{2(x+4)}{3} = \frac{y}{2} + \frac{9}{2} \end{cases}$

Problemas de aplicación

Hacemos uso de los sistemas de ecuaciones para plantear problemas que involucran un análisis del uso de 2 incógnitas en diversas situaciones.

Ejemplo:

Si hoy compramos 3 salteñas y 4 tucumanas por Bs.45 y ayer 2 salteñas y 6 tucumanas por Bs.50 Determinamos el precio de cada salteña y tucumana.

Sea: s= cantidad de salteñas, t= cantidad de tucumanas

Planteamos el sistema de ecuaciones lineales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3\ salteñas\ y\ 4\ tucumanas = 45 \rightarrow 3s + 4t = 45 \ldots\ldots(1) \\ 2\ salteñas\ y\ 6\ tucumanas = 50 \rightarrow 2s + 6t = 50 \ldots\ldots 2) \end{cases}$$

Resolvemos el problema por el método de sustitución:

Paso 1: Despejamos $s \; en \; (1)$: $s = s = \dfrac{45 - 4t}{3} \ldots \ldots (3)$

Paso 2: Reemplazar (3) en (2): $2\left(\dfrac{45 - 4t}{3}\right) + 6t = 50 \;\rightarrow \dfrac{90 - 8t}{3} + 6t = 50 \rightarrow \dfrac{90 - 8t + 18t}{3} = 50 \rightarrow 90 + 10t = 150$

Paso 3: Reemplazar en (3): $s = \dfrac{45{-}4(6)}{3} \rightarrow s = \dfrac{45{-}24}{3} \rightarrow s = \dfrac{21}{3} \rightarrow \boldsymbol{s = 7}$

Por lo tanto, la cantidad de salteñas es 7 y la cantidad de tucumanas es 6.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

- Si la suma de las dos cifras de un número es 10; y que, si invertimos el orden de esas dos cifras, el número encontrado es 36 más que el inicial, calculamos el número.
- Hace 5 años, la edad de Julián era triple que la de Ramiro, dentro de 10 años será doble, ¿qué edad tiene cada uno?
- Pedro y Pablo tienen entre los dos Bs.160. Si Pablo le da Bs. 10 a Pedro, ambos tendrán la misma cantidad, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

VALORACIÓN

La historia de la matemática asegura que los babilonios resolvieron sistemas de ecuaciones lineales, denominando a las incógnitas como longitud, ancho, área o volumen, sin estar relacionados con problemas de medida; así también se sabe que los griegos resolvían algunos sistemas de ecuaciones con métodos geométricos; por otro lado, los Thymaridas (4000 a de C) habían encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de “n” ecuaciones con “n” incógnitas.

- ¿Cuáles son esas ecuaciones donde involucran las incógnitas mencionadas?

- ¿En qué otras ciencias también se aplican las ecuaciones lineales con 2 incógnitas?

- ¿Qué tan importante es la resolución de los sistemas de ecuaciones con 2 incógnitas?

PRODUCCIÓN

- En una hoja de cartulina tamaño oficio, diseñamos la figura adjunta con los siguientes materiales:

  - 1 lápiz
  - 1 caja de lápices de colores
  - Marcadores
  - Hojas de color

En las hojas de color, escribamos ejercicios correspondientes a los sistemas de ecuaciones de 2 incógnitas (1 por hoja).

El juego consiste en que cada persona agarra una figura que los represente en el juego y tira por turnos un dado y dependiendo de la posición donde llegue su figura según los espacios que recorre de acuerdo al dado, deberá resolver un ejercicio de cualquier hoja del color escogida al azar que corresponda al color del espacio que le haya tocado. Si la persona lo resuelve correctamente, se queda en ese espacio (pueden establecer un sistema de premiación), caso contrario retorna a la posición donde se encontraba. El ganador del juego es aquel que haya completado todos los espacios disponibles en el diseño del juego.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON 3 INCÓGNITAS

PRÁCTICA

En el campo de la construcción, Juana es una profesional dedicada a la obra fina. Su especialidad es la construcción de cocinas y baños.

En esta ocasión desea realizar el colocado de cerámica para el piso de una cocina de 3x3 metros cuadrados, para lo cual Juana requiere conocer la cantidad de cerámica, bolsas de cemento cola y bolsas de junta que cubrirán dicho espacio.

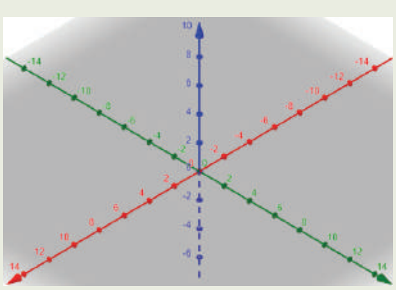
Actividad

- ¿Cuáles son los 3 elementos que se requieren para realizar el colocado del piso con cerámica para una cocina?
- Investigamos el precio de cada uno de ellos.
- Averiguamos la cotización para una superficie de 3x3 metros cuadrados, con los 3 elementos anteriormente detallados.

TEORÍA

ATENCIÓN

Es la intersección de 3 ejes de coordenadas intersectadas en un punto en común (usualmente el nombre de estos ejes es dado por las letras "x", "y" y "z"). Estos 3 ejes conformarán 3 pares de planos interceptados de forma perpendicular (90°) cada una y que dichos planos son equivalentes a planos de coordenadas, tanto el plano "xy", "yz" como "xz".



1. Ecuación lineal con tres incógnitas

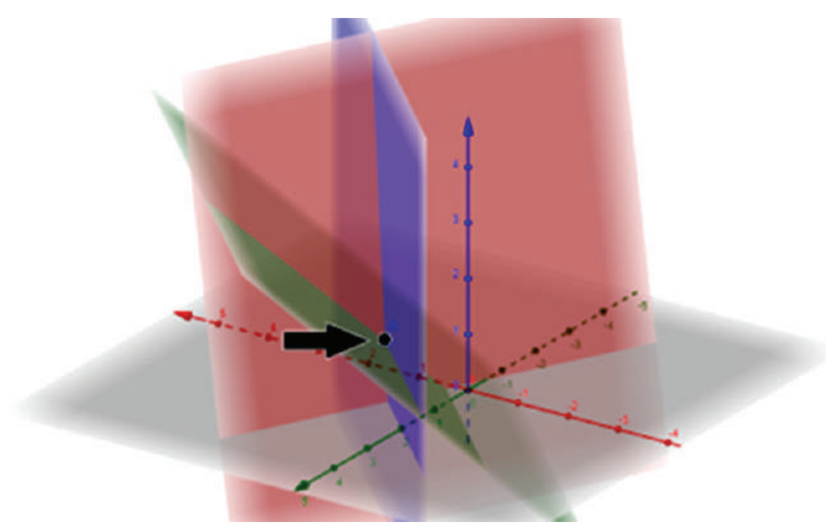
Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Donde: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 \in R$, x, y, z son las variables.

Interpretación geométrica de un sistema lineal con tres incógnitas

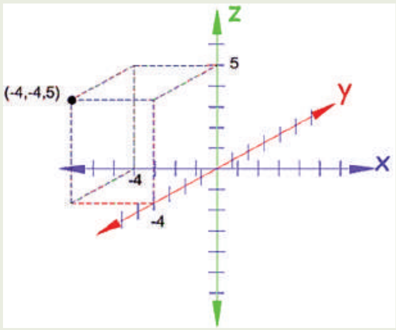
La solución de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas representa un punto en el espacio cartesiano (x, y, z).



2. Métodos de resolución

Método de reducción

EL PUNTO (-4;-4;5) EN EL PLANO 3D



Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = -12 \end{cases}$$

Los pasos para resolver el sistema con este método son los siguientes:

Paso 1: Enumeramos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5 \quad [1] \\ 2x + y - 3z = -1 \quad [2] \\ x - 3y - 2z = -12 \;\; [3] \end{cases}$$

Paso 2: Eliminamos una de las variables (la que resulte más sencilla) para obtener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, en el ejercicio eliminaremos la variable z:

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5 \quad //*\,(-3) \\ \quad 2x + y - 3z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9x + 6y + 3z = 15 \\ \;\; 2x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambas ecuaciones, tenemos: $-7x + 7y + 0z = 14 \quad //*\,(-\frac{1}{7}) \rightarrow x - y = -2 \qquad [\mathbf{4}]$

Paso 3: De igual manera eliminamos la variable "z" entre las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5 \quad //*\,(-2) \\ \qquad x - 3y - 2z = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 4y + 2z = 10 \\ \;\; x - 3y - 2z = -12 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambas ecuaciones tenemos: $-5x + y + 0z = -2 \rightarrow -5x + y = -2 \qquad [\mathbf{5}]$

Paso 4: Resolvemos el sistema de ecuaciones generados [4] y [5]

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ -5x + y = -2 \end{cases}$$

Sumando verticalmente ambos miembros de la ecuación: $-4x = -4 \quad //*\left(-\frac{1}{4}\right) \rightarrow \boldsymbol{x} = 1$

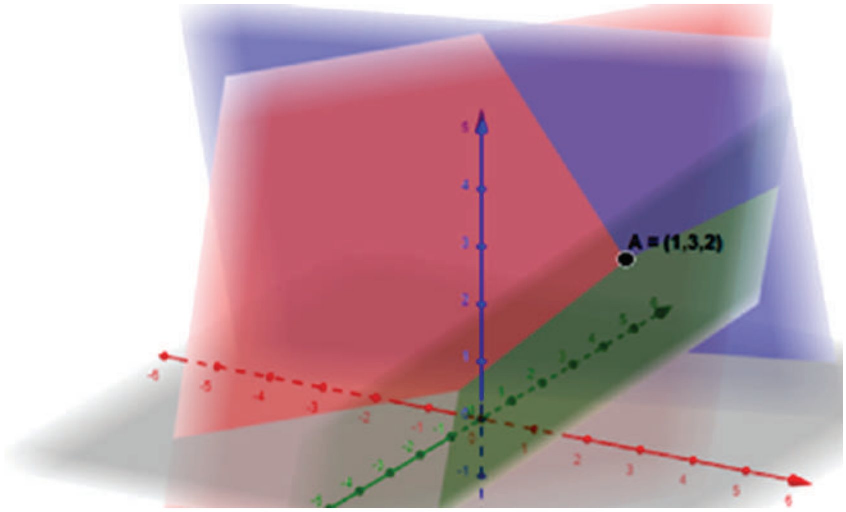
Paso 5: Reemplazamos el valor hallado $x = 1$ en $[\mathbf{4}]$, $\quad 1 - y = -2 \rightarrow -y = -3 \quad //*\,(-1) \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{3}$

Paso 6: Sustituimos los valores hallados x = 1,y = 3 en [1],[2] o [3] para calcular el valor de la variable que falta.

En este caso reemplazaremos en la ecuación [2]: $2x + y - 3z = -1 \rightarrow 2(1) + (3) - 3z = -1 \rightarrow \boldsymbol{z} = 2$

De este modo, la solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}, \boldsymbol{y} = \mathbf{3}, \boldsymbol{z} = \mathbf{2}$

Gráficamente:



Actividad

Resolvemos los sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=-1 \\ a+c=-6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5u-3w=2 \\ -v+2w=-5 \\ u+2w=8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2e-2f+g=-5 \\ 3e+f+3g=-1 \\ 4e-f-2g=-12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 6x-2y-z=-14 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{3}=3 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{6}-\frac{c}{2}=-5 \\ \frac{a}{6}+\frac{b}{3}-\frac{c}{6}=0 \end{cases}$

¿QUÉ SON LAS MATRICES?

Una matriz es un conjunto de elementos dispuestos de forma horizontal (filas) y vertical (columnas), es decir:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a\_n & b\_n & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Donde:

- *A: es el nombre de la matriz*
- *$a_1,b_1,\dots,z_1,a_2,\dots,z_n$ son los elementos de la matriz.*

Método de determinantes

Un determinante es el resultado correspondiente a la suma de determinados productos que pertenecen a una matriz; en el caso de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, el determinante de tal matriz estará formado por 9 elementos repartidos en 3 filas y 3 columnas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, inicialmente debemos conocer el procedimiento para calcular una determinante "Δ"; para ello debemos realizar lo siguiente:

Copiamos la primera y segunda columna y las ubicamos a lado de la matriz inicial. como muestra la figura, luego sumamos los productos correspondientes a las diagonales que apuntan hacia la derecha y restar los productos correspondientes a las diagonales que apuntan la izquierda, como se muestra en la figura:

$$\Delta=\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right| = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$$

Ahora bien, conocida la forma de resolver una determinante, realizamos los siguientes pasos para resolver un sistema de ecuaciones de tercer grado (por el método Cramer) de la siguiente manera:

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Paso 1: Organizamos cada ecuación de la siguiente forma: los términos que contienen las variables los ubicamos en el primer miembro, pero ordenados en la misma secuencia, y ubicamos las constantes en el segundo miembro.

Paso 2: Generamos las matrices de coeficientes según el anterior sistema:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Paso 3: Calculamos las determinantes correspondientes para Δ, Δ_x, Δ_y y Δ_z

Paso 4: Dividimos las siguientes fracciones para hallar las variables correspondientes:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Ejemplo:

Resolver por el método Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+2y=-3+z \\ 3x+y+z=4 \\ x+2z-6=y \end{cases}$$

Paso1: Agrupamos y ordenados las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 3x+y+z=4 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$$

Paso 2: Generamos las matrices de coeficientes:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Paso 3: Calculamos las determinantes correspondientes del anterior paso:

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = (1)(1)(2)+(2)(1)(1)+(-1)(3)(-1)-(-1)(1)(1)-(1)(1)(-1)-(2)(3)(2)$$

$$\Delta=2+2+3+1+1+12 \quad \rightarrow \quad \Delta=-3$$

$$\Delta_x=\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right| = -6+12+4+6-3-16=-3 \quad \rightarrow \quad \Delta_x=-3$$

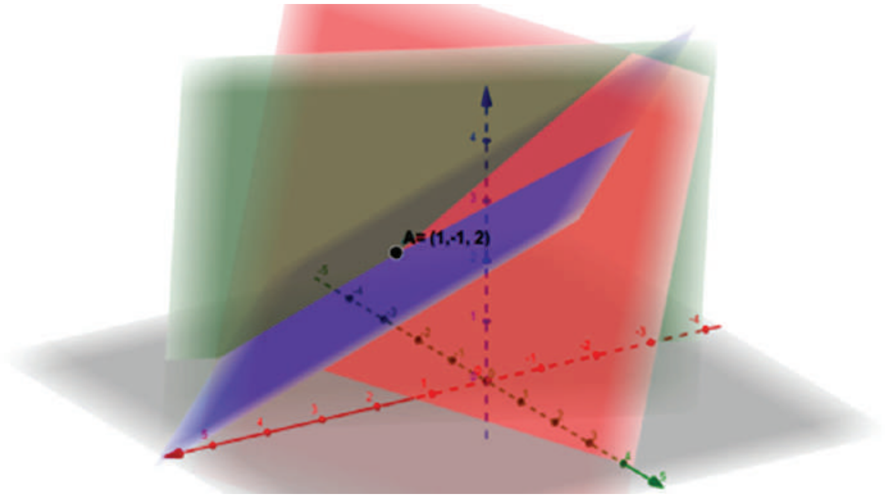
$$\Delta_y=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right| = 8-3-18+4-6+18=3 \quad \rightarrow \quad \Delta_y=3$$

$$\Delta_z=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right| = 6+8+9+3+4-36=-6 \quad \rightarrow \quad \Delta_z=-6$$

Paso 4: Dividimos las fracciones correspondientes para hallar la solución:

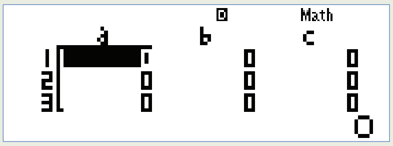
$$x=\frac{-3}{-3} \qquad y=\frac{3}{-3} \qquad z=\frac{-6}{-3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}=1 \quad ; \quad \boldsymbol{y}=-1 \quad ; \quad \boldsymbol{z}=2$$

Gráficamente:

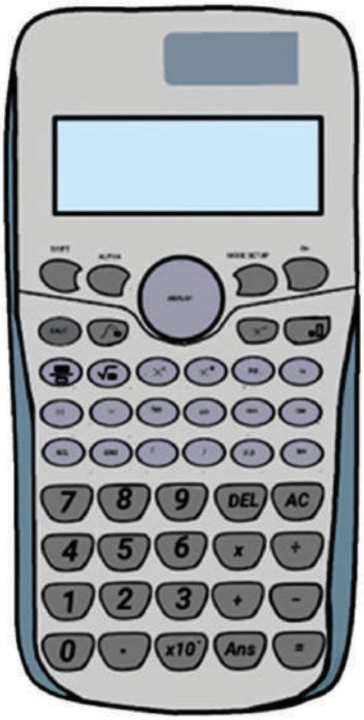


¿QUÉ SON LAS MATRICES?

Introduciendo los datos en una calculadora, es posible encontrar la solución de un sistema de 3x3 de manera directa.



Investiga cómo es posible esto.



Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones lineales fraccionarias con una incógnita:

a) $\begin{cases} 3a+2b-2=0 \\ 2b+2c-\dfrac{3}{2}=0 \\ a+4c-\dfrac{4}{3}=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5u-3v-w=1 \\ u+4v-6w=-1 \\ 2u+3v+4w=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3e+2f-g+1=0 \\ 2e-3f+g-7=0 \\ 5e-f-6=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=z+1 \\ 3x-2(y+z)=0 \\ 3(x+z)=4(y+1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{n+6}{2}-\dfrac{m-p}{3}=1 \\ \dfrac{n+6}{2}-\dfrac{m-p}{6}=1 \\ \dfrac{m-2n-5}{3}-\dfrac{p}{2}=1 \end{cases}$

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

Matemático del siglo III y IV. Autor de libros llamados Arithmetica, que están perdidos.

Su aporte es importante en la resolución de ecuaciones algebraicas.

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y a la tecnología

Ejemplo:

Una familia está compuesta por la madre, el padre y su hija. La suma de las edades actuales de los tres es de 80 años, dentro de 22 años la edad de la hija será la mitad que la de su madre. Si el padre es mayor, por un año, que la madre, ¿qué edad tiene cada uno de la actualidad?

Planteamos el problema de la siguiente forma:

Sea: x: La edad de la madre; y: La edad del padre; z: Edad de la hija

Las variables las llevamos a un cuadro que muestre la edad actual y la edad dentro de 22 años:

	EDAD ACTUAL	DENTRO DE 22 AÑOS
Madre	x	x+22
Padre	y	y+22
Hija	z	z+22

Ahora planteamos las ecuaciones según las condiciones que plantea el problema:

1° condición: La suma de las tres edades es de 80: x + y + z = 80…(1)

2° condición: En 22 años la edad de la hija será la mitad que la edad de la madre: $\frac{x+22}{2}=z+22\ldots$ (2)

2° condición: El padre es un año mayor que la madre: y = x + 1... (3)

Reduciendo las ecuaciones generadas anteriormente:

(2): $\dfrac{x+22}{2}=z+22 \rightarrow \dfrac{x}{2}+11=z+22 \rightarrow \dfrac{x}{2}-s=11\ //*(2) \rightarrow x-\ 2s=22$ ... (4)

Ahora el sistema estará formado por:

$$\begin{cases} x+y+z\ =80\ldots(1) \\ x\quad\ -2z=22\ldots\ (2) \\ x-y=\ -1\ldots(3) \end{cases}$$

En la ecuación (3), despejamos la variable "y": y = x + 1

Ahora sustituimos en la ecuación (1) y junto a la ecuación (2) conformaremos un nuevo sistema de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} x+(x+1)+z=80 \\ x-2z=22 \end{cases}$$

Realizamos operaciones:

$$\begin{cases} 2x+z=79\ldots(4) \\ x-2z=22\ldots(5) \end{cases}$$

Por el método de reducción eliminamos “z”:

$$\begin{cases} 2x + z = 79 & // * (2) \\ x - 2z = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2z = 158 \\ x - 2z = 22 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones y transponemos términos: $5x = 180 \rightarrow x = 36$

Ahora sustituimos el último valor en la ecuación (3): $36 - y = -1 \rightarrow y = 36 + 1 \rightarrow y = 37$

Finalmente, hallamos el valor de z en la ecuación (1): $x + y + z = 80 \rightarrow 36 + 37 + z = 80 \rightarrow z = 7$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 36$, $y = 37$, $z = 7$

Esto significa que, la edad de la madre es 36 años, la edad del padre es 37 años y la edad de la hija es de 7 años

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

- En una heladería, por un helado, dos gaseosas y 4 empanadas nos cobraron Bs.35.Al otro día, por 4 helados, 4 gaseosas y una empanada nos cobraron Bs.34. Un tercer día por 2 helados, 3 empanadas y 4 batidos Bs.42, ¿cuál es el precio de cada uno?
- Un comerciante vende quesos de tres tipos: queso del altiplano, queso menonita, queso chaqueño. Los precios de cada uno de ellos son: 12Bs/Kg,15Bs/Kg y 9 Bs/Kg, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, que el importe total de la venta es de Bs 436 y que el número de kilos vendidos del queso menonita es el doble del queso altiplano. Determinar cuántos kilos de cada clase vendió el comerciante.

VALORACIÓN

La historia de la matemática evidencia que entre 1700 a.C a 1700 d.C, se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Así, los griegos (300 a. de C) desarrollaron basten el álgebra, pero se introducen notaciones simbólicas por Viete (1540-1603), marcando el inicio de una nueva etapa para la ciencia matemática. Descartes (1596-1650) contribuye en la notación algebraica de forma notable, permitiendo que las ecuaciones sean tratadas como hoy se hacen.

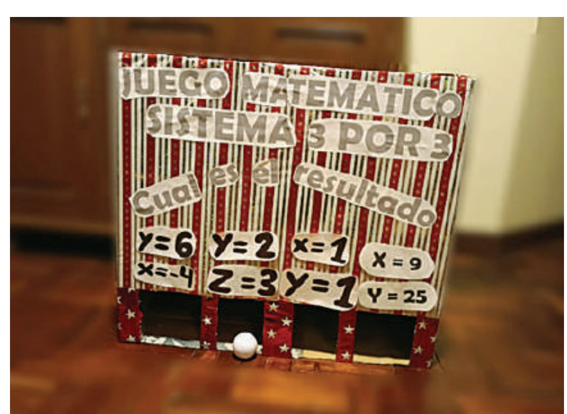
Diofanto (250 d. de C), es otro gran matemático que aporta en el cuestionamiento de las ecuaciones lineales, resaltando la importancia del lenguaje algebraico y su relación estrecha con el lenguaje común.

¿En tu opinión, qué tan importante es conocer los sistemas de ecuaciones 3x3?, ¿por qué?

PRODUCCIÓN

Diseñamos la figura adjunta con los siguientes materiales:

- 1 hoja de cartulina
- 1 caja de colores
- Marcadores
- Hojas bond



En las hojas de color, escribimos ejercicios correspondientes a los sistemas de ecuaciones de 3 incógnitas (1 por hoja)

El juego consiste en que cada persona agarra uno de los ejercicios y cuando lo resuelva, lanza la pelota al hoyo que corresponde a la respuesta correcta para así ser el ganador del juego; en caso de que no ingrese al hoyo correcto, tomará otro papel con otro ejercicio y repetirá el proceso. Todos los jugadores iniciarán el juego al mismo tiempo.

NÚMEROS COMPLEJOS

PRÁCTICA

Damián es un Técnico Electrónico que repara equipos electrónicos como televisores, equipos de sonido y otros artefactos. Él es consciente que no es suficiente aprender a manejar el cautín o soldador para que los equipos funcionen de forma correcta, por ello decidió dedicarse de forma plena a ese campo estudiando Electrónica en una Institución Superior.

En uno de sus trabajos le llegó una placa electrónica cuyo problema no pasa simplemente por soldar algún componente; él debe analizar dónde y cómo se generan los impulsos eléctricos del circuito y sus valores para determinar si existe o no una sobrecarga eléctrica.

Actividad

- ¿Existe alguna expresión matemática que representa a una señal de corriente alterna?
- ¿Qué interpretación tendrá cada variable de dicha expresión?
- ¿Con qué instrumento se mide el valor de cada variable?

LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS, CARACTERÍSTICAS:

Números naturales "ℕ", inician a partir de la unidad y se forman sumando 1, pero no tienen decimales.

Números enteros "ℤ", contienen a los números naturales y a los números negativos incluyendo el cero.

Números racionales "ℚ" , son la relación entre dos números enteros, cuya división arroja decimales con un patrón repetitivo.

Números irracionales "𝕀" contienen decimales que no siguen un patrón repetitivo, no se pueden expresar como fracción.

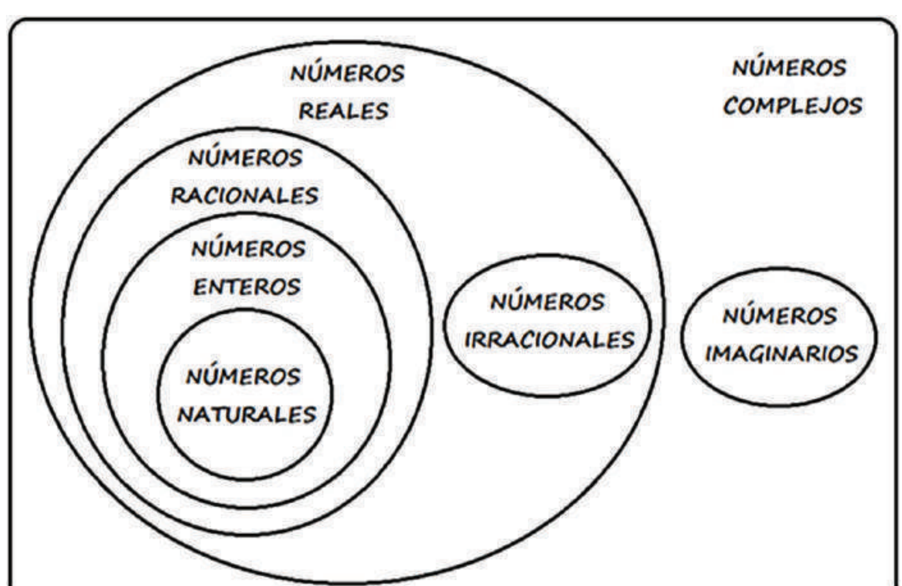
Números reales "ℝ" involucran todas las características anteriores.

1. Conjunto de los números complejos

Se entiende que el conjunto de números complejos es la combinación de número real y un número imaginario; surge con la necesidad de abarcar aspectos que los números reales no lo tienen, en especial para hallar todas las raíces de un polinomio en general (es decir, soluciones que contengan raíces cuadradas de números negativos).

Por convención se denota a un número complejo con la letra "z".

El esquema de los números complejos es el siguiente:



2. Unidad imaginaria y sus propiedades

Los números imaginarios constituyen un conjunto de números definidos como la raíz cuadrada de números negativos. La unidad imaginaria se denota con la letra "i" (del inglés "Imaginary number") y tiene el siguiente valor:

$$i = \sqrt{-1}$$

Propiedades

- El coeficiente del valor imaginario es 1, es decir: $i = 1i$
- Elevando al cuadrado: $(i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$, es decir: $i^2 = -1$
- $-i = (-1) * i$
- Los números imaginarios son escritos usando números reales multiplicados por la unidad imaginaria, por ejemplo $6i, -\frac{2}{3}i, \sqrt{5}i$

3. Potencias de la unidad imaginaria

Conociendo el valor de la unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$, las potencias son:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 * i = (-1)i = -i$
- $i^4 = (-1)(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 * i = 1 * i = i$
- $i^6 = i^5 * i = i * i = i^2 = -1$

DATO CURIOSO

$i^0 = 1 \rightarrow i^4 = 1 \rightarrow i^8 = 1$

$i^1 = i \rightarrow i^5 = i \rightarrow i^9 = i$

$i^2 = -1 \rightarrow i^6 = -1 \rightarrow i^{10} = -1$

$i^3 = -i \rightarrow i^7 = -i \rightarrow i^{11} = -i$

Por tanto, para calcular i^{2025}, se puede hacer:

$$i^{2025} = i^{506\cdot 4+1} = i^{506\cdot 4} \cdot i^1$$

Como $i^{506\cdot 4} = 1$, queda el resultado:

$$i^{2025} = i$$

Ejemplo

$$i^{63} = i^{15\cdot 4+3} = i^3 = -i$$

Actividad

Resolvemos las siguientes potencias:

a) i^{10} b) i^{99} c) $2 * i^{101} - i$ d) $3i^{999} + 5i^{484}$

4. Números complejos y su representación gráfica

Un número complejo "z" es la combinación de los números Reales e Imaginarios, su notación es un conjunto de pares (a,b), donde el primer elemento del par "a" es la parte real del número complejo y el segundo elemento "b" es la parte imaginaria del número complejo.

Expresión Binómica

Se denota a un número complejo de la siguiente forma:

$$\boxed{\boldsymbol{z} = a + bi = (a, b)}$$

donde:

a: es parte real del número complejo

b: es parte imaginaria del número complejo

i: denota la parte imaginaria del número complejo, cuyo valor es: $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$

De la representación gráfica rescatamos que:

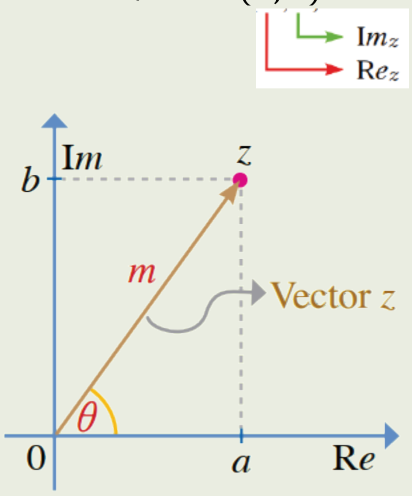
θ es el ángulo de inclinación de z

m es el módulo (tamaño) de z, además:

$$\boxed{m = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

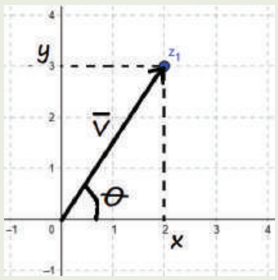
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

$$z = a + bi = (a, b)$$



VECTORES

Por la semejanza del tratamiento de los números complejos con los vectores, debemos conocer algunas características de los mismos:



Donde:

$\bar{v}$: *es la notación del vector con coordenadas* (x, y)

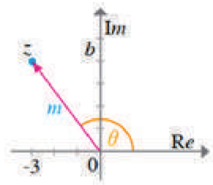
x: *coordenada en el eje* Y

y: *coordenada en el eje* Y

θ: *es el ángulo de inclinación del vector* $\bar{v}$

Ejemplo:

Trazar el vector z=-3+4i hallar el módulo y el ángulo de inclinación.



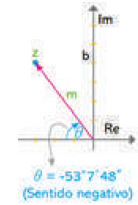
$$m=\sqrt{(-3)^2+4^2}\Rightarrow \boxed{m=5}$$

$$\theta = arco\ tan\left(\frac{4}{-3}\right) = -53°7'48''$$

Reduciéndolo:

$$\theta = 180° - 53°,7'48''$$

$$\boxed{\theta = 126°52'12''}$$



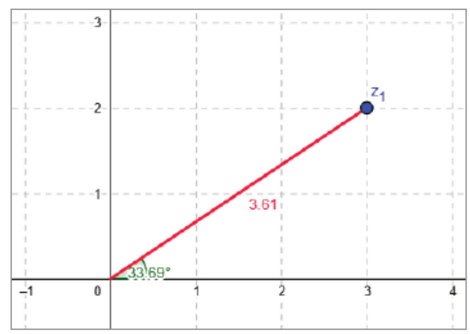
Ejemplo:

Dado el número complejo: z=3+2i, hallar el módulo y el ángulo de inclinación

El módulo del número complejo es: $m = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3.61$

Su ángulo de inclinación es: $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33°41'24.24'' \cong 33.69°$

Gráficamente:



Ejemplo:

Trazar el vector $z=-5+3i$ hallar el módulo y el ángulo de inclinación

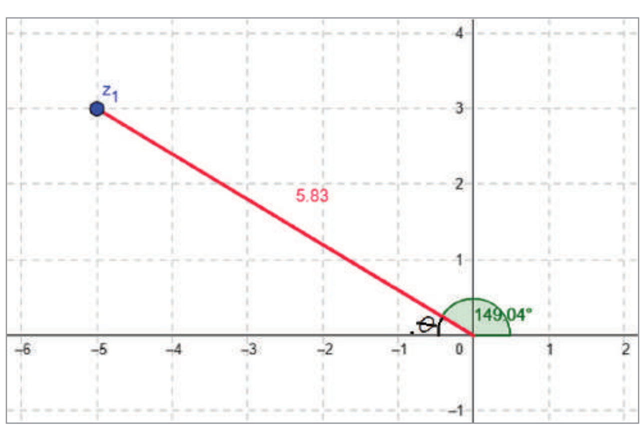
El módulo del número complejo es: $m = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Su ángulo de inclinación es: $\theta = \arctan\left(\frac{3}{-5}\right) = -30°57'49{,}52''$

Como la ubicación del número complejo es en el segundo cuadrante, su ángulo de inclinación corresponde a ese cuadrante θ, por ello, hallaremos el ángulo suplementario que mida desde el primer cuadrante:

$$\theta_s = 180° - 30°57'49{,}52'' = 149°2'10.48'' \sim 149.04°$$

Gráficamente:



Actividad

Hallamos el módulo y ángulo de inclinación de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 6 + 8i$ b) $z_2 = 2 - 3i$ c) $z_3 = -5 - 5i$ d) $z_4 = -10i$

Propiedades

- Número complejo nulo. Tiene la parte real e imaginaria igual a cero.

$$0 = 0 + 0i$$

- Número complejo opuesto. Si el complejo es z = a + bi, entonces su complejo opuesto tiene parte real e imaginaria opuestas respectivamente.

$$z = a + bi \rightarrow -z = -a - bi$$

- Número complejo conjugado. Es el número complejo que tiene la misma parte real que el dado y la parte imaginaria opuesta.

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

- Números complejos iguales. Dos complejos son iguales si y solamente si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$z_1 = z_2 \leftrightarrow a_1 = a_2 \quad y \quad b_1 = b_2$$

INVESTIGANDO

¿Qué son las coordenadas polares?

¿Cómo se escribe un complejo binómico a forma polar?

¿Cómo es la gráfica de una función polar?

VALORACIÓN

Cardano y Bombelli sugirieron hacer uso de números imaginarios pues no podían abastecer la solución de problemas con los números reales. Bombelli optó por el uso de los números imaginarios para resolver algunas ecuaciones, mientras que Wessel representó el plano cartesiano como una manera de mostrar un número complejo para su mejor comprensión. Su uso se extendió tanto en las matemáticas, la física, las ingenierías o la mecánica cuántica.

- ¿En tu opinión, qué tan importante es conocer el uso de los números complejos?
- ¿Qué ramas de la tecnología son las que más utilizan los números complejos?

PRODUCCIÓN

- Construimos un tablero como la figura con los siguientes materiales:
  - Lápices de color
  - Cartulina
  - Marcadores
- Dividimos la hoja de cartulina en varios recuadros y colocamos la potencia del número imaginario como muestra la figura.

El juego consiste en que 4 estudiantes se disponen a lanzar a 2 metros del tablero una moneda. Donde la moneda llegue a caer, el participante debe resolver la potencia del número imaginario indicado. Si la moneda cae fuera del tablero, vuelve a lanzar la moneda hasta que caiga en algún recuadro. El ganador es aquel que acierte más respuestas en sus 6 intentos.

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6
i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}	i^{17}	i^{18}
i^{19}	i^{20}	i^{21}	i^{22}	i^{23}	i^{24}
i^{25}	i^{30}	i^{35}	i^{40}	i^{50}	i^{70}
i^{100}	i^{200}	i^{400}	i^{800}	i^{1600}	i^{3200}

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

PRÁCTICA

Juana, Elvira y María son estudiantes universitarias de Ingeniería Electrónica y pretenden realizar, a partir de conceptos teóricos y reconocimiento de dispositivos, ciertas configuraciones electrónicas.

Para ello requieren de equipos e instrumentos como el osciloscopio, tester, protoboard, bobinas, capacitores, resistencias, fuente de tensión, todo ello para la ejecución del laboratorio y poner en marcha las leyes de Kirchhoff. Su intención es comparar los datos que lanza el osciloscopio con lo hecho en sus cuadernos de trabajo.

Actividad

- Averiguamos qué características y mediciones realiza un osciloscopio.
- ¿Qué es una inductancia o bobina y qué función cumple?
- ¿Qué tipo de componente es la capacitancia?

TEORÍA

FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Si bien conocemos la forma básica de la expresión de un número complejo $(\boldsymbol{z=a+bi})$, *también existen otras nomenclaturas para denotarlo, que aunque no corresponde a este curso, se muestra para conocer más a profundidad dicha nomenclatura. Estas son:*

$\boldsymbol{z=r(cos\theta+isen\theta)}$, *o bien*

$\boldsymbol{z=r*e^{i\theta}}$

Donde:

- z: *es el número complejo*
- r: *el módulo del número complejo*
- θ: *el ángulo de inclinación del número complejo*

1. Adición de números complejos

Sumamos dos o más números complejos separando las partes reales e imaginarias.

Si: $\boldsymbol{z_1}=a+bi,\ \boldsymbol{z_2}=c+di\rightarrow \boldsymbol{z_1}+\boldsymbol{z_2}=(a+c)+(b+d)i$

Propiedades

La suma de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $si\ z_1, z_2\in\mathbb{C}\rightarrow z_1+z_2\in\mathbb{C}$
- Conmutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1$
- Asociativa: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
- Elemento neutro: $0+0i$
- Número complejo opuesto, $-a-bi$

Ejemplo:

Para los números complejos $\boldsymbol{z_1=4+3i},\ \boldsymbol{z_2=-3+2i},$ hallar: z_1+z_2

Sea $\boldsymbol{z_3=z_1+z_2}$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria)

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{z_1=4+3i} \\ \boldsymbol{z_2=-3+2i} \\ \hline \boldsymbol{z_1+z_2=[4+(-3)]+(3+2)i} \\ \boldsymbol{z_3=z_1+z_2=1+5i} \end{array}$$

2. Sustracción de números complejos

Restamos dos o más números complejos separando las partes reales e imaginarias

Si: $\boldsymbol{z_1}=a+bi,\ \boldsymbol{z_2}=c+di\rightarrow \boldsymbol{z_1}-\boldsymbol{z_2}=(a-c)+(b-d)i$

Propiedades

La resta de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $si z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutativa: $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$
- Asociativa: $(z_1 - z_2) - z_3 \neq z_1 - (z_2 - z_3)$
- Elemento neutro: $0 + 0i$
- Número complejo opuesto, $-a - bi$

Ejemplo:

Sean los números complejos $\boldsymbol{z_1 = 4 + 3i}$, $\boldsymbol{z_2 = -3 + 2i}$, hallar: $z_1 + z_2$

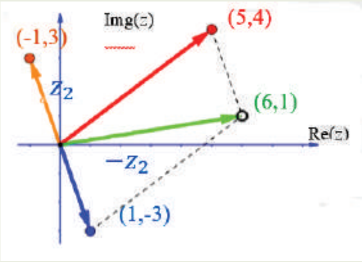
Sea $\boldsymbol{z_3 = z_1 + z_2}$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria).

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{z_1 = 4 + 3i} \\ \boldsymbol{z_2 = -3 + 2i} \\ \hline \boldsymbol{z_3 = z_1 + z_2 = [4 - 3] + (3 + 2)i} \\ \boldsymbol{z_3 = z_1 + z_2 = 1 + 5i} \end{array}$$

EJEMPLO GRÁFICO

$$\begin{array}{c} z_1 = \quad + \ i \\ -z_2 = 1 - 3i \\ \hline z_1 - z_2 = 6 + 1i \end{array}$$



Actividad

Para: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -6 + i$ y $z_3 = -2 - 8i$, resolvemos las siguientes operaciones:

a) $z_4 = z_1 + z_2$

b) $z_8 = z_1 + z_2 - z_3$

c) $z_5 = z_2 + z_3$

d) $z_9 = z_2 - (z_1 + z_3)$

e) $z_6 = z_3 - z_2$

f) $z_{10} = z_1 + z_2 + z_3$

g) $z_7 = z_2 - z_1$

3. Multiplicación

Multiplicamos dos o más números complejos aplicando la propiedad distributiva entre sus componentes y recordando las potencias de la unidad imaginaria.

Si: $\boldsymbol{z_1} = a + bi$, $\boldsymbol{z_2} = c + di$, la multiplicación de ambas es:

$$\begin{array}{c} a + bi \\ c + di \\ \hline a*c + c*bi + a*di + d*bi^2 \end{array}$$

Si: $i^2 = -1 \rightarrow a*c + c*bi + a*di + d*b(-1)$

El resultado será: $\boldsymbol{(a + bi)(c + di) = (a*c - b*d) + (b*c + a*d)i}$

Nota. En la multiplicación es conveniente aplicar la multiplicación algebraica para encontrar el producto de dos complejos.

Propiedades

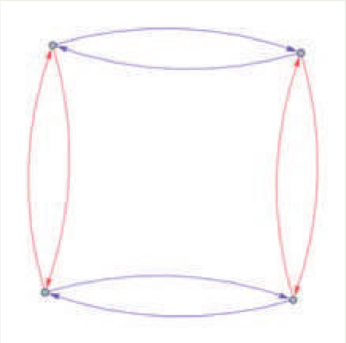
La multiplicación de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $si z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1 * z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutativa: $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
- Asociativa: $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
- Distributiva respecto a la suma: $(z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z_3 + z_2 * z_3$
- Elemento neutro: 1

INVESTIGACIÓN

*El conjunto de los números complejos, desprovisto del elemento neutro de la adición, es un **grupo abeliano** respecto de la multiplicación.*

Un grupo abeliano es un grupo en el que la operación interna satisface la conmutatividad, esto, evidentemente, no sucede en el conjunto de los números complejos.



Ejemplo:

Sean los números complejos $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = -3 + 2i$, hallar $z_1 * z_2$

Sea $z_3 = z_1 * z_2$, ubicamos cada número complejo uno debajo del otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria)

$$z_1 = 4 + 3i$$
$$z_2 = -3 + 2i$$
$$z_3 = z_1 * z_2 = (-3)(4) + (-3)(3i) + (2i)(4) + (2i)(3i)$$
$$z_3 = z_1 * z_2 = -12 - 9i + 8i + 6i_2$$
$$z_3 = z_1 * z_2 = -12 - 9i + 8i + 6(-1)$$
$$z_3 = z_1 * z_2 = -18 - i$$

4. División

Dividimos dos números complejos multiplicando y dividiendo por la conjugada del divisor para eliminar la unidad imaginaria del denominador.

Si: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, la división de ambas será:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} * \frac{c-di}{c-di} = \frac{a*c + a*di + c*bi - b*d*i^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{a*c + (a*d + c*b)i - b*d*(-1)}{c^2 - d^2 * i^2}$$
$$= \frac{(a*c + b*d) + (a*d + c*b)i}{c^2 - d^2 * (-1)} = \frac{(a*c + b*d) + (a*d + c*b)i}{c^2 + d^2}$$

Propiedades. La división de números complejos tiene las propiedades:

- Clausura: $si z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1/z_2 \in \mathbb{C}$
- Conmutativa: $z_1/z_2 \neq z_2/z_1$
- Asociativa: $(z_1/z_2)/z_3 \neq z_1/(z_2/z_3)$
- Elemento neutro: 1

Ejemplo: Sean los números complejos $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = -3 + 2i$, hallar z_1/z_2

Sea $z_3 = z_1/z_2$

Ubicamos cada número complejo uno debajo de otro, en sus correspondientes columnas (parte real e imaginaria)

$$\frac{4+3i}{-3+2i} = \frac{4+3i}{-3+2i} * \frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{(4)(-3) + (4)(-2i) + (3i)(-3) + (3i)(-2i)}{(-3)^2 - (2i)^2} = \frac{-12 - 8i - 9i - 6*i^2}{9 - (2)^2(i)^2}$$
$$= \frac{-12 - 17i - (6)(-1)}{9 - (4)(-1)} = \frac{-6 - 17i}{13} \cong -046 - 1.31i$$

Actividad

Para: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -6 + i$ y $z_3 = -2 - 8i$, **resolvemos las siguientes operaciones:**

a) $z_4 = z_1 * z_2$

c) $z_5 = z_2/z_3$

e) $z_6 = z_3 * z_2$

g) $z_7 = {}^{z_2}/_{z_1}$

b) $z_8 = z_1 * ({}^{z_2}/_{z_3})$

d) $z_9 = {}^{z_2}/_{(z_1 * z_3)}$

f) $z_{10} = {}^{(z_1 * z_2)}/_{z_3}$

5. Conjugado de un número complejo

Sea el número complejo: $z = a + bi$, el conjugado del mismo es: $z = a - bi$

Definición: Dos números complejos son conjugados si y solo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

Notación: El conjugado del número complejo $z=a+bi$ es: z o $\overline{(a\ +bi)}$

Propiedades

- El conjugado de la suma es igual a la suma de los conjugados: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- El conjugado del producto es igual al producto de los conjugados: $\overline{z_1*z_2}=\overline{z_1}*\overline{z_2}$
- El conjugado del conjugado es el número complejo original: $\overline{\overline{z}}=z$
- La suma de dos números complejos conjugados es igual al duplo de la parte real.

Ejemplo:

Hallar el conjugado del $z=3-\ i$

El conjugado es el cambio de signo a la parte imaginaria, es decir: $z=\overline{(3-i)}=3+\ i$

6. Operaciones combinadas

En esta sección incluyen las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el conjugado.

Ejemplo:

Resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) $(\sqrt{\mathbf{3}}+\boldsymbol{i})*(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i})+\overline{(-\mathbf{2}+\boldsymbol{i})}$

Aplicamos la propiedad distributiva: $\sqrt{3}*1+\sqrt{3}*\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}\,i_2-2-i$

Multiplicamos términos: $\sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}-2-i$

Simplificamos términos semejantes: $\mathbf{-2+3}\boldsymbol{i}$

b) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{2}{1+i}-\frac{1}{i}$

$$\frac{(1+i)(1+i)i+2i(1-i)-(1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)i}=\frac{(1+i)^2i+2i-2i^2-(1-i^2)}{(1-i^2)i}=\frac{(1+2i+i^2)i+2i+2-1-1}{(1+1)i}$$

$$\frac{i-2-i+2i+2-2}{2i}=\frac{-2}{2i}+\frac{2i}{2i}=\frac{-2}{2i}*\frac{i}{i}+1=\frac{-2}{2i^2}i+1=\frac{-2}{2(-1)}i+1=\boldsymbol{i}+\mathbf{1}$$

c) $\boldsymbol{i}+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{1+\frac{1}{i}}}}$

Dividimos por partes de abajo hacia arriba:

$$\boldsymbol{i}+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{1+\frac{1}{i}}\Big\}_1}\Big\}_2}\Bigg\}_3\Bigg\}_4$$

En 1: $1+\frac{1}{i}=\frac{i+1}{i}\rightarrow\frac{1}{\frac{i+1}{i}}=\frac{i}{1+i}$

En 2: $i+\frac{i}{1+i}=\frac{i(1+i)+i}{1+i}=\frac{i+i^2+i}{1+i}=\frac{2i-1}{1+i}*\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{2i-2i^2-1+i}{1-i^2}=\frac{2i+2-1+i}{1+1}=\frac{3i+1}{2}\rightarrow\frac{1}{\frac{3i+1}{2}}=\frac{2}{1+3i}$

En 3: $i+\frac{2}{1+3i}=\frac{i(1+3i)+2}{1+3i}=\frac{i+3i^2+2}{1+3i}=\frac{i-3+2}{1+3i}=\frac{-1+i}{1+3i}\rightarrow\frac{1}{\frac{-1+i}{1+3i}}=\frac{1+3i}{-1+i}$

En 4: $i+\frac{1+3i}{-1+i}=\frac{i(-1+i)+1+3i}{-1+i13}=\frac{-i+i^2+1+3i}{-1+i}=\frac{-i-1+1+3i}{-1+i}=\frac{2i}{-1+i}*\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-2i-2i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{-2i-2(-1)}{1+1}=\frac{2-2i}{2}$

El resultado final es: $\mathbf{1}-\boldsymbol{i}$

Actividad

Para: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -6 + i$, $z_3 = -2 - 8i$ y $z_4 = 4 - i$

Resolvemos las siguientes operaciones combinadas:

a) $z_5 = (z_1 + z_2) * (z_3)$

c) $z_6 = {(z_1 + z_2)}/{(z_3 - z_4)}$

e) $z_7 = {(z_1 * z_2)}/{(z_3 * z_4)}$

b) $z_8 = z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3}}$

d) $z_9 = \frac{z_1}{z_2 - z_3} - \frac{z_4}{z_1 - \frac{z_2}{z_3}}$

f) $z_{10} = z_4 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z_4}}}}$

7. Resolución de problemas aplicados al contexto de la tecnología

En la electrónica:

La impedancia es conocida por oponerse al paso de corriente alterna. Su ecuación es: $\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}$

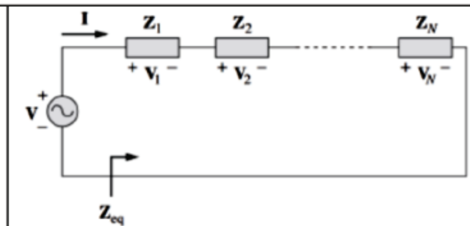
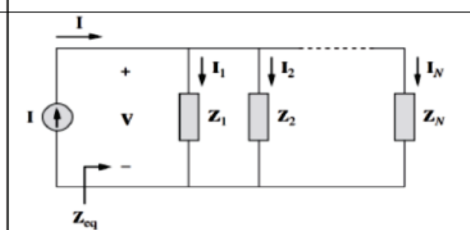
Donde: Z: es la impedancia $[\boldsymbol{\Omega}]$, V: es el voltaje $[\boldsymbol{V}]$, I: es la corriente alterna que pasa por el circuito $[\boldsymbol{A}]$, a su vez, la impedancia se puede expresar como un número complejo: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{iX}\ [\Omega]$

Donde:

R: es la resistiva a la impedancia, cuya figura es:

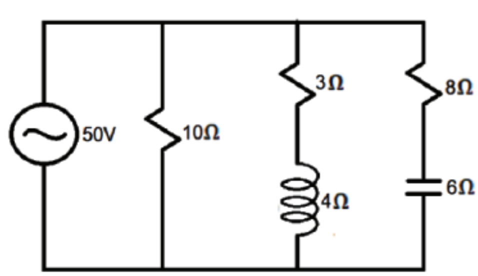
X: es la reactancia:

- Si es inductor, $X = X_L$ (figura:)
- Si es capacitor, $X = -X_C$ (figura:)

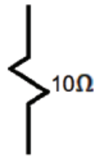
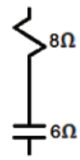
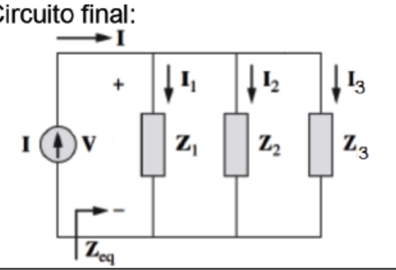
En circuitos eléctricos con varias impedancias, tenemos 2 casos:	
Impedancia equivalente en serie: $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$	
Impedancia equivalente en paralelo: $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$	

Ejemplo

Hallar la impedancia equivalente y la corriente del siguiente circuito electrónico:



1. Calcula las impedancias parciales:

	Solo lleva una resistencia: $Z_1 = 10$		Lleva una resistencia y un inductor: $Z_2 = 3 + 4i$		Lleva una resistencia y un capacitor: $Z_3 = 8 - 6i$	Circuito final: 

2. Identificamos el tipo de circuito: en paralelo

3. Calculamos la impedancia equivalente: $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3+4i} + \frac{1}{8-6i}$

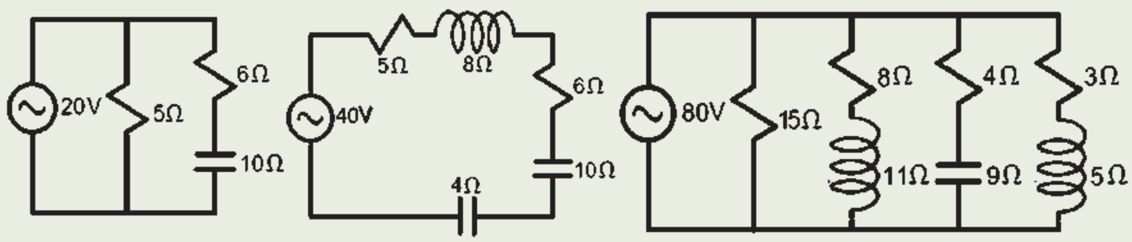
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{(3+4i)(8-6i) + (10)(8-6i) + (10)(3+4i)}{(10)(3+4i)(8-6i)} \rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{48+14i+80-60i+30+40i}{(30+40i)(8-6i)} \rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{158-6i}{480+140i}$$

$$Z_{eq} = \frac{480-140i}{158+6i} * \frac{158-6i}{158-6i} \rightarrow Z_{eq} = \frac{75000-25000i}{25000} \rightarrow \boldsymbol{Z_{eq} = 3 - i};$$

La intensidad de corriente es: $z = \frac{V}{I} \rightarrow I = \frac{V}{Z} \rightarrow I = \frac{50}{3-i} * \frac{3+i}{3+i} \rightarrow \boldsymbol{I = 15 - 5i}$

Actividad

Hallamos las impedancias equivalentes y corrientes de los siguientes circuitos:



VALORACIÓN

La última parte de este tema hizo notar la aplicación que tiene el álgebra proposicional en la cotidianidad, el desarrollo de los aparatos electrónicos que se tienen en la mayor parte de los hogares bolivianos.

- ¿En tu opinión, qué tan importante es la utilización de los números complejos en las ciencias?

- ¿Qué significan las señales sinusoidales, movimiento ondulatorio o amplitud de onda en la electrónica?

PRODUCCIÓN

Construimos una ruleta como la figura con los siguientes materiales:

- Hojas de color
- Cartón
- Marcadores
- Hojas bond (para los ejercicios)

Dividimos las hojas bond en trozos pequeños y escribimos números complejos en cada uno.

Construimos una caja de cartón donde se encontrarán estas fichas.

El juego consiste en que 4 estudiantes sacan dos papelitos cada uno de la caja y luego giran la ruleta para realizar la operación entre los dos papelitos donde haya caído la flecha. El estudiante que logre resolver de forma correcta, en las 6 opciones que le toque, gana el juego.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Ecuaciones lineales con una incógnita

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $8x + 2 = 6x + 4$

b) $\frac{x-2}{3} = 3$

c) $2(x-3) + 5(x-1) = -4$

d) $5[2x - 4(3x+1)] = -10x + 20$

e) $\frac{5x-9}{4} - \frac{3x+5}{4} = \frac{2}{3}$

f) $\frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{3} + 1\right) + x = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

g) $3 - \frac{5x-1}{10} = \frac{x-1}{5} - \frac{x-3}{2}$

h) $x + \frac{3(x-5)}{2} = 3 + \frac{5x-21}{2}$

i) $\frac{2(x-2)}{3} + \frac{3x+1}{3} = \frac{2x-5}{12}$

j) $\frac{2}{3}\left[2(x+1) - \frac{x+1}{2}\right] = 5\left(\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6}\right)$

k) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

l) $15x - 20 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$

m) $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$

n) $4(x - 2) - 5(2x - 6) = 8(x + 1) - 3(2x + 3)$

o) $7(3x + 1) + 8(2x - 3) = 4(3x - 1) - 7(x - 4)$

p) $30w - (-w + 6) + (-5w + 4) = -(5w + 6) + (-8 + 3w)$

q) $-\{3y + 8 - [-15 + 6y - (-3y + 2) - (5y + 4)] - 29\} = -5$

r) $-2y - 3 - \{-4y + 5 + [-y + 2 - (3y - 1) + 2y - 5]\} = -(y - 4)$

s) $\left(\frac{a+1}{ax+1} + \frac{x+1}{x+a^{-1}} - 1\right) : \left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a} - \frac{a(x+1)}{ax+1} + 1\right] = \frac{x}{2}$

t) $\frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$

u) $\frac{1}{26}x + \frac{25}{26}x = 1$

v) $\frac{1}{2}x + \frac{21}{14}x = 36$

w) $\frac{1}{2}x + \frac{17}{34}x = 19$

x) $\frac{1}{6}x + \frac{19}{38}x = 4$

Problemas de aplicación

a) Encontrar un número que cumple que la suma de su doble y su triple es igual a 100.

b) El padre de Juan tiene 30 años más que él y su madre tiene 5 años menos que su padre. Cuál es la edad actual de Juan sabiendo que la suma de las edades de su padre es 7 veces la edad de Juan.

c) Buscar un número positivo x de modo que al sumarlo con su doble se obtenga el triple de dicho número

d) En una elección escolar reciente, se contaron 980 votos. El ganador recibió 372 votos más que el perdedor. ¿Cuántos votos recibió cada candidato?

e) Repartir 350 naranjas entre tres personas, modo que la primera reciba 15 naranjas más que la segunda y ésta 10 naranjas más que la tercera.

f) Una joven pagó Bs 350 por un vestido y un sombrero. Determínese el precio del vestido sabiendo que este costó Bs 150 más que sombrero.

g) Juana, Julia y Josefa trabajaron en total dieciocho horas en una fiesta escolar. Juana y Julia completaron once entre ambas y Josefa trabajo una hora más que Juana. Determínese cuántas horas trabajó cada una.

h) La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.

i) La diferencia de dos números es 17 y la suma de ambos es 451. Determina los números.

j) La suma de tres números enteros pares consecutivos es 276. Determina los números.

k) La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Encuentra los números.

l) La diferencia de dos números es 36 y un medio del mayor excede en dos al menor. Determina los números.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas

Resolver por sustitución:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = -10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7p - 3q = -28 \\ 5q - 4p = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 7y - 12x = 17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x = -2y + 3 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

Resolver por igualación:

a) $\begin{cases} -2x + 4y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6r - 5t = -11 \\ 7t - 8r = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12u - 16v = 24 \\ 3u - 4v = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -5x - 15y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 8p - 3q = 8 \\ 2p + 9q = 15 \end{cases}$

Resuelve por reducción o eliminación:

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x = -2y + 3 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} + 4y = \frac{13}{3} \\ \frac{2(-2y+x)}{3} - \frac{3x}{2} = \frac{-13}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{7x-9y}{2} - \frac{2x+4}{2} = -15 \\ 5(x - 1 + y) = 25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8p - 3q = 8 \\ 2p + 9q = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 8x + 4y = 36 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 4y = 32 \\ 5x + y = 38 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4p - 3q = -2 \\ 20p - 15q = -1 \end{cases}$

Resolver por determinantes:

a) $\begin{cases} x + 7y = 1 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20x + 13y = 12 \\ -6x + 10y = 11 \end{cases}$

c) Averigua cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones representando las dos rectas en los mismos ejes: $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7p - 3q = -28 \\ 5q - 4p = 16 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 12u - 16v = 24 \\ 3u - 4v = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -5x - 15y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 8p - 3q = 8 \\ 2p + 9q = 15 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 8x + 4y = 36 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x - 4y = 32 \\ 5x + y = 38 \end{cases}$

Problemas de aplicación

a) En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es 30° mayor que el otro. ¿Cuánto mide sus tres ángulos?

b) La distancia entre las ciudades A y B es 255 km. Un móvil sale de A hacia B con una velocidad de 90 km/h. El móvil B sale al mismo tiempo hacia A con velocidad de 80 km/h. Si su velocidad es constante, determina el tiempo que tardan en encontrarse, además de la distancia que recorre cada uno hasta encontrarse.

c) La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es de 4 cm y su área es de 24 cm^2. Calcula la longitud de sus bases.

d) En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar Bs 1060, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron Bs 1100. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

e) Al revisar sus facturas de pago, el señor Apaza se percata de que la empresa de mensajería y paquetería “La Paloma”, le cobró Bs1924 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que por los paquetes que envió a Santa Cruz cobró a Bs 92 por kilogramo y por los que mandó a Pando Bs 30 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON 3 INCÓGNITAS

Ecuaciones lineales de primer grado con tres incógnitas

Resolver por el método de determinantes:

a) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 14y + 3z = 26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + z = 24 \\ x + y - z = -14 \\ -x - 10y + 5z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3y - 4z = 20 \\ -5x + z = -12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 16 \\ x - 6y + 2z = -9 \\ 3x + 4y - z = 32 \end{cases}$

e) $\begin{cases} d - e - 4f = -4 \\ 2d + 2e + f = 11 \\ d + e + 3f = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + y - 6z = 1 \\ 4x - 2y - 9z = 15 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 5y - z = 4 \\ 10y - 6x - 3z = 1 \\ 4z - 15y + 9x = -1 \end{cases}$

Resolver por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x - \frac{y+z}{3} = 2 \\ y - \frac{x+z}{8} = 10 \\ x - \frac{y-x}{2} = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{4}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4n - 2m - 3r = 1 \\ m + 3n - 5r = -4 \\ 3m - 5n + r = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 5 \\ \frac{4}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 16 \\ 2x + 3y - 8z = 2 \\ x - y + 3z = 14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - c = 8 \\ b - 2c = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} m + r = 8 \\ 2n - 3r = 3 \\ 2m + 3n - 4r = 19 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = 2(1 + 2y) - 9z \\ y = 2(2z - x) - 13 \\ z = 2(y + 4) + 3x \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = 5 \\ x + 3y - 4z = -5 \end{cases}$

Problemas de aplicación

a) La tienda de videojuegos vendió 600 ejemplares de un videojuego a Bs 6384, el precio original era de Bs 12, pero también ha vendido copias, presuntamente defectuosas, con un descuento del 35% y 40%. Si el número de copias defectuosas que vendió fue la mitad del número de copias en buen estado, se pide calcular a cuántas copias les aplicó el descuento del 35%.

b) El cajero automático de cierta entidad financiera, contiene 95 billetes de Bs 10, Bs 20 y Bs 50, en un total de Bs 2000. Si el número de billetes de Bs 10 es el doble que el número de billetes de Bs 20, Se pide determinar la cantidad de billetes que hay de cada tipo.

c) El hijo, su mamá y su papá, juntos ganan Bs 10953, su mamá gana el doble de lo que gana el hijo, el papá gana2/3 de lo que gana la mamá. ¿Cuánto gana cada uno?

d) Tres hermanos cuyas edades son: el quíntuplo de la edad del primero con el cuádruplo de la edad del segundo y el triple de la edad del tercero, es 60. El cuádruplo de la edad del primero con el triple de la edad del segundo y el quíntuplo de la edad del tercero, es 50. Asimismo, el triple de la edad del primero con el quíntuplo de la edad del segundo y el cuádruplo de la edad del tercero, es 46. Se pide determinar las edades de los tres hermanos.

NÚMEROS COMPLEJOS

Números Complejos

Simplificar los siguientes números imaginarios:

$a) i^{343}$

$b) i^{20}$

$c) i^{40}$

$d) i^{918}$

$e) i^2 + i^3 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

$f) M = (1+i)^6$

$g) (4+3i) * (5+i)$

$h) \left(\sqrt{2}+i\right)^2$

Simplificar los siguientes números complejos:

$a) (1+i)^2$

$b) \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+2i}$

$c) [(1+i)^{-1} - 1]^{-1} + 4(1+i^{-1})^{-1}$

$d) 1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1 - \cfrac{1+i}{1-i}}}}}$

$e) \frac{(1+i)^2}{2-i} + \frac{1}{1-i} - \frac{3}{1+i}$

$f)$ Sabiendo que $z_1 = \frac{1}{2} - i$, $z_2 = -2 + \frac{i}{3}$, $z_3 = -4i$

Determina:

- $z_1 - z_2$
- $z_2 * z_3$
- $z_1 + z_3$
- $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)$
- $z_2\overline{(z_1 - z_3)}$
- $\dfrac{z_1+z_3}{z_2+z_3}$

Representa gráficamente los siguientes números complejos:

$a) z = 4 - 3i$

$b) z = 2 + i$

$c) z = -4 + 3i$

$d) z = -5 - i$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Suma y resta

a) **Si $z = 2 + 3i$ y $z_1 = 5 - 4i$, encuentra $z + z_1$**

b) **Si $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 3 + 2i$, obtén $z_1 + z_2$**

c) **Si $z_1 = 4 - 5i$ y $z_2 = 4 - 5i$, encuentra $z_1 - z_2$**

d) **Si $w = 3 - 4i$ y $w_1 = 2 + 7i$, realiza $w_1 - w$**

e) **Si $z = 1 - i$, $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = i$, encuentra $z_1 - z + z_2$**

f) **Si $z_1 = 7 - 3i$ y $z_2 = 4 - \frac{1}{2}i$, calcula $z_1 + z_2$**

g) **Si $z = 2 - 3i$, $z_1 = 10i$ y $z_2 = 2 + 3i$, realiza $z + z_2 - z_1$**

Multiplicación

1. **$(3-4i)(-3-2i)$**
2. **$(2, 3)(1, -1)$**
3. **$(2, 0)(3, 2)$**
4. **$(1-i)(2, -1)$**
5. **$(1+2i)^2$**
6. **$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$**
7. **Si $z = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y $w = (2,3)$, determina $z \cdot w$**
8. **Si $z_1 = \left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ y $z_2 = \left(0,\sqrt{2}\right)$, efectúa $z_1 \cdot z_2$**
9. **Si $w = 6 - 2i$ y $w_1 = 3i$, encuentra $w \cdot w_1$**
10. **Si $z = (4,-1)$ $z_1 = (2,-3)$ y $z_2 = (-1, 1)$ obtén $z_2(z + z_1)$**
11. **Si $z = 1 - 3i$ $w = \left(\frac{1}{3},0\right)$ y $v = 2 + i$, determina $z(w - v)$**
12. **Si $z = (1,2)$ $z_1 = (2,0)$ y $z_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, encuentra $z \cdot z_1 - 4z_2$**

División

1. $\dfrac{i}{1-2i}$
2. $\dfrac{3-2i}{3+2i}$
3. $\dfrac{1-3i}{i}$
4. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$
5. $\dfrac{1-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$

(Ejercicios y problemas recopilados)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

PRÁCTICA

El centro de estudiantes decide utilizar espacios que se encuentran descuidados para construir jardines y así forestar su ambiente. Para esta actividad, el terreno rectangular tiene un área de 80 m^2, por el espacio que escogieron el largo debe ser el triple del ancho.

Para cuidar de este espacio deciden comprar puntales y alambre tejido ¿Cuántos puntales y que cantidad de alambre tejido tendrán que comprar?

Para promover en sus compañeros conciencia por el cuidado del medio ambiente, la mesa directiva del centro de estudiantes saca una convocatoria para que todos los cursos puedan construir sus jardines y así mejorar los espacios descuidados de su Unidad Educativa, tomando en cuenta el tamaño y la forma que debe tener su jardín.

Actividad

- ¿Qué conceptos se aplican en la construcción de los jardines?
- ¿Qué figura geométrica aparte del rectángulo puedes usar para construir un jardín?
- Analicemos en qué otras áreas utilizan los conceptos de la ecuación cuadrática.
- Además de la construcción de un jardín, ¿dónde emplearías estos saberes y conocimientos?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos para la construcción de jardines en tu casa y colegio?

TEORÍA

1. Función cuadrática y sus características

Las trayectorias parabólicas, o concretamente las parábolas, son representaciones geométricas de las funciones cuadráticas. Las características de una parábola son:

- Las ramas determinan la concavidad o convexidad.
- Los puntos en que se corta con el eje horizontal se llaman “ceros”, “raíces” o “puntos de intersección”.
- Una de las ramas corta al eje vertical en un punto de coordenadas $(0;y)$.
- El vértice es el punto más alto si la parábola se abre hacia abajo y el punto más bajo si la parábola se abre hacia arriba.
- La rama izquierda es simétrica con la rama derecha, con relación al vértice de la parábola.

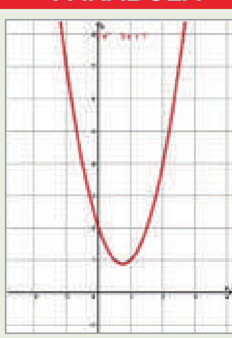
La ecuación cuadrática trata de tomar la función cuadrática cuando las ordenadas son iguales a cero, es decir: $f(x)=0$, por lo que siendo la función parabólica $f(x)=ax^2+bx+c$ cuando $f(x)=0$ se tiene la ecuación de una sola incógnita, cuya forma general es:

$$ax^2+bx+c=0;\ a \neq 0$$

Por lo que pueden existir ecuaciones que al transformarlas o llevarlas a su forma, resultan ser ecuaciones cuadráticas, veamos, por ejemplo:

Ecuaciones	¿Qué hacer?	Forma cuadrática	Valores a, b y c
$x^2=2x+3$	Transponer términos e igualar a cero.	$x^2-2x-3=0$	a=1, b=-2, c=-3
$3(x^2-3x)=2$	Desarrolla paréntesis e igualar a cero.	$3x^2-9x-2=0$	a=3, b=-9, c=-2
$2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$	Multiplica por x^2	$x^2+3x+2=0$	a=1, b=3, c=2

PARÁBOLA



La parábola puede estar ubicada en cualquier punto del plano cartesiano, y puede estar abierta hacia arriba o hacia abajo.

Así,

ax^2 es el término cuadrático

bx es el término lineal

c es el término independiente

2. Métodos de resolución de una ecuación cuadrática

La ecuación de segundo grado se clasifica de la forma siguiente:

• **Incompleta pura:** Puede expresarse de las dos maneras siguientes.

$$ax^2 + c = 0; \quad a \neq 0$$

donde los valores de "a" y de "c" son distintos de cero. Se resuelve despejando "x".

Ejemplo:

Determinar las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadráticas.

1) $x^2 - 12 = 4$

Despejando x^2

$$x^2 = 4 + 12 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16}\begin{cases} x_1 = +4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

2) $x^2 - 16 = 65$

Despejando x^2

$$x^2 = 65 + 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{81}\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$

Una ecuación cuadrática incompleta: $ax^2 = 0$, con "a" distinto de cero. Su única solución de multiplicidad es $x = 0$.

• **Incompleta mixta**: Se expresa como:

$$ax^2 + bx = 0$$

donde los valores de "a" y de "b" son distintos de cero. Se resuelve por factorización de "x". Siempre una de sus soluciones es: $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-b}{a}$

Ejemplo:

Determinar las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadráticas.

1) $3x^2 - 12x = 0$

Factorizando x

$$x(3x - 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad 3x - 12 = 0$$

$$x_2 = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$$

• **Completa**. Se expresa como $ax^2 + bx + c = 0$ o $x^2 + bx + c = 0$

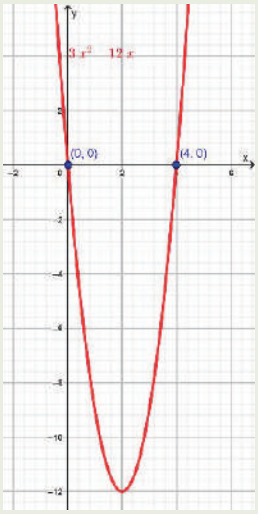
donde los tres factores: *a, b y c*, son distintos de cero. Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversos métodos, los cuales iremos estudiando por casos.

DATO

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, tienen dos soluciones n o necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas conjugadas).

CEROS DE UNA FUNCIÓN

Sabias que: al resolver una ecuación cuadrática se están encontrando los ceros de la función cuadrática.



$$3x^2 - 15x = 0 \text{ Factorizando } x$$

$$3x(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad y_2 - 5 = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad y_2 = 5$$

De ahí que 0 y 5 son los "ceros" de la función cuadrática.

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado $ax^2 + c = 0$

a) $ax^2 + c = 0$
b) $x^2 - 81 = 0$
c) $3x^2 - 56 = 0$
d) $6x^2 - 72 = 0$
e) $2x^2 - 18 = 0$
f) $5x^2 - 125 = 0$

Encontremos la solución de las ecuaciones $ax^2 + bx = 0$

g) $3x^2 - 6x = 0$
h) $x^2 + 5x = 0$
i) $3x^2 - 9x = 0$
j) $x^2 - 3x = 0$
k) $2x^2 + 8x = 0$
l) $3x^2 + 4x = 0$

DATOS IMPORTANTES

Ecuación Completa General:

$ax^2+bx+c=0;\ a\neq 1\ \ b\neq 0$
$c\neq 0$

Ecuación Completa Particular

$x^2+bx+c=0;\ a=1\ \ b\neq 0$
$c\neq 0$

a) Completando cuadrados

Procedimiento:

- Se divide la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ entre "a" para lograr que el coeficiente de x^2 sea: 1. En caso de ser necesario.
- Se transpone el término independiente al segundo miembro.
- Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x", a fin de convertir este miembro a un trinomio cuadrado perfecto.
- Se factoriza el primer miembro.
- Se aplica la propiedad de la raíz cuadrada.
- Se despeja la variable y se hallan las raíces o soluciones de la ecuación.

Ejemplos

Resolver las ecuaciones dadas, completando cuadrados.

1) $x^2-2x-3=0$

$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2=3+\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$x^2-2x+1=3+1$$

$$(x-1)^2=4$$

$$x-1=\pm\sqrt{4}$$

$$x=\begin{cases}2+1\\-2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-1\end{cases}$$

2) $2x^2-11x+12=0 \quad \|\div 2$

$$x^2-\frac{11}{2}x+6=0$$

$$x^2-\frac{11}{2}x+\left(\frac{\frac{11}{2}}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{\frac{11}{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2-\frac{11}{2}x+\left(\frac{11}{4}\right)^2=-6+\left(\frac{11}{4}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=-6+\frac{121}{16}$$

$$x-\frac{11}{4}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x=\begin{cases}\frac{5}{4}+\frac{11}{4}\\-\frac{5}{4}+\frac{11}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\x_2=\frac{3}{2}\end{cases}$$

b) Factorización

Luego de transformar una ecuación a su forma general (igualada a cero), es posible tomar el trinomio y factorizarlo o escribirlo como el producto de sus factores, a continuación, se iguala cada factor a cero y se resuelve la nueva ecuación.

Ejemplos:

1) $x^2+6x+9=0$; este es un caso de un trinomio cuadrado perfecto.

$$\underbrace{x^2}_{\sqrt{\ }\ x}+\underbrace{6x}_{2\bullet x\bullet 3}+\underbrace{9}_{\sqrt{\ }\ 3}=0\ \rightarrow\ (x+3)^2=0$$

$$(x+3)^2=0\quad\Rightarrow\quad x+3=0\quad\Rightarrow\quad x=-3$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+4x+3=0$
b) $2x^2+5x-1=0$
c) $2x^2-3x-4=0$
d) $5x^2+5x+1=0$
e) $7x^2+7x+1=0$
f) $2x^2-8x-24=0$
g) $2x^2-5x+1=0$
h) $3x^2-6x+2=0$
i) $2x^2+5x-3=0$
j) $3x^2-12x+12=0$

2) $x^2-10x+25=36$; en este caso factorizamos el primer, miembro.

$$\underset{\sqrt{\ }\ x}{x^2}-\underset{2\bullet x\bullet 5}{10x}+\underset{\sqrt{\ }\ 5}{25}=36 \Rightarrow (x+5)^2=36$$

$$x+5=\sqrt{36} \Rightarrow x+5=\pm 6 \Rightarrow x=\begin{cases}6-5\\-6-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-11\end{cases}$$

3) $2x^2+x-10=0$; resolvemos aspa simple.

$$2x^2+x-10=0 \Rightarrow (2x+5)(x-2)=0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & 5 & =5x \\ x & -2 & =-4x \\ & & x \end{array}$$

$$2x+5=0 \quad x \quad x-2=0 \Rightarrow x=\begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{2}\\x_2=+2\end{cases}$$

4) $2x^2-8x+7=0$; aquí convertiremos a el 1[er] y 3[er] término en cuadrados.

$2\bullet(2x^2-8x+7)=(0)\bullet 2$; multiplicamos por 2 a ambos miembros.

$4x^2-16x+14+2=0+2$; ahora sumamos 2 a ambos miembros.

$4x^2-16x+16=2$; factorizando.

$$\underset{\sqrt{\ }\ 2x}{4x^2}-16x+\underset{\sqrt{\ }\ 4}{16}=2$$

$$(2x-4)^2=2 \Rightarrow 2x-4=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2x=\begin{cases}4+\sqrt{2}\\4+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\\x_2=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$x_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \quad x_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Fórmula general

Para una ecuación cuadrática con coeficientes reales o complejos existen siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas conjugadas). Fórmula general para la obtención de raíces:

DATOS IMPORTANTES

Para encontrar las soluciones igualamos a cero cada factor y se despeja para la variable. Igualamos a cero ya que sabemos que, si un producto es igual a cero, uno de sus multiplicandos, o ambos, es igual a cero.

CURIOSIDAD

Sea la ecuación $x^2+6x+8=0$

En este caso no resulta un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2+6x+8+1=0+1$$

sumamos $+1$ *en ambos miembros*

$$\underset{\sqrt{\ }\ x}{x^2}+\underset{2\bullet x\bullet 3}{6x}+\underset{\sqrt{\ }\ 3}{9}=1$$

$$(x+3)^2=1 \Rightarrow x+3=\sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}1-3\\-1-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-4\end{cases}$$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas, por factorización:

a) $x^2+6x+8=0$

b) $x^2+7x+120=0$

c) $x^2+27x+180=0$

d) $x^2-5x-84=0$

e) $x^2-14x+48=0$

f) $x^2+30x+221=0$

g) $x^2-11x-84=0$

h) $x^2-15x+44=0$

i) $x^2-x-56=0$

j) $x^2-4x-63=0$

k) $x^2-16x+63=0$

l) $x^2+4x-45=0$

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0,$$

$$x^2+\frac{2bx}{2a}=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Con esta fórmula se obtienen sus dos soluciones que son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

Resolver las ecuaciones cuadráticas por fórmula general.

1) $3x^2+7x+2=0$

$a=3,\ b=7$ y $c=2$, luego $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4(3)(2)}}{2(3)}=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-7\pm5}{6}$$

Solución $x_1=\dfrac{-7+5}{6}=\dfrac{-1}{3}$ $\quad x \quad$ $x_2=\dfrac{-7-5}{6}=-2$

2) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{4}{3}=0$

Para este tipo de ejercicios es preferible que los coeficientes sean enteros:

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{4}{3}=0 \qquad \| \bullet m.c.m.(30)$$

$15x^2-12x-40=0$, donde $a=15$, $b=-12$ y $c=-40$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4(15)(-40)}}{2(15)}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{2544}}{30}=\frac{12\pm4\sqrt{159}}{30}=\frac{2\left(6\pm2\sqrt{159}\right)}{30}$$

Solución $x_1=\dfrac{6+2\sqrt{159}}{15}$ $\quad x \quad$ $x_2=\dfrac{6+2\sqrt{159}}{15}$

d) Po – Shen Loh

Existe un nuevo método para resolver ecuaciones de segundo grado de forma rápida, siempre que el coeficiente de la variable al cuadrado sea uno, es decir, de la forma: $x^2+bx+c=0$. Este método se difundió a finales del 2019 por Po-Shen Loh un profesor de matemáticas en la Universidad Carnegie Mellon y entrenador nacional del equipo de la Olimpiada Internacional de Matemáticas de EE. UU.

Utilizamos la fórmula es $p^2+u^2=c$ donde $p=-\dfrac{b}{2}$ y para hallar la solución final se $x=p\pm u$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas por fórmula general:

a) $16x^2-24x-19=0$
b) $49x^2-28x+13=0$
c) $4x^2+8x+3=0$
d) $x^2+6x-16=0$
e) $5x^2-2x-16=0$
f) $x^2-10x-23=0$
g) $45x^2+22x-3=0$
h) $36x^2-12x+2=0$
i) $\dfrac{6x}{5}-\dfrac{7}{x}=\dfrac{61}{20}$
j) $x^2-2(5x-7)=0$
k) $x^2-7x-30=0$

Ejemplos:

Resolver.

1) $3x^2+14x-5=0$

$$3x^2+14x-5=0 \qquad \Big\| \bullet \frac{1}{3}$$

$$b=\frac{14}{3},\ c=-\frac{5}{3} \qquad x^2+\frac{14}{3}x-\frac{5}{3}=(x-\quad)(x+\quad)$$

$$p=-\frac{b}{2}=-\frac{\frac{14}{3}}{2}=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$$

Así $p^2+u^2=c \rightarrow \frac{49}{9}-u^2=\frac{5}{3} \rightarrow \frac{49}{9}-\frac{5}{3}=u^2 \rightarrow u=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$

Solución $x=p\pm u=\begin{cases} x_1=-\frac{7}{3}-\frac{8}{3}=\frac{-15}{3}=-5 \\ x_2=-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$

2) $x^2-14x+24=0$

$b=14;c=24 \qquad p=-\frac{b}{2}=-\frac{(-14)}{2}=7$

Formula $p^2-u^2=c \quad \rightarrow \quad (-7)^2-u^2=24$

$$49-24=u^2$$

$$u=\sqrt{25}=5$$

Solución $x=p\pm u=\begin{cases} x_1=7-5=2 \\ x_2=7+5=12 \end{cases}$

3. Análisis de la discriminante

En la fórmula de la ecuación cuadrática, la expresión dentro de la raíz cuadrada recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática. Suele representarse con la letra D o bien con el símbolo Δ (delta):

$$\Delta=b^2-4ac$$

• Si $\Delta > 0$. Si el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas (la parábola cruza dos veces el eje de las abscisas: X):

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ y } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

PASOS

Paso 1. Reconocemos "b" y "c"

Paso 2. Hallamos $p=-\frac{b}{2}$

Paso 3. Hallamos "u", reemplazando en $p^2+u^2=c$ con los valores de "p" y "c"

Paso 4. Hallamos la solución final $x=p\pm u$

DISCRIMINANTE

Si $\Delta > 0$. Si el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas (la parábola cruza dos veces el eje de las abscisas: X):

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ y } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

• Si $\Delta = 0$. Si el discriminante es cero, las dos soluciones anteriores coinciden, teniendo la ecuación una única solución, y en este caso es una solución doble (la parábola sólo toca en un punto al eje de las abscisas: X):

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas por Po–Shenloh:

a) $x^2+4x-5=0$

b) $x^2-10x+21=0$

c) $4x^2+8x+3=0$

d) $x^2+6x-16=0$

e) $5x^2-2x-16=0$

f) $x^2+3x-10=0$

g) $x^2+6x+8=0$

h) $x^2-16x+63=0$

i) $x^2+10x-56=0$

j) $x^2-13x-48=0$

k) $x^2-7x-30=0$

DISCRIMINANTE

Si $\Delta < 0$, el discriminante es negativo, la ecuación de segundo grado no tiene solución real, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe, hay dos soluciones complejas conjugadas (la parábola no corta al eje de las abscisas: X):

$$\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ y } \frac{-b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a};$$

donde i es la unidad imaginaria.

$$\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)a}=\sqrt{(-1)}\sqrt{a}=i\sqrt{a}$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$x^2+4=0$$

$$x^2=-4 \qquad x=\pm\sqrt{-4}$$

$$x=\begin{cases} x_1=+2i \\ x_2=-2i \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación es:

$$(x+2i)(x-2i)=0$$

Ejemplos:

Sin resolver las ecuaciones, determinar cuántas soluciones tienen.

3) $x^2-7x+3=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \Delta=(-7)^2-4(1)(3)=37>0$

La ecuación tiene dos soluciones reales.

4) $x^2-8x+16=0$

$\Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta=(-8)^2-4(1)(16)=0$

La ecuación tiene una solución.

5) $x^2-8x+25=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-8)^2-4(1)(25)=-36<0$

La ecuación no tiene soluciones reales.

4. Soluciones imaginarias, propiedades y operaciones

- Si $\Delta<0$, entonces las dos raíces son complejas y, además, una es el conjugado de la otra. Esto es, si una solución es $x_1=a+bi$, entonces, la otra solución es $x_2=a+bi$ (estamos suponiendo que a, b, c son reales).

Ejemplo:

$x^2-3x+7=0$, $a=1$, $b=-3$ y $c=7$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(7)}}{2(1)}=\frac{3\pm\sqrt{9-28}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-19}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{19}i}{2}\begin{cases} x_1=\dfrac{3+\sqrt{19}i}{2} \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{19}i}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(x+\frac{3+\sqrt{19}i}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{19}i}{2}\right)=0$$

Por lo tanto, la ecuación es: $\left(\dfrac{2x+3+\sqrt{19}i}{2}\right)\left(\dfrac{2x-3-\sqrt{19}i}{2}\right)=0$

5. Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Suma de raíces $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; producto de raíces $x_1\bullet x_2=\dfrac{c}{a}$;

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\bullet x_2=0$ ① $\qquad (x-x_1)(x-x_2)=0$ ②

Ejemplo:

Formar la ecuación cuyas raíces son: $x_1=-2$ y $x_2=5$

Suma de raíces $(-2)+5=3$; producto de raíces $(-2)\bullet(5)=-10$

Así: $x^2-3x+-10=0$

Actividad

Determinemos las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

a) $x_1=3$ y $x_2=4$

b) $x_1=-3$ y $x_2=5$

c) $x_1=\dfrac{1}{2}$ y $x_2=6$

d) $x_1=5$ y $x_2=7$

e) $x_1=\dfrac{1}{2}$ y $x_2=\dfrac{1}{4}$

f) $x_1=7$ y $x_2=0$

g) $x_1=-\dfrac{1}{4}$ y $x_2=6$

h) $x_1=m$ y $x_2=n$

6. Aplicaciones

Muchas situaciones, tanto en matemáticas como en otros ámbitos, pueden modelarse y resolverse utilizando ecuaciones cuadráticas con una incógnita, pero a pesar de la heterogeneidad del problema, todas pueden resolverse si se tienen en cuenta algunas consideraciones comunes.

AYUDA

Para resolver un problema de ecuaciones de segundo grado debemos considerar:

¿Qué se pide?

¿Qué datos se tienen?

¿Qué se debe hacer para resolver el problema?

¿Son pertinentes los resultados?

Problema

Calcula el área de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 3 cm se cuadriplica su área.

Datos: $R=$ Radio $\qquad 4\left(\pi r^2\right)=\pi\left(r+3\right)^2$

Desarrollando: $\qquad 4\pi r^2=\pi\left(r+3\right)^2$

$$4r^2=\left(r^2+6r+9\right)$$

$$3r^2-6r-9=0 \qquad\qquad r^2-2r-3=0$$

Resolviendo

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-4)}}{2a}$$

$$r=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}\begin{cases}x_1=\dfrac{2+4}{2}=3\\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Rpta. $A=\pi\cdot r^2=\pi\cdot(3)^2=9\pi.$

Actividad

- El área de un rectángulo es 400 cm2. Calcular las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es 80 metros.
- Un rectángulo tiene de diagonal 23 cm y de altura 13 cm. Averiguar la base y el área.
- Un triángulo isósceles tiene de base 10 cm y de altura 14 cm. Averiguar el perímetro.
- Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 dm respectivamente. Averiguar el lado, el perímetro y el área.
- Hallar dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.
- Calcular el radio de un círculo sabiendo que, si aumentamos el radio en 6 cm, el área se hace nueve veces más grande.

VALORACIÓN

Las ecuaciones cuadráticas son importantes porque son una herramienta matemática fundamental que se pueden utilizar para resolver una amplia gama de problemas de la vida real. En la escuela, las ecuaciones cuadráticas se enseñan como parte del álgebra, sin embargo, su importancia va más allá del aula. Las ecuaciones cuadráticas se utilizan en una variedad de campos, como la física, la ingeniería, las finanzas y la economía.

En ingeniería, las ecuaciones cuadráticas se utilizan para diseñar estructuras como puentes, edificios y máquinas. Por ejemplo, la ecuación para calcular la fuerza necesaria para sostener un puente es una ecuación cuadrática.

- ¿Cómo se emplea el concepto de función cuadrática en la construcción de los arcos triunfales?
- ¿Cómo calculamos y diseñamos un arco triunfal para nuestro hogar?

PRODUCCIÓN

- Elaboremos un informe sobre las aplicaciones de la función cuadrática en la construcción de puentes.
- Investiguemos sobre el diseño y construcción de arcos del triunfo.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y SU APLICACIÓN

PRÁCTICA

Juan y Oscar son los encargados del área de deportes en su curso y en uno de los entrenamientos observan que el balón describe dos trayectorias particulares; visualmente los pases directos son líneas rectas y los lanzamientos de tiro libre describen parábolas.

La trayectoria de la pelota en el aire se puede modelar mediante una parábola descrita por una ecuación cuadrática. Por ejemplo, si la pelota se patea con una velocidad inicial de 100 km/ha un ángulo de 45 grados, la ecuación cuadrática que describe su trayectoria es:

$$y = -4{,}9x^2 + 50x$$

Donde:

- "y" es la altura de la pelota, en metros,
- "x" es la distancia horizontal desde el punto que se patea la pelota, en metros.

Esta ecuación se puede utilizar para predecir dónde caerá la pelota.

Actividad

- ¿Qué conceptos matemáticos se aplican en la práctica de futbol?
- ¿Qué trayectoria describe el balón en un tiro libre?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos de ecuaciones cuadráticas?
- Construimos el sistema con una ecuación lineal y ecuación cuadrática que describe la intersección de las trayectorias.

TEORÍA

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Para resolver un sistema de ecuaciones utilizamos cualquiera de los siguientes métodos:

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Método de reducción

Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.

1. Sistemas de ecuaciones de segundo grado.

Un sistema de ecuaciones es el conjunto de ecuaciones que verifican simultáneamente para los mismos valores de sus incógnitas.

Solución de un sistema: Conjunto de valores de todas sus incógnitas que al ser sustituido en las ecuaciones originales las convierten en identidades.

Sistemas equivalentes: Son aquellos que a pesar de tener ecuaciones diferentes aceptan las mismas soluciones.

Clasificación de los sistemas

De acuerdo a sus soluciones, los sistemas de ecuaciones pueden ser:

Sistema compatible: Cuando existe solución.

Sistema incompatible: Cuando no existe solución

Atendiendo el número de ecuaciones con el número de incógnitas.

Sistema determinado: Cuando el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas.

Sistema indeterminado: Cuando el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas, estos sistemas se caracterizan por tener infinidad de soluciones.

Sistema sobre determinado: Cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas.

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas o variables no lineales, son aquellos en los cuales una o ambas de las ecuaciones que forman el sistema es una ecuación no lineal, es decir, cuando las incógnitas que forman parte de la ecuación no son de primer grado.

Así, por ejemplo:

1) $5x-3=2$ es una Ecuación de una variable LINEAL
2) $x^2-6=0$ es una Ecuación de una variable NO LINEAL CUADRÁTICA
3) $3x-2y=4$ es una Ecuación de dos variables LINEAL
4) $x^2+y^2=9$ es una Ecuación de dos variables NO LINEAL CUADRÁTICA

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas son mixtos cuando son no lineales. La solución de dicho sistema es el conjunto de pares ordenados (x, y).

Gráficamente quedan representados por una recta y una parábola, o bien, por dos parábolas.

Existen distintos métodos de resolución analítica y también se pueden resolver de forma gráfica. Dentro de los métodos analíticos vamos a trabajar con los llamados métodos de igualación y sustitución.

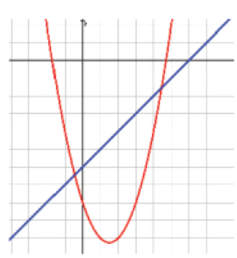
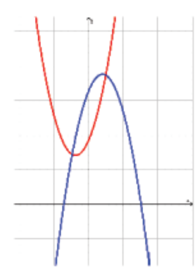
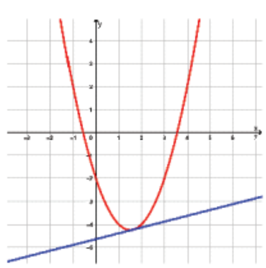
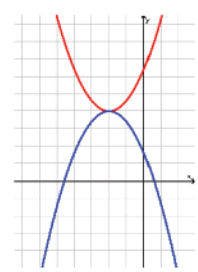
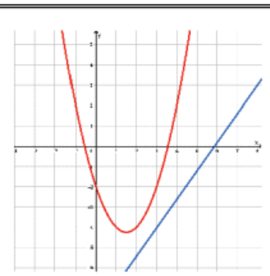
En los casos en que el sistema esté formado al menos por una ecuación de segundo grado, luego de haber aplicado algún método analítico para su resolución, nos quedará una ecuación cuadrática y podremos reconocer cuántas soluciones obtendremos, se tiene el mismo analizando el discriminante de la ecuación cuadrática, que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución. Analicemos lo dicho anteriormente, pero desde el enfoque gráfico.

TIPOS DE SOLUCIONES:

Teniendo en cuenta la gráfica se puede deducir que existen tres tipos de soluciones en los sistemas del cuadro.

- *Una solución: la recta y la parábola se cortan en un solo punto.*
- *Dos soluciones: la recita y la parábola se cortan en dos puntos.*
- *Sin solución: la recta y la parábola no se intersecan.*

Para resolver analíticamente este tipo de sistema, se utilizan los métodos ya conocidos, eligiendo el más conveniente. Debes tener en cuenta que una de las ecuaciones es de segundo grado o ambas.

	Sistema formado por una recta y una parábola. $\begin{cases} y=mx+b \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$	Sistema formado por dos parábolas. $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=dx^2+ex+f \end{cases}$
$\Delta>0$ Dos puntos de intersección.		
$\Delta=0$ Un punto de intersección.		
$\Delta<0$ Ningún punto de intersección.		

MÉTODO DE PO – SHEN LOH

Paso 1. Reconocemos "b" y "c"

Paso 2. Hallamos $p = -\dfrac{b}{2}$

Paso 3. Hallamos "u", reemplazando en $p^2 - u^2 = c$ con los valores de "p" y "c"

Paso 4. Hallamos la solución final $x = p \pm u$

Ejemplos

Resolver los siguientes sistemas.

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68 & ① \\ x + y = 10 & ② \end{cases}$

Utilizamos el método de sustitución despejado "x" en la segunda ecuación ②.

$$x = 10 - y \quad ③$$

Remplazando "x" en la ecuación ①

$$(10-y)^2 + y^2 = 68$$
$$100 - 20y + y^2 + y^2 = 68$$
$$2y^2 - 20y + 32 = 0 \quad \Big\| \bullet \frac{1}{2}$$
$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

Por el método de Po – Shen loh

$b = -10; c = 16$ $\qquad p = -\dfrac{b}{2} = -\dfrac{(-10)}{2} = 5$

Fórmula $p^2 - u^2 = c \quad \rightarrow \quad (5)^2 - u^2 = 16$

$$25 - 16 = u^2$$
$$u = \sqrt{9} = 3$$

Solución $y = p \pm u = \begin{cases} y_1 = 5 - 3 = 2 \\ y_2 = 5 + 3 = 8 \end{cases}$

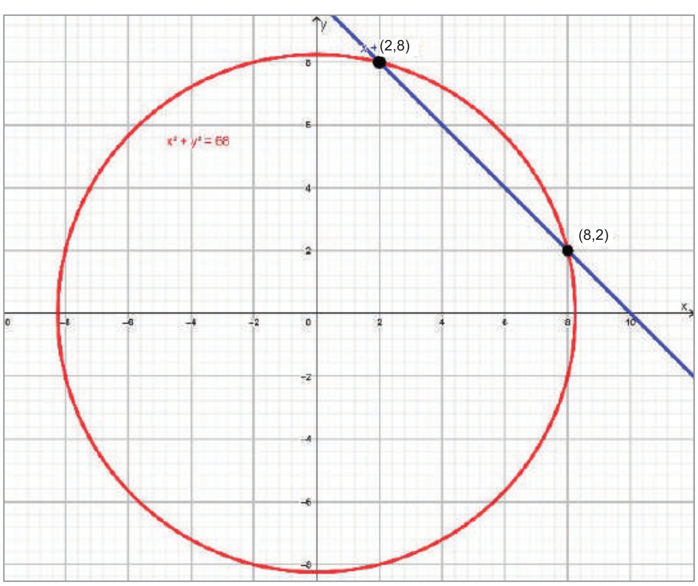
Así: reemplazando en ③

$x = 10 - y \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} x_1 = 10 - 2 = 8 \\ x_2 = 10 - 8 = 2 \end{cases}$

Comprobando en el sistema:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ x + y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8^2 + 2^2 = 68 \\ 8 + 2 = 10 \end{cases}$

$C_s = \{(8,2);(2,8)\}$ Son dos puntos de intersección



Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \dfrac{3}{4}y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 & ① \\ 3x - y = 11 & ② \end{cases}$

Utilizamos el método de igualación

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x + 1 \\ 3x - 11 = y \end{matrix}\right\} y = y$$

Así la nueva ecuación será:

$$x^2 - 4x + 1 = 3x - 11$$
$$x^2 - 3x - 4x + 1 + 11 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Por el método de Po – Shen loh

$b = -7\,;\, c = 12 \qquad p = -\dfrac{b}{2} = -\dfrac{(-7)}{2} = \dfrac{7}{2}$

Formula $p^2 - u^2 = c \quad \rightarrow \quad \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - u^2 = 12$

$$\frac{49}{4} - 12 = u^2$$
$$u = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

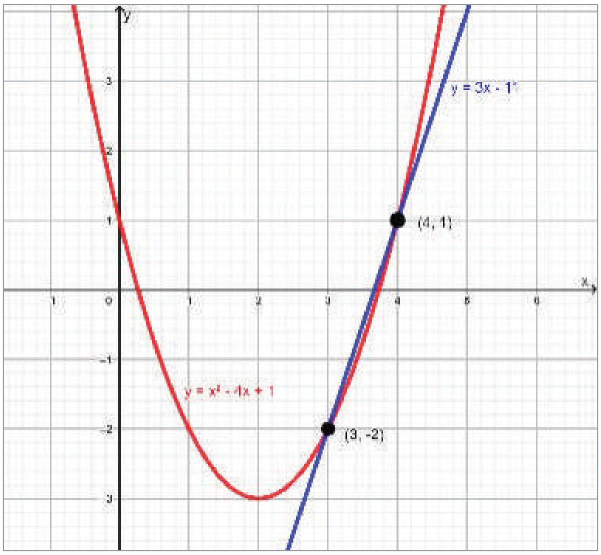
Solución $x = p \pm u = \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2} = 4 \end{cases}$

Así: reemplazando en

$y = 3x - 11 \quad \rightarrow \quad y = \begin{cases} y_1 = 3(3) - 11 = -2 \\ y_2 = 3(4) - 11 = 1 \end{cases}$

Comprobando en el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = (3)^2 - 4(3) + 1 \\ 3(3) - (-2) = 11 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} -2 = 9 - 12 + 1 \\ 9 + 2 = 11 \end{cases}$$



$C_s = \{(3, -2); (4, 1)\}$

MÉTODO DE PO – SHEN LOH

Sabias que:

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

que es una proporción, donde "x" toma el valor $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$ *que es el número de oro, (número irracional).*

Actividad

Resolvemos los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - 4x = 2 - y \\ 2x - 7 = -y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x + y) \\ y - x = 1 \end{cases}$

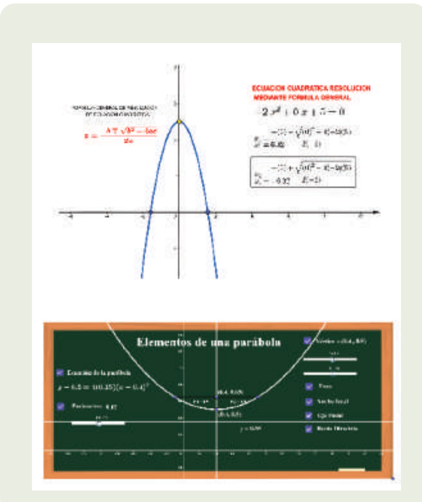
c) $\begin{cases} x^2 + 3y = 10 \\ x - 4y = -13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ y + x = 5 \end{cases}$

2. Comparación de una función cuadrática con una ecuación cuadrática

a) Función cuadrática

Una función cuadrática es aquella función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde *"a", "b"* y *"c"* son números reales cualquiera, pero *a* debe ser diferente de cero, y donde *x* e *y* son las variables de dicha función. Las funciones cuadráticas también reciben el nombre de funciones de segundo grado.



Para poder construir la gráfica de una función cuadrática debemos hacer lo siguiente:

1ro Saber cuál es el vértice (punto más alto o más bajo de la gráfica) de la parábola.

2do Construir una tabla de valores.

3ro Graficar el punto correspondiente al vértice y los puntos obtenidos en la tabla de valores

4to Unir los puntos graficados en el numeral anterior.

Elementos de una parábola

Vértice: El vértice es el punto más alto o más bajo de la parábola, cuando la parábola abre hacia arriba decimos que en el vértice hay un mínimo y cuando la parábola abre hacia abajo decimos que en el vértice hay un máximo.

Eje de simetría: Es una recta paralela al eje *y* que pasa por el vértice de la parábola, su ecuación será de la forma $x = n$, donde n es el valor de *x* correspondiente al vértice.

Dominio: Es el conjunto de todos los números reales.

Rango: Es un conjunto de números que depende de la abertura de la parábola.

- Si la parábola abre hacia arriba el rango será el intervalo (m,∞)
- Si la parábola abre hacia abajo el rango será el intervalo $(-\infty,m)$

Nota: "*m*" es el valor correspondiente a *"y"* en el punto del vértice.

Puntos de corte: Los puntos de corte con los ejes serán aquellos valores donde la gráfica corte dichos ejes.

b) Ecuación cuadrática

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde *"a", "b"* y *"c"* $\in \mathbb{R}$ y, $a \neq 0$ se denomina ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado.

Dependiendo del valor de las constantes *"b"* y *"c"*, las ecuaciones cuadráticas se clasifican en incompletas y completas.

Solución de una ecuación cuadrática: Consiste en encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Gráficamente, la solución representa los cortes con el eje *"x"*, si los hay, de la parábola, es decir los puntos de corte o interceptos.

Solucion de ecuaciones cuadràticas incompletas

- Ecuación de la forma $ax^2=0$ — En este caso, al despejar la variable "x", la única solución es x = 0. Es decir, la ecuación tiene única solución y es real.
- Ecuación de la forma $ax^2+ bx = 0$ — En este caso, debemos factorizar la variable "x" (factor comun), e igualar a cero cada uno de los factores determinados.
- Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ — Debemos despejar la variable "x", y sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. Se obtienen dos soluciones diferentes y dependiendo del tipo de raíz, las soluciones pueden ser reales o complejas

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema

La librería de la zona realizará una liquidación sus estuches geométricos. El dueño determinó una función de oferta dada por $O(x)=x^2-9x+470$ y la función demanda $D(x)=500-2x$, para saber la cantidad de estuches geométricos que debe liquidar, donde "x" es el precio, en bolivianos, de un estuche geométrico. Tenemos que O y D representan el número de estuches geométricos ofrecidos y demandados. Determina el precio que debe pedir por cada estuche geométrico, para que la cantidad de estuches geométricos ofrecidos y demandados sea la misma, es decir $O(x)=D(x)$

Datos:

Si $O(x)=D(x)$ son iguales:

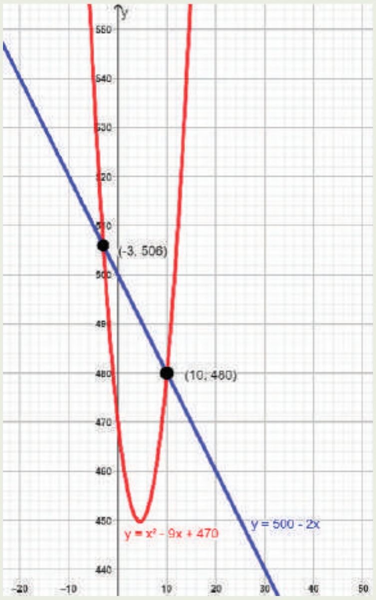
$$x^2-9x+470=500-2x$$, resolvemos la ecuación.

$$x^2-7x+30=0$$

Resolviendo $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-30)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{7\pm13}{2}\begin{cases}x_1=\dfrac{7+13}{2}=10\\ x_2=\dfrac{7-13}{2}=-3\end{cases}$$

Rpta. El precio de cada estuche geométrico será de Bs. 10 para tener la misma cantidad de estuche geométrico ofrecidos y demandados.



¿Por qué es importante encontrar la intersección entre estas funciones?

Porque se puede encontrar un valor de "x" en el dominio, para el cual su imagen es la misma en ambas funciones.

Actividad

- El costo total de producción de "x" unidades de un determinado articulo está dado por la función $C(x)=x^2+2x+360$ y los ingresos obtenidos por las ventas por $I(x)=-x^2+74x$. Se pide graficar el Sistema y calcular a partir de que cantidad de unidades los costos igualan a las ganancias.
- Juan lanza un proyectil. La altura "y" (en km.) y los kilómetros recorridos "x" están relacionados por la ecuación $y=-x^2+4x$. A 1 km del lugar de lanzamiento se encuentra una montaña cuya ladera oeste sigue la recta de ecuación $y=6x-6$. Halla el punto de la montaña donde se producirá el impacto.

VALORACIÓN

Modelar el movimiento de objetos, como el de un proyectil, trayectoria de un balón o el movimiento de un fluido, son ejemplos de la aplicación de la función cuadrática y la ecuación cuadrática.

- ¿Cuál es tu opinión sobre las aplicaciones de la función cuadrática?

PRODUCCIÓN

- Realicemos un informe aplicando la modelización matemática.
- Investiguemos sobre el diseño y construcción de elementos de la vida cotidiana donde exista intersección de rectas y parábolas.

DESIGUALDADES E INECUACIONES

PRÁCTICA

Néstor está lanzando su emprendimiento de helados de zanahoria, para lo cual decide fabricar una cantidad suficiente para abastecer a toda la comunidad educativa; tomando en cuenta sus Ingresos "I" y sus costos "C", todo está en bolivianos, armando las siguientes ecuaciones: $I = 20x$; $C = 2000 + 15x$

Aplicando el concepto de:

Ganancia = Ingresos –Costos

Para determinar qué cantidad de helados debe elaborar para ponerlos a la venta y disfrutar de una ganancia, de por lo menos Bs. 2400.

Una ganancia de por lo menos 2400, significa que:

$$Ganancia \geq 2400$$

Pero: $I - C \geq 2400$

Actividad

- ¿Qué cantidad de helados debe preparar Néstor para conseguir la ganancia que se ha propuesto?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos con inecuaciones lineales como la del ejemplo?
- ¿Para qué otros emprendimientos puedes utilizar los conocimientos de inecuaciones?
- ¿Cómo puedes ayudar a tu familia construyendo un modelo matemático para realizar tu emprendimiento y así predecir las ganancias que te propones?

TEORÍA

DATO PREVIO

Una desigualdad es una expresión matemática que contiene un signo de desigualdad. Los signos de desigualdad son:

$\neq$ *no es igual.*
$<$ *menor que.*
$>$ *mayor que.*
$\leq$ *menor o igual que.*
$\geq$ *mayor o igual que.*

Ejemplos:

$3 < 5$ *Se lee "tres es menor que cinco".*

$2 \leq 4$ *Se lee "dos es menor o igual que cuatro".*

$7 > 6$ *Se lee "siete es mayor que seis".*

$5 \geq 1$ *Se lee "cinco es mayor o igual que uno".*

*En particular, a las desigualdades que presentan los símbolos $<$ o $>$ se llaman **desigualdades estrictas** y las que presentan los símbolos $\leq$ o $\geq$ se llaman **desigualdades no estrictas***

1. Desigualdad e inecuación

a) Desigualdad

Es una relación que establece una comparación entre dos cantidades que no son iguales. Aparecen con un signo de desigualdad.

Sea "a" y "b" dos números reales cualesquiera, al compararlos, puede suceder alguna de las siguientes situaciones:

- $a < b$, que significa lo siguiente: "a es menor que b"
- $a \leq b$, que significa lo siguiente: "a es menor o igual que b"
- $a > b$, que significa lo siguiente: "a es mayor que b"
- $a \geq b$, que significa lo siguiente: "a es mayor o igual que b"
- $a = b$, que significa lo siguiente: "a es igual a b"

El campo de los números reales posee la propiedad de orden, es decir, que tiene lugar la **ley de la tricotomía** de los números reales. Entonces, para todo par de números (a,b) tiene lugar una y solo una de las tres relaciones que a continuación se detallan: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

• Propiedad de Tricotomía:

Si "a" y "b" son dos números reales cualesquiera, entonces una y solamente una de las siguientes expresiones es verdadera: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Donde $a > b$ significa por definición que $a - b$ es positivo, mientras que $a < b$ significa por definición que $a - b$ es negativo.

$$a > b \iff a - b > 0$$
$$a < b \iff a - b < 0$$

b) Inecuación

Las inecuaciones son desigualdades entre dos expresiones algebraicas, su solución es el conjunto de números que satisfacen la desigualdad al ser reemplazadas en la desigualdad original, esta solución se llama "conjunto solución".

Ejemplo:
- $4 \geq x-2$ si $x \in (-\infty, 6]$
- $3x-2<7$ si $x \in (-\infty, 3)$

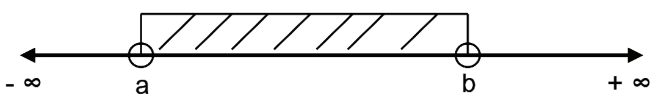
2. Intervalo real y representación gráfica de los intervalos

Son subconjuntos de los números reales, que gráficamente son segmentos de recta o semirrecta y sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

a) Abierto en ambos extremos

En forma de conjunto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$

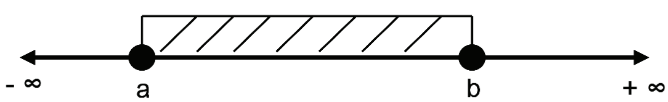
Representación Gráfica:



b) Cerrado en ambos extremos

En forma de conjunto: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$

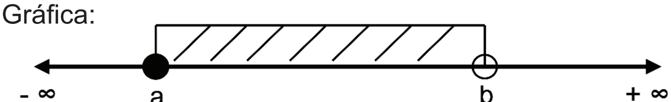
Representación Gráfica:



c) Semiabierto por la derecha

En forma de conjunto: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$

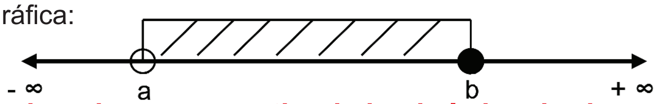
Representación Gráfica:



d) Semiabierto por la izquierda

En forma de conjunto: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$

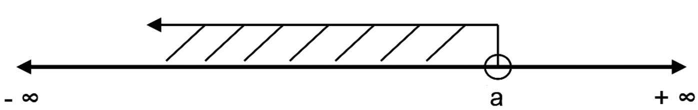
Representación Gráfica:



e) Abierto por la derecha que se extiende hacia la izquierda

En forma de conjunto:

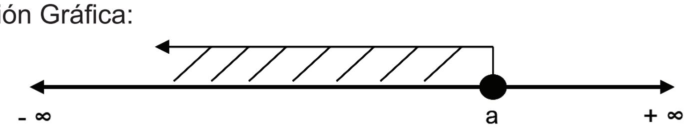
Representación Gráfica: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$



f) Cerrado por la derecha que se extiende hacia la izquierda

En forma de conjunto: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$

Representación Gráfica:



DESIGUALDAD

Una inecuación lineal o de primer grado en una variable "x" es una desigualdad de la forma:

$$ax+b > 0; \ ax+b < 0$$

$$ax+b \geq 0; \ ax+b \leq 0$$

Donde:

"x" es la variable

"a" y "b" son valores constantes

NOTACIÓN

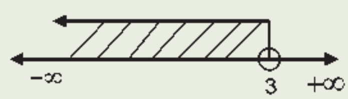
La notación ∞, que se lee infinito no es un número real, sino un símbolo que se utiliza para indicar que apartir de un número "x" hay números tan grandes como se quiera, por la derecha (+∞) o por izquierda (-∞).

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: graficar $3x-2<7$

$$3x<7+2$$

$$x<3$$



SOLUCIÓN

Las soluciones de una inecuación se pueden expresar de la siguiente manera:

Conjunto solución:

S = { x / x > a}

ANALIZANDO UNA PROPIEDAD

Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro por miembro, resulta una desigualdad del mismo signo. Si a > b y c > d , se tiene:

$$\begin{array}{r} a > b \\ \underline{c > d} \\ a+c > b+d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a > b \\ \underline{c > d} \\ a\times c > b\times d \end{array}$$

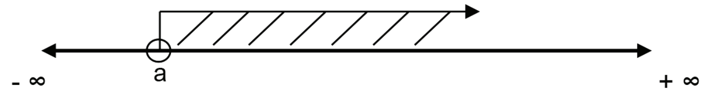
En $10 > 8$ y $5 > 2$, restando miembro por miembro:

$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ \underline{5 > 2} \\ 10-5 < 8-2 \\ 5 < 6 \end{array}$$

g) Abierto por la izquierda que se extiende hacia la derecha

En forma de conjunto: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > a\}$

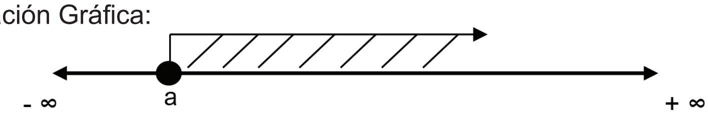
Representación Gráfica:



h) Cerrado por la izquierda que se extiende hacia la derecha

En forma de conjunto: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq a\}$

Representación Gráfica:



i) Propiedades de las desigualdades

Propiedad			Ejemplo
El sentido de una desigualdad no cambia, si a cada miembro se suma o resta una misma cantidad.	Si: $a > b$	$a + c > b + c$	$7 > 2 \,\| + 5$ $7 + 5 > 2 + 5$
		$a - c > b - c$	$4 > -1 \,\| - 2$ $4 - 2 > -1 - 2$
El sentido de una desigualdad no cambia, si se multiplica o se divide cada miembro por una misma cantidad positiva.	Si: $a > b$	$a \cdot c > b \cdot c$ Si $c > 0$	$8 > 3 \,\| \cdot 2$ $8 \cdot 2 > 3 \cdot 2$
		$a \div c > b \div c$ Si $c > 0$	$4 > -1 \,\|, 5$ $\frac{4}{5} > \frac{-1}{5}$
El sentido de una desigualdad se altera, si se multiplica o divide cada miembro por una misma cantidad negativa.	Si: $a > b$	$-a \cdot c < -b \cdot c$	$9 > 5 \,\| \cdot (-3)$ $9 \cdot (-3) < 5 \cdot (-3)$
		$-\frac{a}{c} < -\frac{b}{c}$	$6 > -2 \,\| \div (-4)$ $-\frac{6}{4} < -\frac{(-2)}{4}$
Si: $a > 0$ y $b > 0$ y $a > b$	$a^2 > b^2$	Si: $a < 0$ y $b < 0$ y $a > b$	$a^2 < b^2$

Actividad

Establezcamos el signo de desigualdad para cada caso:

a) $5+9-2\,\square\,5-2+3$

b) $\frac{2}{9}+\frac{5}{8}\,\square\,\frac{1}{5}-1$

c) $7-5-9\,\square\,20-25+7$

d) $4+\frac{3}{5}\,\square\,1+\frac{6}{5}$

e) $\dfrac{4+\frac{3}{5}}{2}\,\square\,\frac{9}{2}-3$

f) $0,25\,\square\,\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$

g) $5+\frac{8}{6}\,\square\,\frac{4}{4}-\frac{7}{6}$

3. Inecuaciones lineales de una variable

Son aquellas desigualdades de primer grado, cuyo coeficiente de la variable puede ser un número entero, fraccionario o un decimal.

Si la inecuación involucra a expresiones lineales, es recomendable aplicar métodos de despeje para encontrar la desigualdad y, en consecuencia, la solución.

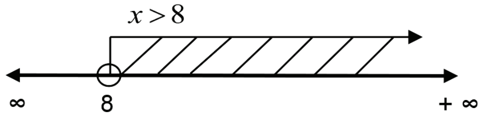
a) Inecuación entera

Ejemplo:

1ra Forma: Resolver $2x-3>x+5$, por despeje

$$2x-3>x+5$$
$$2x-x>5+3$$
$$x>8$$

Interpretación gráfica:

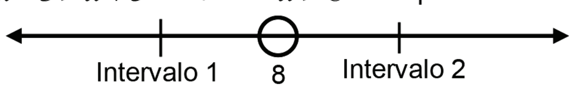


$C_{sol.} = (8,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 8\}$

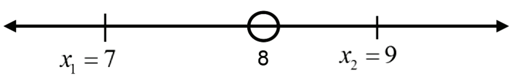
2da forma: Resolver la misma inecuación por puntos críticos

Encontrar el punto crítico para ello se resuelve la ecuación:

Sabemos que: $2x-3>x+5 \quad \Rightarrow \quad x>8$ es el punto crítico.



Verificamos para cada intervalo tomando un valor al azar, así verificamos para que intervalo se cumple la inecuación.



Si $x_1=7 \Rightarrow 2x_1-3>x_1+5$
$$2(7)-3>7+5$$
$$11>12$$
Falso

Si $x_2=9 \Rightarrow 2x_2-3>x_2+5$
$$2(9)-3>9+5$$
$$18>14$$
Verdadero

b) Inecuación racional

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x+1}<2$

Transformamos la inecuación

$$\frac{x}{2x+1}-\frac{3}{2x+1}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{2x+1}-2<0$$

$$\frac{x-3}{2x+1}-2\bullet\frac{2x+1}{2x+1}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3-4x-2}{2x+1}<0$$

$$\frac{-3x-5}{2x+1}<0$$

Los factores son: $(-3x-5)$ y $(2x+1)$

CONJUNTO SOLUCIÓN

Está formado por los valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad.

Resolver la inecuación implica encontrar sus soluciones. En la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1ro *Quitar los paréntesis, si los hay.*

2do *Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.*

3ro *Pasar los términos en " x" a un miembro (normalmente al primero) y los números al otro.*

4to *Reducir términos semejantes.*

5to *Despejar la variable " x"*

6to *Graficar y verificar el resultado.*

Existen métodos para resolver una inecuación, algunos son:

- *Despeje.*
- *Puntos críticos.*
- *Estudio de signos.*

Los pasos pueden variar para cada método, pero el conjunto solución siempre será el mismo.

Actividad

Resolvemos las siguientes inecuaciones:

a) $14x-30-4x<5$

b) $2x-2>x+1$

c) $3x-3>2x+1$

d) $7(2x-6)\leq 3(4x+9)$

e) $2(x+3)>3(x-1)+6$

f) $\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{x+1}{9}>\dfrac{x+3}{4}$

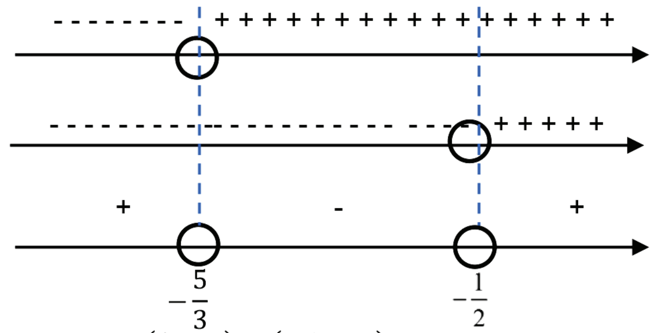
g) $2x-\dfrac{5}{3}>\dfrac{x}{3}+10$

h) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{3}<-3$

De los factores:

$-3x-5$ el punto crítico es $x=\frac{5}{3}$. $\Rightarrow$ $2x+1$ el punto crítico o cero es $x=-\dfrac{1}{2}$.

El estudio de signos será:



> **ATENCIÓN**
>
> *En una ecuación racional no es bueno eliminar el denominador pues se pierden intervalos.*

Luego: $C_{sol.}=\left(\frac{5}{3},+\infty\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

c. Inecuación con doble desigualdad

> **ATENCIÓN**
>
> *En una ecuación racional no es bueno eliminar el denominador pues se pierden intervalos.*
>
> *Para estar seguros de haber encontrado el **C**$_{sol.}$ se puede hacer una verificación con un valor de los intervalos encontrados.*

Ejemplo:

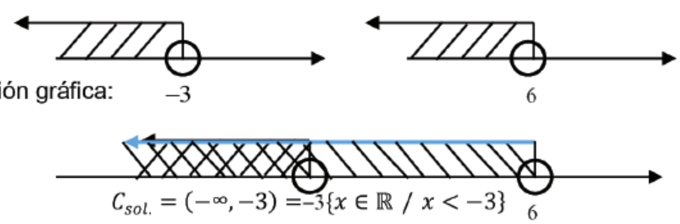
Resolver $2+2x<x-1<5$

Podemos expresarla como $2+2x<x-1 \;\wedge\; x-1<5$

Resolvemos por separado:

$$2+2x<x-1 \quad \wedge \quad x-1<5$$
$$2x-x<-1-2 \quad \wedge \quad x<5+1$$
$$x<-3 \quad \wedge \quad x<6$$

Interpretación gráfica:



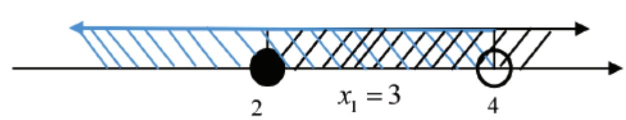
$C_{sol.}=(-\infty,-3)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x<-3\}$

Ejemplo:

Resolver $3\leq 2x-1<7$

Otra manera de dar solución a la inecuación es:

$$3+1\leq 2x<7+1$$
$$4\leq 2x<8$$
$$\frac{4}{2}\leq x<\frac{8}{2}$$
$$2\leq x<4$$



$C_{sol.}=[2,4)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 2\leq x<4\}$

Si $x_1=3 \Rightarrow 3\leq 2x-1<7$

$$3\leq 2(3)-1<7$$
$$3\leq 5<7$$

Verdadero

Actividad

Determinemos el C$_{sol}$ de las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+6}{x+1}<2$

b) $\dfrac{2x-1}{x+5}>2$

c) $\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0$

d) $\dfrac{x-1}{x+5}>2$

e) $5\leq 35x-10\leq 15$

f) $-1\geq 3x-7>8$

g) $6>9x+3>-15$

h) $2\leq 10-4x\leq 6$

i) $4<8x-28<12$

4. Inecuaciones con valor absoluto

Son aquellas en las que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma

Sea $x, a \in R,\ a \geq 0$. Se tiene entonces:

$|x| \leq a$ si $x \leq a \wedge x \geq -a$ ó $-a \leq x \leq a$

$|x| \geq a$ si $x \geq a \vee x \leq -a$

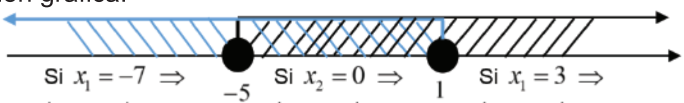
Ejemplo:

Resolver la inecuación $|5x+10| \leq 15$.

Aplicando la definición. $-15 \leq 5x+10 \leq 15$

$$-15-10 \leq 5x+10-10 \leq 15-10$$
$$-25 \leq 5x \leq 5$$
$$\frac{-25}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{5}{5}$$
$$-5 \leq x \leq 1$$
$$C_{sol.} = [-5,1] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -5 \leq x \leq 1\}$$

Interpretación gráfica:



Si $x_1 = -7 \Rightarrow$
$|5x+10| \leq 15$
$|5(-7)+10| \leq 15$
$25 \leq 15$ F

Si $x_2 = 0 \Rightarrow$
$|5x+10| \leq 15$
$|5(0)+10| \leq 15$
$10 \leq 15$ V

Si $x_1 = 3 \Rightarrow$
$|5x+10| \leq 15$
$|5(3)+10| \leq 15$
$25 \leq 15$ F

TOMA NOTA

$$|P(x)| > a\ ; |P(x)| < a$$

$$|P(x)| \geq a; |P(x)| \leq a$$

Donde $P(x)$ es un polinomio lineal y $a \in \mathbb{R}$.

Las inecuaciones con valor absoluto se presentan de forma variada. En este apartado se resolverán inecuaciones del tipo

$$|ax+b| \leq c \Rightarrow \begin{Bmatrix} ax+b \leq c \\ \text{y} \\ ax+b \geq -c \end{Bmatrix}$$

ó $-c \leq ax+b \leq c$

Actividad

Determinamos el C_{sol} de las inecuaciones:

a) $|2x+1| \geq 5$

b) $\left|\frac{2x-1}{x}\right| > 2$

c) $\left|\frac{3}{x} - 2\right| \leq 4$

d) $|6-5x| \leq \frac{1}{2}$

e) $|6-5x| \leq \frac{1}{2}$

f) $|3x+8| \geq 2$

VALORACIÓN

Las inecuaciones lineales se pueden utilizar para establecer límites en las variables de un problema. Por ejemplo, si sabemos que el costo de un producto no puede ser superior a Bs. 1000, podemos establecer la inecuación ***C* ≤1000**, donde *C* es el costo del producto.

Lourdes tiene un viaje de emergencia a su pueblo, por lo que analiza su presupuesto y los gastos que realizará en su viaje son los siguientes montos: Bs. 55, Bs. 75 y Bs. 60. Recuerda que también tendrá otros gastos de compra de materiales para su trabajo, por lo que decide realizar un promedio entre estos cuatro gastos que realizará

Supongamos que el gasto de compra de materiales es "*x*" y desea saber qué monto utilizará para la compra de sus materiales si su promedio por lo menos es de Bs. 70. Esta situación puede representarse de la siguiente forma.

$$\frac{(55+75+60+x)}{4} \geq 70$$

- Reflexionamos con las compañeras y compañeros sobre la importancia de saber resolver inecuaciones.

PRODUCCIÓN

- Investiguemos acerca de las aplicaciones de las inecuaciones en el comercio.
- Realicemos un mapa mental con los conceptos vistos del tema.

INECUACIONES CUADRÁTICAS Y SISTEMA DE INECUACIONES

PRÁCTICA

Julia y María están preparando queques de zanahoria para su presentación en la feria gastronómica de su Unidad Educativa, utilizan una receta que requiere harina y otros ingredientes para hacer un queque de zanahoria. Representan la cantidad de harina con $a \geq 2$, para la mantequilla con $m \geq \frac{1}{4}$, el huevo .

Así tienen los ingredientes, que indican las cantidades de ingredientes que deben ser mayores o iguales que sus cantidades mínimas.

Actividad

- ¿Qué conceptos están aplicando para realizar la receta de su queque?
- Analicemos en qué otras áreas se utilizan los conceptos de desigualdades.
- Además de la elaboración de pasteles y galletas, ¿dónde emplearías estos saberes y conocimientos?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para poder realizar modelos matemáticos que ayuden en las recetas del área de gastronomía?

TEORÍA

1. Inecuaciones cuadráticas y de grado superior

Es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen una sola incógnita y cuyo mayor exponente es dos (2). Resolver una inecuación cuadrática en una variable que significa encontrar el conjunto de números reales (Intervalo) que satisface la desigualdad. Para ello, recurrimos a las propiedades básicas de las desigualdades.

Las inecuaciones cuadráticas pueden escribirse de una de las siguientes formas:

$$ax^2+bx+c>0;\ ax^2+bx+c<0;\ ax^2+bx+c\geq 0;\ ax^2+bx+c\leq 0$$

Resolver una desigualdad cuadrática, es hallar el conjunto de los valores reales de las incógnitas que la verifican, o satisfagan, es decir, los valores que hacen que se cumpla la desigualdad. Para esto se debe dejar en el lado derecho de la desigualdad, el valor de 0, si es que no está; después de esto se debe factorizar la expresión del lado izquierdo (si no se puede factorizar directamente, se puede utilizar la fórmula general).

Pasos para resolver:

- Ordenamos buscando darle la forma: $ax^2+bx+c>0$.
- Factorizamos la expresión, haciendo uso de cualquiera de los métodos conocidos.
- Obtenemos los puntos críticos, igualando cada factor a cero y despejando la incógnita.
- Graficamos los puntos críticos sobre la recta numérica.
- Evaluamos el signo de cada factor en la gráfica, tomando un valor de prueba de cada intervalo.
- El signo resultante, se obtiene por ley de signo de la multiplicación.

DISCRIMINANTE

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y del discriminante:

$$\Delta = b^2-4ac$$

- *Si* $\Delta>0$; $(a>0)$, *el polinomio* ax^2+bx+c, *es factorizable en el campo real.*
- *Si* $\Delta=0$; $(a>0)$, *el polinomio* ax^2+bx+c, *se transforma a un trinomio cuadrado perfecto.*
- *Si* $\Delta<0$; $(a>0)$, *el polinomio* ax^2+bx+c, *se transforma en cuadrado más un cuarto número real positivo.*

Ejemplos:

Resolver las inecuaciones

1) $x^2 - 7x > -10$

Ordenando: $x^2 - 7x + 10 > 0$

$a = 1,\ b = -7,\ c = 10 \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 9$

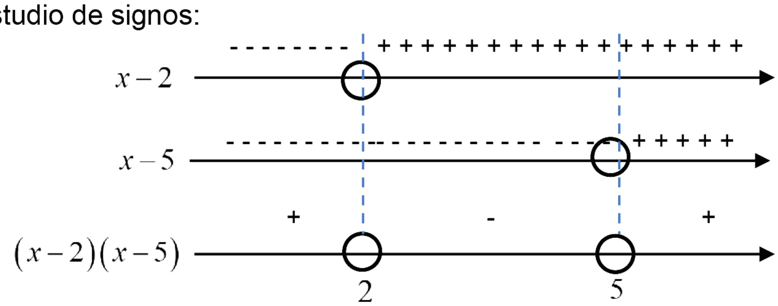
Factorizando: $x^2 - 7x + 10 > 0$

$$\begin{array}{ccccc} x & & 5 & = & -5x \\ x & & 2 & = & \underline{-2x} \\ & & & & -7x \end{array}$$

Los valores críticos son: $x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Por estudio de signos:



Los intervalos que cumplen la desigualdad $C_{sol.} = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

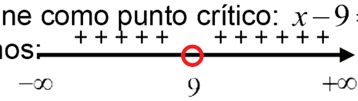
2) $x^2 - 18x + 81 > 0$

$a = 1,\ b = -18,\ c = 81 \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4(1)(81) = 0$

Factorizando: $\underbrace{x^2}_{\sqrt{\ }\ x} - \underbrace{18x}_{2\bullet x\bullet 9} + \underbrace{81}_{\sqrt{\ }\ 9} > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-9)^2 > 0$

En este caso se tiene como punto crítico: $x - 9 = 0 \ \Rightarrow \quad x = 9$

Por estudio de signos:



Los intervalos que cumplen la desigualdad $\quad C_{sol.} = \mathbb{R} - \{9\}$

3) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

Factorizando: $\underbrace{x^2}_{\sqrt{\ }\ x} + \underbrace{2x}_{2\bullet x\bullet 1} + \underbrace{1}_{\sqrt{\ }\ 1} > 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 > 0$

En este caso se tiene como punto crítico: $x + 1 = 0 \ \Rightarrow \quad x = -1$

$C_{sol.} = \mathbb{R}$

SIGNOS DEL CONJUNTO SOLUCIÓN

La solución dependerá del signo inicial de la inecuación:

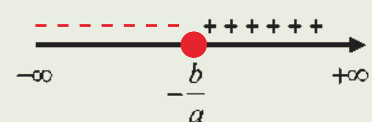
Si $ax^2 + bx + c < 0$ *o* $ax^2 + bx + c \leq 0$ *el conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (–) .*

Si $ax^2 + bx + c > 0$ *ó* $ax^2 + bx + c \geq 0$, *el conjunto solución estará formado por el intervalo donde aparece el signo (+).*

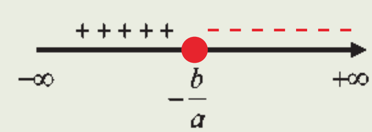
Signos de un factor

En el factor $ax + b$

- *Si* $a > 0 \Rightarrow$

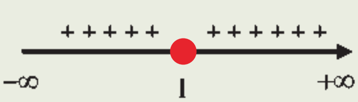


- *Si* $a < 0 \Rightarrow$



RECTA REAL

$C_{sol.} = \mathbb{R}$



Actividad

Resolvemos las inecuaciones:

a) $x^2 + 4x > 5$

b) $x^2 + 6x > 0$

c) $x^2 - 4x - 21 \geq 0$

d) $x^2 - x - 6 < 0$

e) $3x^2 - 11x + 6 \leq 0$

f) $3x^2 - 2x - 5 > 0$

g) $x^2 - 8x + 8 \geq 4 - 4x$

h) $7x - 2 - 6x^2 \geq 0$

i) $x^2 - 6x + 9 < 0$

j) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

k) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$

EJEMPLO

Resolver: $x^2 - 8x + 25 \geq 0$

$a = 1,\ b = -8,\ c = 25 \Rightarrow$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(25) = -36$

Si $\Delta < 0$; ($a > 0$), La expresión cuadrática siempre es positiva (Teorema Fundamental del Algebra)

$$C_{sol.} = \mathbb{R}$$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

$$x^2 - 8x + 16 + 9 \geq 0$$

- $\underbrace{(x+4)^2}_{+} + \underset{+}{9} > 0$

Se verifica: $\forall x \in \mathbb{R}$ $C_{sol.} = \mathbb{R}$

- $\underbrace{(x+4)^2}_{+} + \underset{+}{9} \geq 0$

Se verifica: $\forall x \in \mathbb{R}$ $C_{sol.} = \mathbb{R}$

- $\underbrace{(x+4)^2}_{+} + \underset{+}{9} < 0$

Nunca se verifica pues el primer miembro siempre es mayor que cero. $C_{sol.} = \varnothing$

- $\underbrace{(x+4)^2}_{+} + \underset{+}{9} \leq 0$

Nunca se verifica. $C_{sol.} = \varnothing$

4) $\sqrt{x^2 + 27} \geq 6$

Ordenando: $\sqrt{x^2 + 27} \geq 6$

$$\left(\sqrt{x^2 + 27}\right)^2 \geq (6)^2$$

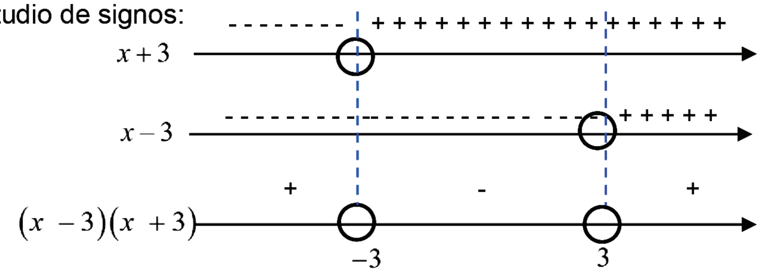
$$x^2 + 27 \geq 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 \geq 0$$

Factorizando: $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$

Los valores críticos son: $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

Por estudio de signos:



Los intervalos que cumplen la desigualdad $C_{sol.} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

a) Inecuaciones de grado superior

Resolver inecuaciones de grado superior, es hallar el conjunto de los valores reales de las incógnitas que la verifican, o satisfagan, es decir, los valores que hacen que se cumpla la desigualdad.

Ejemplos:

Resolver la desigualdad.

1) $x^3 + 2x^2 > 15x$

Factorizando: $x^3 + 2x^2 > 15x \Rightarrow x(x^2 + 2x - 15) > 0$

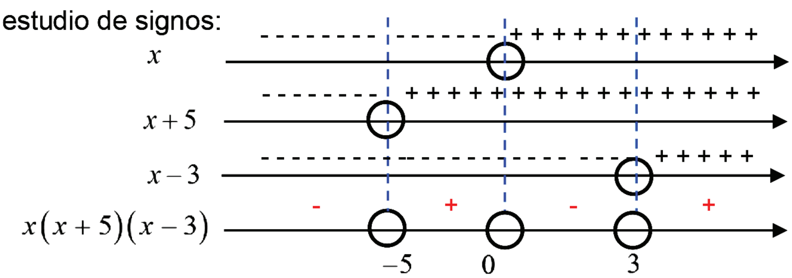
$$x(x+5)(x-3) > 0$$

Los valores críticos son: $x = 0$

$x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5$

$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Por estudio de signos:



Los intervalos que cumplen la desigualdad $C_{sol.} = (-5, 0) \cup (3, +\infty)$

Actividad

Resolvemos las inecuaciones:

a) $x^2 + 2x + 9 > 0$

b) $4x^2 - 4x + 6 < 0$

c) $x^2 + 4x + 12 \geq 0$

d) $4x^2 + 6x + 10 \geq 0$

e) $x^2 - 2x + 7 > 0$

f) $(x+1)(x-3)(2x+1) \leq 0$

g) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

h) $2x^3 + 11x^2 + 16x + 7 > 0$

i) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \geq 0$

j) $(x-2)(x+1)(x+3) \leq 0$

b) Inecuaciones con variable en el denominador

Son aquellas en las que tanto el numerador como el denominador son inecuaciones polinómicas cuadráticas o polinómicas de grado mayor a 2.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0$$

Factorizando: $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0 \Rightarrow \dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}<0$

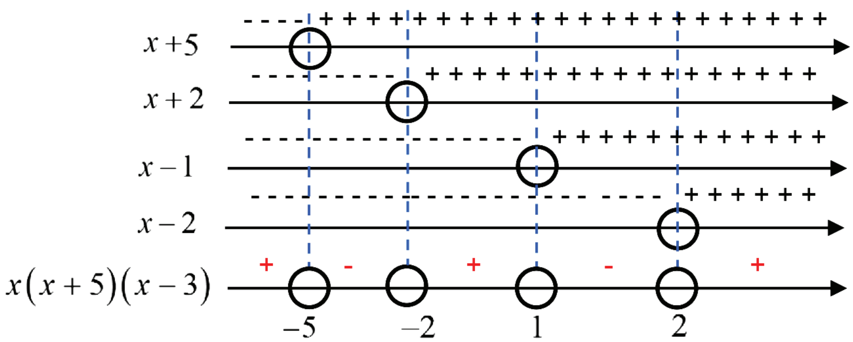
Los valores críticos son: $x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=-5$

$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$

$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

Por estudio de signos



Los intervalos que cumplen la desigualdad $C_{sol.}=(-5,-2)\cup(1,2)$

NOTA IMPORTANTE

Las inecuaciones con variable en el denominador pueden tener expresiones lineales, cuadráticos o de grado superior, pero de manera general para resolverlas se siguen los pasos expuestos.

2. Inecuaciones lineales de dos variables

Se tiene conocimiento de que una ecuación con dos variables es una recta en el plano cartesiano, al cambiar la igualdad por una desigualdad se forma una inecuación lineal de dos variables.

$$ax+by>c\,;\; ax+by<c\,; ax+by\geq c\,;\; ax+by\leq c$$

Las inecuaciones de este tipo se resuelven así:

1ro. Se traza la ecuación lineal ax + by = c . Esta define una frontera entre dos superficies o semiplanos en que divide al plano cartesiano.

2do. El conjunto solución de la inecuación de dos variables es uno de esos semiplanos y se determina seleccionando un punto de cada semiplano y se reemplaza en la desigualdad para ver si la cumple o no.

3ro. Se debe verificar que la frontera sea parte o no del conjunto solución de la inecuación de dos variables. Esto se hace viendo la desigualdad: si la desigualdad es < o >, la frontera no es solución de la inecuación, pero si la desigualdad es ≥ o ≤, la frontera si forma parte del conjunto solución.

4to. La solución de la inecuación de dos variables debe ser interpretada geométricamente.

Actividad

Encontremos el conjunto solución de las inecuaciones:

a) $\dfrac{x-3}{x+2}<0$

b) $\dfrac{x+5}{x}\geq 0$

c) $\dfrac{2x+6}{x-3}\leq 0$

d) $\dfrac{x+1}{x-1}+2\geq 0$

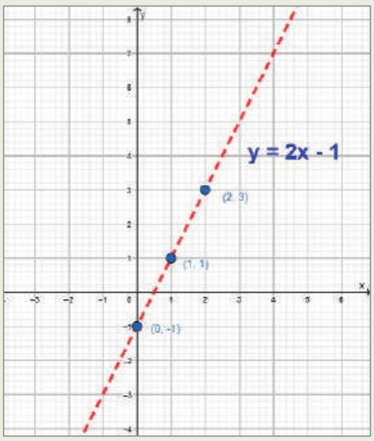
e) $\dfrac{x-1}{3x+2}\geq 0$

f) $\dfrac{x(x-1)}{x+5}\geq 0$

GRAFICANDO

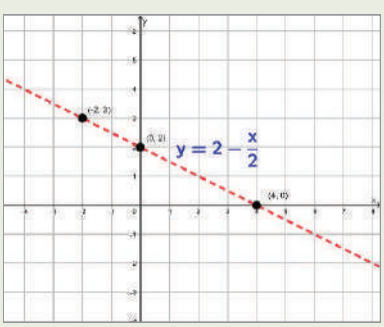
La inecuación: $y = 2x - 1$

x	$2x-1$	y	(x,y)
0	$2(0)-1$	-1	$(0,-1)$
3	$2(3)-1$	5	$(3,5)$



La inecuación: $y = 2 - \dfrac{x}{2}$

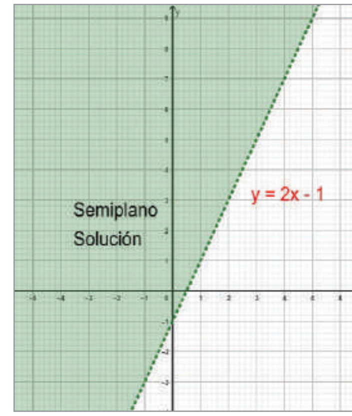
x	$y = 2 - \dfrac{x}{2}$	y	(x,y)
-2	$y = 2 - \dfrac{(-2)}{2}$	3	$(-2,3)$
4	$y = 2 - \dfrac{(4)}{2}$	0	$(4,0)$



Ejemplos: Resolver cada inecuación

1) $2x - y < 1$

Despejar y: $2x - 1 < y \;\Rightarrow\; y > 2x - 1$



Representamos la recta $y = 2x - 1$

Para ver que semiplano es solución, vamos a tomar el punto $(3,1)$ que es un punto del semiplano inferior y sustituimos en la inecuación:

$x = 3$ y $y = 1$ para comprobar si la verifica o no.

$$2x - y < 1 \quad \Rightarrow \quad 2(3) - (1) < 1 \quad \Rightarrow \quad 5 < 1$$

Lo que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el semiplano superior y la frontera no forma parte de la solución.

$$C_{sol.} = \{(x,y) / y > 2x - 1\}$$

2) $2x + 4y > 8$

Despejar y: $2x + 4y > 8 \;\Rightarrow\; y > 2 - \dfrac{x}{2}$

Representamos la recta $y = 2 - \dfrac{x}{2}$

Para ver qué semiplano es solución, vamos por ejemplo a tomar el punto (0,0) que es un punto del semiplano inferior y sustituimos en la inecuación:

$x = 0$ y $y = 0$ para comprobar si la verifica o no.

$$2x + 4y > 8 \quad \Rightarrow \quad 2(0) + 4(0) > 8 \quad \Rightarrow \quad 0 > 8$$

Lo que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el semiplano superior y la frontera no forma parte de la solución.

$$C_{sol.} = \left\{(x,y) / y = 2 - \frac{x}{2}\right\}$$

Actividad

Determinemos el conjunto solución de la inecuación:

a) $2x + y \le 2$

b) $2x - 3y > -6$

c) $2x + y - 3 > 0$

d) $x - 3y + 2 < 0$

e) $x + 4y - 12 < 0$

f) $4x + y \le 20$

g) $\dfrac{2y-3}{2} \le \dfrac{x-1}{3}$

h) $3x + 2y + 5 \le 0$

i) $2x - 3y \le 0$

j) $3x - 2y < 2$

k) $y \le 8$

l) $x + 2y \ge 12$

3. Sistema de inecuaciones

Son sistemas de la forma

$$\begin{cases} a_1x+b_1y>c_1 \\ a_2x+b_2y>c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y<c_1 \\ a_2x+b_2y<c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y\geq c_1 \\ a_2x+b_2y\geq c_2 \end{cases};\begin{cases} a_1x+b_1y\leq c_1 \\ a_2x+b_2y\leq c_2 \end{cases}$$

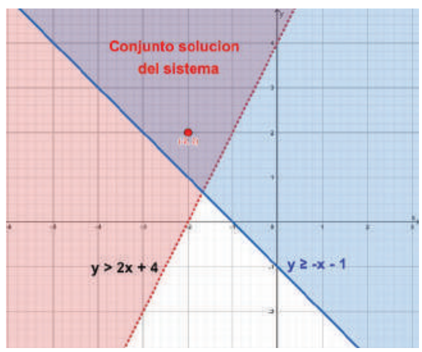
Un punto (x_0, y_0) es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones.

El conjunto de soluciones viene dado por la región del plano común a las regiones solución de cada una de las inecuaciones. Por tanto, se debe resolver cada inecuación del sistema por separado y a continuación hallar la región del plano común a todas esas inecuaciones (buscamos las zonas de intersección de ambos, o los puntos del plano que cumplen ambas desigualdades simultáneamente).

Ejemplo:

Resolver, gráficamente, el sistema de desigualdades lineales.

1) $\begin{cases} 2x-y+4<0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$



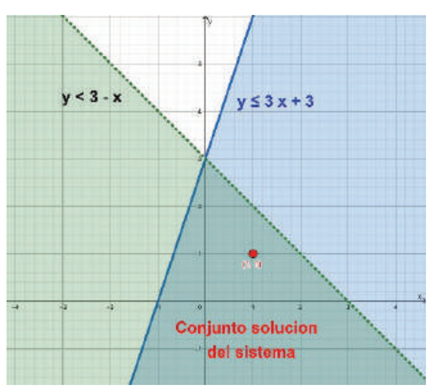
Despejar "y" en cada una de las desigualdades: $y>2x+4$

$y\geq -x-1$

La intersección de las soluciones es el conjunto soluciones del sistema de inecuaciones. Cualquier punto que se encuentre en esta región satisface las condiciones de ambas inecuaciones del sistema.

Verifiquemos para el punto (-2,2), es decir al sustituir x = -2, y = 2 en ambas inecuaciones originales, tendremos una desigualdad verdadera.

2) $\begin{cases} x+y<3 \\ y-3\leq 3x \end{cases}$



Despejar "y" en cada una de las desigualdades: $y<3-x$

$y\leq 3x+3$

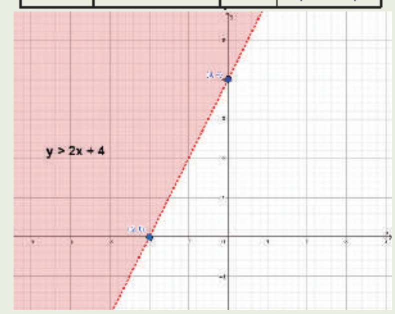
La intersección de las soluciones es el conjunto solución de sistema de inecuaciones. Cualquier punto que se encuentre en esta región satisface las condiciones de ambas inecuaciones del sistema.

Verifiquemos para el punto (1,1), es decir al sustituir x = 1, y = 1 en ambas inecuaciones originales, tendremos una desigualdad verdadera.

GRAFICANDO

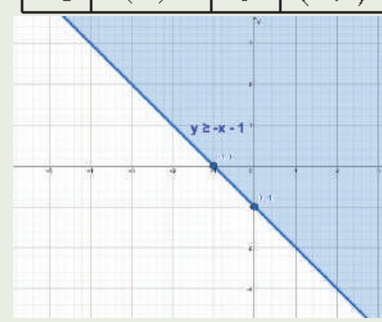
Gráfica de la inecuación:
y >2x + 4

x	$2x+4$	y	(x,y)
0	$2\cdot(0)+4$	4	$(0,4)$
-2	$2(-2)+4$	0	$(-2,0)$



Gráfica de la inecuación:
y ≥ x -1

x	$-x-1$	y	(x,y)
0	$-(0)-1$	-1	$(0,-1)$
-1	$-(-1)-1$	0	$(-1,0)$



Verificando:

$$\begin{cases} 2x-y+4<0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2(-2)-(2)+4<0 \\ (-2)+(2)+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -2<0 \\ 1\geq 0 \end{cases}$$

Actividad

Resolvemos cada sistema:

a) $\begin{cases} x+6>2 \\ 4x-3<1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+1>x+9 \\ x+5\leq 2-3x \end{cases}$

GRAFICANDO

Expresiones que intervienen en el planteo de inecuaciones:

" > "	*Mayor, más, supera, superior, excede, sobrepasa.*
" < "	*Menor, menos, no llega, inferior, es excedido, no alcanza.*
" ≥ "	*Mayor o igual, como mínimo, por lo menos, al menos, no es menor, no menos.*
" ≤ "	*Menor o igual, como máximo, no supera, no más, no es mayor, cuando mucho.*

La tarifa de un taxi es de Bs. 17,5 por los primeros 8 kilómetros, y Bs. 3,50 por cada kilómetro adicional.

Escribir una desigualdad que pueda utilizarse para determinar la distancia máxima que una persona puede viajar con Bs. 15

$$3{,}50x \leq 45 - 17{,}5$$
$$3{,}50x \leq 27{,}5$$
$$x \leq \frac{27{,}5}{3{,}50}$$
$$x \leq 7{,}9$$

4. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

No olvides que, para resolver inecuaciones, debemos traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, algebraico; se aconseja proceder de la manera similar a la forma de resolver una ecuación y tener en cuenta las propiedades.

Ejemplos:

1) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20: $3x + 8 < 20$

2) Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo 5: $\frac{3x}{4} - 2 > \frac{x}{2} + 5$

3) Si mi dinero aumentara al triple y, además, me regalaran 20 Bs, tendría, por lo menos, 110 Bs.: $3x + 20 \geq 110$.

Problema

María tiene 22 años menos que su papá y es menor por 48 años que su abuelo. A partir de cierta edad, la suma de los años que tienen ella y su padre será mayor que la edad de su abuelo, ¿cuál es esa edad?

Sea x la edad de María.

La edad de su padre $x + 22$

La edad de su abuelo $x + 48$

$x + x + 22 > x + 48$

Así la inecuación será: $2x + 22 > x + 48 \Rightarrow x > 26$

Respuesta: Cuando María sea mayor a 26 años, la suma de su edad con la de su padre superará a la edad de su abuelo.

Problema

La carnicería "Buen Gusto" se encuentra con grandes reservas de carne de res que deben vender rápidamente. Julia la dueña sabe que, si la carne se ofrece a "x" bolivianos por kilo, venderá "k" kilos, con $k = 1000 - 20x$. ¿Qué precio mínimo deberá fijar con el fin de obtener ingresos de por lo menos Bs. 12000?

Sea "x" el precio en bolivianos por kilo *y* "k" la cantidad en kilos.

$k = 1000 - 20x$

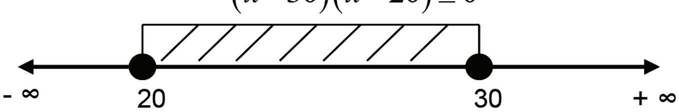
El ingreso debe ser: $I \geq 12000$

Se sabe que: $I = x \bullet k$

$$x(1000 - 20x) \geq 12000$$
$$20x^2 - 1000x + 12000 \leq 0$$
$$x^2 - 50x + 600 \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} x & -20 & = & -20x \\ x & -30 & = & -30x \\ & & & -50x \end{array}$$

$$(x-30)(x-20) \leq 0$$



Respuesta: Julia debe fijar el precio mínimo de Bs. 20 por kilo de carne.

Actividad

Traduzcamos al lenguaje algebraico:

- El quíntuple del número total de alumnos de mi clase es inferior a 37.
- La mitad de un número menos 10 unidades es mayor que 7.
- El perímetro de un rectángulo cuya base mide 3 cm más que la altura es menor que 50 m.
- Hacer cocer el arroz no dura más de 18 minutos.
- La suma de tres números consecutivos es mayor que 60. ¿Cuál es el menor valor que podría adoptar el número mayor?
- ¿Cuál será el largo de cierto terreno de forma rectangular si se sabe que el ancho es de 5m y su perímetro mide 26m?

Problema

La suma de un número natural con su sucesor es menor a 33. ¿Cuáles son los valores que este número puede adoptar?

Sea x el primer número *y* (*x* + 1) el sucesor:

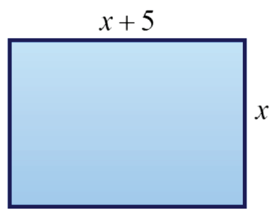
$$x+(x+1)<33$$
$$2x+1<33$$
$$x<16$$

Respuesta: Como “x” es natural, los valores que puede tomar son:

$$x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Problema

El área de un terreno rectangular debe ser por lo menos de 250m2 , si el largo del terreno es 7 metros mayor que su ancho, ¿Cuál es el valor mínimo que deben tomar las dimensiones del terreno?



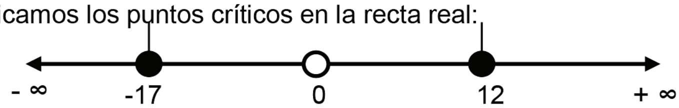
Sea A_t el área del terreno

$$A_t=(x+5)x=x^2+5x$$

Se debe cumplir $A_t\geq 204$, para dar respuesta al problema veamos

$$x^2+5x\geq 204$$
$$x^2+5x-204\geq 0 \text{, factorizando}$$
$$(x+17)(x-12)\geq 0$$

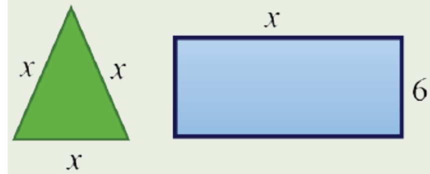
Luego ubicamos los puntos críticos en la recta real:



Por condición lógica $x>0$, debido a esto y la gráfica de la recta real se tiene que el valor de x debe ser: $x\in[12,+\infty)$. Por tanto, el valor mínimo que pueden tomar el ancho y el largo son 12 y 17 metros respectivamente

GRAFICANDO

Tenemos dos figuras: un triángulo equilátero de lado x, y un rectángulo de largo x y alto igual a 6. Determina para qué valores de x el perímetro del rectángulo es superior al del triángulo.



Perímetro del rectángulo:

$$P_{\square}=2x+12$$

Perímetro del triángulo:

$$P_{\triangle}=3x$$

$$P_{\square}>P_{\triangle}$$
$$2x+12>3x$$
$$2x-3x>-12$$
$$-x>-12$$
$$x<12$$

Para los valores de x menores a 12 el perímetro del rectángulo es superior al perímetro del triángulo.

VALORACIÓN

Las inecuaciones y los sistemas de inecuaciones se pueden utilizar para crear modelos matemáticos de sistemas físicos o situaciones del mundo real, en matemática, las inecuaciones se pueden utilizar para resolver problemas de geometría, álgebra y cálculo. En economía, las inecuaciones se pueden utilizar para modelar el comportamiento de los mercados o las decisiones de los consumidores, es decir, en un presupuesto que indica el gasto máximo permitido es un caso de una inecuación.

- ¿Cómo se emplea la definición de inecuaciones lineales en la elaboración de un presupuesto familiar?
- ¿Qué operaciones y propiedades se utiliza para generar un modelo matemático que nos ayude a realizar un presupuesto familiar?

PRODUCCIÓN

- Realicemos una investigación sobre los presupuestos que realizan en una familia para no generar déficit y planificar los gastos familiares.
- Construyamos un modelo matemático para observar cómo se realiza la planificación del presupuesto de una familia.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

PRÁCTICA

Clara y Ruth se encuentran en el laboratorio de computación de su unidad educativa, pueden ver que el antivirus en una de los equipos les indica que el Sistema ha sido infectado con un virus computacional, lo que ellas interpretan la situación con una enfermedad.

Los virus, troyanos y otros programas son considerados infecciosos pues alteran el normal funcionamiento del Sistema Operativo o alguna aplicación del mismo en la computadora, es así que la computadora podría no rendir igual que siempre a menos que limpiemos por completo la memoria hasta eliminar el virus.

El virus que infectó el equipo se caracteriza por hacer doce copias de sí mismo en un segundo, luego, cada una de esas 12 copias produce otras 12 copias; de esta manera, al cabo de dos segundos ya habrá 12x12 copias del virus. Además, se sabe que del virus ocupa 1kb (kilobyte) en el disco, ¿en qué tiempo se satura la computadora si su memoria es de 256000kb?

Actividad

Respondamos:

- ¿En cuánto tiempo se saturará la memoria de la computadora?
- Elaboremos una tabla donde se observe el incremento del virus con respecto al tiempo transcurrido.
- ¿En qué otras situaciones se puede observar comportamientos similares?
- ¿Sucedería igual con la gripe?

TEORÍA

DATO

Los logaritmos se inventaron (a principios del siglo XVII) para simplificar los cálculos matemáticos de multiplicación, división, potenciación y radicación, sobre todo cuando los resultados son números muy grandes y básicamente lo que importa es su orden de magnitud.

1. Logaritmos

Los logaritmos fueron ideados antes que las computadoras actuales y permiten realizar operaciones con números muy grandes o muy pequeños. El logaritmo simplifica el cálculo, siempre y cuando no contemos con una calculadora científica. A medida que se analizaron más y más los logaritmos se fueron ideando muchas propiedades que simplifican aún más el cálculo. Es verdad que muchos de dichos cálculos se pueden hacer actualmente con la ayuda de las computadoras. Pero en algunas ocasiones se encontrarán explicaciones de ciertos temas utilizando logaritmos y no podremos entender, a menos que tengamos una base en el tema.

Por ejemplo, plantear la ecuación $5^x = 333$ o similar. Dar una aproximación de la solución.

En este ejemplo estamos buscando el exponente al que está elevado, número “5”, para ello nos vemos obligados a buscar una operación matemática que no conocías log_5 .

Definición

Sea a un número real positivo y no nulo distinto de 1, y N otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo del número N en la base “a”, “a” el número a que debe elevarse la base para obtener el número N

$$\log_a N = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = N$$

Notación logarítmica — Notación exponencial

$$\log_2 16 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$$

Se lee: El logaritmo de 16 en base 2 es 4.

Consecuencias de la definición de logaritmo:

- $\log_a 1 = 0$, ya que $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$, ya que $a^1 = a$.
- $\log_b a = c$ no existe si $b < 0$ $\acute{o}$ $b = 0$
- $\log_b N < 0,\ 0 < N < 1,\ b > 1$
- $\log_b N > 0,\ 0 < N < 1,\ b < 1$
- $\log_b N > 0 \Leftrightarrow N > 1,\ b > 1$
- $\log_b N < 0 \Leftrightarrow N > 1,\ b < 1$

2. Sistema de logaritmos

Toda expresión de la forma $\log_a N = x$ constituye un sistema de logaritmos según su base.

Por lo tanto, existen infinitos sistemas de logaritmos; pero los más utilizados e importantes son los siguientes:

- **Sistemas de logaritmos decimales,** se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número diez. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} N = \log N$$

- **Sistemas de logaritmos naturales,** neperianos o hiperbólicos: Se llaman logaritmos naturales a los logaritmos que tienen por base el número irracional e = 2.718281828459....

$$\ln x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = x$$

Logaritmos Decimales

Son logaritmos cuya base es 10 y por estar de acuerdo con nuestro sistema de numeración reciben el nombre de logaritmos comunes decimales; también son llamados logaritmos vulgares de Briggs.

Así: Para las potencias de 10, se tiene

$\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$	$\log 1 = \log 10^0 = 0$
$\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$	$\log 10 = \log 10^1 = 1$
$\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$	$\log 100 = \log 10^2 = 2$
$\log 0,0001 = \log 10^{-4} = -4$	$\log 1000 = \log 10^3 = 3$
$\log 10^{-n} = -n$	$\log 10^n = n$

Los logaritmos decimales se pueden escribir como suma de dos números: la característica y la mantisa.

$$\log 777 = \underbrace{2}_{Caracteristica}\ \overbrace{,8904210}^{Mantisa}$$

CASOS PARTICULARES

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b b^2 = 2$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b \sqrt{b} = \frac{1}{2}$$

$$\log_b \frac{1}{b} = -1$$

$$\log_{\sqrt{b}} b = 2$$

Comprueba los resultados utilizando la definición de logaritmos.

DATOS IMPORTANTES

Las tablas que tradicionalmente se han utilizado para calcular logaritmos, son tablas de logaritmos decimales.

La característica de un logaritmo decimal es el número entero inmediatamente inferior o igual a dicho logaritmo.

La mantisa de un logaritmo decimal es la diferencia entre el logaritmo y su característica.

Actualmente es suficiente presionar en la calculadora, la tecla log (escrito sin indicar la base se entiende que la base es

10) para obtener el log10 x cuándo x >0.

Actividad

Calculemos aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} =$

b) $\log_5 \frac{1}{125} =$

c) $\log_4 64 =$

d) $\log_3 81 =$

e) $\log_{10} 0,1$

f) $\log_3 \sqrt{27}$

g) $\log_{1\ 2} 16$

h) $\log_2 16$

i) $\log_{49} \sqrt{7}$

j) $\log_2 \frac{1}{16}$

DATO

Teóricamente, el número "e" se obtiene al hacer crecer n en la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ *, o sea que cuando*

$$n \to \infty$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$Anti\log_a x = N = a^x$$

Si: $\log_4 x = 5 \Rightarrow 4^5 = x$

$\Rightarrow x = 1024$

o

$\log_4 x = 5 \Leftrightarrow$

$Anti\log_4 5 = 4^5$

$\Rightarrow x = 1024$

Conocidos los logaritmos en una base se pueden hallar fácilmente en cualquier otra. La base que se utiliza en la práctica es 10: logaritmos decimales.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Aunque sus equivalencias son diferentes, pero nos darán el mismo resultado. Pues recordemos que ya vimos que del logaritmo vulgar trabaja en base a "10" y el natural trabaja en base a "e".

Logaritmos Naturales

En los cálculos científicos la base más usada es el número irracional trascendente $e = 2.72....$, siendo "e" el número de Euler, base de los logaritmos naturales o de Napier. En la calculadora aparecen las teclas para el cálculo del logaritmo en base e denotado por "$\ln$", y para la exponencial por e^x. Los logaritmos naturales se simbolizan con el operador "$\ln$", debe entenderse que "$\ln$"equivale a "$\log_e$", pero este último operador no es usual.

Así: $\ln 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^0 = 1$ y $\ln e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^1 = e$

Antilogaritmo

Es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número. Es decir, consiste en elevar la base al número resultante

$$\log_a N = x \quad \Leftrightarrow \quad Anti\log_a x = N \quad \Leftrightarrow \quad a^x = N$$

Ejemplo: $\log_2 N = 3 \quad \Leftrightarrow \quad Anti\log_2 3 = N \Rightarrow a^x = N \Rightarrow 2^3 = 8$

Cologaritmo

Se llama cologaritmo de un número N al logaritmo de su recíproco.

$$co\log_a N = \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

Ejemplo: $co\log_2 7 = \log_2 \frac{1}{7} = -\log_2 7$

Cambio de base

Las bases comunes en el estudio de los logaritmos son "10" y "e", pero siempre es posible escribir un logaritmo con otra base, esto se realiza cuando es necesario realizar el cambio de bases para pasar el logaritmo de una base a otra.

$$x = \log_a N$$
$$a^x = N$$
$$\log_b a^x = \log_b N$$
$$x\log_b a = \log_b N$$
$$x = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_6 665 = \frac{\log 665}{\log 6} = \frac{2,8228}{0,7781} = 3,6276$$

$$\log_6 665 = \frac{\ln 665}{\ln 6} = \frac{6,4997}{1,7917} = 3,6276$$

Actividad

Calculemos los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 N = 3$

b) $\log_4 N = 6$

c) $co\log_3 9 =$

d) $co\log_5 12 =$

e) $\log_4 125 =$

f) $\log_3 62 =$

g) $\ln_7 62 =$

h) $\log_9 777 =$

i) $\ln_5 125 =$

3. Propiedades de logaritmos

Logaritmo de un producto

Si M y N son números reales positivos no nulos, entonces, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a M.N = \log_a M + \log_a N$$

Ejemplo: $\log_4 (4096 \bullet 256) = \log_4 4096 + \log_4 256 = 6 + 4 = 10$

Logaritmo de un cociente

Si M y N son números reales positivos no nulos, entonces, el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Ejemplo: $\log_2 \frac{128}{32} = \log_2 128 - \log_2 32 = 7 - 5 = 2$

Logaritmo de una potencia

Si M es un número real positivo y N un número real cualquiera, entonces, el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a M^n = n \bullet \log_a M$$

Ejemplo: $\log_2 64^7 = 7 \bullet \log_2 64 = 7 \bullet 6 = 42$

Logaritmo de una raíz

Si M es un número real positivo y N un número natural mayor que 1, entonces, el logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

Ejemplo: $\log_5 \sqrt{125} = \frac{1}{2} \log_5 125 = \frac{3}{2}$

El logaritmo de 1, en cualquier base, es igual a cero $\log_a 1 = 0$

El logaritmo de la base es igual a la unidad $\log_a a = 1$

MÁS EJEMPLOS

$\log_4 4096 = 6 \Leftrightarrow 4^6 = 4096$

$\log_4 256 = 4 \Leftrightarrow 4^4 = 256$

$\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$

$\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 2^5 = 32$

$\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow 2^6 = 64$

$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

$\log_9 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 9^0 = 1$

$\log_7 7 = 1 \quad \Leftrightarrow 7^1 = 7$

$\log_6 6^7 = 7 ;\ 13^{\log_{13} 5} = 5$

Actividad

Evaluemos cada expresión:

a) $\log_5 (x \bullet y) =$

b) $\log_3 \frac{243}{27} =$

c) $\log_2 16^5 =$

d) $\log_2 \sqrt[3]{8} =$

e) $\log (a \bullet b \bullet c) =$

f) $log_2 4^{66} =$

g) $\log_4 \frac{1}{64} =$

h) $\log_3 \sqrt[21]{81} =$

i) $\log_{32} 32 =$

APLICANDO PROPIEDADES

$\log_2(x+2)=5$

$2^{\log_2(x+2)}=2^5$

$(x+2)=32$

$x=30$

Ejemplos:

Dado el logaritmo, aplicar las propiedades.

1) $\log(5\log 100)^2 = 2\log(5\log 100)=2\log(5\log 10^2)$

$=2\log(5\bullet 2\log 10)=2\log 10=2$

2) $4\log_2\frac{\sqrt{a-b}}{a}-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{a-b}{a}\right)^4=\log_2\left(\frac{\sqrt{a-b}}{a}\right)^4-\log_2\left[\left(\frac{a-b}{a}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2\frac{(a-b)^2}{a^4}-\log_2\left(\frac{a-b}{a}\right)^2=\log_2\frac{\frac{(a-b)^2}{a^4}}{\frac{(a-b)^2}{a^2}}=\log_2\left[\frac{a^2(a-b)^2}{a^4(a-b)^2}\right]$

$=\log_2\left(\frac{1}{a^2}\right)=\log_2\left(a^{-2}\right)$

CARACTERÍSTICAS

Algunas características de la función logaritmo:

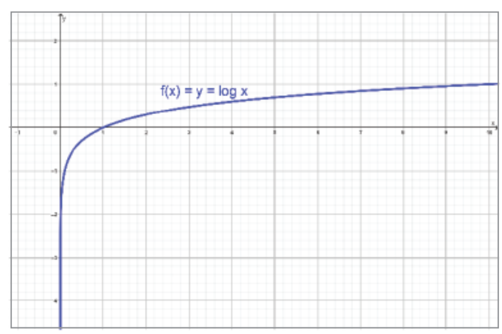
- *Dominio:* $\mathbb{R}^+$
- *Imagen:* $\mathbb{R}$.
- *Ceros: Corta al eje x en* $(1,0)$
- *Ordenada al origen: no tiene*
- *Asíntota Vertical* $x=0$ *(es decir el eje y).*

4. Función logaritmo

La función logarítmica en base "a" es la función inversa de la exponencial en base "a". Se define como $y=f(x)=\log_a x$, $a>0$ y $a\neq 1$.

La tabla de valores y representamos la gráfica de la función: $y=\log x$

x	$\log x$
-1	error
0	error
0'1	-1
1	0
2	0'30103
10	1
100	2



5. Ecuaciones logarítmicas

Son las que tienen la incógnita en el argumento de algún logaritmo. Para resolverlas, debemos tener presente que:

- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Actividad

Dado un logaritmo aplicamos las propiedades:

a) $\log\left(\frac{x^4z^2}{y^5}\right)=$

b) $\log 7ab\sqrt[3]{5c^2}=$

c) $\log 2a\sqrt{b}=$

d) $\log\frac{5a^2b\sqrt[4]{c}}{2xy}=$

e) $\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}\log y-\frac{1}{4}\log z-\frac{1}{2}\log w=$

f) $\frac{1}{5}(\log 3+\log a-\frac{1}{4}\log c)=$

g) $\frac{3}{4}\left(\log a-3\log b+\frac{1}{5}\log c-\frac{1}{3}\log d\right)=$

h) $\frac{1}{3}\log a-\frac{1}{2}\log b-\frac{1}{2}\log c=$

Ejemplos:

Resolver las ecuaciones logarítmicas.

1) $\log_2(x+1) = 3$

$x+1=2^3 \rightarrow x=2^3-1 \qquad \Rightarrow \qquad x=7$

2) $\log_2(x-1) + \log 3 = \dfrac{\log 3x}{\log 2}$

$\underbrace{\log_2(x-1)}_{\frac{\log(x-1)}{\log 2}} + \log 3 = \dfrac{\log 3x}{\log 2} \Rightarrow \dfrac{\log(x-1)}{\log 2} + \log 3 = \dfrac{\log 3x}{\log 2}$

$\dfrac{\log(x-1)}{\log 2} = \dfrac{\log 3x}{\log 2} - \log 3 \Rightarrow \qquad \log(x-1) = \log 3x - \log 2 \bullet \log 3$

$\log(x-1) = \log 3x - \log 3^{\log 2} \Rightarrow \qquad \log(x-1) = \log \dfrac{3x}{3^{\log 2}}$

$x-1 = \dfrac{3x}{3^{\log 2}} \Rightarrow \qquad x = \dfrac{3^{\log 2}}{3^{\log 2}-3}$

3) $log((x+1)+(x+2)) = 1$

$\log(x+1+x+2)=1$

$\log(2x+3)=1$

$10 = 2x+3 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{7}{2}$

4) $\log_3 4 + \log_3 x = \log_3 30 - \log_3 3$

$\log_3(4 \bullet x) = \log_3 \dfrac{30}{3} \Rightarrow \log_3(4x) = \log_3 10$

$4x = 10 \qquad \Rightarrow \qquad x=2$

6. Propiedades de las potencias

Multiplicación de potencias de igual base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Ejemplo: $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$	División de potencias de igual base $a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ Ejemplo: $4^5 : 4^7 = \dfrac{4^5}{4^7} = 4^{5-7} = 4^{-2}$
Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ó $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Ejemplo: $5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225$	División de potencias de distinta base e igual exponente $a^n : b^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ Ejemplo: $10^3 : 5^3 = \left(\dfrac{10}{5}\right)^3 = 2^3 = 8$

EJEMPLOS

$\ln(3x+8) = \ln(2x+2)(x-2)$

$(3x+8) = 2x^2 - 2x - 4$

$0 = 2x^2 - 5x - 12$

$0 = (2x+3)(x-4)$

$x_1 = 4$

$x_2 = -\dfrac{3}{2}$ (*no es solución*)

$\log_2(3x-4) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 3x-4$

$3x-4=8$

$3x=8+4$

$3x=12$

$x=\dfrac{12}{3} \Rightarrow \qquad x=4$

OTRAS PROPIEDADES

$a^0 = 1$

Ejemplo $(2x^3-5x+3)^0 = 1$

$1^n = 1$

Ejemplo $1^{50} = 1$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo $(p^3)^2 = p^{3 \cdot 2} = p^6$

Base entera

$a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1^n}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$

Ejemplo

$3^{-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

Base racional

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

Ejemplo

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^5 = \dfrac{3^5}{2^5} = \dfrac{243}{32}$

Actividad

Resolvemos las ecuaciones:

a) $log(3x+1) - log(2x-3) = 1$

b) $\log x = \log 2 + \log(x-3)$

c) $log(20x) + log(2x) = 2$

d) $log\,x + log\,50 = 1$

e) $2\log x = \log(10-3x)$

f) $5\log x - \log 10 + 1 = 0$

g) $\log_2 x + \log_2 4x - 5 = 0$

h) $\log_5^2 x - 2\log_5 x^2 + 5 = 0$

i) $\log_2(2x+2) - \log_2(-x+2) = 2$

POTENCIAS

Las propiedades de las potencias son:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

La base de una función exponencial o de una función logarítmica es un número estrictamente positivo distinto de uno.

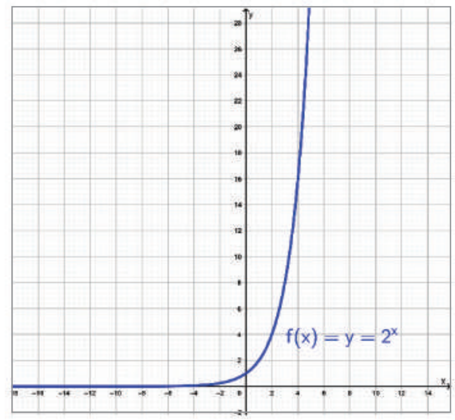
7. Función exponencial

Sea "a" un número real positivo. Aquella función en que: a cada número real "x" le corresponde a^x es llamada función exponencial de base "a" con exponente "x". Se representa:

$$y = f(x) = a^x$$

La tabla siguiente muestra las potencias de tomando como exponentes números negativos y positivos.

x	a^x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Algunas características de la función exponencial:

- Los valores $f(x) = a^x$ de son todos positivos, ya que la gráfica siempre se encuentra situada por encima del eje x.
- Es inyectiva $a \neq 1$ (ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si $a > 1$ (es decir la curva sube de izquierda a derecha).
- Decreciente si $a < 1$.
- Las curvas $y = a^x$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje Y.

8. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el exponente.

Para resolver una ecuación exponencial vamos a tener en cuenta: $a > 0$, $a \neq 1$.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo:

$$27^{2x+8} = 3^{4x-20} \Rightarrow 3^{3(2x+8)} = 3^{4x-20} \Rightarrow 3(2x+8) = 4x - 20 \Rightarrow 2x = -44 \Rightarrow x = -22$$

Actividad

Apliquemos las propiedades de los exponentes:

a) $a^6 \cdot a^3 =$

b) $(-3)^a \cdot 4^a =$

c) $2^3 \cdot 2^2 =$

d) $(3mn^2)^4 =$

e) $(b^{-2})^8 =$

f) $\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\right)^3 =$

g) $(m^{3a-1} \cdot m^{3a+1})^3 =$

h) $\left(\frac{k^{3t+2}}{k^{2+3t}}\right)^{10} =$

Ejemplo:

1) $3^x = 21$

$$\log(3^x) = \log 21$$
$$x \bullet \log 3 = \log 21$$
$$x = \frac{\log 21}{\log 3}$$
$$x = 2,7713$$

2) $(0,75)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} \bullet \left(\frac{9}{16}\right)^{x+1}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} \bullet \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{x+1}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} \bullet \left(\frac{3}{4}\right)^{2x+2}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4x+2}$$

Igualando los exponentes

$$3x - 2 = 4x + 2$$
$$x = -4$$

3) $e^{x-3} = 2^{x-1}$

$$\ln e^{x-3} = \ln 2^{x-1}$$
$$(x-3)\ln e = (x-1)\ln 2$$
$$(x-3)(1) = (x-1)\ln 2 \qquad x - 3 = x\ln 2 - \ln 2$$
$$x(1-\ln 2) = 3 - \ln 2 \qquad x = \frac{3-\ln 2}{1-\ln 2}$$

MÁS ECUACIONES

Resolver:

- $\sqrt[5x-1]{8^{x+1}} = 32$

$$8^{\frac{x+1}{5x-1}} = 2^5$$
$$2^{3\left(\frac{x+1}{5x-1}\right)} = 2^5$$
$$3(x+1) = 5(5x-1)$$
$$3x + 3 = 25x - 5$$
$$x = \frac{4}{11}$$

- $3^{x+2} = 7$

$$\log\left(3^{x+2}\right) = \log 7$$
$$(x+2)\log 3 = \log 7$$
$$(x+2) = \frac{\log 7}{\log 3}$$
$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$$
$$x = -0,2287$$

VALORACIÓN

Las funciones exponenciales y logarítmicas son dos funciones matemáticas fundamentales que tienen una amplia gama de aplicaciones en la ciencia, la ingeniería, la economía y la vida cotidiana, además que son funciones inversas una de la otra.

Por ejemplo, para medir la cantidad de intensidades de sonido en una fiesta debemos tomar como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}\ {}^{watts}/_{m^2}$ a una frecuencia de $1000\,Hertz$, lo que mide un sonido que es apenas audible. El nivel de intensidad, medido en decibeles (dB), se define como:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$$

- ¿Cómo se emplean los logaritmos en el nivel de intensidad en decibeles para un acto cívico y no causar conminación auditiva?

PRODUCCIÓN

Construimos un modelo matemático para controlar la intensidad de decibeles cuando se realizan actos cívicos en tu Unidad Educativa, en donde se utilizan parlantes de sonido fuerte.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL CONTEXTO

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado $ax^2 + c = 0$:

- $x^2 - 1 = 0$
- $x^2 - 6 = 10$
- $x^2 - 9 = 0$
- $3x^2 - 4 = 28 + x^2$
- $2x^2 = 0$
- $4x^2 - 9 = 0$
- $1 - 4x^2 = -8$

Resolver las siguientes ecuaciones $ax^2 + bx = 0$:

- $x^2 - x = 0$
- $x^2 + 2x = 0$
- $x^2 - 9x = 0$
- $x^2 + 11x = 0$
- $8x^2 + 16x = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones completando cuadrados:

- $(x-5)(x+1) + 5 = 0$
- $8 + x^2 + 3x = 0$
- $x - 5 + 3x^2 = 0$
- $x - 2x^2 + 7 = 0$
- $(3x-2)(3x+2) = 77$
- $x^2 + x + 2 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones por factorización:

- $x^2 - 7x + 3 = 0$
- $x^2 - 16x + 64 = 0$
- $x^2 - 6x + 13 = 0$
- $x^2 - 14x + 49 = 0$
- $x^2 - 8x + 25 = 0$
- $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones por Fórmula General:

- $x^2 - 8x + 15 = 0$
- $x^2 - 8x + 25 = 0$
- $x^2 + 7x + 3 = 0$
- $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones por Po – Shen loh:

- $6x^2 - 7x + 2 = 0$
- $3x^2 - 10x + 3 = 0$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- $3x^2 - 2x - 1 = 0$
- $6x^2 - 5x + 1 = 0$
- $x^2 + 7x + 3 = 0$

Formar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

- $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{6}{5}$
- $x_1 = 5$ y $x_2 = 8$
- $x_1 = \frac{11}{3}$ y $x_2 = 9$
- $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$
- $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = -1$
- $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = -2$
- $x_1 = -\frac{19}{2}$ y $x_2 = 0$

Resolver las siguientes aplicaciones:

- Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2,5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones y ¿Cuál es mejor? ¿Por qué?
- Carlos debe cercar en forma rectangular un pedazo de un corral. Para ello compró 4.000 metros de alambre de púas que debe disponer en cuatro líneas, ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?
- Un triángulo isósceles tiene de base 16 cm y de altura 24 cm. Averigua el perímetro.
- Se tiene un tablero de 1800cm2 de superficie se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 8 cm más de lado que la otra. Si de la madera que sobra miden 86cm2 , entre ambas tiras, ¿cuáles son las dimensiones de las piezas cortadas?
- Si al producto de un número natural por su consecutivo le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. Calcular los números.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

Resolver los siguientes sistemas:

- $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 2x+y=3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=5 \\ xy=14 \end{cases}$
- $\begin{cases} y^2=4x \\ x=2y-3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2-y=1 \\ y=x+1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+y=7 \\ y+x^2=4x+2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y^2=4x+5 \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$
- $\begin{cases} y^2=4x \\ x=2y-3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-y=-8 \\ xy=1353 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=2x+5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$

Resolver los siguientes problemas aplicados al contexto y la tecnología:

- Los trabajadores de la empresa logran fabricar $A_1(t)=t^2-2t$ artículos de aseo en "t" días y otra empresa competencia de igual número de trabajadores fabrica $A_2(t)=4t+16$ artículos en "t" días.

  ¿Habrá alguna cantidad de días para que la producción sea la misma?

  ¿Cuál es esa producción?
- Hoy, el número de habitantes de dos municipios de Santa Cruz crece según los modelos $H_1(t)=80t+12500$ y $H_2(t)=t^2+72t+12480$ donde t se mide en años. ¿En cuántos años más el número de habitantes de ambas localidades será el mismo?
- Arista desea pedir un crédito de Bs. 50.000.000 en dos instituciones financieras. Una de ellas calcula la tasa de interés según $I_1(t)=-0{,}06t+2{,}434$ y la otra según $I_2(t)=-0{,}006t^2+0{,}02t+2{,}49$ donde "t" es el número de meses al cual se pedirá el crédito. ¿A cuántos meses habrá que tomar el crédito para que la tasa de interés sea la misma?
- Dos tasadores utilizan distintas fórmulas para la depreciación (pérdida de valor) de una maquinaria pesada. El primero utiliza la función cuadrática $V_1(t)=0{,}2t^2-2{,}6t+10{,}4$ y el otro tasador la función lineal $V_2(t)=-1{,}2t+9{,}2$, donde "t" está en años y $V(t)$ representa el valor de la máquina en millones de bolivianos. Considerando "t" mayor a 1 año, ¿en cuántos años el valor de ambas tasaciones es el mismo?

DESIGUALDADES E INECUACIONES

Establecer el signo de desigualdad para:

- $8+5+6 \,\boxed{}\, 5+24$
- $\frac{6}{9}+\frac{10}{6} \,\boxed{}\, \frac{2}{5}-6$
- $20-2+6-69 \,\boxed{}\, 35+20-2$
- $\frac{19}{9}+\frac{6}{5} \,\boxed{}\, \frac{25}{6}-\frac{89}{5}$
- $2-33+5 \,\boxed{}\, 8-6+33$

Resolver las siguientes inecuaciones y realizar la interpretación gráfica:

- $x-10>-8$
- $-\frac{x}{4}-4 \geq \frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$
- $x-10>-8$
- $2z+4>-8$
- $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$

Resolver las siguientes inecuaciones:

- $\frac{x}{x-3} \leq \frac{x}{x+1}$
- $\frac{x}{x-5}-2 \geq 0$
- $\frac{2x-1}{x+5}>2$
- $\frac{x-1}{x+5}>2$

Resolver las inecuaciones con valor absoluto:

- $\left|3-\frac{x}{2}\leq 2\right|$
- $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|\leq 1$
- $\left|\frac{3x+5}{x}\right|\geq 2$
- $\left|\frac{x-3}{5x}\right|<\frac{1}{3}$
- $|2x+5|\geq|x+4|$

Tipo de Intervalo	Notación de intervalo	Desigualdad	Notación de conjunto
	$[-5, 3)$		
		$3(x+3)\geq 2(1-\frac{1}{x})$	
		$x+\frac{1}{2}>\frac{1}{x}+2$	
	$(-2, 5)$		
		$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$	
	$[3, 7]$		

INECUACIONES CUADRÁTICAS Y SISTEMA DE INECUACIONES

Resolver las inecuaciones cuadráticas:

- $\sqrt{x^2+27}\geq 6$
- $10a^2+11a+3$
- $(x-4)(x+1)\geq 0$
- $5b^2-7b-6$
- $3n^2-11n-20$

Resolver las inecuaciones de grado superior:

- $x^3+8x^2-20x\geq 0$
- $x^3+2x^2-15x<0$
- $x^3+2x^2-15x>0$
- $x^3+4x^2\geq 4x+16$
- $(x+2)(x+5)(x-1)\leq 0$
- $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12>0$
- $x^4-3x^2-4\geq 0$

Resolver las inecuaciones con variable en el denominador:

- $\frac{3x^2+10x-27}{(x+2)^2}\leq 2$
- $\frac{4}{x+5}>\frac{1}{2x+3}$
- $\frac{x-2}{x-4}\geq\frac{x+2}{x}$
- $\frac{2x+3}{2x-3}-\frac{2x-3}{2x+3}\geq\frac{12}{4x^2-9}$
- $\frac{2x+3}{2x-3}-\frac{2x-3}{2x+3}\leq\frac{12}{4x^2-9}$

Resolver inecuaciones lineales de dos variables:

- $2x+3y\leq 42$
- $5x-2y>1$
- $3(x+y)>-12$
- $2x-3y<-3$
- $8x+3y<-7$
- $2x+3y\leq -3$

Resolver cada sistema de inecuaciones:

- $\begin{cases} x+y\leq 3y-8 \\ y\geq 2x+4 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y\leq 3 \\ 3x-3y\leq 9 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3y+2<0 \\ 2x+y-3>0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4x+y\leq 20 \\ x+2y\geq 12 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2}\leq x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3}\geq x \end{cases}$

Resolver los problemas:

Carlos tiene una camioneta transporta donde tiene cajas con huevos y zanahorias. Las masas de cada caja son 12 kg y 25 kg, respectivamente. Si una carnicería solicitó el transporte de 6 cajas de zanahorias y el resto en huevos, ¿cuántas cajas de huevos, como máximo, pudo haber recibido la verdulería, considerando que la carga total no debe exceder los 150 kg?

- Una fábrica paga a sus vendedores Bs. 880 por artículo vendido, más una cantidad fija de Bs. 2860. Si un vendedor quiere que su sueldo sea superior a Bs. 3400, ¿cuántos artículos debe vender como mínimo?
- Ana quiere cercar su terreno cuadrado con tres vueltas de alambre. Si en total dispone de 360 m de alambre, ¿qué área, como máximo, debería tener el terreno de modo que le alcance con el material que tiene?

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Calcular los siguientes logaritmos:

- $\log_{1/5} 625 =$
- $\log_{1/5} \sqrt{125} =$
- $\log_2 \dfrac{1}{32} =$
- $\log_2 \frac{1}{8} =$
- $\log_{16} \frac{1}{2} =$

Calcular los siguientes logaritmos:

- $\log_7 N = 6$
- $\log_{11} N = 13$
- $co\log_5 19 =$
- $co\log_7 31 =$

Calcular el valor de los siguientes logaritmos:

- $\log_6 666 =$
- $\log_{13} 788 =$
- $\ln_{11} 426 =$
- $\log_{21} 999 =$
- $\ln_{11} 5198 =$

Evaluar cada expresión aplicando las propiedades de los logaritmos:

- $\log\left(7ab\sqrt[3]{5c^2}\right) =$
- $\log \dfrac{5a^2b\sqrt[4]{c}}{2xy}$
- $\log \sqrt{\dfrac{2ab}{x^2y}} =$
- $\log \dfrac{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}{\sqrt[3]{\dfrac{c}{d}}} =$
- $\log \sqrt{ab} =$

Dado un logaritmo aplicar las propiedades:

- $\log\left(\dfrac{a\sqrt{c}}{2}\right)^4 =$
- $\log \dfrac{1}{2} + \log 16 + \log \dfrac{1}{4} =$
- $\log a + \dfrac{1}{2}\log b - 2\log c =$
- $\log 2 + 2\log a + \log b + \dfrac{1}{2}\log c =$
- $\dfrac{1}{5}(\log 3 + \log a - \dfrac{1}{4}\log c) =$
- $\dfrac{3}{4}\left(\log a - 3\log b + \dfrac{1}{5}\log c - \dfrac{1}{3}\log d\right) =$
- $\dfrac{1}{3}\log a - \dfrac{1}{2}\log b - \dfrac{1}{2}\log c$

Resolver las ecuaciones logarítmicas:

- $\dfrac{2+\log x}{4} = \dfrac{1+2\log x}{3+\log x}$
- $\log x + \dfrac{6}{\log x} = 5$
- $\dfrac{1}{3} + \log x = \dfrac{1}{\log x} + 3$
- $2\log x + \dfrac{3}{\log x} - 7 = 0$
- $\dfrac{1}{2}\log(x-1) = \log 4$
- $\log_9(x+1) + \log_9 9(x+1) - 2 = 0$
- $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[8]{x^3} = \log_2 \sqrt[4]{2}$

Aplicar las propiedades de los exponentes:

- $5.4^{x-3} - 3.2^{x+1} = -43$
- $(-3)^a \cdot 4^a =$
- $9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$
- $5^x + 5^{x+1} - \dfrac{6}{25} = 0$
- $2^x + 2^{x+3} = \dfrac{9}{4}$
- $27^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$
- $3.5^{2x} - 74.5^x - 25 = 0$
- $2^{-1+x} = \dfrac{1}{16}$

(Ejercicios y problemas recopilados)

SUCESIONES, PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

PRÁCTICA

Las familias bolivianas acostumbran comprar pan todos los días, los papás pagan el préstamo bancario en cuotas, frecuentemente subimos escaleras de casa de dos en dos a manera de juego, quizá ahorraste dinero de tu recreo moneda en moneda. Notarás en estas situaciones cotidianas, se establecen relaciones entre los datos como subir las escaleras "de dos en dos", la cantidad de pan que se compra es, casi siempre, constante, las cuotas a pagar en el banco es la misma cada mes, entonces:

- ¿Tienen algo en común estos eventos?, ¿alguna cantidad se repite siempre?, ¿cómo se relacionan estos datos?

Veamos otro ejemplo, Mario acaba de abrir un negocio de venta de frutas: el día 1 reparte 12 cajas; el día 2 reparte 18 cajas; el día 3 reparte 24 cajas, y así por 30 días. A partir de la situación:

- ¿Cómo está relacionada la venta de frutas por día?, ¿cuántas cajas de fruta repartió el 12 de abril? ¿y el último día del mes?, ¿alguna cantidad se repite?

TEORÍA

1. Sucesiones de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es una serie infinita de números naturales, comienza con 0 y 1, los siguientes elementos resultan de la suma de los dos anteriores.

FIBONACCI

(1175 – 1240)

Matemático italiano, llamado también Leonardo de Pisa, Leonardo Bigollo Pisano o simplemente Fibonacci, considerado "el matemático occidental de mayor talento de la edad media"

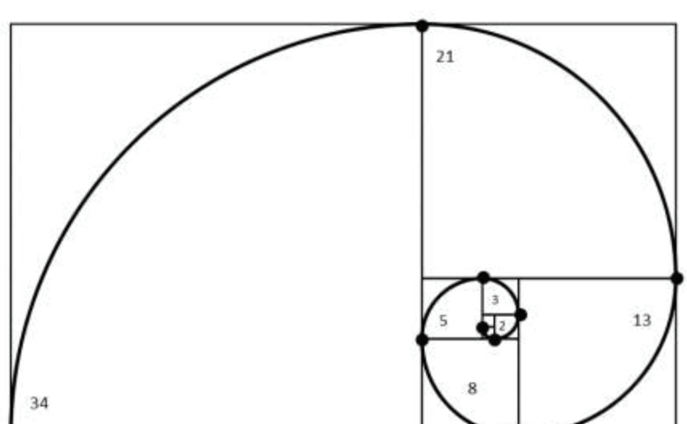
La Sucesión de Fibonacci es:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, …

Lo interesante de esta sucesión es que Leonardo de Pisa propuso la sucesión luego de observar el aumento de la población, a partir de una pareja de conejos. Con el tiempo se puede notar que una gran cantidad de fenómenos naturales se relacionan con esta sucesión.

Al tomar dos elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci: si se divide el mayor entre el menor, se encuentra 1,618, aproximadamente, pero si se divide el menor entre el mayor, se encuentra 0,618, aproximadamente. Este cociente es llamado "razón áurea", se representa con la letra griega phi "Φ".

Otro dato interesante de la sucesión de Fibonacci es la espiral áurea. Se la dibuja trazando arcos circulares con las esquinas opuestas de los cuadrados que se ajustan a los valores de la sucesión, acomodándolos sucesivamente. Los cuadrados son de lados 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...



$0+1=1$
$1+1=2$
$1+2=3$
$2+3=5$
$3+5=8$
$5+8=13$
$8+13=21$
$13+21=34$
$21+34=55$
$34+55=89$
$55+89=144..$

2. Sucesiones numéricas

a) Sucesión

Es un conjunto ordenado de elementos que pueden ser números, letras o figuras o una combinación de las anteriores. Estos elementos se caracterizan por seguir una regla de formación.

b) Sucesión numérica

Es un conjunto de números, cuyos elementos están enumerados ordinalmente (primero, segundo, tercero, etc.) indicando así la posición que ocupan, y cuyo valor es construido por una función generatriz, que en este texto será definido como Sn, donde "$n \in \mathbb{N}$", será la variable que nos permita determinar el valor del elemento en esa posición.

c) Ley de formación o función generatriz

Es el patrón que se va establecer dentro de la sucesión numérica, para determinar de qué forma va creciendo o decreciendo, este lo podemos encontrar comparando uno de los términos con el anterior.

d) Notación

Generalmente una sucesión está determinada por términos, que se escriben de la siguiente manera:

t_1 : Primer término $\Rightarrow n=1$ $\qquad$ t_5 : Quinto término $\Rightarrow n=5$

t_2 : Segundo término $\Rightarrow n=2$ $\qquad$ t_{10} : Décimo término $\Rightarrow n=10$

t_3 : Tercer término $\Rightarrow n=3$ $\qquad$ t_n : Último término o enésimo término

JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS

(1777 – 1855)

Matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos ámbitos, incluido la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, álgebra, geodesia, magnetismo y la óptica. En el campo matemático es considerado como el "Príncipe de la matemática"

Ejemplo:

1) Hallamos la sucesión de números de la siguiente función generatriz: $S_n = 2n-3$

$n=1 \quad S_1 = 2\cdot1-3 = 2-3 = -1 \qquad n=4 \quad S_4 = 2\cdot4-3 = 8-3 = 5$

$n=2 \quad S_2 = 2\cdot2-3 = 4-3 = 1 \qquad n=5 \quad S_5 = 2\cdot5-3 = 10-3 = 7$

$n=3 \quad S_3 = 2\cdot3-3 = 6-3 = 3 \qquad n=6 \quad S_6 = 2\cdot6-3 = 12-3 = 9$

Por tanto, la sucesión numérica será: $S_n = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$

2) Encontramos los 5 primeros términos de la sucesión: $S_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

$n=1 \quad S_1 = \dfrac{2\cdot1-1}{1+1} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2} \qquad n=4 \quad S_4 = \dfrac{2\cdot4-1}{4+1} = \dfrac{8-1}{5} = \dfrac{7}{5}$

$n=2 \quad S_2 = \dfrac{2\cdot2-1}{2+1} = \dfrac{4-1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1 \qquad n=5 \quad S_5 = \dfrac{2\cdot5-1}{5+1} = \dfrac{10-1}{6} = \dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}} = \dfrac{3}{2}$

$n=3 \quad S_3 = \dfrac{2\cdot3-1}{3+1} = \dfrac{6-1}{4} = \dfrac{5}{4} \qquad S_n = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{2}\right\}$

3) Calculamos el sexto término de la sucesión: $S_n = \sqrt{4n+1}$

$n=6 \quad S_6 = \sqrt{4\cdot6+1} = \sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$

Actividad

Encontremos los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $S_n = 3n-2$

b) $S_n = n^2 + 2n - 3$

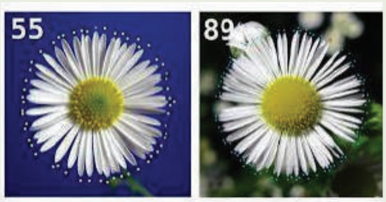
c) $S_n = \dfrac{n-5}{n+2}$

d) $S_n = \sqrt{10n-2}$

e) $S_n = n^3 - 1$

f) $S_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$

LAS MARGARITAS Y LAS SUCESIONES



Las margaritas no poseen siempre la misma cantidad de pétalos, pero su número es siempre un término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo: 13, 21, 34, 55, 89, etc.

En Botánica, se llama filotaxia a la disposición de las hojas, flores u otras estructuras vegetales repetitivas de forma regular, dispuestas según uno o varios sistemas de espirales o hélices.

LA SERIE DE FIBONACCI EN LA NATURALEZA

La serie de Fibonacci inspira una matemática sutil detrás de todo cuanto nos rodea, desde el patrón de crecimiento de un helecho hasta el trino de las aves, la disposición de los pétalos en las flores, la estructura del caparazón de ciertos moluscos, la espiral de una galaxia en el universo, fenómenos de la naturaleza, cuestiones relacionadas con la computación y teoría de juegos.

Sumatorias y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria, se emplea para representar a la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) "∑", la cual iremos detallando a continuación:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n$$

X_i : Son los elementos de la sumatoria
$i=1$: El inicio de los elementos
n : El número de elementos en la sumatoria

a) Propiedades de la sumatoria

Dentro de las operaciones de sumatoria tenemos las siguientes propiedades que nos ayudan en el desarrollo de las mismas:

PROPIEDAD	FÓRMULA
La suma del producto de una constante por una variable es igual a k veces la sumatoria de la variable.	$\sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
La sumatoria hasta "n" de una constante es igual a "n" veces la constante.	$\sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k$
La sumatoria de una suma es igual a la suma de las sumatorias de cada término.	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

Ejemplos:

1) Encontramos la sumatoria de: $\sum_{x=1}^{5} x^2 = \quad \Rightarrow$

$$\sum_{x=1}^{5} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

2) Calculamos la sumatoria de: $\sum_{i=2}^{4} (i+3) =$

$$\sum_{i=2}^{4} (i+3) = (2+2) + (2+3) + (2+4) = 4 + 5 + 6 = 15$$

3) Hallamos la sumatoria de: $\sum_{x=3}^{7} \frac{1}{x+1} =$

$$\sum_{x=3}^{7} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{7+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$\simeq 0.7595$$

Actividad

Encontremos las sumatorias:

a) $\sum_{x=1}^{6} 3x + 2 =$

b) $\sum_{x=1}^{5} x^2 + 2x - 1 =$

c) $\sum_{x=1}^{7} (x+1)^2 =$

d) $\sum_{x=1}^{5} (3x-1)^3 =$

e) $\sum_{x=1}^{4} \frac{x-1}{x+1} =$

f) $\sum_{x=3}^{10} \frac{2x+3}{x} =$

3. Progresiones aritméticas

a) Definición

Una progresión aritmética (PA) es una sucesión de números, en la que cada término se obtiene sumando una constante denominada diferencia.

La diferencia se puede obtener mediante la expresión: $d = t_n - t_{n-1}$

Si la diferencia aritmética es **positiva**, entonces **la progresión es creciente**, porque cada término es mayor que la anterior, y cuando la diferencia aritmética es **negativa la progresión es decreciente** ya que cada término es menor que el anterior.

b) Notación

Una PA se denota conociendo el primer término y la diferencia, donde:

t_1 : Primer término — d : Diferencia

t_n : Último o enésimo término — n : Número de términos

S_n : Suma enésima

Tomando en cuenta la definición de la distancia, la simbolizaremos de la siguiente manera:

$$t_1 . t_2 . t_3 . t_4 \dots . t_n \quad \Rightarrow \quad t_1 . (t_1 + d) . (t_1 + 2d) . (t_1 + 3d) \dots [t_1 + (n-1)d]$$

Las progresiones pueden ser ilimitadas o limitadas, según tengan el último término o no lo tengan. En las progresiones limitadas, el primer término y el último se denominan extremos y los demás medios.

LA DIFERENCIA

Cuando se tienen los primeros términos de la progresión aritmética, por lo general la diferencia se encuentra restando el segundo término del primero.

$$d = t_2 - t_1$$

Progresión creciente si:

$$d > 0$$

Progresión decreciente si:

$$d < 0$$

Ejemplos:

1) Encuentra el octavo término de: 5. 10. 15. ..

$t_1 = 5 \qquad d = 10 - 5 = 5 \qquad n = 8 \qquad t_8 = ?$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad t_8 = 5 + (8-1)\cdot 5 = 5 + 7\cdot 5 = 5 + 35 = 40 \qquad t_8 = 40$$

2) Halla el primer término si el décimo sexto término es 108, la diferencia es 5.

$t_1 = ? \qquad d = 5 \qquad t_{16} = 108 \qquad n = 16$

$$t_1 = t_n - (n-1)d \;\Rightarrow$$

$$t_1 = 108 - (16-1)\cdot 5 = 108 - 15\cdot 5 = 108 - 75 = 33 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 33$$

3) Halla la diferencia de una progresión aritmética donde el primer término es dos y el sexto término es 17.

$t_1 = 2 \qquad d = ? \qquad t_6 = 17 \qquad n = 6$

$$d = \frac{t_n - t_1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{17-2}{6-1} = \frac{15}{5} = 3 \qquad d = 3$$

4) ¿Cuántos términos tiene la progresión: 4. 6. . . . . 30?

$t_1 = 4 \qquad d = 6 - 4 = 2 \qquad t_n = 30 \qquad n = ?$

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{30-4}{2} + 1 = \frac{26}{2} + 1 = 13 + 1 = 14 \qquad n = 14$$

FORMULARIO

Término enésimo:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

Primer término:

$$t_1 = t_n - (n-1)d$$

Diferencia:

$$d = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

Cantidad de términos:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$$

Suma aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_n + t_1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2t_1 + (n-1)d\right]$$

Actividad

Hallamos los términos que se pide en las siguientes progresiones:

- El noveno término de: 3.10.17...
- El 48º término de: −5.−1.4.8...
- El trigésimo segundo término de una progresión aritmética es “−18” y $d = 3$, halla el primer término.
- El término 92 de una progresión aritmética es mil cincuenta y el primer término es menos cuarenta y dos, encuentra la diferencia.

OBSERVACIÓN

Para interpolar o insertar medios aritméticos entre dos números o dos extremos de una progresión, se utiliza la siguiente diferencia:

$$d=\frac{t_n-t_1}{n-1}$$

c) Interpolación aritmética

En una progresión aritmética todos los términos comprendidos entre el primer y último término se denominan medios aritméticos de estos dos:

$$t_1.\ \underbrace{t_2.t_3.t_4.t_5}_{medios\ \ aritméticos}\ \ .\underbrace{t_n}_{n}$$

Ejemplos:

1) Interpolamos 5 medios aritméticos entre -8 y 52

$t_1=-8$ $\qquad -8.t_2.t_3.t_4.t_5.t_6.52$ $\qquad d=?$ $\qquad d=\frac{t_n-t_1}{n-1}$

$t_7=52$ $\qquad d=\frac{52-(-8)}{7-1}=\frac{52+8}{6}=\frac{60}{6}=10$

Luego: $n=7$, $d=10$, $\qquad -8^{+10}.2^{+10}.12^{+10}.22^{+10}.32^{+10}.42^{+10}.52$

2) Interpolamos 4 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y 10 $\qquad t_1=\frac{1}{3}$ $\qquad d=?$ $\qquad t_6=10$ $\qquad n=6$

$\frac{1}{3}.t_2.t_3.t_4.t_5.10$ $\qquad d=\frac{t_n-t_1}{n-1}$

$d=\frac{29}{15}$ $\qquad \frac{1}{3}^{+\frac{29}{15}}.\frac{34}{15}^{+\frac{29}{15}}.\frac{21}{5}^{+\frac{29}{15}}.\frac{92}{15}^{+\frac{29}{15}}.\frac{121}{15}^{+\frac{29}{15}}.10$

¡IDEA!

Partiendo de la anécdota de Gauss cuando era niño, sobre la suma de los 100 primeros números naturales, veamos:

1+2+3+4+....

+97+98+99+100

1+100=101

2+99=101

3+98=101

4+97=101

⋮

50·101=5050

d) Suma de una progresión aritmética

La suma de una progresión aritmética de n términos se la define de la siguiente manera:

$$S_n=t_1+t_2+t_3+\ldots t_n \Rightarrow S_n=\frac{n(t_n+t_1)}{2}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}\left[2t_1+(n-1)d\right]$$

Ejemplo:

Encuentra la suma de los ocho primeros términos de: ÷3.7.11...

$t_1=3$ $\qquad S_n=\frac{n}{2}\left[2t_1+(n-1)d\right]$

$d=7-3=4$ $\qquad S_8=\frac{8}{2}\left[2\cdot3+(8-1)\cdot4\right]$

$n=8$ $\qquad S_8=4\cdot[6+7\cdot4]=4\cdot[6+28]$

$S_8=4\cdot34=136$

Actividad

Interpolamos los medios indicados en cada caso:

- 3 medios aritméticos entre -8 y -56
- 7 medios aritméticos entre 3 y 97
- 6 medios aritméticos entre 25 y -3

Determinamos la suma en cada caso:

- Ocho primeros términos de
- Sesenta primeros términos de −9.1.11...
- Catorce primeros términos de 2.9.16...
- Halla la suma de los términos múltiplos de 7 entre 2 y 87
- Calcula la suma de los 80 primeros números múltiplos de 5
- ¿Cuántos términos de la progresión $\frac{13}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots$ deben tomarse para que la suma sea -396?

e) Problemas de aplicación

Las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarse en diferentes actividades que se dan en la vida real, como lo veremos en los siguientes ejemplos y ejercicios.

Ejemplos:

1) La maestra Delma, el mes de enero, apertura una cuenta de ahorro en el Banco Unión con Bs 175, y en los meses posteriores decide ahorrar Bs 17 más que en el mes anterior. ¿Cuál será el monto de dinero que depositará en el mes de diciembre? ¿Cuánto dinero tendrá ahorrado en un año?

$t_1 = 175 \qquad t_n = t_1 + (n-1)d \qquad S_n = \dfrac{n(t_n + t_1)}{2}$

$d = 17 \qquad t_{12} = 175 + (12-1)\cdot 17 \qquad S_8 = \dfrac{12(362+175)}{2}$

$n = 12 \qquad t_{12} = 175 + 11\cdot 17 = 175 + 187 \qquad S_8 = \dfrac{12\cdot 537}{2}$

$t_{12} = ? \qquad t_{12} = 362 \qquad S_8 = 3222$

En el mes de diciembre depositará Bs. 362 En el año la maestra logrará ahorrar Bs. 3222

2) Una persona se apersona a un instructor de gimnasio para consultarle sobre una rutina. El instructor le indica que después de levantarse realiza 10flexiones, 20 sentadillas y 15 abdominales, repite eso dos veces seguidas durante 3 días, luego aumenta 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días, nuevamente aumenta 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días y así sucesivamente. ¿Al final del mes, cuántas flexiones, sentadillas y abdominales realizará? ¿Durante el mes, cuántas sentadillas, abdominales y flexiones realizó?

	Día 1	Día 2	Día 3	Total	Día 4	Día 5	Día 6	Total
Flexiones	20	20	20	60	22	22	22	66
Sentadillas	40	40	40	120	42	42	42	126
Abdominales	30	30	30	690	32	32	32	96

Determinando la cantidad de ejercicios que hace en los últimos días del mes:

Flexiones: $t_n = 60 + (10-1)6 = 60 + 9\cdot 6 = 60 + 54 = 114$

Sentadillas: $t_n = 120 + (10-1)6 = 120 + 9\cdot 6 = 120 + 54 = 174$

Abdominales: $t_n = 90 + (10-1)6 = 90 + 9\cdot 6 = 90 + 54 = 144$

Determinando la cantidad de ejercicios que realizó en el mes:

Flexiones: $S_n = \dfrac{10\cdot(114+60)}{2} = \dfrac{10\cdot 174}{2} = 870$

Sentadillas: $S_n = \dfrac{10\cdot(174+120)}{2} = \dfrac{10\cdot 294}{2} = 1470$

Abdominales: $S_n = \dfrac{10\cdot(144+90)}{2} = \dfrac{10\cdot 234}{2} = 1170$

CON INCÓGNITAS

Determinar el valor de x, de manera que la sucesión

$10x + 4. \quad 6x - 3. \quad 3x - 8$

forme una progresión aritmética.

$d = t_2 - t_1 =$

$= 6x - 3 - (10x + 4) =$

$= -4x - 7$

$d = t_3 - t_2 =$

$= 3x - 8 - (6x - 3) =$

$= -3x - 5$

Como $d = d$

$-4x - 7 = -3x - 5$

$-7 + 5 = -3x + 4x$

$x = -2$

La sucesión sería:

$-16. \quad -15. \quad -14. \ \ldots$

Actividad

Resolvamos los siguientes problemas:

a) Mario Josué gana Bs. 20 el primer día, Bs. 40 el segundo, Bs. 60 el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto percibirá al cabo de 30 días?

b) Un dentista atendió a una persona por sus piezas dentales. Por la primera pieza le cobró Bs. 100 y por cada una de las demás Bs. 20 más que la anterior. ¿Cuánto cobró el dentista, si le corrigió 4 piezas dentales?

LA RAZÓN

Cuando se tienen los primeros términos de la progresión geométrica por lo general la razón se obtiene dividiendo el segundo término entre el primero.

$$r = \frac{t_2}{t_1}$$

Progresión creciente si:

$$r > 0$$

Progresión decreciente si:

$$r < 0$$

FORMULARIO

Término enésimo:

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

Primer término:

$$t_1 = \frac{t_n}{r^{n-1}}$$

Razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Cantidad de términos:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1$$

Progresiones geométricas

a) Definición

Una progresión geométrica (PG) es una sucesión de números, en la que cada término se obtiene multiplicando una constante denominada razón.

La razón se puede obtener mediante la expresión:

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

b) Notación

Una PG se denota conociendo el primer término y la razón, donde:

t_1 :	Primer término	r :	Razón
t_n :	Último o enésimo término	n :	Número de términos
S_n :	Suma enésima		

Tomando en cuenta la definición de la razón, la simbolizaremos de la siguiente manera:

$$t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : \ldots : t_n \quad \Rightarrow \quad t_1 : (t_1 \cdot r) : (t_1 \cdot r^2) : (t_1 \cdot r^3) : \ldots : (t_1 \cdot r^{n-1})$$

Ejemplos:

1) Encuentra el octavo término de 2:8:32

$t_1 = 2 \quad r = \frac{8}{2} = 4 \qquad t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 8 \quad t_8 = ? \qquad t_8 = 2 \cdot 4^{8-1} = 2 \cdot 4^7 = 32768$

2) Determina el primer término si la razón es 4, el sexto término es 3072

$t_1 = ? \quad r = 4 \qquad t_1 = \frac{t_n}{r^{n-1}}$

$n = 6 \quad t_6 = 3072 \qquad t_1 = \frac{3072}{4^{6-1}} = \frac{3072}{4^5} = \frac{3072}{1024} = 3$

3) Halla la razón de la progresión que contiene 5 términos: 1:...:625

$t_1 = 1 \quad r = ? \qquad r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$

$n = 5 \quad t_5 = 625 \qquad r = \sqrt[5-1]{\frac{625}{1}} = \sqrt[4]{625} = 5$

4) ¿Cuántos términos tiene la progresión ::3:6:...:1536?

$t_1 = 3 \quad r = \frac{6}{3} = 2 \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1$

$n = ? \quad t_n = 1536 \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{1536}{3}\right)}{\ln 2} + 1 = 9 + 1 = 10$

Actividad

Hallamos los términos que se pide en las siguientes progresiones:

a) El sexto término de: $-10 : 20 : -40 : \ldots$

b) La razón de una progresión geométrica es $\frac{1}{2}$ y el 7° término $\frac{1}{64}$. Halla el primer término.

c) El 9° término de una progresión geométrica es $\frac{64}{2187}$ y la razón es $\frac{2}{3}$. Halla el primer término.

d) Halla la razón de la $2 : \ldots : 64$ de 6 términos.

e) El 8° término de una progresión geométrica es $-\frac{2}{81}$ y el primer término es $\frac{27}{64}$. Halla la razón.

c) Interpolación geométrica

En una progresión geométrica todos los términos comprendidos entre el primer y último término se denominan medios geométricos de estos dos extremos:

$$t_1 : \quad \underbrace{t_2 : t_3 : t_4 : t_5 :}_{medios\ geométricos} \quad \ldots \quad : \underbrace{t_n}_{n}$$

Ejemplo:

1) Interpolamos 3 medios geométricos entre -1 y $-\dfrac{1}{16}$

$t_1 = -1 \qquad -1 : t_2 : t_3 : t_4 : -\frac{1}{16} \qquad r = ? \rightarrow r = \sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{t_1}}$

$t_5 = -\dfrac{1}{16} \qquad r = \sqrt[5-1]{\dfrac{-\frac{1}{16}}{-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2} \qquad r = \dfrac{1}{2}$

$n = 5 \qquad -1 \cdot \frac{1}{2} . -\dfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} . -\dfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} . -\dfrac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} . -\dfrac{1}{16}$

2) Interpolamos 4 medios geométricos entre 12000 y 375

$t_1 = 12000 \qquad 12000 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : 375$

$r = ? \qquad r = \sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{t_1}}$

$t_6 = 375 \qquad r = \sqrt[6-1]{\dfrac{375}{12000}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{1}{2} \qquad r = \dfrac{1}{2}$

$n = 6 \qquad 12000 : 6000 : 3000 : 1500 : 750 : 375$

3) Interpolamos 5 medios geométricos entre m y m^7

$t_1 = m \qquad m : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : m^7$

$r = ? \qquad r = \sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{t_1}}$

$t_7 = m^7 \qquad r = \sqrt[7-1]{\dfrac{m^7}{m}} = \sqrt[6]{m^6} = m \qquad r = m$

$n = 7 \qquad m \quad .m^2 \quad .m^3 \quad .m^4 \quad .m^5 \quad .m^6 \quad .m^7$

Actividad

Interpolemos:

a) 3 medios geométricos entre 2 y 2592

b) 4 medios geométricos entre $\dfrac{25}{4}$ y $\dfrac{8}{125}$

c) 5 medios geométricos entre -1 y -729

d) 6 medios geométricos entre 14 y $\dfrac{7}{64}$

e) 3 medios geométricos entre 5 y 1280

f) 7 medios geométricos entre 8 y $\dfrac{1}{32}$

RECORDANDO

Para interpolar o insertar medios geométricos entre dos números o dos extremos de una progresión, se utiliza la siguiente razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

EL INVENTOR DEL AJEDREZ

Hace mucho tiempo hubo un rey muy absorto y maravillado con el fascinante juego del ajedrez. Tan encantado estaba que ofreció a su inventor concederle lo que pidiera.

"Sólo le pido 1 grano de trigo por la primera casilla, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente. En cada una el doble que la anterior hasta llegar a la última, la casilla número 64".

Al rey le pareció algo insignificante y pensó que el inventor era muy humilde. Pero estaba muy equivocado.

¿A cuántos granos de trigo asciende la deuda que el rey contrajo con el inventor?

Se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su razón 2, el último término corresponde a 2^{63}, el rey no pudo conceder su promesa, porque no existe tal cantidad de trigo en toda la la tierra.

2^{63}=18.446.744.073.709.551.615

LA TORRE DE HANÓI

Se trata de una estructura de 3 varillas donde tienen varios discos de diferentes tamaños, inicialmente los discos se sitúan en la varilla de la izquierda colocados de mayor a menor. El juego consiste en pasar los discos a la varilla de la derecha. Cuenta la leyenda que Dios coloco 64 discos en la varilla de la izquierda y dijo "Cuando la humanidad concluya este juego se acabará el mundo".

El número de movimientos se trata de una sucesión geométrica cuyo término general es:

$$a_n = 2^n - 1$$

4. Progresiones armónicas

Una progresión armónica es una sucesión de números tales que sus recíprocos forman una progresión aritmética. Se llaman progresiones armónicas porque cada término es la media armónica entre el anterior y el siguiente.

En este tipo de progresiones, no existe ninguna fórmula elemental como los que hay para las progresiones aritméticas y geométricas.

PROPIEDAD

Si A, G, H son las medias aritmética, geométrica y armónica, entonces la media geométrica es la media proporcional entre la media aritmética y armónica, esto es:

$$A : G :: G : H$$
$$\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$$

Los inversos multiplicativos de los términos que forman una progresión aritmética formarán una progresión armónica.

Se tiene: $\frac{m}{p} = \frac{m-n}{n-p}$

De donde $m(n-p) = p(m-n)$

Dividiendo cada término por mnp $\quad \frac{mn}{mnp} - \frac{mp}{mnp} = \frac{mp}{mnp} - \frac{np}{mnp}$

Lo que se demuestra la proposición: $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$

Media armónica

Sean m y n dos términos y H su media armónica, por lo demostrado anteriormente en la proposición:

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{H} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2mn}{m+n}$$

Ejemplos

1) Encuentra el término que sigue en la siguiente progresión armónica: $\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}$

Progresión aritmética: $\div 2. -1. -4. -7$

$t_1 = 2 \qquad\qquad t_n = t_1 + (n-1)d$

$d = -1 - 2 = -3 \qquad\qquad t_5 = 2 + (5-1)\cdot(-3) = 2 - 4\cdot 3 =$

$n = 5 \qquad\qquad t_5 = 2 - 12 = -10$

$t_5 = ? \qquad\qquad t_5 = -10 \qquad\qquad \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{10}$

2) Interpolar un medio armónico entre 2 y 3

Progresión armónica: $\frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{3}$

Entonces: $\frac{1}{3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{2}{x} = \frac{5}{6} \qquad x = \frac{12}{5}$

Actividad

En las siguientes progresiones:

a) Encontremos el quinto término de: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots$

b) Calculemos el octavo término de: $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$

c) Determinemos si la siguiente sucesión es o no una progresión armónica: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$

d) Tres términos están en PH, calculamos el valor de x si los términos son: $x, x-8, x-12$

5. Suma en una sucesión geométrica - infinita decreciente

a) Sucesión geométrica finita

Para lograr sumar los "*n*" términos consecutivos de una progresión geométrica, es necesario conocer la razón *r*, el primer término y el número de términos que se desea sumar en la sucesión.

Ejemplos:

Halla la suma geométrica finita:

1) Halla la suma de la progresión: $:: \frac{25}{4} : \frac{5}{2} : 1 : \frac{2}{5} : \frac{4}{25} : \frac{8}{125}$

$t_1 = \frac{25}{4}$ $\quad r = \frac{5}{2} \div \frac{25}{4} = \frac{2}{5}$ $\quad S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r-1}$

$n = 6$ $\quad t_6 = \frac{8}{125}$ $\quad S_n = \frac{\frac{8}{125} \cdot \frac{2}{5} - \frac{25}{4}}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{5187}{1250}$

$S_n = \frac{5187}{1250}$

FORMULARIO

Suma enésima o finita:

$$S_n = \frac{t_n \cdot r - t_1}{r-1}$$

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r-1}$$

Suma infinita:

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}$$

2) Si el primer término de una progresión geométrica es 3, el último término es 9375 y la suma 11718, encuentra los valores de r y n.

$S_n = \frac{t_n - r \cdot t_1}{r-1} = 11718$

$\frac{9375 \cdot r - 3}{r-1} = 11718$

$9375 \cdot r - 3 = 11718r - 11718$

$r = 5$

$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$9375 = 3 \cdot 5^{n-1}$

$5^5 = 5^{n-1}$

$n = 6$

b) Sucesión geométrica finita decreciente

Existen progresiones geométricas, donde cada término va decreciendo de tal forma que sus términos se aproximan a cero, analicemos el siguiente conjunto $\left\{2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : ...\right\}$ en decimales, el conjunto se puede entender como: $\{2 : 1 : 0.5 : 0.25 : 0.125 : 0.0625 : ...\}$, entonces vemos que los valores cada vez son más pequeños, a esto es lo que se llama progresión infinita decreciente.

Ejemplo. Halla la suma de la progresión: $:: \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : ...$

$t_1 = \frac{1}{3}$ $\quad S_\infty = \frac{t_1}{1-r}$

$r = \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ $\quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{1}{2}$

Actividad

En las siguientes progresiones, encontremos la suma de los:

a) 4 primeros términos de: $3 : 9 : 27 : ...$

b) 7 primeros términos de: $-3 : -12 : -48 : ...$

c) 10 primeros téminos de: $\frac{3}{2} : 1 : \frac{2}{3} : ...$

En las siguientes progresiones, encontremos la suma de la progresión infinita:

a) $4 : 2 : 1 : ...$ $\quad$ b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} : \frac{1}{18} : ...$ $\quad$ c) $\frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : ...$

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las progresiones geométricas, al igual que las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real. Veamos algunos casos.

1) La señora Aneth Mendoza abre una cuenta de ahorro con Bs 7000,00 en una entidad bancaria, el asesor le indica que los intereses se pagan por día a una razón de 1,000083 (así el interés ganará otro interés). Si la señora decide sacar su dinero cumplido un año, ¿cuál será el monto acumulado? ¿cuánto tiempo deberá dejarlo en la entidad bancaria para ganar un interés de Bs 1000, 00?

Al cumplir el año de ahorro, la señora tendrá un monto de Bs. 7214,70 Ahora calculamos el tiempo "n" que deberá esperar para ganar un interés de Bs. 1000, entonces:

$t_1 = 7000 \quad r = 1.00083 \qquad t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \quad n = 365 \qquad t_n = ?$

$$t_n = 7000 \cdot (1.00083)^{365-1} = 7000 \cdot 1.000083^{364} = 7214.70$$

$t_1 = 7000 \quad r = 1.00083 \qquad n = \dfrac{\ln\left(\frac{t_n}{t_1}\right)}{\ln r} + 1 \qquad t_n = 7000 + 1000 = 8000$

$$n = \frac{ln\left(\frac{8000}{7000}\right)}{ln\,1.000083} + 1 = \frac{0.05799}{0.000036044} + 1 = 1609.88 \simeq 1610$$

La señora Aneth tendrá que esperar 1610 días para ganar un interés de Bs. 1000.

2) El crecimiento poblacional en Bolivia se ha ido dando a una razón de 1.19 cada 10 años. Si en 1990 teníamos una población de 6.86 M (millones), ¿qué población tuvo Bolivia el 2020?, estimar la población de Bolivia en 2030 y 2050.

El cálculo se lo realiza cada 10 años, por lo tanto:

$t_1 = 2000 \qquad r = 1.19 \qquad t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 4 \quad t_n = ? \qquad t_n = 6.86 \cdot (1.19)^{4-1} = 6.86 \cdot 1.19^3 = 11.56$

En el año 2020 Bolivia tuvo una población de 11.56 M de habitantes.

$$t_n = 6.86 \cdot (1.19)^{5-1} = 6.86 \cdot 1.19^4 = 13.75$$

En el año 2030 Bolivia tendrá una población de 13.75 M de habitantes, aproximadamente.

Finalmente: $t_n = 6.86 \cdot (1.19)^{7-1} = 6.86 \cdot 1.19^6 = 19.48$

En el año 2050 Bolivia tendrá una población de 19.48 M de habitantes, aproximadamente.

3) Supongamos que el lunes gané Bs. 200 y después diariamente gané el doble del día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?

$t_1 = 200 \qquad r = 2 \qquad t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

$n = 6 \quad t_n = ? \qquad t_n = 200 \cdot (2)^{6-1} = 200 \cdot 2^5 = 200 \cdot 32 = 6400$

El día sábado gane un monto de Bs. 6400
Ahora calculamos el monto final de lo que se ganó de lunes a sábado, entonces:

$t_1 = 200 \qquad r = 2 \qquad S_n = \dfrac{t_n \cdot r - t_1}{r - 1}$

$n = 6 \quad S_n = ? \qquad S_n = \dfrac{6400 \cdot 2 - 200}{2 - 1} = \dfrac{12800 - 200}{1} = 12600$

La suma de la ganancia es de Bs. 12600.

Actividad

Resolvamos los siguientes problemas:

a) Un dentista corrige 20 piezas a una persona cobrándole Bs. 1 por la primera, Bs. 2 por la segunda, Bs. 4 por la tercera y así sucesivamente por 10 correcciones. ¿A cuánto ascienden los honorarios del dentista?

b) Una persona trabajó durante 8 días y cada día ganó un tercio de lo que ganó el día anterior. Si el 8º día ganó Bs. 1 ¿cuánto ganó el primer día?

VALORACIÓN

Las progresiones aritméticas y geométricas son secuencias de números que tienen una relación constante entre cada término. Las progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre cada término es constante, mientras que las progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente entre cada término es constante.

- Las progresiones aritméticas y geométricas son importantes en una variedad de aplicaciones, menciona algunas de estas.
- ¿Cómo se aplican las progresiones aritméticas y geométricas en la naturaleza?
- ¿En qué situaciones de la vida se utilizan las progresiones como una herramienta importante para la solución de problemas?

PRODUCCIÓN

Investiguemos y elaboremos un informe sobre las generalizaciones que utilizan los bancos para el préstamo y ahorro de dinero.

- Para modelizar tu investigación, utiliza herramientas como celulares que fortalezcan la importancia de las progresiones.
- Realiza un diagrama de la obtención de los números de la serie de Fibonacci.
- Investiga el valor del número áureo y como se da su valor.

El número áureo está relacionado con la belleza, desde la época griega, se relaciona con las proporciones de belleza de las personas. Así:

$$r = \frac{\text{altura de una persona}}{\text{distancia del ombligo a los pies}}$$

Se concluye que mientras más cerca esté r de Φ, el cuerpo de una persona será más proporcionado.

- Averigüemos cómo es que los griegos creían mucho en esta fórmula para llegar a la perfección humana.

MATEMÁTICA FINANCIERA

PRÁCTICA

Analiza los siguientes casos que son alarmantes:

I. Una madre abandona a dos de sus hijos por la falta de trabajo.
II. Desafortunadamente, un niño muere en la sala de un hospital, por el alto costo de la intervención.
III. Un padre de familia debe conseguir hasta tres trabajos para sostener a su familia.
IV. Una familia pierde su casa por haber accedido a préstamos con altos intereses.
V. Un joven utiliza dinero prestado en la compra de un objeto que no le renta ganancia para devolver el dinero prestado.

Actividad

De las oraciones expuestas:

- ¿Cuál crees que es el motivo de estos problemas?
- ¿Qué aspectos de la matemática deberías conocer para prever situaciones similares?

TEORÍA

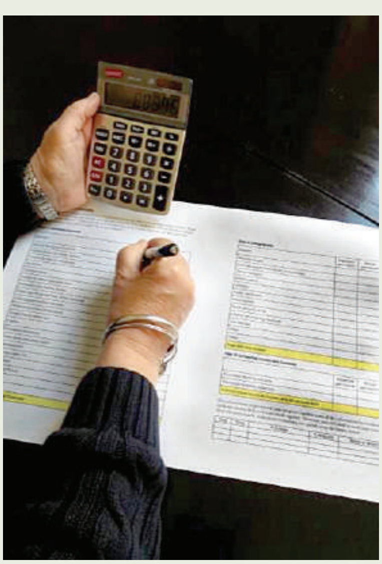
1. Importancia de la Matemática Financiera

Radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos, en muchas áreas del área de finanzas y en la vida cotidiana de las personas y empresas, por ello resulta imprescindible su comprensión, pues los errores que se cometen tienen repercusión directa en el bolsillo tanto de las personas como de las empresas.

Hoy por hoy, uno de los más importantes fenómenos de análisis en la economía es el crecimiento, administración y pérdidas que se dan del dinero. Siendo este aspecto el que se puede estudiar mediante la matemática financiera.

CUENTAS CLARAS

Pagar los servicios domiciliarios y otros gastos deben ser planificados en las familias bolivianas.



A continuación, se apuntan algunas preguntas que las matemáticas financieras podrían ayudar a responder:

¿Conviene ejecutar un proyecto o realizar una inversión?

¿Conviene recurrir a un crédito bancario para ampliar la infraestructura y así incrementar el nivel de producción?

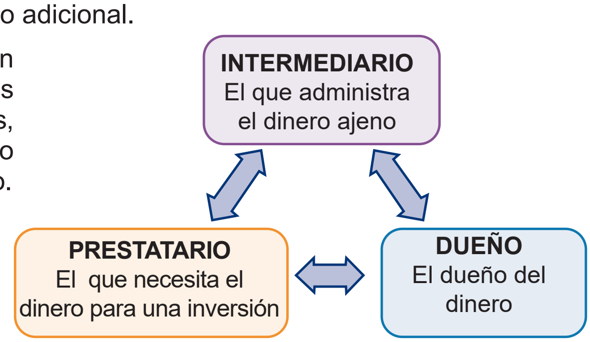
¿Cómo se determina el valor del dinero en el tiempo?

Las respuestas podrían ayudar a una empresa o un inversionista a tomar decisiones, para ejecutar proyectos o para determinar que su ejecución no conviene por no ser factible.

Definición

La matemática financiera, es el estudio del dinero en el tiempo, donde intervienen elementos como capital e interés, lo cual podemos utilizar cuando se ahorra en una cuenta bancaria con el fin de obtener ganancias económicas en el futuro, o cuando se accede a un préstamo que a futuro se debe devolver con un pago adicional.

Habitualmente se presentan tres involucrados en las transacciones financieras, este aspecto es denominado como el triángulo financiero.



2. Valor del dinero en el tiempo

Se refiere a un concepto económico que busca explicar el fenómeno por el cual el dinero presente, sea expresado en cualquier divisa, tendrá un menor poder de compra en el futuro.

La tasa de interés es la variable que determina la equivalencia de un monto de dinero en dos periodos distintos de tiempo.

El valor del dinero en el tiempo es una herramienta que permite descubrir cómo cambia el poder adquisitivo del dinero y cuáles son los diferentes métodos que se utilizan para realizar ese cálculo. Ante las diferentes situaciones cotidianas, conocer y aplicar el valor del dinero en el tiempo permite tomar mejores decisiones relacionadas a las finanzas, para que el dinero se pueda emplear mejor y construir un futuro más seguro, tranquilo y productivo, ya sea de forma personal, familiar o comunitario. Se debe tener en cuenta que una unidad de dinero hoy tiene más valor que una unidad de dinero en el futuro, pues el dinero en el tiempo tiene la capacidad de generar más valor.

Por ello, es importante comprender el funcionamiento de la inflación, la que consiste en una escalada generalizada y prolongada en los precios, que implica que cada vez se pueda comprar menos con la misma cantidad de dinero.

El dinero tiene un valor, el cual va cambiando mientras pasa el tiempo, un ejemplo de ello es el cambio del precio del pan, hace 30 años podías comprar 10 panes por Bs 1, pero hoy por hoy solo puedes comprar 4 panes por Bs 2, por ese motivo el estudio del dinero en el tiempo es importante. Analizar el dinero en el tiempo nos permite entender que:

- Bs. 100 el día de hoy, es diferente a Bs. 100 de un día futuro.
- El valor del dinero permite analizar distintas oportunidades.
- Existen riesgos financieros a la hora de invertir.

Cálculo del valor del dinero en el tiempo

Considérese esta situación: A alguien le gustaría comprar un automóvil y puede ofrecerle 150,000 bolivianos por él hoy o 155,000 si pueden pagarle dentro de dos años. El valor del dinero en el tiempo nos enseña que 150,000 hoy valen más de 155,000 en dos años.

La fórmula que calcula el valor futuro del dinero es:

$$F = A \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \cdot t}$$

F: valor en el futuro
A: valor actual del dinero i: tasa de interés
t: número de años a tener en cuenta
n: número de períodos de interés compuesto por año

Ejemplo:

Supongamos que se invierte en la compra de un automóvil hoy por Bs.150,000, del cual se paga 2% cada año, compuesto mensualmente. El cálculo del dinero dentro de dos años será:

$$F = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0.2}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 156120$$

De este modo, los Bs. 150,000 que se obtienen hoy por el automóvil, dentro de dos años tendrán un valor de Bs. 156,120.

Actividad

Algunos bolivianos en su mayoría pasan a comprar, en un mercado o tienda, el producto que quieren adquirir con un costo de Bs. 100, algo que hace 5 años lo hubieran adquirido con menor cantidad.

- ¿Por qué crees que se da esta situación?
- ¿Cómo influye en la vida diaria de las y los bolivianos?
- ¿Por qué el precio de los productos de la canasta familiar tiene costo diferente de un día al otro?

¿ES BUENO PRESTARSE DINERO?

Imagina por un momento que estás en un lugar alejado y te quedas sin crédito, pero necesitas hacer una llamada urgente a tu mamá, así que le dices a tu amigo que te pase Bs. 10 de crédito, pero tu amigo te dice que tendrás que devolverle 11.

¿Estarías de acuerdo con ese trato?

ALGO DE HISTORIA

El interés tiene algo de historia en la Edad Media. La Iglesia consideraba al interés como un pecado de usura, basado en cobrar una moratoria por el tiempo que transcurrió cuando el tiempo era propiedad única de Dios.

En el Renacimiento. Surge la idea del arrendamiento del dinero como cualquier otro bien, ya que el costo del paso de tiempo empezó a ser entendido como un 'costo de oportunidad'.

En la Época moderna. La economía clásica introdujo los primeros estudios acerca del tipo de interés. Adam Smith fue el primer exponente de la escuela que creía que el dinero, como mercancía, estaba sujeto a la oferta y la demanda, las que, en el punto de equilibrio, consensuaría una tasa de interés.

3.Interés y tasa de interés

Cuando se recurre a préstamos monetarios, el acto de "pedir prestado" tiene un costo, que es conocido como tasa de interés. Este costo lo determina el prestamista y es asumido por el prestatario, conviniendo un tiempo determinado entre ambas partes.

a) Interés

Este término es más conocido como "tipo de interés", básicamente es el dinero que se utiliza a cambio de cierta cantidad de dinero. Es medido en porcentaje y casi siempre es expresado en términos anuales.

Los intereses varían de una operación a otra, los factores pueden ser analizados por riesgo en cada entidad bancaria, así si el riesgo es mayor, mayor será el interés.

Para la persona que accede a un préstamo el interés y el coste del capital son los mismos, pero para la entidad que presta el dinero el interés equivale al rendimiento de la operación.

Dentro del sistema financiero tenemos dos tipos de interés, que son:

- Interés simple

Es el que se obtiene cuando los intereses que se producen lo hacen a partir del capital inicial.

- Interés compuesto

Es el que se obtiene cuando los intereses producidos se suman periódicamente al capital inicial, por lo que reproducen su ganancia.

b) Tasa de interés

La tasa de interés, llamado también tipo de interés, es el precio que una persona o institución debe pagar por solicitar un préstamo. Por lo general, la tasa de interés se expresa como un porcentaje anual.

Existen diferentes tipos de tasa de interés, entre los cuales tenemos a:

- Tasa de interés fija

Es la tasa de interés cuyo valor no varía en el tiempo que dura el préstamo. El porcentaje acordado al inicio del préstamo se mantiene fijo.

- Tasa de interés variable

Es la tasa de interés que está sujeta a cambios. Sucede porque es calculada sobre una tasa de referencia con variación periódica.

- Tasa de interés real

Es la tasa de interés que trata de la rentabilidad obtenida luego de restarle efecto a la inflación.

- Tasa de interés nominal

Es la tasa opuesta a la tasa de interés real.

4. Interés simple

a) Definición

El interés simple es el costo que se paga por el uso de dinero que no es propio por un período de tiempo específico, es simple cuando un capital genera ganancias al finalizar el plazo de inversión, o bien si representa el monto final a pagar, en el caso de una deuda. Este concepto se utiliza en el ámbito de los negocios y en el cotidiano cuando ahorramos, invertimos o compramos algún producto a crédito y queremos saber cuál será el monto final a recibir o pagar.

b) Características

- El capital no se acumula, se paga en periodos.
- El interés siempre será el mismo, sin importar si es prestado por 2, 3,… meses.

c) Elementos

Los elementos del interés simple son:

- **Capital (C).-** Es el dinero al inicio, el cual será la fuente del crecimiento del interés.
- **Monto (M).-** Es el total del dinero después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.
- **Tiempo (t).-** Es el espacio que transcurre, desde el préstamo de dinero hasta el momento de cierre o pago.
- **Interés (r).-** Es la cantidad de dinero ganado en un determinado tiempo, generalmente está basado anualmente, pero si se desea en unidades más pequeñas se debe dividir.
- **Tasa de Interés (i).-** Es el porcentaje de crecimiento del dinero.

FORMULARIO

Interés:

$$r = C \cdot i \cdot t$$

Monto:

$$M = C + r$$

$$M = C(1 + it)$$

Capital:

$$C = M - r$$

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

Tasa de interés:

$$i = \frac{M - C}{Ct}$$

Tiempo:

$$t = \frac{M - C}{Ci}$$

Ejemplos:

1) Determine el interés y el monto que genera un capital de Bs. 3000, depositados en el banco a una tasa de interés del 5% (0.05), durante 7 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta
$r = C \cdot i \cdot t$	$M = C + r$	Al finalizar los 7 años, los Bs. 3000 se convirtieron en Bs. 4050
$r = 3000 \cdot 0.05 \cdot 7 = 1050$	$M = 3000 + 1050 = 4050$	

2) Se solicita un préstamo de Bs. 80000 para devolver en 2,5 años con un interés del 4% (0.04) anual, halla el capital final a pagar durante ese tiempo.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta
$r = C \cdot i \cdot t$	$M = C + r$	El capital final en los 2.5 años, se convirtieron en Bs. 88000
$r = 80000 \cdot 0.04 \cdot 2.5 = 8000$	$M = 80000 + 8000 = 88000$	

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas sobre interés simple:

a) Una persona pide un préstamo de Bs. 5000 para pagar en 2 años a un interés del 4.5%. Hallamos la cantidad que debe pagar al cabo de 2 años.
b) Halla el interés y el capital final si se tiene un capital Bs. 3000 para pagar en 3 años a interés del 4%.
c) Encontramos el interés y el capital final si se tiene un capital Bs. 50000 para pagar en 60 meses a un interés del 3.5%.
d) Calculamos el capital que se debe imponer al 4% para formar al cabo de 5 años una suma de Bs. 120000.

5. Tasa, tiempo, capital, valor, valor final, valor actual, y descuentos a interés simple

a) Tasa

Dentro la economía global, la tasa hace referencia a las expectativas existentes sobre la tasa de inflación o deflación, al riesgo asociado al tipo de activo que los inversores exigen una tasa de interés mayor como contrapartida para asumir mayores riesgos.

ALGO DE HISTORIA…

Según datos del Banco Central, entre 1982 y 1985, la moneda boliviana se devaluó más de un millón de veces. El dólar, en agosto de aquel año, cuando Siles dejó el poder, ya valía 1.149.354 pesos bolivianos. La inflación había escalado para entonces hasta 11.749,64 por ciento.
Las reservas internacionales habían caído de 300 millones de dólares en 1977 a cero en 1983 para recuperarse hasta algo más de 100 en 1984.

Los bancos trabajan con tasas de interés distintas:

- Tasa de interés activa: Estos intereses se llaman activos pues son recursos en favor de la entidad bancaria. Son los porcentajes cobrados por servicios de créditos a los mismos prestamistas.
- Tasa de interés pasiva: Cuando una persona deposita dinero en el banco, el porcentaje que recibe de parte del banco es la tasa de interés pasiva.
- Tasa de interés preferencial: Frecuentemente, las entidades bancarias habilitan un porcentaje inferior al "normal", este es el interés preferencial, sucede para promover ciertas políticas en el banco o privilegiar a sectores como el gremial, por ejemplo.

b) Tiempo

Es el intervalo de unidades de tiempo que transcurre del inicio al final del préstamo, es conocido como plazo. Algo para tomar en cuenta y que es muy importante sobre todo en el cálculo de intereses y resolver los problemas financieros, los datos de tiempo (t) y la tasa de interés (i) deben estar referidas en una misma unidad de tiempo.

Ejemplos:

1) Si la tasa es anual y el tiempo es de 5 años, entonces $n=5$
2) Si la tasa es anual y el tiempo es de 7 meses: $n=\frac{7}{12}$
3) Si la tasa es mensual y el tiempo es de 2 años: $n=12\cdot 2=24$
4) Si la tasa es trimestral y el tiempo es de 5 años: $n=5\cdot 4=20$
5) Si la tasa es anual y el tiempo son 5 cuatrimestres: $n=\frac{5}{3}$

c) Capital

Una entidad bancaria tiene el capital que se expresa en todos los recursos físicos y financieros, los mismos que son obtenidos aportes de socios o accionistas u otro medio con el fin de producir un valor.

También se le conoce como valor presente o valor actual del dinero. El capital puede ser:

- **Capital financiero,** valor de las inversiones a corto plazo que mantiene una entidad con otras instituciones. Se puede ver reflejada de formas diferentes, ya sea en acciones, préstamos, etc.
- **Capital de riesgo,** fondos donde un inversionista coloca en empresas, sectores, transacciones o instrumentos de alto riesgo, innovación y elevado crecimiento para lograr sobre los mismos un rendimiento o ganancia mayor a lo normal.
- **Capital variable,** es el capital dentro de una sociedad que varía al cambiar el número de socios que hay en ella, y por ende los recursos originales que habían puesto en ella (capital social).
- **Capital fijo,** son los bienes dentro de una empresa, llamados también de largo plazo, o activos, que se espera hacer uso de ellos hasta dentro de un año o más, normalmente incluyen propiedades, terrenos, maquinarias, etc.

d) Valor

El valor del dinero no es constante, pierde su valor a través del tiempo por diferentes razones como la inflación. El tiempo es la variable que influye en el valor del dinero. Asimismo, el dinero es un activo con el que se puede generar más dinero.

De este modo, surgen dos conceptos importantes a tratar: el valor actual y el valor futuro del dinero.

e) Valor final

El valor final de una determinada transacción es el término 'valor futuro', se refiere al dinero que puede generar cierta inversión en una fecha próxima o planificada. Se comprende como la suma del Capital invertido más los intereses.

$$M = C + r$$

f) Valor actual

El valor presente o valor actual, se refiere al valor del dinero en tiempo presente. Como el valor del dinero no es constante, su cálculo es importante porque permite saber cuál es el monto actual con que se cuenta, con este dato se pueden realizar cálculos futuros en función del valor actual.

g) Descuentos a interés simple

Las que se pueden reducir antes de vencer una cantidad prestada, se denominan descuentos a interés simple.

Existen dos tipos de descuento para el interés simple:

- Descuento comercial o bancario: Es el que se aplica sobre el valor nominal del documento. Puede decirse que es el interés simple del valor nominal. En este tipo de descuento, el interés se cobra por adelantado, en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento.

$$VP = N \cdot (1 - dt)$$

VP: valor presente
d: tasa de descuento
N: valor nominal de descuento
t: tiempo

- Descuento real o justo: A diferencia del descuento comercial, el descuento real o justo se calcula sobre el valor real que se anticipa, y no sobre el valor nominal.

$$VP = \frac{N}{1 + it}$$

Ejemplos:

1) Encontrar el valor actual y el descuento racional al 1 de enero de un documento por Bs. 5500, que debe ser pagado el 15 de febrero, suponiéndose la tasa de interés simple del 2% anual.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$N = 5500$ $i = 0.02$ $t = \frac{45}{365} = \frac{9}{73}$	$VP = \frac{N}{1+it}$ $\quad D = N - VP$ $VP = \frac{5500}{1 + 0.02 \cdot \frac{9}{73}} = 5486.47$	$D = 5500 - 5486.47 = 13.53$ El descuento asciende a Bs. 123.53

En el contexto comercial, el descuento consiste en la disminución concedida al pago o deuda por diferentes razones. Estas pueden ser promociones, liquidaciones, etc.

2) A una laptop que se vende en los mercados comerciales con un valor de Bs. 5200, se le aplicaron dos descuentos sucesivos de 3.5% y de 6%. ¿Cuál fue su precio final?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$P = 5000$ $t = 3.5$ $t' = 6$	$D = P \cdot \frac{100-t}{100} \cdot \frac{100-t'}{100}$	El precio final con los descuentos es de Bs. 4535.5
	$D = 5000 \cdot \frac{100-3.5}{100} \cdot \frac{100-6}{100} = 4535.5$	

INTERÉS

La diferencia entre interés simple y compuesta radica en que el interés simple ocurre cuando éste se calcula sobre el capital inicial y se obtienen intereses fijos, mientras que el interés compuesto se suma al capital, se calcula sobre el capital aumentado y los intereses se incrementan en cada periodo.

El interés compuesto puede hacer que los ahorros crezcan más rápido o hacer que los préstamos se vuelvan más costosos.

FORMULARIO

Interés:

$$r = M - C$$

Monto:

$$M = C(1+i)^t$$

Capital:

$$C = M - r$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}$$

Tasa de interés:

$$i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1$$

Tiempo:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

6. Interés compuesto en actividades financieras

a) Definición

El interés compuesto se comprende como el interés en el que el capital cambia al final de cada periodo, sucede porque los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital, al que se denomina monto y sobre este monto se vuelven a calcular intereses, es decir que se capitalizan los intereses. La suma total que se obtiene al final es conocida como el monto compuesto o valor futuro. Ala diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina interés compuesto.

b) Características

- El capital inicial crece ya que en cada periodo se suman los intereses.
- La tasa de interés es aplicada sobre el capital que cambia.
- Los intereses aumentan periodo a periodo.

c) Elementos

Los elementos del interés compuesto al igual que en el interés simple son:

Capital (C).- Es el dinero al inicio, el cual será la fuente del crecimiento del interés.

Monto (M).- Es el total del dinero después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.

Tiempo (t).- Es el espacio que transcurre, desde el préstamo de dinero hasta el momento de cierre o pago.

Interés (r).- Es la cantidad de dinero ganado en un determinado tiempo, generalmente está basado anualmente, pero si se desea en unidades más pequeñas se debe dividir.

Tasa de Interés (i).- Es el porcentaje de crecimiento del dinero.

Ejercicios resueltos

1. ¿Cuánto será el monto que producirá un capital de Bs. 25000, al 3% anual en 4 años?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C = 25000$ $i = 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$ $t = 4$	$M = C(1+i)^t$	El monto que producirá el capital en 4 años será Bs. 28137.72
	$M = 25000(1+0.03)^4 = 28137.72$	

2. Mario invierte Bs. 100000 al 6% acumulándose los intereses cada 6 meses. Halla el capital final y el interés al cabo de 2 años.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C = 100000$ $i = \frac{1}{2} \cdot 6\% = 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$ $t = 2 \cdot 2 = 4$	$M = C(1+i)^t$ $M = 100000(1+0.03)^4 = 112550.881$	El capital final al cabo de los 2 años se convierte en Bs. 112550.881

3. Halla la tasa de interés que se deben invertir de Bs. 20000 para tener al cabo de 5 años Bs. 55000.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$M = 55000$ $C = 20000$ $t = 5$	$i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1$ $i = \sqrt[5]{\frac{55000}{20000}} - 1 = 0.22424$	$i = 0.22424 \cdot 100\% = 22.424\%$ La tasa de interés será del 22.424%

4. José Antonio depositó al Banco Unión un capital de Bs. 8000, a un interés del 3%anual para que se convierta en 12200 Bs. ¿Cuántos años debe estar en el banco?

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$M = 12200$ $C = 8000$ $i = 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$	$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$ $t = \frac{\ln\left(\frac{12200}{8000}\right)}{\ln(1+0.03)} = 14.27643808$	El tiempo que debe estar depositado su capital de José Antonio en el banco es de aproximadamente 14.3 años.

5. Encuentra el interés de un capital invertido en bienes raíces que asciende a un monto de Bs. 150000, a una tasa de interés del 5% cobrados anualmente, el tiempo de inversión es de 3 años.

Datos	Calculamos el monto	Respuesta
$C = 150000$ $i = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ $t = 3$	$M = C(1+i)^t$ $\quad r = M - C$ $M = 150000(1+0.05)^3 = 173643.75$ $r = 173643.75 - 150000 = 23643.75$	El interés cobrado por el capital invertido es de Bs. 23643.75

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas sobre interés compuesto:

1. ¿En cuánto se convertirán Bs. 800 al 3% anual, en 2 años capitalizando los intereses por semestres?
2. Una cantidad prestada por el 5% anual de interés compuesta se convierte en Bs. 97260 durante 4 años, ¿cuál fue la cantidad prestada?
3. Hace 4 años Aneth pidió un préstamo de Bs. 7000 y la cantidad pagada al ter minar el período del préstamo han sido Bs. 9500, ¿qué tipo de interés se aplicó?
4. ¿Cuántos años debe estar un depósito de Bs. 8000, a un interés compuesto del 5% anual para que se convierta en Bs. 10000?
5. Delma por un préstamo de Bs. 19000, ha tenido que pagar Bs. 21200 al cabo de un año, ¿cuál es la tasa de interés que ha cobrado la institución financiera?
6. Determina el interés de un capital invertido en de un monto de Bs. 88000, a una tasa de interés del 3.5% cobrados anualmente, el tiempo de inversión es de 6 años.

ORIGEN DE LOS CRÉDITOS

Los créditos se originan alrededor del 3.000 AC. Se tiene evidencia, según distintas fuentes revisadas, que este tipo de operaciones se dieron en Mesopotamia.

Asimismo, existieron operaciones de crédito en la antigua Grecia y Roma. Los romanos llegaron a establecer leyes, tanto para regular los intereses como para castigar el impago de las deudas.

7. Créditos, inversiones y utilidades

a) Créditos

Un crédito es un préstamo de dinero que una persona recibe a cambio de que esta devuelva el valor recibido, junto a un porcentaje de intereses que debe pagar en un tiempo determinado, definido entre el acreedor y el deudor. Así, el acreedor es aquella persona o empresa que da el dinero en calidad de préstamo y tiene derecho a cobrarlo, mientras que el deudor es la persona o institución que debe el monto de dinero prestado (además de los intereses) y tiene en la obligación de pagarlo.

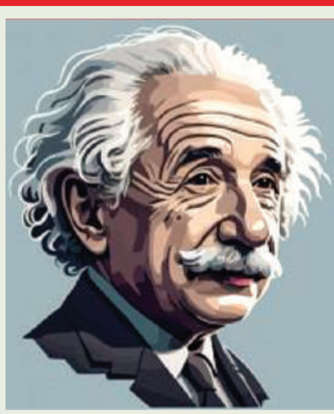
Los aspectos que se deben tomar en cuenta al adquirir un crédito o préstamo son:

- **Tasa interés,** costo que las entidades bancarias cobran sobre el monto financiado y que deben ser pagados en cada una de las cuotas.
- **Plazo a pagar,** tiempo comprometido por el deudor para realizar el pago total del crédito, lo que incluye capital, intereses y seguros.
- **Cuotas,** valor periódico (mensual, trimestral…) que deben ser pagados por el plazo acordado.
- **Garantías,** soporte que respalda la obligación que se adquiere con la entidad financiera al momento de otorgarse el crédito.

Los tipos de créditos más comunes son:

- **Créditos de Consumo,** monto de dinero que el Banco otorga a las a personas por la adquisición de bienes o pago de servicios, y que es pagado en corto o mediano plazo. El ejemplo son las facturas de luz, agua y otros servicios comunes.
- **Créditos Comerciales,** monto de dinero que el Banco otorga a empresas con el fin de satisfacer necesidades de capital de trabajo, adquirir bienes, pago de servicios que se orientan a la operación de la misma o el refinanciamiento de pasivos con otras instituciones y proveedores de corto plazo. Estos créditos son pagados en corto o mediano plazo. Por ejemplo, cuando se apertura una microempresa.
- **Créditos Hipotecarios,** monto de dinero que el Banco otorga para la adquisición de una propiedad ya construida o un terreno. También aplica para la construcción de viviendas, oficinas y otros bienes raíces. La garantía de la hipoteca es sobre el bien adquirido o construido; puede ser pagado en mediano o largo plazo.

ALBERT EINSTEIN



Matemático, físico, diplomático y profesor, alemán, calificó el interés compuesto como "la fuerza más poderosa de la galaxia".

Los créditos presentan:

Ventajas

- Permiten sobresalir en emergencias, ante esto se requiere de liquidez hoy.
- Permiten acceder a pagos importantes como estudio sola adquisición de bienes de costo alto.
- Impulsa la actividad de la economía, desde el punto de vista macroeconómico, permitiendo dinamización en el consumo económico diario.

Desventajas

- Se deben pagar intereses, esto implica que las compras a crédito resultan de mayor costo que cuando se compra en efectivo. Muchas personas no analizan esta desventaja y caen en versiones tramposas de algunas casas de crédito.
- El deudor podría enfrentar alguna dificultad económica en el futuro, pues su capacidad para devolver lo prestado podría disminuir y no ser suficiente.
- Cualquier crédito ocasiona endeudamiento permanente a las familias cuando se dejan llevar por el consumismo desmedido e irresponsable. Esta podría ser una de las razones principales de que las familias caigan en problemas económicos.

b) Inversiones

¿Cómo funciona una inversión? El significado de inversión se rige bajo los factores: rentabilidad, riesgo, liquidez y plazo; lo que se comprende que es lo que ganamos, lo que podríamos perder y el tiempo.

- **Rentabilidad,** es lo que se obtiene luego de realizar la inversión, habitualmente se mide en términos de beneficio y de rentabilidad.
- **Riesgo,** es el nivel de incertidumbre luego de adquirir cierto monto. Es recomendable estar consciente del riesgo que se toma al invertir, por si esta no sale bien.
- **Liquidez,** es comprendida como la capacidad de convertir una determinada inversión en dinero que no tenga pérdidas con relación a su valor inicial.
- **Plazo,** comprendida como el tiempo de duración de la inversión.

En estos tiempos, cualquier persona puede invertir, no es una capacidad neta de las personas que tienen más o menos. Por ejemplo, se puede invertir en la bolsa de valores para ganar dinero, sacando rentabilidad de cierto dinero ahorrado.

c) Utilidades

A menudo se utiliza el término “utilidad” para hacer referencia a la medida de satisfacción de un consumidor cuando adquiere cierto producto, el concepto de utilidad podría ser subjetivo y no poderse medir.

Las unidades de medida de la utilidad son las “utilidades” y el beneficio que los consumidores pueden adquirir es difícil de calcular.

La función de utilidad es el valor numérico asignado a cada cantidad de los bienes que el consumidor elige, por tanto, cuando mayor es ese valor, la situación del comprador mejorará.

Las características de la función de utilidad son:

- La utilidad incrementa de forma creciente, cuando llega a su valor máximo la utilidad comienza a disminuir.
- Cuando el bien adquirido es consumido frecuentemente, la satisfacción total crece, pero llegando a un punto las variaciones en la utilidad serán menores.
- Matemáticamente puede demostrarse que, si es posible modelizar la conducta de un consumidor perfectamente racional mediante funciones de utilidad convexa, entonces esta conducta puede resumirse mediante una curva de demanda decreciente.

8. Emprendimientos productivos

La matemática financiera nos permite realizar diferentes actividades, desde el préstamo para la apertura de un negocio, o la planificación de pagos de la compra de una casa. El objetivo de la matemática financiera es hacer que el dinero trabaje para obtener beneficios económicos para las personas, de tal forma que podremos mencionar aspectos en los cuales podemos aplicar las matemáticas financieras.

CRÉDITO O PRÉSTAMO

De hecho, aunque tienen muchas cosas en común, conocer las diferencias puede hacernos aprovechar el dinero de una forma mucho más eficiente.

En términos generales, el préstamo es en forma mucho más acotado que el crédito, el cual es más flexible. Digamos que el préstamo se concede todo de una vez, el crédito es dinero disponible el cual podemos utilizar o no.

AHORRO E INVERSIÓN

El ahorro es aquel dinero que guardamos para poder disponer de él en el futuro. Renunciamos a gastarlo en el presente, poniéndolo en un lugar seguro y sin riesgo, pero que suele generar intereses.

Por otro lado, la inversión es aquel dinero que renunciamos a gastar en el presente para que en el futuro nos aporte un dinero extra. Esta ganancia extra que nos aporta la inversión con respecto al ahorro se debe a que con la inversión estamos arriesgando nuestro dinero, y por ello recibimos una compensación.

- Efectuar pagos de préstamos a entidades financieras, de tal forma que podamos evitar intereses elevados. Realizar depósitos de dinero, de tal forma que vaya ganando intereses (ahorro, intereses a plazo fijo, bonos, etc.)
- Emprendimientos individuales de préstamo de dinero a personas de escasos recursos.
- Préstamos para pequeñas, medianas y grandes empresas.

a) Definición

El emprendimiento es la iniciativa de un individuo o un grupo de individuos que toman un riesgo económico e invierten en recursos para aprovechar la oportunidad que el mercado le brinda.

Las personas que toman el riesgo descrito anteriormente, son denominadas emprendedores y deben tener ciertas capacidades para lograr éxitos. En nuestro país existen personas que iniciaron negocios que, con el tiempo, les da rentabilidad y estabilidad económica para sus familias, esto sucede con la capacidad de adaptación que las personas presentan al momento de asumir el riesgo.

Los emprendimientos comienzan con ideas que responden a ciertas necesidades. Es como tomar un viaje con el objetivo de hacer realidad la idea inicial.

b) Tipos de emprendimiento

- **Unipersonal,** se conforma por la iniciativa de emprendimiento formado por una sola persona, en Bolivia existen variadas empresas unipersonales con servicios también variados.
- **Sociedad Colectiva,** se conforma por la iniciativa de varias personas, un grupo de personas, quienes conforman una sociedad e invierten un patrimonio económico con una participación en la dirección o gestión de la empresa.

- **Cooperativas,** está conformada por cooperativistas, personas que de manera organizada participan en una constitución sin fines de lucro. Los miembros de la cooperativa son trabajadores, pero también hay proveedores y clientes de empresa.

c) Características

Las características de un emprendedor, al momento de convertir una idea en negocio rentable son:

- **Espíritu,** el dinamismo, la creatividad y la curiosidad con elementos del emprendedor con espíritu empresarial, esto le permitirá emprender un negocio con oportunidades de prosperidad.
- **Capacitación,** un emprendedor debe tener conocimientos suficientes para consolidar la idea en una empresa.
- **Marco regulatorio,** el conocimiento legal es otro aspecto importante que debe conocer un emprendedor, esto para poner en práctica su conocimiento legal en la creación empresarial.
- **Financiación,** debe tener una fuente de financiamiento para la actividad generada.
- **Red,** involucra a otros actores formando una red de trabajo con el fin de trabajo sinérgico con otros emprendedores.

VALORACIÓN

Supongamos que tienes cierta cantidad de dinero y decides simplemente guardarla en casa, en lugar de invertirla, la inflación reducirá el valor del dinero que tienes, pero si en una fecha futura decides invertir, tu dinero tendrá un menor poder de compra.

- ¿Por qué crees que las y los bolivianos prefieren guardar su dinero en casa?
- ¿Cómo calificas el sistema financiero del país?
- Valoremos el poder de decisión financiero que debemos practicar para mejorar nuestra situación económica, personal, familiar y comunitaria.
- Reflexionemos y analicemos que el dinero que no se invierte pierde su valor en el tiempo.

A TOMAR EN CUENTA

Para evitar pagar el interés compuesto, solicita préstamos que cobren interés simple.

Los préstamos grandes como hipotecas y préstamos para compra de vehículos, utilizan una fórmula de interés simple.

Las tarjetas de crédito y algunos otros préstamos con frecuencia utilizan el interés compuesto, por ello, es recomendable utilizar tarjetas de crédito de manera prudente y asegurarse de liquidar el saldo del estado de cuenta cada mes.

PRODUCCIÓN

Actividad

Realicemos un cuadro didáctico donde se puedan describir los elementos que se estudian en matemática financiera, de tal forma que sirva como recordatorio.

Investiguemos las siguientes actividades que se dieron en Bolivia años atrás:

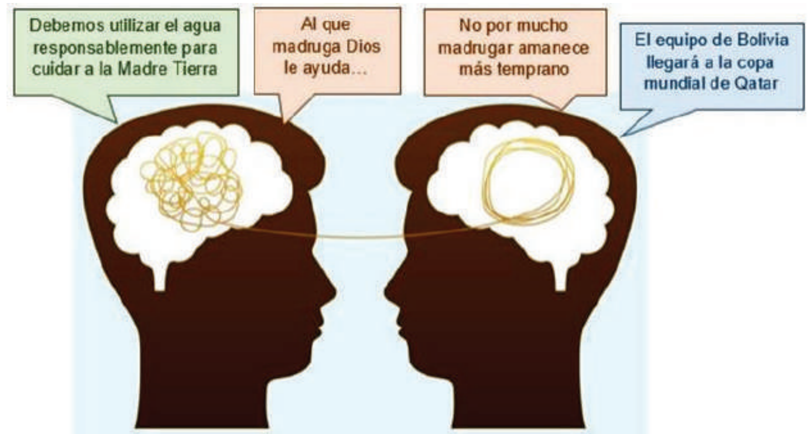
- ¿Qué año se dio el mayor porcentaje de inflación?
- ¿Cómo influye en la vida diaria de los bolivianos y bolivianas?
- ¿Qué políticas o estrategias se podría adoptar o implementar para revertir y mejorar la situación económica del país?

LA LÓGICA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

PRÁCTICA

Analiza las situaciones que se plantean en la imagen y escribe una respuesta.

En nuestra vida diaria existen situaciones donde se debe aprender a decidir o dar una respuesta o solución, aunque es cierto que cada uno de nosotros es un mundo diferente y las respuestas, como soluciones pueden ser diferentes, existen situaciones en que, aunque quisiéramos, no podemos negar su razón.



Actividad

Subrayamos la palabra que corresponde a la oración planteada:

- Laura utiliza el color…………………., para pintar el cuadro de una noche estrellada.

a) Rojo b) Negro c) Verde d) Amarillo

- José y Rodrigo agarran su…………………., y van a la…………... a jugar futbol.

a) Bate b) Plaza c) Pelota d) Cuarto e) Raqueta f) Cancha

- Por la educación recibida en casa, cuando una mujer embarazada sube al transporte público, te……

a) Haces al dormido b) Pones a chatear c) Insultas d) Levantas y cedes el asiento

TEORÍA

LA LÓGICA MATEMÁTICA

Boole y Frege son los creadores de la lógica simbólica o matemática. Bolle matemático inglés lleva a cabo la completa matematización de la lógica de Aristóteles, usando fórmulas algebraicas para expresar relaciones lógicas.

Definición

"La Lógica, es la disciplina que trata de los métodos, modos y formas del razonamiento humano. Ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no" Lazo (1999).

Mediante la lógica, podemos mejorar nuestro lenguaje, comprender situaciones y planificar proyectos con resultados esperados. Es así que en este capítulo analizaremos como incide la lógica en nuestras actividades diarias, además de establecer de qué forma se conectan y representan utilizando el lenguaje matemático.

Pero también debemos mencionar a la lógica matemática, que es la disciplina que trata de métodos de razonamiento lógico que se emplea en matemática para demostrar teoremas; en computación para verificar si los programas y aplicaciones son correctos o no; en las ciencias para concluir en experimentos, en las ciencias sociales y la vida cotidiana, al resolver problemas.

La lógica matemática debe cuestionar con rigor y reglas de deducción que son utilizados en matemática. La teoría matemática define leyes que relacionan a objetos entre sí, los axiomas deducen nuevas proposiciones y a veces, nuevos objetos.

1. Proposiciones simples y compuestas

La lógica matemática se desarrolló como un instrumento para analizar el conocimiento científico y en especial, el conocimiento matemático. El conocimiento está formado por proposiciones.

a) Proposición

Una proposición es una oración (o enunciado) declarativa, la cual solo se puede establecer si es verdadera o falsa, pero no ambas. Por lo tanto, de una oración declarativa, solo pueden establecerse dos afirmaciones, o bien es Verdadera (V) o bien es Falsa (F).

Ejemplos: Establece los valores de verdad de las siguientes afirmaciones y subrayamos el correcto.

- Don Alberto ha nacido en Chuquisaca, por lo tanto, es boliviano.	V	o	F
- En clase de matemática se aprende sobre el uso de anticonceptivos.	V	o	F
- El teorema de Pitágoras es una propiedad de los triángulos rectos	V	o	F
- Solo los hombres, son los que ejercen violencia a las mujeres	V	o	F
- Por un punto pasan infinitas rectas.	V	o	F

Hay que entender que, no todas las oraciones pueden ser proposiciones y por ende, no se puede establecer un valor de verdad, ya que existen oraciones interrogativas, de las cuales no se sabe si son verdaderas o falsas, por ejemplo:

- La casa está sola
- El perro del vecino
- 3 + 4 – 5 + 1
- ¿Será que mañana llueve?

b) Proposición simple

Una proposición simple o atómica, es aquella oración declarativa que solo tiene una proposición que analizar. Los ejemplos analizados anteriormente son un ejemplo de proposición simple.

Ejemplos:

- Todos los paceños somos bolivianos.
- Seré feliz si veo mi película favorita.
- Mañana tendré mi terreno en Buena Vista.
- La tierra gira alrededor del sol.
- 5 + 4 = 9
- Los números 3, 5, 7 y 11 son números primos.

PROPOSICIONES

Una proposición sin conectores es una proposición simple.

Una proposición que tiene uno o más conectores es una proposición compuesta.

c) Proposición compuesta

Una proposición compuesta o molecular, es aquella oración declarativa que consta de dos o más proposiciones que analizar, las cuales están unidas por conectivos lógicos.

Ejemplos:

- Los números pares son los que tienen como unidad: 0, 2, 4, 6, 8, entonces el 49 es par.
- En la clase de educación física observamos que Adolfo levanta a Mario y Mario levanta a Delma, por lo tanto, Adolfo levanta a Delma.
- Las operaciones opuestas son: la suma con la resta y la multiplicación con la potenciación.
- $a+b<c \;\Rightarrow\; a<c \,\wedge\, b<c$

Las proposiciones compuestas son las que nos permiten comprender algunos razonamientos, los cuales debemos validar y establecer una posición, para se utilizan conectivos lógicos.

Actividad

Validemos las siguientes proposiciones indicando si es verdadera o falsa:

a) 63 es un número compuesto.
b) Algunos números impares son primos.
c) Si 3 es factor de 9, 9 es factor de 3.
d) Nadie quiere viajar
e) 2128 es número par.
f) La quinua es originaria de Bolivia.
g) Bolívar calificó a Bolivia como su hija predilecta.
h) ¿Mañana es jueves?

2. Notaciones y conectivos lógicos

a) Notación

Es la representación matemática que se utilizará, de tal forma que nos permita comprender mejor y simplificar las operaciones que realizaremos. Para las proposiciones simples utilizaremos las letras minúsculas del alfabeto (p, q, r, s,…, z); mientras que para las proposiciones compuestas además de las ya indicadas utilizaremos los conectivos lógicos.

Para estudiar las proposiciones, la lógica construye un modelo matemático del lenguaje corriente.

Lenguaje Corriente	Conector Lógico	Nombre del Conector	Proposición Lógica	Nombre de la proposición
no	$\sim$	Negador	$\sim p$	Negación
y	$\wedge$	Conjuntor	$p \wedge q$	Conjunción
o	$\vee$	Disyuntor	$p \vee q$	Disyunción
si...entonces	$\rightarrow$	Implicador	$p \rightarrow q$	Implicación o Condicional
si y solo si	$\leftrightarrow$	Coimplicador	$p \leftrightarrow q$	Coimplicación o Bicondicional
y/o	$\underline{\vee}$	Disyuntor	$p \underline{\vee} q$	Disyunción Exclusiva

Hay 16 conectores diádicos y 4 monódicos. Sin embargo, el sentido lógico de muchas de las conjunciones del lenguaje corriente puede expresarse con los seis conectores, vale decir:

- El negador es un conector monódico porque se aplica a una sola proposición. Se coloca delante de la proposición.
- El conjuntor, el disyuntor, el implicador y coimplicador son conectores diádicos porque se aplican a dos proposiciones: se colocan entre ellas dos.
- Para evitar ambigüedades acerca de las proposiciones a las que se aplica un conector, se usan paréntesis: $p \rightarrow (q \wedge r) \neq (p \rightarrow q) \wedge r$

b) Conectivos lógicos

Son símbolos matemáticos que dependiendo de la acción que se realicen entre las proposiciones, adopta ciertas operaciones. Veamos:

- **Negación,** es la operación lógica que niega una proposición
  “Esta mañana llovió en Sucre” negando la proposición: “Esta mañana no llovió en Sucre”
- **Conjunción,** operación lógica que une dos proposiciones con la letra “y”, las cuales tienen que suceder una después de otra.
  “Siempre debemos tener luz en casa, compremos los focos y las utilizaremos cuando se quemen.”
- **Disyunción,** operación lógica que une dos proposiciones con la letra “o inclusivo”, lo cual nos indica que una de las operaciones se pueda dar, aunque no la otra.
  “El cielo está nublado, puede solear o puede llover, de cualquier forma, saldré.”
- **Implicación,** indica que una proposición debe suceder para que suceda la otra proposición.
  “El páramo ayer estaba seco, pero esta mañana llovió, entonces hoy el páramo esta mojado.”
- **Doble Implicación,** indica que una proposición debe cumplirse, bajo la condición de que la otra también se tenga que cumplir.
  “Alfredo debe correrá en una maratón si y solo sí puede cumplir la marca mínima”
- **Disyunción Exclusiva,** indica que se pueden realizar dos acciones independientes, su representación es la “o excluyente”.
  “Mañana iré a trabajar al campo si hace sol, o me quedaré en casa a reparar las paredes si llueve.”

NOTA IMPORTANTE

Existen dos tipos de Disyunción que aparecerán en las oraciones o proposiciones: una es incluyente y la otra excluyente, la diferencia radica, en que la incluyente permite realizar una acción sin importar si una de las proposiciones no se cumple, mientras que la excluyente, nos obliga a realizar una acción diferente según sean las condiciones.

3. Operaciones proposicionales

Es la interpretación matemática de las proposiciones utilizando los conectivos lógicos, además de la representación de las proposiciones por letras que permitan desarrollar las operaciones.

Ejemplos:

Representamos matemáticamente, las siguientes proposiciones:

1) *Jaime irá a la escuela en la tarde*
   p : Jaime irá a la escuela en la tarde $\sim p$: Jaime no irá a la escuela en la tarde

   $\sim p$

2) *Para ir al cine, me debo bañar y cambiar de ropa.*
   p : Para ir al cine, me debo bañar q : cambiar de ropa

   $p \wedge q$

3) *Aneth correrá en la maratón del colegio o jugará fútbol en su zona.*
   p : Aneth correrá en la maratón del colegio q : jugará fútbol en su zona

   $p \vee q$

4) *Si me despierto temprano entonces llegaré temprano al colegio.*
   p : Me despierto temprano q : llegaré temprano al colegio

   $p \rightarrow q$

5) *Participaré del campeonato si y solo sí tengo la edad establecida en la convocatoria.*
   p : Participaré del campeonato q : tengo la edad establecida en la convocatoria

   $p \leftrightarrow q$

6) Si p : el puma es un felino, q : el puma vive en África, r : el puma es carnívoro, determinamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   $\sim r$: El puma no es carnívoro
   $p \wedge \sim q$: El puma es un felino y no vive en África
   $p \vee \sim r$: 5 El puma es un felino o no es carnívoro
   $\sim q \rightarrow p$: Si el puma no vive en África entonces es un felino
   $r \leftrightarrow \sim q$: El puma es un carnívoro si solo si el puma no vive en África

7) Si p : 35 es múltiplo de 5, q : 5 es divisor de 35, r : 35 es un número primo, determinamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   $\sim q$: 5 no es divisor de 35
   $r \wedge p$: 35 es un número primo y 35 es múltiplo de 5
   $q \vee r$: 5 es divisor de 35 o 35 es un número primo
   $p \rightarrow q$: Si 35 es múltiplo de 5 entonces es divisor de 35
   $r \leftrightarrow q$: 35 es un número primo si o solo si 5 es divisor de 35

Actividad

Escribimos la negación de las siguientes proposiciones:

- Hoy es viernes
- 3 + 5 = 8
- Todos somos honestos
- Tengo el corazón partido en dos
- Mañana es domingo
- $a^2 + b^2 \neq c^2$

Si p : Mario juega fútbol, q : Mario es atleta, r : Mario es un gran deportista, encontremos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\sim q$
- $q \wedge p$
- $\sim r \vee q$
- $\sim q \leftrightarrow \sim p$
- $p \wedge r \wedge q$
- $p \rightarrow r$
- $p \vee \sim r$
- $r \leftrightarrow q$

Si $p : 3+2=5$ $q : 8 \div 2 = 4$, halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\sim p$
- $q \wedge p$
- $\sim q \vee p$
- $\sim p \leftrightarrow \sim q$
- $p \rightarrow q$
- $\sim q \wedge \sim p$

Las proposiciones compuestas están formadas a partir de proposiciones simples enlazadas a los conectivos, las proposiciones compuestas pueden tener dos o más conectores.

Ejemplos:

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) Si: $p \equiv V,\ q \equiv F,\ r \equiv F$ ¿Cuál es el valor de verdad de $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow\sim r)$?

Reemplazando los valores de las proposiciones:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow\sim r) \equiv (V \rightarrow F) \wedge (V \leftrightarrow V) \equiv F \wedge V \equiv F$$

2) Si: $p \equiv F,\ q \equiv V,\ r \equiv V,\ s \equiv F$

¿Cuál es el valor de verdad de $[(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s)] \vee [(\sim r \rightarrow\sim q) \wedge (\sim p \rightarrow\sim s)]$?

Reemplazando los valores de las proposiciones:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s)] \vee [(\sim r \rightarrow\sim q) \wedge (\sim p \rightarrow\sim s)] \equiv$$

$$\equiv [(F \rightarrow V) \wedge (V \leftrightarrow F)] \vee [(F \rightarrow F) \wedge (V \rightarrow V)] \equiv [V \wedge F] \vee [V \wedge V] \equiv F \vee V \equiv V$$

3) Si: $(\sim p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow\sim s) \equiv V$

¿Cuál es el valor de las proposiciones $[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee\sim s)] \leftrightarrow [(\sim s \vee\sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow p)]$?

Con la proposición compuesta de referencia hallamos los valores de las proposiciones:

$$(\sim p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow\sim s) \equiv V \equiv F \leftrightarrow F$$

$$(\sim p \rightarrow r) \equiv F (q \rightarrow\sim s) \equiv F$$

$$p \equiv F q \equiv V r \equiv F s \equiv V$$

Reemplazando los valores encontrados en:

$$[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee\sim s)] \leftrightarrow [(\sim s \vee\sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow p)] \equiv$$

$$\equiv [(F \wedge V) \rightarrow (F \vee F)] \leftrightarrow [(F \vee F) \rightarrow (V \rightarrow F)] \equiv [F \rightarrow F] \leftrightarrow [F \rightarrow F] \equiv V \leftrightarrow V \equiv V$$

Actividad

Suponiendo que las proposiciones tienen los siguientes valores: $p \equiv V,\ q \equiv F,\ r \equiv F,\ s \equiv V$

Encontremos el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $(p \wedge q) \vee r \equiv$

b) $(p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge\sim s) \equiv$

c) $(p \wedge\sim r) \rightarrow (s \rightarrow q) \equiv$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee s) \wedge\sim q] \equiv$

e) $[(p \rightarrow s) \wedge (q \vee\sim r)] \leftrightarrow [(q \vee s) \wedge (q \wedge r)] \equiv$

f) $[(r \wedge s) \wedge (p \vee q)] \wedge [\sim (p \vee s) \leftrightarrow (q \wedge r)] \equiv$

Si se da la siguiente proposición: $(p \rightarrow\sim q) \vee (\sim r \rightarrow s) \equiv F$

Deducimos el valor de verdad de:

a) $(\sim p \vee\sim q) \vee\sim q \equiv$

b) $(p \wedge s) \vee (\sim s \wedge q) \equiv$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge\sim q] \equiv$

d) $(\sim r \vee q) \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s] \equiv$

e) $[(p \rightarrow\sim q) \wedge\sim (r \wedge\sim s)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge\sim (r \wedge s)] \equiv$

f) $(\sim p \wedge\sim r) \wedge (\sim s \rightarrow q) \equiv$

g) $(q \leftrightarrow r) \vee [(p \vee s) \wedge\sim q] \equiv$

h) $[(q \rightarrow r) \wedge (p \vee\sim s)] \leftrightarrow [(p \vee s) \vee (q \wedge r)] \equiv$

i) $[(q \wedge p) \vee (r \vee s)] \vee [(p \vee s) \wedge\sim (q \wedge r)] \equiv$

4. Tablas de valor de verdad

Valor de verdad

Es el establecimiento de la Veracidad o Falsedad de las proposiciones, tomando en cuenta las diferentes posibilidades de cada proposición. El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende del valor de verdad de cada proposición y del conector lógico que las relaciona.

Los valores de verdad de las operaciones lógicas son:

NEGACIÓN

p	$-p$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

CONDICIONAL

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

BICONDICIONAL

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Sabemos que algunas proposiciones se construyen con 2 o más conectores, para determinar las condiciones en las que esta proposición es verdadera o falsa, se construye una tabla de verdad, una tabla de verdad simplifica muchísimo el desarrollo de encontrar la veracidad o falsedad de una o más proposiciones, para construir una tabla de verdad tomaremos en cuenta los siguientes puntos:

- Se anotan todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples. El número de esas combinaciones está dado por 2^n , donde n es el número de proposiciones simples distintas que aparecen en la proposición compuesta, y el 2 indica el número de valores de verdad.
- Se encuentran los valores de verdad de las proposiciones compuestas que son parte de la proposición hasta encontrar los valores de verdad de ésta última.

Ejemplos:

Construye las tablas de verdad para cada proposición.

1) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$ $2^2 = 4$

p	q	$p \vee q$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \vee q)$	$p \vee q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F
		1	R	3	2

2) $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \sim q)$ $2^2 = 4$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\leftrightarrow$	$(q \vee \sim q)$	$\sim q$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V
		1	2	R	4	3

NOTA IMPORTANTE

$2^2 = 4$

La base "2", representa los valores de verdad: V, F

El exponente "2", representa la cantidad de proposiciones simples: p, q

El resultado "4", representa a la cantidad de combinaciones que tomarán los valores de verdad o filas que se deben establecer.

NOTA IMPORTANTE

$2^3 = 8$

La base "2", representa los valores de verdad: V, F

El exponente "3", representa la cantidad de proposiciones simples: p, q, r

El resultado "8", representa a la cantidad de combinaciones que tomarán los valores de verdad o filas que se deben establecer.

RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

Durante el período de 600 a. C., los griegos establecieron las matemáticas como proceso deductivo o de razonamiento lógico que cuestionan rigurosamente las teorías y las reglas de la deducción. Representado por Aristóteles, Platón y Euclides.

LÓGICA CIENTÍFICA

Tuvo lugar en la edad moderna por Immanuel Kant, Se establece mediante leyes que conforman el método científico, que son: la hipótesis, el desarrollo de la investigación y la tesis la cual confirma o la niega la tesis.

LÓGICA MATEMÁTICA

Como disciplina independiente surgió gracias George Boole. La Lógica estudia la forma del razonamiento, es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. Se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas.

3) $\sim(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ $\qquad 2^3 = 8$

p	q	r	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(q \rightarrow r)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V
			1	2	R	3

4) $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$ $\qquad 2^3 = 8$

p	q	r	$p \wedge q$	$\vee$	$q \wedge \sim r$	$\sim r$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V
			1	R	3	2

Actividad

Construyamos las tablas de verdad para las siguientes proposiciones:

a) $p \leftrightarrow (p \vee q)$

b) $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$

c) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee q)$

d) $(q \wedge p) \rightarrow \sim (p \leftrightarrow r)$

e) $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

f) $(\sim p \vee q) \rightarrow [(p \vee \sim q) \wedge q]$

g) $[r \wedge (p \vee q)] \underline{\vee} [\sim (p \wedge q) \leftrightarrow r]$

h) $[p \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow \sim r]$

i) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$

j) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(\sim p \rightarrow r) \wedge (\sim p \vee q)]$

k) $[(p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

5. Clasificación de fórmulas proposicionales (tautología, contradicción y contingencia)

Una tabla de verdad muestra el valor de verdad que corresponde a una proposición compuesta en todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples que aparecen en ella. De acuerdo con los resultados de su tabla de verdad, una proposición compuesta puede:

a) Tautología

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de la columna resultado son verdaderos (V), lo que nos indica, que dicha proposición es verdadera o llamada también verdad lógica.

En nuestro lenguaje común las siguientes afirmaciones son tautologías:

- Es lo que es.
- O va a llover mañana, o no va a llover.
- No hay nada que puedas hacer que no se pueda hacer.

b) Contradicción

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de la columna resultado son falsos (F), lo que nos indica, que dicha proposición es falsa o llamada también falsedad lógica.
Las siguientes afirmaciones son contradicciones:

- Está lloviendo ahora mismo, y no está lloviendo en este momento.
- El vaso está lleno y vacío.
- El triángulo es un círculo.

FRASES SOBRE LÓGICA

La lógica te llevará desde A hasta B. La imaginación te llevará a todas partes. (Albert Einstein)

El niño que tiene libertad y oportunidad de manipular y usar su mano en una forma lógica, con consecuencias y usando elementos reales, desarrolla una fuerte personalidad. (María Montessori)

c) Contingencia

Es la conclusión lógica de una proposición, donde los valores de verdad son falsos y verdaderos, lo que nos indica que la conclusión de la proposición es indeterminada.

Las siguientes afirmaciones son contingencias:

- Si tienes un gato, no tendrás ratones.
- Si vamos a la tienda, entonces compraremos algunas manzanas.
- Si una zona de alta presión se encuentra con una zona de baja presión, hay un tornado.

Ejemplos

Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en tautología, contradicción o contingencia:

1) $p \to (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	p	$\to$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V
			1	R	2

Contingencia

3) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$\wedge$	$\sim$	$p \vee q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F
		1	R	3	2

Contradicción

2) $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \to \sim q]$

p	q	r	$\sim r$	p	$\to$	$q \to r$	$\leftrightarrow$	$p \wedge \sim r$	$\to$	$\sim q$
V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V
				1	3	2	R	4	6	5

Tautología

Actividad

Construyamos tablas de verdad para clasificar en tautología, contradicción o contingencia, las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge \sim q) \to (\sim p \vee q)$

b) $p \to [\sim q \wedge (\sim p \to q)]$

c) $(p \leftrightarrow q) \vee [(q \vee p) \wedge \sim (p \wedge q)]$

d) $[(p \to q) \to \sim r] \wedge \sim q$

e) $[(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee r)] \wedge (p \to r)$

f) $[(q \vee p) \wedge \sim (p \wedge q)] \leftrightarrow (\sim p \to q)$

6. Equivalencia lógica

La equivalencia lógica se presenta cuando existen dos funciones proposicionales, las cuales tienen la misma tabla de valores o el mismo resultado en la tabla de verdad y este resultado necesariamente tiene que ser una tautología.

Leyes lógicas

Las leyes lógicas son enunciados que afirman que existe una relación de equivalencia entre dos proposiciones. Hay infinitas leyes lógicas, algunas de las más simples y útiles están en el siguiente cuadro:

Negación	$\sim(\sim p)\equiv p$	
Idempotencia	$p\wedge p\equiv p$	$p\vee p\equiv p$
Conmutativa	$p\wedge q\equiv q\wedge p$	$p\vee q\equiv q\vee p$
Asociativa	$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$	$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$
Distributiva	$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
Identidad	$p\wedge V\equiv p$	$p\vee F\equiv p$
Complementación	$p\vee\sim p\equiv V$	$p\wedge\sim p\equiv F$
De Morgan	$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$	$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$
Condicional	$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$	$p\rightarrow q\equiv\sim(p\wedge\sim q)$
Bicondicional	$p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$
Absorción	$p\vee V\equiv V$	$p\wedge F\equiv F$
	$p\wedge(p\vee q)\equiv p$	$p\vee(p\wedge q)\equiv p$
	$p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q$	$p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q$

Estas leyes lógicas pueden ser demostradas mediante tablas de verdad, donde el resultado o la columna resultado nos dará una tautología.

Ejemplos:

Verifica las siguientes equivalencias:

FRASES SOBRE LÓGICA

Vivimos en una sociedad dónde la mentira es la rutina, la traición una lógica y la moda el burka que cubre la hipocresía.

Sólo en las misteriosas ecuaciones del amor puede encontrarse alguna lógica. (Russell Crowe)

MÁS SOBRE LÓGICA

La lógica del pensamiento tiene que acudir siempre en ayuda de la insuficiencia del conocimiento. (Friedrich Engels)

La aritmética de la vida no siempre tiene una razón lógica. (Inshirah Abdur-Ra'uf)

1) $\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee\sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim$	$p\wedge q$	$\sim p\vee\sim q$
V	V	F	F	**F**	V	**F**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	F	**V**	F	**V**
F	F	V	V	**V**	F	**V**

2) $(p\rightarrow q)\equiv[q\leftrightarrow(p\vee q)]$

p	q	$p\rightarrow q$	q	$\leftrightarrow$	$p\vee q$
V	V	**V**	V	**V**	V
V	F	**F**	F	**F**	V
F	V	**V**	V	**V**	V
F	F	**V**	F	**V**	F

7. Álgebra de proposiciones. Simplificación de proposiciones

Mediante las propiedades del algebra, podemos simplificar todas y cada una de las expresiones algebraicas, de tal forma que una operación (suma, resta, multiplicación división, etc.) pueda realizarse de una forma más rápida y exacta. El mismo principio podemos aplicarlo al algebra de proposiciones, los cuales se podrán lograr mediante el uso de las leyes de equivalencia, de las cuales algunas ya pudimos demostrarlas mediante las tablas de verdad.

El proceso de transformar una proposición en otra equivalente que sea más sencillo se denomina simplificación. Para simplificar una proposición se utilizan las leyes lógicas y el principio de sustitución.

Ejemplo:

Simplifica las siguientes proposiciones justificando cada paso, indicando la ley lógica que se utiliza:

1. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv p \vee \sim q$ — Condicional

   $\equiv \sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \vee p)$ — De Morgan

   $\equiv (p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p)$ — Asociativa

   $\equiv (p \vee p) \vee (\sim q \vee \sim q)$ — Idempotencia

   $\equiv p \vee \sim q$

2. $[(p \wedge q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (q \wedge \sim p) \equiv q$ — Condicional

   $\equiv \sim [\sim (p \wedge q) \vee \sim p] \vee (q \wedge \sim p)$ — De Morgan

   $\equiv [(p \wedge q) \wedge p] \vee (\sim p \wedge q)$ — Asociativa

   $\equiv [(p \wedge p) \wedge q] \vee (\sim p \wedge q)$ — Idempotencia

   $\equiv [p \wedge q] \vee (\sim p \wedge q)$ — Distributiva

   $\equiv q \wedge (p \vee \sim p)$ — Complementación

   $\equiv q \wedge V$ — Identidad

   $\equiv q$

3. $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q \equiv q$ — Condicional

   $\equiv \sim [(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q$ — De Morgan

   $\equiv [\sim (p \wedge q) \wedge q] \vee q$ — Absorción

   $\equiv q$

4. $(p \vee q) \wedge \sim q \equiv (p \wedge \sim q)$ — Distributiva

   s$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)$ — Complementación

   $\equiv (p \wedge \sim q) \vee F$ — Identidad

   $\equiv (p \wedge \sim q)$

LA REYNA DE LA CIENCIAS Y DEL CONOCIMIENTO

En cierta ocasión Bertrand Russel estaba especulando sobre enunciados condicionales del tipo: "Si llueve las calles están mojadas" y afirmaba que de un enunciado falso se puede deducir cualquier cosa. Alguien que le escuchaba le interrumpió con la siguiente pregunta: "Quiere usted decir que si aceptamos que 2 + 2 = 5 entonces se puede demostrar que usted es el Papa"

UNO MÁS EN LA FAMILIA

El matemático P. G. Lejeune Dirichlet no era muy amigo de escribir cartas. Hizo una excepción cuando nació su primer hijo.

Dirichlet mandó un telegrama a su suegro con el siguiente mensaje: 1+1=3

LA LÓGICA DE LA SORPRESA

Bertrand Russell cuenta lo siguiente: "Una vez recibí una carta de un lógico eminente, la señora Christine Ladd Franklin, diciendo que ella era solipsista y mostrándose sorprendida de que no hubiera otros solipsistas. Viniendo de un lógico, esta sorpresa me sorprendió".

Actividad

Simplificamos las siguientes proposiciones justificando cada paso, indicando la ley lógica que se utiliza:

a) s$p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

b) $p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge q$

c) $\sim (p \wedge \sim q) \wedge p \equiv p \wedge q$

d) $(p \vee q) \wedge \sim p \equiv (\sim p \wedge q)$

e) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

f) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

g) $(p \rightarrow q) \vee (p \vee q) \equiv V$

h) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \equiv V$

i) $[(p \wedge q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \equiv V$

j) $q \vee [(p \rightarrow q) \wedge \sim (q \rightarrow p)] \equiv q$

k) $(q \rightarrow p) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (q \wedge \sim p)] \equiv \sim p$

l) $[\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \wedge (p \vee q) \equiv q$

8. Circuitos lógicos

El sistema axiomático de la lógica proposicional dio paso al desarrollo del álgebra de Boole y el adelanto tecnológico de la microelectrónica que utiliza circuitos lógicos, con base en el sistema binario cuyos dígitos son 0 y 1.

Los circuitos lógicos son el arreglo de un conjunto de interruptores, conformado por compuertas abiertas y cerradas, que la finalidad de transmitir información. También se puede negar el paso de la información al restringir ciertas rutas dirigiendo la información por nuestro juicio.

Con dos o más interruptores teniendo un sentido lógico, se aplican los acoplamientos en serie, en paralelo o mixto.

a) Circuito en serie

Un circuito en serie es cuando las proposiciones representan interruptores, vale decir que la información pasa por el circuito a través de los interruptores, los valores de verdad de p y q son verdaderos cuando la información pasa entre las dos.

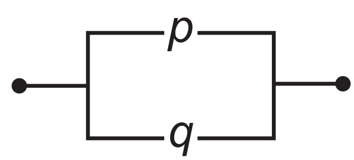
PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

La inteligencia lógico-matemática es aquella que permite solventar problemas lógicos y matemáticos.

Da uso del pensamiento lógico-matemático para utilizar la coherencia, racionalidad, deducción, números, símbolos, figuras geométricas y otros elementos propios de la lógica y las matemáticas para proponer soluciones, crear ideas y establecer conclusiones.

b) Circuito en paralelo

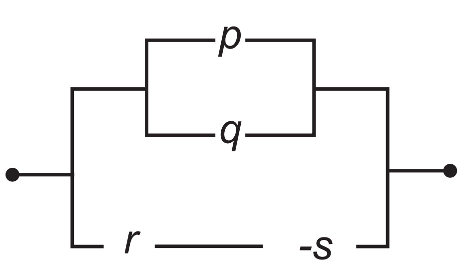
Un circuito en paralelo es donde las proposiciones p y q se encuentran en paralelo, en este caso, la información pasa por el interruptor p o, en todo caso, por el interruptor q.



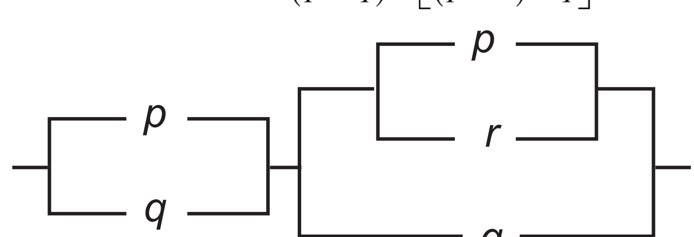
Ejemplos:

Escribe la representación simbólica del siguiente circuito lógico:

1) $\equiv (p \vee q) \vee (r \wedge \sim s)$



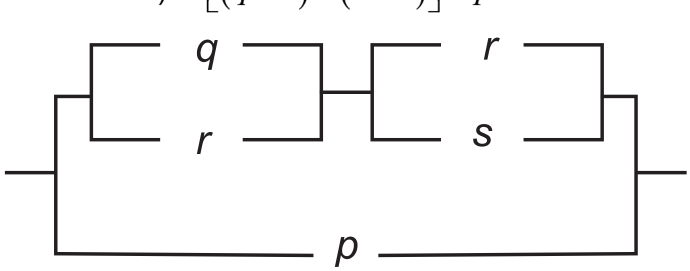
2) $\equiv (p \vee q) \wedge [(p \vee r) \vee q]$



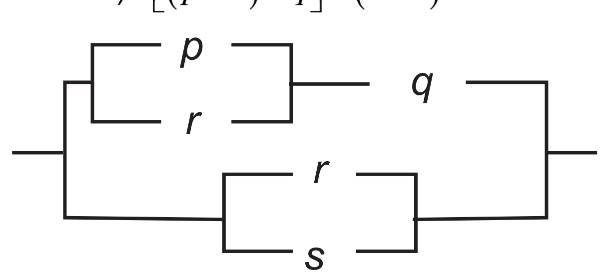
Ejemplos

Representa gráficamente el siguiente circuito lógico:

3) $[(q \vee r) \wedge (r \vee s)] \vee p$



4) $[(p \vee r) \wedge q] \vee (r \vee s)$



Actividad

Representamos gráficamente las siguientes proposiciones mediante circuitos lógicos:

a) $(p \wedge q)(q \vee \sim r)$

b) $(\sim p \vee r) \wedge (q \wedge \sim r)$

c) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

d) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \wedge p)$

e) $[(r \wedge s) \vee (q \vee p)] \wedge (\sim r \vee q)$

f) $[(p \wedge q) \vee (r \wedge s)] \wedge (\sim p \vee \sim q)$

g) $(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee s)$

h) $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee \sim p)$

i) $p \rightarrow [\sim q \wedge (\sim p \rightarrow q)]$

j) $[(p \vee q) \wedge (q \vee \sim r)] \vee (p \wedge \sim q)$

k) $[(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)] \wedge (p \rightarrow \sim q)$

l) $[(q \wedge p) \wedge \sim (p \wedge q)] \vee (\sim p \rightarrow q)$

VALORACIÓN

La lógica es aplicable a la vida cotidiana: cuando un argumento es posible, cuando hay error eso en situaciones dudosas. Así, nos permite:

- Encontrar errores en el razonamiento utilizado y tomar decisiones.
- Encontrar argumentos dudosos en las versiones de otras personas, de modo que nos facilita evitar engaños.

Actividad

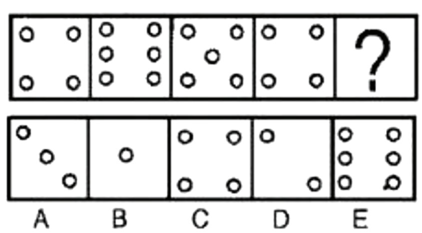
Tomando en cuenta la lectura de arriba, reflexionemos y respondamos:

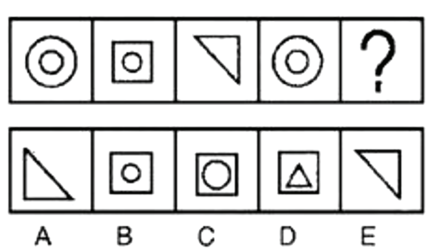
- ¿Por qué es importante la lógica?
- ¿Cómo aplicamos la lógica en el área de tecnología?

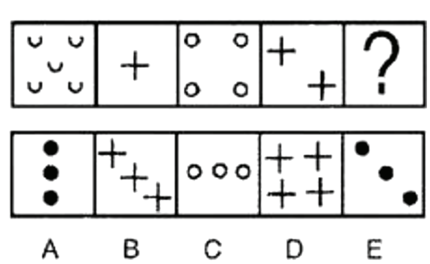
PRODUCCIÓN

Elaboremos dos páginas con “actividades de razonamiento lógico matemático” que se pueden encontrar en Internet, resolvemos las actividades pensando, razonando y llegando a las conclusiones que pide cada actividad.

3				8				6
	1				6		2	
		4	7			5		
	4			1		9		
6			2		4			1
		3		6			5	
		8			3	6		
	2		4				1	
5				2				7







REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

SUCESIONES, PROGRESIONES ARITMÉTICAS - GEOMÉTRICAS

Sucesiones numéricas

Encuentra:

1. Los 3 primeros términos de: $S_n = n^2 - 1$
2. Los 5 primeros términos de: $S_n = \dfrac{n+2}{n+1}$
3. Los 10 primeros términos de: $S_n = \dfrac{n}{2n+3}$
4. El cuarto término de: $S_n = \dfrac{n-3}{n}$
5. Los 6 primeros términos de: $S_n = (n-1)^2 - 2n + 3$
6. Los 9 primeros términos de: $S_n = \dfrac{n^2 - 2n}{n+3}$
7. Los 7 primeros términos de: $S_n = \dfrac{\sqrt{4n-3}}{2n}$
8. Calcula el décimo término de: $S_n = (2n+1)^2 - (n-2)^2$

Sumatorias y sus propiedades

Con desarrollo determina los elementos de las siguientes sumatorias:

9. $\sum_{x=1}^{5} 4x - 5 =$
10. $\sum_{i=1}^{8} (2i+3)^2 =$
11. $\sum_{a=1}^{5} 2(3a+5)^2 =$
12. $\sum_{x=2}^{10} x^2 - 3x + 5 =$
13. $\sum_{k=1}^{12} (k^2 + k - 1)^2 =$
14. $\sum_{n=1}^{7} \dfrac{3n+1}{n-6} =$

Progresiones aritméticas

Determina:

15. El noveno término de $\div 1.7.13....$
16. El vigésimo octavo término de $\div -3.4.11....$
17. El primer término si tenemos que el $t_9 = 52 \quad t_8 = 47$
18. El primer término si tenemos los siguientes términos: $t_7 = 27 \quad t_5 = 20$
19. La diferencia si tenemos los siguientes términos: $t_3 = -5 \quad t_{20} = 165$
20. La diferencia si tenemos los siguientes términos: $t_{40} = 40 \quad t_{20} = \dfrac{260}{9}$
21. La cantidad de términos si tenemos los siguientes datos: $t_1 = 70 \quad d = -3 \quad t_n = 34$
22. El número de términos si tenemos los siguientes datos: $t_5 = 23 \quad t_8 = 35 \quad t_n = 87$
23. La suma de los ocho primeros términos de: $\div 31.38.45$
24. La suma de los diecinueve primeros términos de: $\div \dfrac{1}{2}.1.\dfrac{3}{2}$
25. La interpolación de tres medios aritméticos entre 3 y 11
26. La interpolación de cinco medios aritméticos entre –13 y –73
27. ¿Cuántos números entre 20 y 190 son divisibles por 7?
28. Halla tres números en progresión aritmética cuya suma es 21 y cuyo producto es 280.
29. El quinto término de una progresión aritmética es -7 y la diferencia -3, encuentra el primer término la suma de los doce primeros términos.
30. El 2º y el 4º término de una progresión aritmética, suman 22, el 3º y el 7º suman 34. ¿Cuáles son esos 4 términos?
31. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética se necesitan para que su suma sea 1340?

Progresiones geométricas

Encuentra:

32. El octavo término de la progresión: 5:10:20...
33. El 5º término de la PG si el 2º término es 8 y el 3º término es 32.
34. La razón de la progresión de 6 términos: 2:...:64
35. La interpolación de cinco medios geométricos entre –1 y –729
36. La cantidad de términos de la PG, si el 4º término vale 125, el 2º término es 5, el último término 3125.
37. Halla el primer término si se conoce que el quinto término de una progresión geométrica es 80 y el sexto 160.
38. La suma de los primeros cinco términos de una progresión geométricas es -77, la razón -2, halla el primer término.
39. El segundo término de una progresión geométrica es 6, el quinto término es 48, escribe la progresión.
40. La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes estarán en progresión aritmética. Halla los tres números.

Suma en una sucesión geométrica – infinita decreciente

Halla:

41. La suma de los diez primeros términos de la progresión: $3: 9: 27. ..$
42. La suma de los dieciocho primeros términos de la progresión: $100: 50: 25. ..$
43. La suma de los treinta cuatro primeros términos de la progresión: $-2: 10: -20. ..$
44. La suma de los nueve primeros términos de la progresión: $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{9}{4}. ..$
45. La suma de la progresión: $\frac{1}{2}:\frac{1}{6}:\frac{1}{18}: . ..$
46. La suma de la progresión: $3^{-1}: 3^{-2}: 3^{-3}: . ..$
47. La suma de la progresión: $2:\frac{1}{2}:\frac{1}{8}: . ..$
48. La suma de la progresión: $-5: -2: -\frac{4}{5}: . ..$

Problemas del contexto aplicados a la ciencia y a la tecnología

49. El lunes gané Bs. 200 y después diariamente gané el doble del día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?
50. Un dentista arregla 20 piezas a una persona cobrándole Bs. 1 por la primera, Bs. 2 por la segunda, Bs. 4 por la tercera y así sucesivamente. ¿Cuáles son los honorarios del dentista?
51. Un hombre jugó durante 8 días y cada día ganó $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el día anterior. Si el 8º día ganó Bs. 1 ¿cuánto ganó el primer día?
52. ¿Cuántos términos tiene una progresión geométrica, donde los extremos son $\frac{1}{3}$ y 243, cuya razón es 3?
53. Si en una progresión la suma de los tres primeros términos es 7 y la suma de los 4 primeros términos es 15. Calcula el octavo término.
54. Tres números están en progresión geométrica. El 2º es 32 unidades mayor que el 1º, y el 3º es 96 unidades mayor que el 2º. Halla estos números.
55. Si el 5º y 7º término de una PG, son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{16}$ respectivamente. Encuentra la progresión de 10 términos.
56. Halla el valor de x de modo que los tres términos: $:: x+2 : 4x-2 : 6x+2$ formen una progresión geométrica.
57. Halla tres números que formen una PG cuya suma sea 21 y cuyo producto sea 216.
58. El producto del 3o y el 7o términos de una progresión geométrica de 9 términos es $\frac{1}{216}$. ¿Cuál es el producto del primer término por el último?
59. En una progresión geométrica la suma del primer y segundo término es 6, la suma del segundo con el tercer término es 3, calcula el quinto término,

MATEMÁTICA FINANCIERA

Interés simple

1. Halla el capital que se formará al cabo de 2 años imponiendo Bs. 50000 a interés compuesto del 2% acumulándose los intereses al capital cada seis meses.
2. Halla el capital final y el interés que resultan si se imponen Bs. 280000 durante 8 años a interés compuesto del 5% acumulándose los intereses al capital cada tres meses.
3. Halla la cantidad de dinero que se debe imponer a interés compuesto de 6%, acumulándose los intereses al capital cada tres meses, para obtener Bs. 200000 dentro de 10 años.
4. Halla el interés compuesto y el capital final si se depositan Bs. 250000 durante tres años al 4% acumulándose trimestralmente.
5. Halla el monto final que se debe depositar en un banco para constituir un capital de Bs. 200000 al cabo de 6 años, sabiendo que dicho banco paga el 6% de interés compuesto acumulándose los intereses cada tres meses.
6. ¿En cuánto se convertirán Bs. 800 al 3% anual, en 2 años capitalizando los intereses por semestres? 7. ¿En cuánto se convertirán Bs. 900 al 4% anual, en 1 año capitalizando los intereses por trimestres?
8. Una suma prestada al 5% anual de interés compuesto se ha convertido en Bs. 97260 en 4 años, ¿cuál fue la suma prestada?
9. Se presta cierta suma al 4.5% anual y en 6 años se convierte en Bs. 189350, ¿cuál fue la suma prestada?
10. Una suma prestada al 8% anual de interés compuesto durante 7 años se ha convertido en Bs. 5419816, ¿cuál fue la suma prestada?
11. Hace 4 años Aneth pidió un préstamo de Bs. 7000 y la cantidad pagada al ter minar el período del préstamo han sido Bs. 9500, ¿qué tipo de interés se aplicó?
12. Luego de 3 años, una entidad financiera ha pagado en intereses la cantidad de Bs. 840 a una persona por haber depositado un plazo fijo, la tasa de interés fue del 2% anual, ¿cuál será el capital inicial con que se hizo el depósito?

Tasa, tiempo, capital, valor, valor final, valor actual, y descuentos a interés simple

13. A una mercancía con precio inicial de Bs. 45000 se le han aplicado tres descuentos sucesivos: 4%, 8% y 10%; ¿cuál es su valor final?
14. Un automóvil fue adquirido con un costo de Bs. 15500, en un remate con dos descuentos sucesivos del 2% y 3%; ¿cuál es su valor final?
15. Determina el valor actual y el descuento racional al 1 de marzo de un documento por Bs. 7500, pagadero el 12 de abril, considerando una tasa de interés simple del 2.5% anual.
16. Una computadora Kipus que se vende en los mercados comerciales con un valor de Bs. 6500 se le aplicaron dos descuentos sucesivos de 3% y de 4.5%. ¿Cuál fue su precio final?

Interés compuesto en actividades financieras

17. Halla el capital que se formará al cabo de 2 años imponiendo Bs. 50000 a interés compuesto del 2% acumulándose los intereses al capital cada seis meses.
18. Halla el capital final y el interés que resultan si se imponen Bs. 280000 durante 8 años a interés compuesto del 5% acumulándose los intereses al capital cada tres meses.
19. Halla la cantidad de dinero que se debe imponer a interés compuesto de 6%, acumulándose los intereses al capital cada tres meses, para obtener Bs. 200000 dentro de 10 años.
20. Halla el interés compuesto y el capital final si se depositan Bs. 250000 durante tres años al 4% acumulándose trimestralmente.
21. Halla el monto final que se debe depositar en un banco para constituir un capital de Bs. 200000 al cabo de 6 años, sabiendo que dicho banco paga el 6% de interés compuesto acumulándose los intereses cada tres meses.
22. Halla el interés generado en un plazo fijo de Bs. 15000, al 3% anual de interés compuesto, al cabo de 5 años.
23. ¿Cuántos años debe estar un depósito de Bs. 8000, a un interés compuesto del 5% anual para que se convierta en Bs. 10000?
24. Por un préstamo de Bs. 19000 hemos tenido que pagar Bs. 21200 al cabo de un año, ¿cuál es la tasa de interés que nos cobrado la institución financiera?
25. Adolfo y Jenny invierten un capital de Bs. 250000 a una tasa de interés anual del 6% durante cierto tiempo, generando intereses de Bs. 10000, ¿cuánto tiempo ha estado invertido?
26. En cuánto se convertirán Bs. 918.54 al 4% anual de interés compuesto en 1 año capitalizando los intereses por trimestres.

LA LÓGICA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

Proposiciones simples y compuestas

Escribe la negación de las siguientes proposiciones:

1. 63 es un número compuesto
2. Algunos números impares son primos.
3. Si 3 es factor de 9, 9 es factor de 3.
4. Nadie quiere viajar
5. 2 es número par.
6. $3x+2=1$

Si p : 3 es un número primo, q : 5 es un número impar, r : 15 es múltiplo de 3 y de 5, encuentra el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

7. $\sim r$
8. $q \wedge r$
9. $\sim r \vee q$
10. $\sim q \leftrightarrow \sim p$
11. $p \wedge r \wedge q$
12. $p \rightarrow r$
13. $p \vee \sim r$
14. $r \leftrightarrow q$

Operaciones proposicionales

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones, si $p \equiv V,\ q \equiv F,\ r \equiv F$

15. $\sim [p \rightarrow (q \leftrightarrow \sim r)] \equiv$
16. $p \wedge \sim (q \leftrightarrow \sim r) \equiv$
17. $\sim q \wedge \sim (p \vee \sim r) \equiv$
18. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \equiv$
19. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \vee r) \equiv$
20. $[p \rightarrow (r \rightarrow q)] \leftrightarrow (r \leftrightarrow \sim p) \equiv$
21. $\sim [\sim p \rightarrow (r \rightarrow \sim q)] \leftrightarrow \sim (r \leftrightarrow q) \equiv$
22. $\left[p \wedge (p \vee r)\right] \leftrightarrow \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right] \equiv$

Tablas de valor de verdad

Construye tablas de verdad para las siguientes proposiciones:

23. $q \rightarrow (p \leftrightarrow \sim r)$
24. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$
25. $\left[p \wedge (q \rightarrow r)\right] \leftrightarrow (p \vee q)$
26. $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
27. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
28. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\right]$

Clasificación de fórmulas proposicionales (tautología, contradicción y contingencia)

Clasifica las siguientes proposiciones en tautología, contradicción o contingencia:

29. $\sim [(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)]$
30. $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
31. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
32. $[(q \vee p) \wedge \sim (p \wedge q)] \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$
33. $(p \rightarrow q) \vee \sim (\sim q \rightarrow \sim p)$
34. $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \rightarrow (q \vee r)$

Equivalencia lógica

Establece la equivalencia lógica de las siguientes proposiciones:

35. $(p \wedge q) \equiv \sim (p \rightarrow \sim q)$
36. $\sim (p \rightarrow q) \equiv (p \vee \sim q)$

Álgebra de proposiciones

Simplifica las siguientes proposiciones:

37. $p \rightarrow (p \vee \sim q) \equiv V$
38. $(p \vee q) \rightarrow \sim p \equiv \sim p$
39. $[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p) \equiv q$
40. $(p \wedge q) \vee [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q)$
41. $p \rightarrow \left[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)\right] \equiv V$
42. $[p \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \rightarrow (q \rightarrow \sim p) \equiv V$
43. $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p \equiv p \vee q$
44. $[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p) \equiv q$

(Ejercicios y problemas recopilados)

BIBLIOGRAFÍA

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN, (2023). Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz – Bolivia.
- Ministerio de Educación. “Prontuario de mis aprendizajes MATEMÁTICA [En proceso de Publicación].” (2023).
- TINTAYA CONDORI, L. (2015). Matemáticas 4, Editorial Bruño – Bolivia.
- Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). Matemáticas simplificadas. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación de México.
- LONDOÑO, N. & BEDOYA, H. (2003), Matemática Progresiva 4, Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.
- OLMOS MILLÁN, A. & MARTÍNEZ C, L. C. (2003), Matemática Práctica 4, Editorial Voluntad S.A. – Colombia.
- DICCIONARIO DE MATEMÁTICAS (2000), Editorial Cultural S. A. Polígono Industrial Arroyomolinos – España.
- LAURA VALENCIA, R. 2023. Compilado de Matemática 4, texto inédito.
- Allen R. A. (2008). Algebra Intermedia. Ed. Pearson. México.
- Arya L. (2009). Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Ed. Pearson. México.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **4TO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Rolando Miranda Quispe

Física
Miguel Angel Cayo Mendoza

Química
Ruth Liz Aura Cuani Aguada

Lengua Castellana
Yeny Aruquipa Saucedo

Ciencias Sociales
Erick Eduardo Cutipa Garcia

Matemática
Sergio Porfidio Mendoza Suarez

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía
Romer Carmelo Pita Gomez

Física
Ted Aderly Valdez Alvan

Química
Freddy Francisco Bautista Mamani

Lengua Castellana
Jazmin del Carmen Cañasto Quisbert

Ciencias Sociales
Nilton Pizaya Blanco

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Ana Laura Rojas Paca

Física
Rosario Alejandra León Vallejos

Química
Juan Victor Mamani Yupanqui

Lengua Castellana
Lidia Nina Cruz

Ciencias Sociales
Erick Eduardo Cutipa Garcia

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD

rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN