ÁREA:

MATEMÁTICA

1er

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Texto de aprendizaje. 1er año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Olga Marlene Tapia Gutiérrez
Directora General de Educación Primaria
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria
Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Franz Javier Del Carpio Sempértegui

DIAGRAMACIÓN:
Angela Libertad Callejas Mamani

Depósito legal:
4-1-26-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2024). Texto de aprendizaje. 1er año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

LOS NÚMEROS ENTEROS Y SU ORIGEN EN NUESTRO CONTEXTO

PRÁCTICA

El Estado Plurinacional de Bolivia es diverso y presenta diferentes realidades, algunas de esas realidades se observan en las imágenes. Identifica las imágenes que represente a tu contexto y conversa, junto a tu maestra o maestro, sobre las características cuantitativas que encuentren en ellas.

En el altiplano, la sequía es una problemática latente; los habitantes tienen que excavar pozos cada vez más profundos respecto al nivel del suelo y extraer el agua por diferentes mecanismos, como se observa en la imagen de la derecha.

A continuación, de la imagen registra algunas medidas aproximadas usando números sin decimal; por ejemplo:

Profundidad del pozo = 5[m] o en centímetros 500[cm].

- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..

Personas mirando el pozo

Fuente: *fotografiado por Daniel Huarachi*

Pahuchi adaptado para un aula

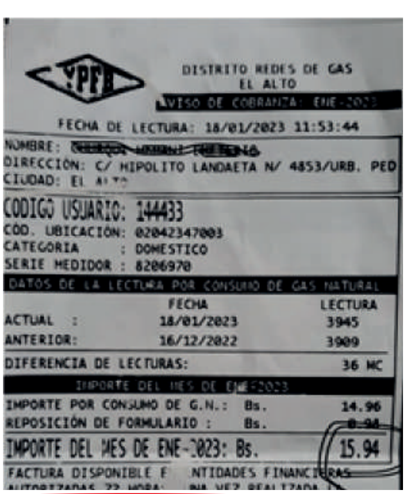
Fuente: *fotografía tomada por Rogelio Mamani*

En áreas rurales del oriente boliviano se construyen pahuichis por los habitantes de esa región; una vez construidas son habitadas por las familias. Estas construcciones varían en sus medidas, pero tienen ciertas características comunes, como se observa en la imagen de la izquierda.

A continuación, de la imagen registra los datos cuantitativos aproximados con números sin decimal; por ejemplo:

- Orqones = 4[m] o en unidad de 400[cm]. (altura)
- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..

Factura de GAS



YPFB
DISTRITO REDES DE GAS
EL ALTO
AVISO DE COBRANZA: ENE-2023
FECHA DE LECTURA: 18/01/2023 11:53:44
NOMBRE: [redacted]
DIRECCIÓN: C/ HIPOLITO LANDAETA N/ 4853/URB. PED
CIUDAD: EL ALTO
CODIGO USUARIO: 144433
CÓD. UBICACIÓN: 02042347003
CATEGORIA : DOMESTICO
SERIE MEDIDOR : 8206970
DATOS DE LA LECTURA POR CONSUMO DE GAS NATURAL

	FECHA	LECTURA
ACTUAL :	18/01/2023	3945
ANTERIOR:	16/12/2022	3909
DIFERENCIA DE LECTURAS:		36 MC

IMPORTE DEL MES DE ENE-2023
IMPORTE POR CONSUMO DE G.N.: Bs. 14.96
REPOSICIÓN DE FORMULARIO : Bs. 0.98
IMPORTE DEL MES DE ENE-2023: Bs. 15.94
FACTURA DISPONIBLE F NTIDADES FINANCIERAS

Los gastos por servicios básicos de una familia pueden variar mensualmente en el monto económico y en la cantidad de servicios. En la imagen de la izquierda se observa una factura.

A continuación, registremos algunos gastos aproximados por otros servicios usando números sin decimal.:

- Servicio por el gas = 15 Bs.
- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………..

1. El origen de los números enteros

a) Historia de su origen

En la antigüedad, el comercio y su registro hicieron surgir la necesidad de tener números diferentes a los números naturales, que representen una deuda o pérdida económica de un negocio. Por un periodo extenso, los números negativos fueron nombrados como números deudos o absurdos, es decir, no fueron aceptados (López Sancho, Moreno Gómez, Gómez Díaz, & López Álvarez, 2004, págs. 8-9).

Hacia el siglo VII dC los hindúes fueron usando los números positivos, negativos y el cero para distinguir deudas y saldos favorables de un negocio; así, los negativos representaban deudas o débitos. Por otro lado, los chinos usaban dos colores para distinguir los negativos y positivos, mientras que los griegos representaban las cantidades negativas como restas indicadas(Torres Ninahuanca, pág. 8).

MICHAEL STIFEL

(1487 – 1567)

Matemático Alemán, fue quien difundió la simbología de (+), (-) que acompañan a los números positivos y negativos respectivamente.

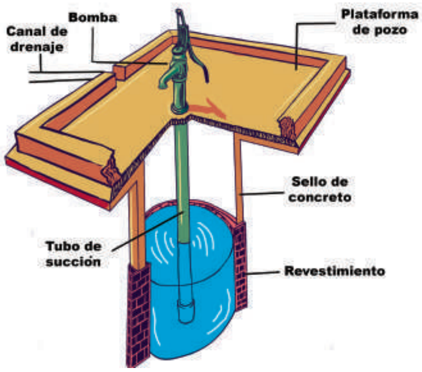
Después de mucho tiempo de no ser aceptado formalmente los números enteros, fue Leonard Euler en su escrito Anteitung Zur Algebra (1770) quien se esforzó en darle formalidad con algunas demostraciones matemáticas (Torres Ninahuanca, pág. 10).

b) Los números enteros en nuestro contexto

En nuestra realidad se observa situaciones descritas en el momento metodológico de la teoría. A continuación, analizamos los conceptos que encierra cada situación, los cuales revelan la necesidad de tener un conjunto diferente a los números naturales. Luego serán denominados el conjunto de los números enteros.

Realidad 1: concepto de "sobre o bajo un nivel de referencia".

Si al pozo le colocamos una bomba de agua manual, entonces tendremos un esquema como la imagen de la derecha; en ella se observa.



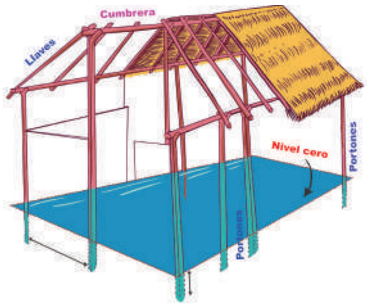
- Un nivel de referencia (número cero): es la plataforma del pozo por estar al nivel de la superficie terrestre.

- Medidas bajo el nivel de referencia: tubo de sección, profundidad del pozo, nivel del agua y otros. Estas medidas usarán números con signo (-) por delante.

- Medidas sobre el nivel de referencia: la bomba, el cerco del pozo y otros registrarán medidas con números precedidos por el signo (+)

Realidad 2: concepto de "sobre o debajo de un nivel de referencia".

El oriente boliviano guarda una cultura muy particular en cuanto a su arquitectura se refiere. Así, los Pahuichis son edificaciones familiares hechas con madera principalmente, sus portones (orqones) son plantados en el suelo para resistir la estructura. En la figura de la derecha tenemos un esquema de su construcción.



- Definimos un nivel de referencia (nivel cero): piso o suelo terrestre.

- Medidas bajo el nivel de referencia: plantación del orqon o portones bajo la tierra. Esta medida usará números con el signo (-) adelante.

- Medidas sobre el nivel de referencia: los portones sobre el nivel del suelo, la cumbrera, las llaves y otros.

Nota: En un modelo más detallado se tiene más medidas sobre el nivel del piso.

Realidad 3: concepto de "ingreso y gasto".

Algunos gastos familiares pueden reflejarse en el pago de los servicios, como los servicios de agua, energía eléctrica, gas y otros:

- El nivel de referencia aceptado (número cero) es: 0 Bs.

- Los ingresos obtenidos por las familias en trabajos, negocios o prestación de servicios profesionales son positivos.

- Los gastos económicos por pago de vivienda, alimentación y otros evidenciados en facturas a pagar, son negativos.

En geografía y ramas afines, el nivel de referencia aceptado es "el nivel del mar"; entonces, la altitud del pico más elevado de Bolivia como es el Sajama con 6542 m. sobre el nivel del mar, es una cantidad positiva.

Es frecuente escuchar 8°C (grados centígrados) sobre cero y temperaturas bajas de 2°C bajo cero, esas cantidades serán positivas y negativas respectivamente.

Actividad

A continuación, escribimos tres situaciones o realidades en que se pueden usar los números con signo (+), (-) y el cero.

....

....

CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS

- ***Es un conjunto infinito:*** *tiene infinitos números positivos y negativos.*
- ***Tiene un orden:*** *está ordenado de menor a mayor.*
- *Cada elemento posee un anterior y un posterior.*
- *El cero no tiene signo.*

2. El conjunto de los números enteros

Para la construcción de los números enteros nos apoyaremos en los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, asignándoles los signos + o – se formarán los números positivos y números negativos conforme a las situaciones o fenómenos que representan. Así, una cantidad negativa representará una cantidad bajo el nivel de referencia; también representará gastos económicos o pérdida y, un número positivo representará una cantidad sobre el nivel de referencia, ingresos o ganancias. De modo análogo, los números positivos y negativos asociarán la idea de una temperatura encima o por debajo de un nivel referencia. El nivel de referencia se denomina cero.

Los números enteros son los números naturales que están precedidos por el signo + o – y el cero, es decir, son el conjunto de números positivos, negativos y el cero. Está simbolizado por $\mathbb{Z}$ y se representa por:

$$\mathbb{Z}_1 = \{\ldots -5, -4, -1, 0, +1 +2, +3, +4, +5\ldots\}$$

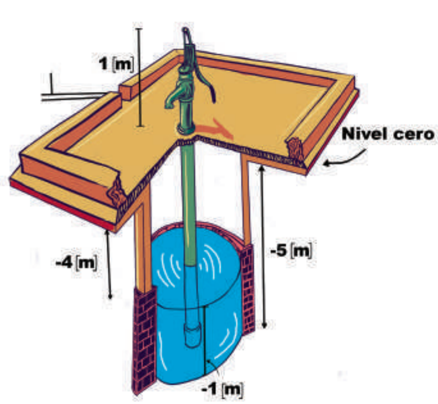
En la recta numérica los números enteros estarán dispuestos como sigue

$$\underbrace{-3 \quad -2 \quad -1}_{\text{negativos}} \quad \underset{\text{cero}}{0} \quad \underbrace{+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4}_{\text{positivos}}$$

Ejemplo: Describiendo la realidad con los $\mathbb{Z}$ (matematizando)

En los siguientes casos de la realidad, descritos anteriormente, cuantifica sus características con números positivos y negativos.

Realidad 1: los pozos en el Altiplano



SOLUCIÓN

Bomba Manual: + 1 m de altura

Nivel del suelo: 0

Profundidad del pozo: - 5 m de profundidad.

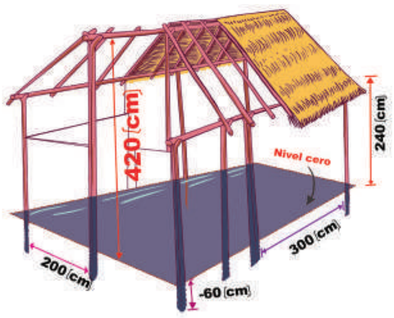
Profundidad antes del nivel de agua: - 4 m de profundidad

Nivel del agua bajo el suelo: - 1 m en la profundidad

El conjunto de números enteros del sistema sería:

$$\mathbb{Z} = \{-5, -4, -1, 0, +1\}$$

Nota: Notemos que el conjunto formado $\mathbb{Z}_1$ es parte del universo de los enteros, entonces, $\mathbb{Z}_1 \subset \mathbb{Z}$. Puede tener otras medidas a ser registrado.



Realidad 2: pahuichi(s) en el área rural del oriente.

SOLUCIÓN

Orqon plantado: - 60 (cm) bajo el suelo

Nivel del suelo: 0

Altura del Orqon encima del suelo: +240 (cm)

Altura del Orcon hasta la cumbrera: +420 (cm)

El conjunto de números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \{-60, 0, +240, +420\}$$

Nota: este ejemplo de solución es una simplificación de la realidad, por lo que se puede tener otras medidas adicionales del pahuichi.

Realidad 3: Los estudiantes de primero de secundaria recaudaron fondos para realizar una obra social, ayudar con los pagos de los servicios básicos de un compañero con dificultad económica.

Ítems de gastos o ingresos	Ingresos (Bs)	Gastos (Bs)
Cuotas	+100 Bs	
Pago del servicio de gas.		- 15 Bs
Pago del servicio de eléctrico.		- 40 Bs
Premio del campeonato	+120 Bs	

Fuente: *elaboración propia.*

SOLUCIÓN

Los ingresos están formados por: cuotas= +100 Bs, premio = +120 Bs

Los gastos están formados por pagos: gas= -15 Bs,

electricidad= - 40 Bs.

Entonces el conjunto de números enteros está formado por:

$$\mathbb{Z} = \{-40, -15, +100, +120\}$$

Actividad

Investigamos sobre la estructura de la geósfera, luego formamos el conjunto de números enteros con las medidas cuantitativas y las temperaturas que existe en cada capa.

....

....

....

3. Representación de los números enteros en la recta numérica

Los números enteros se representan con un punto en la recta numérica. Para representar un número entero debemos identificar al número en la recta numérica y luego procedemos a colocar un punto notorio sobre dicha recta.

Ejemplo: representación de los $\mathbb{Z}$

1) Represente los números - 4, +1, 0, - 5, -1 en la recta numérica

Solución:

CERO

Es muy importante encontrar al número cero, porque separa a los positivos de los negativos.

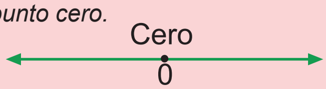
$$\mathbb{Z}^{+} = \{+1, +2, +3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}^{-} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$$

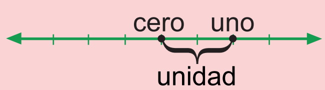
¿CÓMO SE CONSTRUYE LA RECTA NUMÉRICA?

- Trazamos una recta horizontal cualquiera.

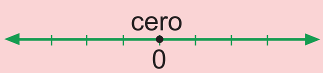
- En un lugar sobre la recta, fije el punto cero.



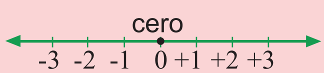
- A una distancia conveniente desde el cero, escoja otro punto, el cual será la unidad para graduar la recta.



- Gradúe la recta hacia la derecha del cero y hacia su izquierda con la unidad escogida.



- Anote los números positivos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda



SOY UN NÚMERO NEGATIVO

¿seré mayor o menor que el cero?

Entonces: - 4<0

Recuerda

$b > a$. Se lee: b es mayor que a

$a > b$. Se lee: a es mayor que b

2) Represente los números $-60, +240, +180, +420$

Solución:

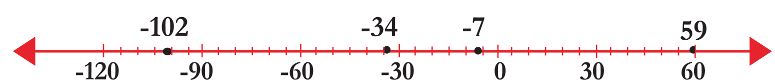
Nota: Por convenio, el signo (+) se sobreentiende, así +60 es igual a 60

3) A continuación se presentan los puntos de fusión y de ebullición de algunos elementos químicos, represente en la recta numérica.

	P. fusión	P. ebullición	Estado a temperatura ambiente
Cl_2	-102 °C	-34 °C	GAS
Br_2	-7 °C	59 °C	LÍQUIDO

Fuente: *www.quimitube.com*

Solución:



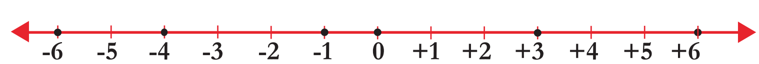
Orden de los números enteros.

Observando la recta numérica evidenciamos que: todo número que está a la derecha es mayor que cualquiera de su izquierda. Entonces, un número en la recta numérica a la derecha del otro es mayor. Con el anterior criterio podemos ordenar dos o más números enteros de forma creciente o decreciente.

Ejemplo: Ordenando los $\mathbb{Z}$

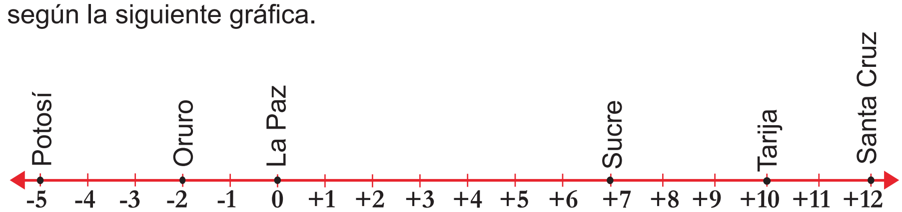
1) Ordena los siguientes números de forma creciente -6, +6, -1, 0, +3, -4

Solución: primero representamos los números dados en la recta numérica, luego escogemos el menor, es decir, el número más a la izquierda de todos; finalmente escribimos el orden haciendo uso del signo menor que (<).



el orden es: $-6 < -4 < -1 < 0 < +3 < +6$

2) Una estudiante registró las temperaturas en diferentes momentos en las capitales de cada departamento, se nota que registró las temperaturas más bajas. Ordena los departamentos desde el más frío hasta el más caluroso, según la siguiente gráfica.



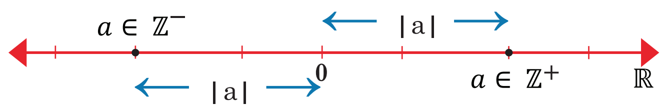
Solución: El orden sería: Potosí, Oruro, La Paz, Sucre, Tarija y Santa Cuz; porque:

$$-5\ °C < -2\ °C < 0\ °C < 7\ °C < 10\ °C < 12\ °C$$

Nota: Debido a que el cero está a la derecha de todos los negativos, entonces el cero es mayor a todos los negativos.

Módulo o distancia: Valor absoluto

La distancia que existe entre un número y el cero se conoce como valor absoluto y se simboliza $|a|$; donde es un número o cantidad cualquiera. Gráficamente queda representado por:

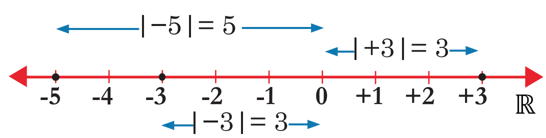


Notemos que el valor absoluto de dos números enteros opuestos, es el mismo, es decir: |-3|=|+3|

Ejemplo: distancia del origen (cero) a un $\mathbb{Z}$.

1) Hallar la distancia o valor absoluto de -5, -3 y +3.

Solución gráfica



Solución analítica

$|-3| = 3$

$|+3| = 3$

$|-5| = 5$

VALORACIÓN

Actividad

Describimos la importancia de los conceptos aprendidos relacionándolos con sus usos en nuestro contexto. También podemos describir una iniciativa en el que puede usar los $\mathbb{Z}$ o asociar los conceptos aprendidos en alguna rama de la ciencia y tecnología (sólo uno de ellos).

....

....

PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: De acuerdo a su contexto, pregunta a una persona mayor las medidas aproximadas de un pozo, de un pahuichi o de otra iniciativa donde se pueda aplicar todo lo aprendido. Una vez con los datos y un esquema dibujado: elaboramos el conjunto de los $\mathbb{Z}$, luego represente en la recta numérica, ordene de mayor a menor.

Producción teórica: Resuelva los siguientes ejercicios y problemas.

Ejercicio 1: Exprese en conjuntos de $\mathbb{Z}$ las siguientes situaciones;

a) El 2do sótano de un edificio.

b) Un comerciante tuvo un gasto de 540 Bs y tiene una deuda de Bs. 230

c) Un submarino está a 730 km bajo el nivel del mar.

d) Heráclito falleció en el año 430 aC

Ejercicio 2: Represente en la recta numérica los siguientes $\mathbb{Z}$

a) +5, - 4, +2, 0, -7

b) Los enteros mayores a - 4 y menores a +5

c) +780, +341, - 20, 0

Ejercicio 3. Ordena:

a) - 3, 0, +3, +7, - 5

b) Registra las temperaturas mínimas de los departamentos y organiza del más frío, al menos frío.

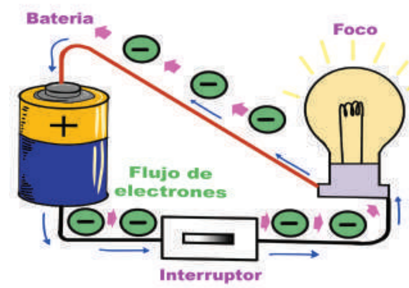
Ejercicio 4: Encuentre y grafique los valores absolutos:

a) $|-8|, |+9|, |+8|, |-1|\ y\ |0|$

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS APLICADOS A LA COTIDIANIDAD

PRÁCTICA

Realizamos un circuito simple para encender un foco de 1,5 o 3 voltios con pilas (batería) e investigamos sobre el flujo de electrones.



Materiales: Una porta pilas, dos pilas AA (baterías), porta foco, foco de 1,5 (para una pila AA) o 3 voltios (para dos pilas AA), interruptor y cable.

Procedimiento: Agarramos un trozo de cable y conectamos a un extremo del portafoco y el otro extremo a un terminal del interruptor, luego, otro trozo de cable conectamos desde el otro terminal del interruptor al porta pilas. Desde el segundo conector del portafoco conectamos un cable hasta el otro terminal del porta pilas. Vea la imagen de la derecha.

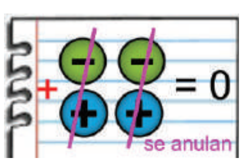
Modelo experimental: Jugando con las cargas (+) y (-)

Como se conoce, un electrón tiene carga negativa y un protón tiene carga positiva y sus cantidades están en un equilibrio ideal dentro del átomo. A nivel subatómico en la materia, cuando un átomo pierde electrones, entonces queda cargado positivamente; si el átomo gana electrones, entonces ese cuerpo queda cargado negativamente. Consideremos también que todos los cuerpos tienden a estar en estado neutro, igual, protones y neutrones.

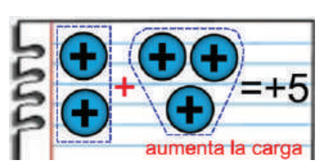
Con lo anterior podemos generar un modelo ideal de reunir (sumar) cargas negativas y positivas con las siguientes premisas:

- Las cargas positivas y negativas reunidas se colocan en estado neutro, si están en cantidades iguales; entonces se anotará con el cero ($0 \in \mathbb{Z}$).

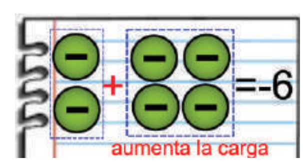
- Las cargas iguales reunidas aumentan su cantidad y se anotará con un número entero positivo o negativo, según sus cargas.



(1)



(2)



(3)

Actividad

Con un compañero de curso, recortamos varios círculos pequeños y márcalos como cargas positivas y negativas, luego, reproducimos los modelos (1,2,3) de la imagen anterior y realicen otros modelos de suma.

- ¿Qué sucede cuando reunimos cargas iguales?

....

- ¿Qué significa sumar cargas diferentes?

....

- Escribimos al menos tres conclusiones

....

TEORÍA

1. Adición y sustracción de números enteros

a) Suma de números enteros

La suma de dos o más números enteros es una operación binaria bien definida en el mismo conjunto, es decir, adicionar un número entero a otro es hallar como resultado un tercer número, también entero. El resultado de la suma dependerá si los números sumados son del mismo signo o de diferentes signos, así tenemos:

- Para **sumar números enteros con igual signo,** se suma sus valores absolutos y se mantiene el mismo signo en el resultado.
- Para **sumar números enteros con diferente signo,** se restan sus valores absolutos como si fuesen números naturales y el signo del resultado es el del mayor valor absoluto.

Ejemplo: Sumar $(+2)$ y $(+3)$

Son números del mismo signo (+), entonces se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo en el resultado.

Cálculo Auxiliar

$$(+2)+(+3)=+5$$

signos

iguales (+)

$$|+2| = 2$$
$$|+3| = 3$$
$$5$$

Sume sus valores absolutos

Nota: compare el resultado con el modelo (2) del momento metodológico de la práctica

Ejemplo: Sumar (-2) y (-4)

Son números con igual signo (-), entonces se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo en el resultado.

Cálculo Auxiliar

$$(-2)+(-4)=-6$$

signos

iguales (−)

$$|-2| = 2$$
$$|-4| = 4$$
$$6$$

Sume sus valores absolutos

Nota: compare el resultado con el modelo (3) del anterior momento metodológico

Ejemplo: Resolver $(-25)+(+14)=$

Son números con diferentes signos, entonces se restan sus valores absolutos y el resultado lleva el signo del mayor valor absoluto.

Cálculo Auxiliar

$$(+14)+(-25)=-11$$

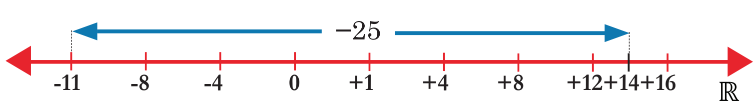
signos diferentes

$$|-25|>|14| \Longrightarrow (-)$$

$$|+14| = 14$$
$$|-25| = 25$$
$$11$$

Reste los valores absolutos

Alternativamente, se puede efectuar la suma en la recta real como sigue



b) Resta de números enteros

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo, así queda transformada la resta, en suma.

$$a - b = a + (-b)$$

minuendo

sustraendo

suma

opuesto del minuendo

Ejemplo: Resolver (- 20) - (+ 4)

Se transforma en suma con el opuesto del sustraendo, luego se resuelve dicha suma.

suma

$$(-20)-(+4)=(-20)+(-4)$$
$$=-24$$

sustraendo

$$op(-4) = +4$$ opuesto

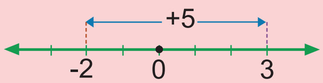
$$|-20| = 20$$
$$|-4| = 4$$
$$= 24$$

Sume los valores absolutos

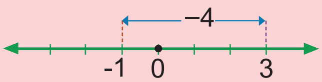
SUMA EN LA RECTA NUMÉRICA

En la recta se ubica al primer sumando, nos desplazamos a la derecha si se añade una cantidad positiva y nos desplazamos a la izquierda si añadimos una cantidad negativa.

a) (-2) +(+5) = 3



b) (+3) +(-4) =-1



Cuando precede (+)

$+(-2+3-4)=-2+3-4$

Cuando precede ()

$-(-2+3-4)=-2+3-4$

Ejemplo:

$-7+(-5-3+4)-(-8+2)$

$=-7-5-3+4+8-2$

$=-7-5-3-2+4+8$

$=-17+12$

$=-5$

Para resolver suma y resta combinadas, debemos convertir cada resta en suma con el opuesto de su sustraendo, luego se suma los positivos por un lado y los negativos por el otro aprovechando la propiedad conmutativa; finalmente se resuelven dichos resultados parciales.

Ejemplo: Resolver $(-\mathbf{3})-(+\mathbf{6})+(-\mathbf{4})+(+\mathbf{24})-(+\mathbf{12})+(+\mathbf{5})$

Solución: Se transforma en suma cada resta (escrito con rojo), luego se suman los positivos y negativos por separado para luego resolver los resultados anteriores.

$$(-3)-(+6)+(-4)+(+24)-(+12)+(+5)=-3+(-6)+(-4)+(+24)+(-12)+(+5)$$
$$=(-25)+(+29)$$
$$=4$$

suma de negativos
$(-3), (-6), (-4), (-12)$

suma de los positivos
$(+5), (+24)$

el signo (+) se sobreentiende, el menos (−) se escribe

2. Multiplicación y división

El producto de dos o más números es otro número entero que resulta de aplicar la ley de signos y multiplicar los números como números naturales.

Ejemplo: Resolver a) $(+10)\cdot(-6)\cdot(-2)=$ b) $(-13)\cdot(+10)=$

Aplicamos la ley de signos y multiplicamos los números.

a) $(+10)\cdot(-6)\cdot(-2)=+(10\cdot 6\cdot 2)$
$(-)$ $+$
$=+120$

b) $(-13)\cdot(+10)=-(13\cdot 10)$
ley de signos
$(-)\cdot(+)\cdot(-)$
$=-130$

Ejemplo: Aplica la propiedad asociativa y conmutativa con (-7), (-5) y (-2)
Para asociar se usará [ ].

Asociativa	Conmutativa
$[(-7)\cdot(+5)]\cdot(-2)=(-7)\cdot[(+5)\cdot(-2)$	$(-7)\cdot(+5)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-7)\cdot(+5)$
$(-35)\cdot(-2)=(-7)\cdot(-10)$	$(-35)\cdot(-2)=(+14)\cdot(+5)$
$70=70$	$70=70$

Ejemplo: Aplica la propiedad distributiva y resuelva:
Distribuir -3, luego resolver las sumas y restas.

$$-3\cdot(-12+20-4+1-2)=+36-60+12-3+6$$
$$=-63+54$$
$$=-9$$

- propiedad distributiva
- suma de signos iguales

- La división de números enteros queda definido por:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z},\exists q\Longrightarrow a\div b=q\iff b\neq 0\ \wedge a=b\cdot q$$

Queda claro que la división entre cero no está definida.

Para dividir dos números enteros, se aplica la ley de signos y se dividen sus valores absolutos de los números dados y queda definido como:

Ejemplo: Resuelva a) $(-40)\div(+5)=$ b) $(+2023)\div 0=$

Aplique la ley de signos, divida los números como números naturales.

a) $(-40)\div(+5)=-8$ b) $(+2023)\div 0=?$ no está defindo

nótese que la división entre cero no tiene resultado por no tener sentido.

La división en los números enteros no goza de la propiedad de clausura, no es conmutativo tampoco es asociativo.

EN LA MULTIPLICACIÓN

+·+=+
+·-=-
-·+=-
-·-=+

EN LA DIVISIÓN

+÷+=+
+÷-=-
-÷+=-
-÷-=+

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

$\forall\ a,b,c\in\mathbb{Z}$, *se cumple*
Clausura: $a+b\in\mathbb{Z}$
como: $(-5),(+4)\in\mathbb{Z}$
$\Longrightarrow(5)-(+4)=-20\in\mathbb{Z}$
Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$
$(-7)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-7)$
$+14=+14$
Asociativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
$(-3)\cdot[(+4)\cdot(-2)]=[(-3)\cdot(+4)]\cdot(-2)$
$(-3)\cdot(-8)=(-12)\cdot(-2)$
$24=24$
Distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
$(-3)\cdot(-4+2)=12-6+3$
$=15-6$
$=9$
Elemento absorbente: $a+0=0+a$
Ejemplo: $(-3)\cdot 0=0\cdot(-3)=0$
Elemento neutro: $a\cdot 1=1\cdot a=1$
Ejemplo: $(-3)\cdot 1=1\cdot(-3)=-3$

Las operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación, división con o sin signos de agrupación sigue el orden descrito a la derecha.

Ejemplo: Resuelva $10 \cdot (-2) - (-12+3) : 3 + [(-20+3)\,(-2+1)] =$

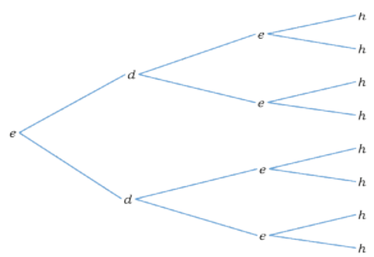
Comenzamos con las operaciones dentro de las agrupaciones, luego los productos y divisiones para finalmente las sumas y restas.

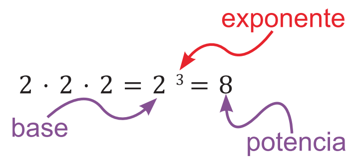
$10 \cdot (-2) - (\underbrace{-12+3}) : 3 + [(\underbrace{-20+3})\,(-2+1)] =$	• ejercicio dado
$= 10 \cdot (-2) - (-9) : 3 + [(-17)\,(-1)]$	• operando dentro del paréntesis
$= 10 \cdot (-2) - (-9) : 3 + (+17)$	• operando dentro del corchete
$= -20 - (-3) + (+17)$	• multiplicando y dividiendo
$= -20 + 3 + 17$	• eliminando ( ) y [ ]
$= -20 + 20$	• suma de signos iguales
$= 0$	• suma de opuestos

Nota: si hay una o más operaciones dentro del ( ), [ ], { }, entonces se dice que agrupa, así (-30÷2+5) es agrupación y -(-4) no agrupa, sólo aclara que el 4 tiene signo negativo además evita el choque de signos.

3. Potenciación y radicación

a) Potenciación: la potencia es la multiplicación repetida de un mismo número, puede representarse con el diagrama de árbol y sus partes son:





Ejemplo: Resuelva a) $(-4)^3 =$ b) $(-2)^4 =$

Multiplicando bases tantas veces como el exponente indica, tenemos

a) $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$
$= -64$

b) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$
$= 16$

Para una solución abreviada de una potencia se considera su comportamiento de signos, esto depende del signo de su base y la potencia par o impar.

Ejemplo: Resuelva a) $(-10)^4 =$ b) $(-1)^{2025} =$

Multiplicando bases tantas veces como el exponente indica, tenemos

a) $(-10)^4 = 10000$ "exponente par" b) $(-1)^{2025} = -1$ "exponente impar"

Algunas operaciones requieren el uso de las propiedades de la potenciación, como los siguientes ejercicios

Ejemplo: Resuelva a) $M = \{[(-2)^2]^3\}^4 \cdot [(-2)\cdot(-1)]^{-20}$

Identifica las propiedades y aplica según queda explicado a continuación

$= \{[(-2)^2]^3\}^4 \cdot [(-2)\cdot(-1)]^{-20}$	• ejercicio dado
$= (-2)^{24} \cdot (-2)^{-20} \cdot (-1)^{-20}$	• potencia de un producto, potencia de una potencia
$= (-2)^4 \cdot \cancel{(-1)^{-20}}\,1$	• producto de potencias de la misma base
$= 16$	• potencia luego producto

ORDEN DE OPERACIONES

*Primero, se resuelven las operaciones dentro el signo de agrupación **( ), [ ], { }** respetando la jerarquía de operadores entre la suma y multiplicación descrita a continuación.*

Segundo, se resuelven las multiplicaciones y divisiones antes de la suma y resta.

Tercero, se resuelven las sumas y restas.

¡DESAFÍO!

Usando las operaciones combinadas, demuestra que el resultado es el mismo al número elegido.

- Escoge un número, multiplica por 4, súmele 20, divide entre 4 y réstale 4.

DEFINICIÓN DE POTENCIA

Si $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Comportamiento de signos en una potencia

$(+)^{par} = +$

$(-)^{par} = +$

$(+)^{impar} = +$

$(-)^{impar} = -$

Producto de potencias con igual base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = 32$$

Cociente de potencias con igual base:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(-3)^6 \div (-3)^4 = (-3)^{6-4} = (-3)^2 = 9$$

Potencia de una potencia:

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$
$$[(-2)^2]^3 = (-2)^{2\cdot 3} = (-2)^6 = 64$$

Potencia de un producto:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$
$$[(-3)\cdot(+2)]^3 = (-3)^3 \cdot (+2)^3 = (-27)\cdot(+8) = -216$$

Exponente cero:

$$a^0 = 1$$
$$(-2024)^0 = 1$$

¡DESAFÍO!

Investiga sobre la desintegración del uranio y su liberación de electrones, luego expresa como potencia la liberación de electrones después del 5to choque.

COMPORTAMIENTO DE LA RAÍZ

$$\sqrt[par]{+} = +$$
$$\sqrt[par]{-} = \notin \mathbb{Z}$$
$$\sqrt[impar]{+} = +$$
$$\sqrt[impar]{-} = -$$

PROPIEDADES

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27}$$
$$= -2 \cdot 3 = -6$$

$$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[3]{-64 \div 8} = \sqrt[3]{-64} \div \sqrt[3]{8}$$
$$= -4 \div 2 = -2$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$\sqrt[3]{(-3)^9} = \left(\sqrt[3]{-3}\right)^9$$
$$= (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$
$$\sqrt[n]{1} = 1$$
$$\sqrt[n]{0} = 0$$

OPERACIONES COMBINADAS

Para resolver operaciones combinadas con prioridad debemos calcular las operaciones dentro de los signos de agrupación de acuerdo al siguiente orden:

1° Se calculan las potencias y raíces (sólo raíz principal)

2° Se realizan multiplicaciones y divisiones.

3° Se realizan las sumas y restas.

Si se tiene operaciones dentro del radical, se calcula con el anterior orden.

Ejemplo: Resuelva $\quad E = \dfrac{2^2 \cdot 3^8 \cdot (-2)^{13} \cdot 3^4 \cdot (-2)}{3^5 \cdot (-2)^{12} \cdot 3^6 \cdot (-2)^2} =$

Identifica las propiedades y luego aplica como se explica paso a paso.

$$E = \frac{2^2 \cdot 3^8 \cdot (-2)^{13} \cdot 3^4 \cdot (-2)}{3^5 \cdot (-2)^{12} \cdot 3^6 \cdot (-2)^2}$$ • ejercicio dado

$$E = \frac{2^2 \cdot 3^{12} \cdot (-2)^{14}}{3^{11} \cdot (-2)^{14}}$$ • producto de potencias de la misma base

$$E = 2^2 \cdot 3 \cdot \cancel{(-2)^0}^{\,1}$$ • cociente de potencias de la misma base

$$E = 12$$ • potencia y producto

a) Radicación: es una operación inversa a la potenciación y se define: la raíz enésima exacta de un número entero es otro número entero que elevado a un exponente (índice del radical) sea igual al primero.

$$Si\ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\ y\ n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Debemos aclarar que no toda raíz de un entero es exacto, así $\sqrt{-5}$ no es exacto.

Ejemplo: Resolver a) $\sqrt[3]{-27} =$ b) $\sqrt[5]{-32} =$

Busca un número que elevado al índice del radical es igual al número dado.

a) $\sqrt[3]{-27} = -3 \iff (-3)^3 = -27$ b) $\sqrt[5]{-32} = -2 \iff (-2)^5 = -32$

Se debe analizar cuidadosamente el comportamiento de la raíz de acuerdo a la relación que existe entre el radicando y el índice del radical.

Ejemplo: Resolver a) $\sqrt[3]{-64} =$ b) $\sqrt{-9}$

Busca un número que elevado al índice del radical es igual al número dado (observa los colores iguales).

a) $\sqrt[3]{-64} = -4$ índice impar radicando (-)
b) $\sqrt{-9} = \notin \mathbb{Z}$ índice par radicando (-)

La radicación en números enteros posee de importantes propiedades que ayudan al cálculo.

Ejemplo: Resolver a) $\sqrt{12} : \sqrt{3} =$ b) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

Use la propiedad distributiva de derecha a izquierda:

a) $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

b) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-2) \cdot 4}$
$= \sqrt[3]{-8}$
$= -2$

Para resolver cálculos con operaciones combinadas se toma en cuenta el orden de operadores descritos a la izquierda.

Ejemplo: Resolver $\quad (-2)^5 - [\sqrt{(-25) \cdot (-1)} + \sqrt[5]{(-42+10)} - ((-1)^2)^3] =$

Use el orden de operaciones.

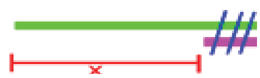
$(-2)^5 - [\sqrt{(-25) \cdot (-1)} + \sqrt[5]{(-42+10)} - ((-1)^2)^3] =$ • ejercicio dado
$= (-2)^5 - [\sqrt{(25)} + \sqrt[5]{-32} - (-1)^6] =$ • operando dentro de la raíz y $(a^n)^m$
$= -32 - [5 + (-2) - (+1)]$ • operando potencias y raíces
$= -32 - [+5 - 2 - 1]$ • eliminando ( )
$= -32 - 2$ • sumando dentro del [ ]
$= -34$ • suma de negativos

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

En el primer contenido se trató el problema del agua y la excavación de pozos, un esquema de construcción de los pahuichis y los ingresos y gastos.

Problema. En el esquema de la extracción de agua se desea calcular el tamaño del tubo de sección, sabiendo que debe estar antes de 50[cm] de la profundidad del pozo.

¿Qué me piden y cuáles son los datos?	Ejecuto el plan (resuelvo)
Me piden la medida de un tubo Profundidad del pozo $= -5[\mathrm{m}] = -500[\mathrm{cm}]$ condición del problema $= -50[\mathrm{cm}]$	$x = \text{Profundidad} - \text{distancia}$ $= -500 - (-50)$ $= -500 + (50)$ $= -450$ Al resultado le aplicamos el valor absoluto porque nos pide distancia, así: $x = \lvert 450 \rvert = 450\ [\mathrm{cm}]$

Elaboro un plan para resolver	Verifico el resultado
	El resultado no puede ser mayor que la profundidad, esto cumple el resultado, tampoco es muy pequeño.

PARA RESOLVER UN PROBLEMA

Paso 1: *Entender el problema*

- ¿qué nos pide?

- ¿cuáles son las condiciones y los datos del problema?

Paso 2: *Configurar un plan.*

- Ensayo y error

- Buscar un patrón o fórmula

- Hacer una lista.

Resolver un problema más simple.

- Hacer una figura o diagrama.

Paso 3: *Ejecutar el Plan.*

- Implementar la o las estrategias

Paso 4: *Mirar hacia atrás.*

¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

5. Cálculo mental con números enteros

Los cálculos mentales permiten estimar rápidamente una situación, aumenta el sentido numérico junto con el desarrollo de habilidades mentales, además de apoyar la memoria funcional para casos similares en la cotidianidad.

Ejemplo: Comprar una caja de 11 unidades de goma de mascar con una rebaja de 4 Bs (400 ctv.) de rebaja por la caja, o comprar cada unidad con una rebaja de 50 ctv. ¿en cuál de los casos representa mayor rebaja?,

Estrategia: aproximar por defecto sería calcular entre 10, así los cálculos serían: ctv./unidad, como se disminuyó una unidad en el divisor entonces, está claro que, esto significa que la rebaja por unidad es menor que 40 ctv/unidad. Conclusión “la rebaja de 50 ctv por unidad” conviene.

VALORACIÓN

Actividad

Junto a tus compañeros, reflexionamos sobre: ¿qué importancia tienen los números negativos para el contexto y para la ciencia?, luego anotamos algunas conclusiones.

....

....

PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: En grupos, exponemos los desafíos presentados en este contenido.

Producción teórica: Resolvemos los siguientes ejercicios y problemas.

Ejercicio 1: Calcular:

a) $(-23) - (-30) =$

b) $(-35 - 4)\ [-2 - (-13 + 18 - 5) + (20 - 36)] =$

c) $20 : (-5)\ \{-1 - [8 - (4 - 3)]\} \cdot (-2) + 3 =$

d) $M = \dfrac{[(-2)^5]^2 \cdot (-5)^3 \cdot (-2)^5 \cdot (-5)^2}{(-5)^5 \cdot (-1)^0 \cdot (-2)^{13}}$

e) $N = \sqrt[5]{(10^2 - 6^2) : (-2)} - (-2) \cdot \sqrt{4^2 - 12}$

f) $[3 \cdot (-5) + 14] + \sqrt{1 + \sqrt{64}} + 3 \cdot (-1) =$

Ejercicio 2: Resolver los siguientes problemas.

1) Un segmento se dividió en tres partes iguales, luego cada parte en otras tres; si repetimos 4 veces el proceso ¿En cuántas partes se partió el segmento?

2) El juego consiste en enviar un mismo mensaje a tres amigos al día siguiente de lo que llegó, Juan comienza el primer día enviando tres mensajes. ¿cuántos mensajes fueron enviados hasta el día 7?

3) Calcula e investiga el uso en informática de la siguiente serie.

$$2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \ldots, 2^{10}$$

NOCIONES DE GEOMETRÍA EN NUESTRO ENTORNO

PRÁCTICA

En los diferentes contextos de nuestro Estado Plurinacional de Bolivia se observa diferentes construcciones, alguna de ellas tienen un techo como el de la imagen.

Construye una réplica.

Con material en desuso y diverso, procede a construir una réplica de la imagen; puede ser a cualquier escala o medida.

Modelo experimental: realice un esquema o dibujo.

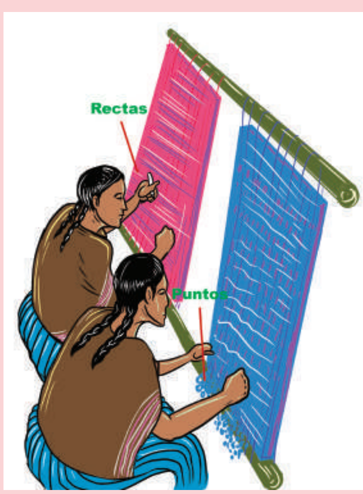
De la réplica construida, realice un dibujo o esquema en una hoja de cualquier tamaño. Una vez terminada el esquema, realice otros esquemas similares del entorno en el que se visualice algunas rectas y abertura entre rectas.

Actividad

Con la ayuda de un compañero de curso, tomamos medidas de longitud en [cm] y la medida de los ángulos de la réplica que se construyó, luego anotemos:

- Medidas de longitud en [cm]: ………………………………………………………………………………
- Medidas de ángulos en [°]: ………………………………………………………………………………

TEORÍA

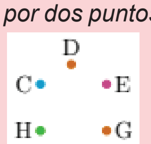


GEOMETRÍA

Palabra griega, que significa medición de la Tierra, estudia las propiedades de las figuras geométricas usadas para medir extensiones.

DESAFÍO

¿Cuántas rectas se pueden trazar como máximo de modo que cada recta pase por dos puntos de los 5?

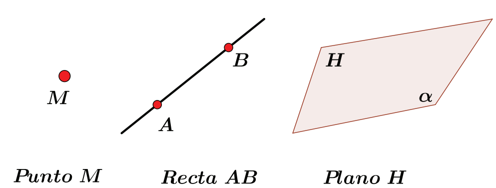


1. Elementos básicos de la geometría plana

Los elementos básicos y fundamentales de la geometría, como el punto, la recta y el plano, no poseen una definición, surgen como una abstracción mental de la realidad o entorno, así, por ejemplo, el hilo de una plomada nos refiere a la idea de una recta, la tabla de una mesa nos brinda la idea de un plano. Estas ideas geométricas (punto, línea y plano) pueden ser referenciados o representados por una notación simbólica, es decir, se puede representar gráficamente y nombrarlos.

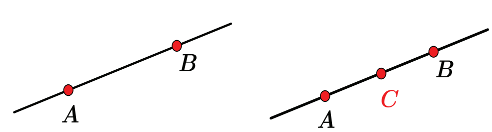
a) El punto, la recta y el plano

En la realidad existe diferentes objetos que nos sugieren las nociones de punto, recta y plano. Así, en la imagen expuesta a la izquierda se puede idealizar el punto, recta y plano, su representación y notación será:



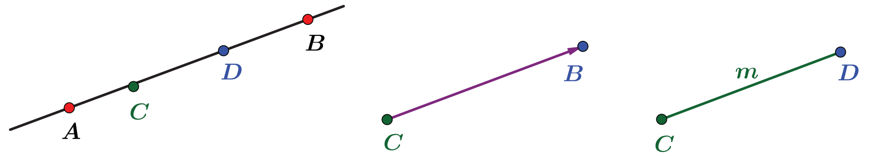
Es importarte notar que los tres elementos básicos tienen su forma de nombrar y representar tal como se observa en la figura de arriba.

Las **propiedades de pertenencia** (estar en) y **colinealidad** (entre) pueden referirse como: el punto A, B pertenece a la recta   o   pasa por dos puntos A y B (estar en); mientras que, el punto C está entre A y B refiere a que A, B, C son colineales.



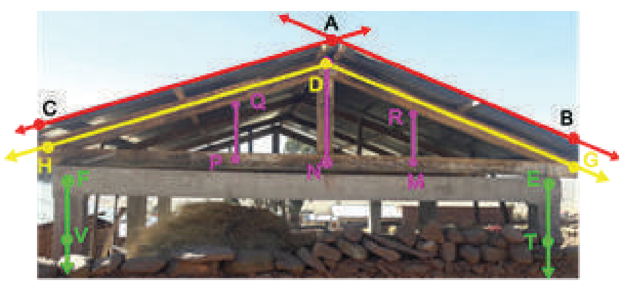
2. La recta, semirrecta y segmento

Un punto colineal que pertenece a una recta separa a ella en dos partes denominadas semirrectas. Una semirrecta se nombra con una letra minúscula o por su punto de origen junto a otro punto que le pertenezca.



El segmento es una parte de la recta limitada por dos puntos, así, si dos puntos C, D pertenecen a ℓ entonces la parte determinada entre C y D es el segmento.

Ejemplo: En la imagen nombra todos los elementos básicos de la geometría



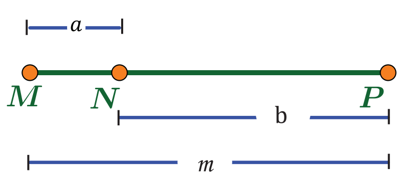
Rectas:
$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$

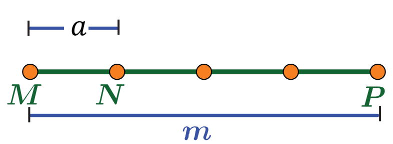
Semirectas:
$\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{FV}, \overrightarrow{ET}$

Segmentos:
$\overline{RM}, \overline{DN}, \overline{QP}$

3. Operaciones con segmentos

En la figura los puntos sobre la recta son colineales consecutivos, entonces, se establecerán las siguientes operaciones con las longitudes de los segmentos.





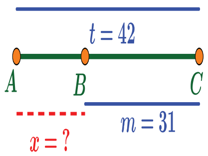
Nota: La división expuesta es entre un escalar, es muy diferente al punto de división o división interna (división de un segmento en una razón dada).

Ejemplo: **a)** Si AC=42 [cm], BC=31 [cm] hallar AB.

b) Si MN=13 [u], NC=8 [u] y FE=18 [u], hallar MF

Trazamos los segmentos del enunciado y efectuar sumas y restas

a)



Del gráfico tenemos

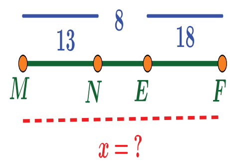
AB = x =?, luego tenemos

x= t – m

x = 42 - 31 =11

$\therefore$ *AB = 11 [cm]*

b)



Del gráfico tenemos

MF = ?, luego tenemos

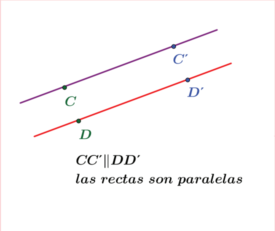
MF = MN + NE + EF

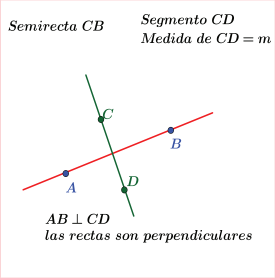
MFx = 13 + 8 +18 = 39

$\therefore$ *MF = 39[u]*

POSICIONES RELATIVAS DE LA RECTA

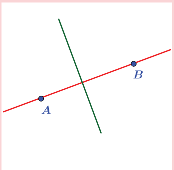
Una recta respecto a la otra puede ser perpendicular o paralelo





INVESTIGA

Con la ayuda del gráfico, investiga cómo se traza una MEDIATRIZ de un segmento y enumera sus propiedades.



DESAFÍO

En el segmento AB se ubican los puntos consecutivos M; N; O y P los cuales son los puntos medios de los segmentos AB;

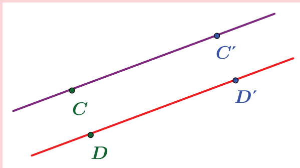
MB; NB y OB, respectivamente; calcula AP si AM = 16.

¿QUÉ ES MEDIR?

Es una comparación entre una unidad de medida establecida y el objeto o fenómeno a medir.

INVESTIGA

Con la ayuda de un gráfico, investiga cómo se traza recta paralela que pasa por un punto.

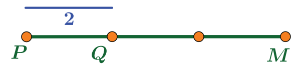


Ejemplo: Resolver la multiplicación y la división por un escalar o número.

a) Si PQ=2[u] Hallar $3 \cdot PQ =$ b) $AD = AB \div 5$ si AB=15[u]

Grafique el enunciado y resuelva la multiplicación y división en partes.

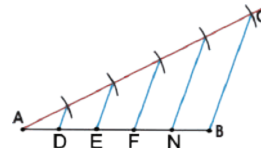
a)



como PQ = 2 Entonces

PM =3 ·PQ =3 ·2 = 6 [u]

b)



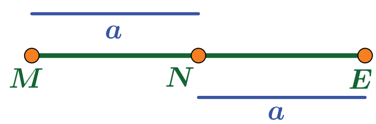
AD = AB: 5

AD = 15: 5

∴ AD = 3[u]

a) Punto medio (congruencia en un segmento)

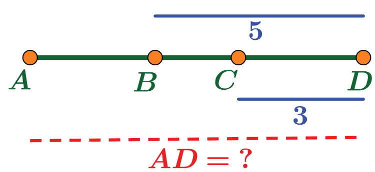
El punto medio en un segmento es un caso de congruencia entre dos elementos geométricos, queda definido:



Como N ∈ ME
y $MN \cong NE$ entonces
N es punto medio de
ME y $a = a$

Ejemplo: Sean los puntos A, B, C y D colineales y BD=5, CD=3, y B punto medio $\overline{AC}$ calcula AD.

Trazamos los segmentos según el enunciado y aplicamos la congruencia del punto medio.



Datos e incógnita

CD = 3[u]

BD = 5[u]

AD = ??

Por concruencia se tiene

∴ AB = BC

AB = BC − CD

AB = 5-3 = 2

Finalmente del gráfico:

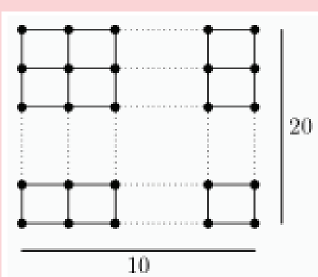
AD = AB + BD

como AB = 2 entonces

AD = 2 + 5 = 7 [u]

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

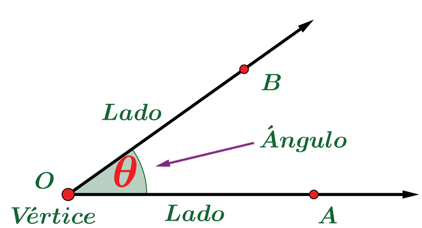
Palillos de diente de igual longitud se utilizan para construir una grilla rectangular como se muestra en la figura. Si la cuadrícula tiene 20 palillos de dientes de alto y 10 palillos de dientes de ancho, entonces la cantidad de mondadientes usados es



Olimpiadas Científicas escolares 2018

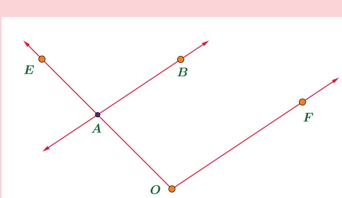
4. Definición de ángulo

Es el espacio del plano que es formado por dos semirrectas que comparten un origen común, el origen común es denominado vértice. Sus elementos son:



Elementos:
Lados: $\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}$
Vértice = O
NOTACIÓN Y MEDIDA
Ángulo: $\measuredangle AOB; A\hat{O}B$
Medida: $m\measuredangle AOB = \theta$

DESAFÍO



Mida todos los ángulos que hay y analice los resultados para sacar una conclusión.

Nota: el ángulo externo generado por los dos segmentos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con vértice común, lleva su notación con una letra griega diferente al ángulo interno, o también $\measuredangle BOA$

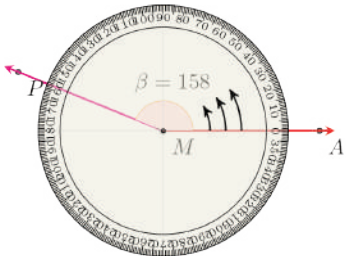
a) Medida sexagesimal de un ángulo

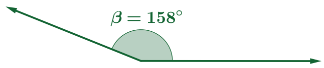
En el sistema sexagesimal la unidad de medida del ángulo es el grado sexagesimal (°), este resulta de dividir una vuelta (circunferencia) en 360 partes.

En la figura de la derecha se observa 90 particiones de una cuarta vuelta, si tomamos una partición resulta igualmente un grado sexagesimal (1°). Se tiene medidas más pequeñas que son el minuto y el segundo, los cuales generan las siguientes equivalencias.

$$1° = 60' : 1' = 60'' : 1 = 3600''$$

Ejemplo: Trace un $\measuredangle AMP$ = 158° y nombre adecuadamente
Use el transportador para graduar la apertura entre dos semirrectas.

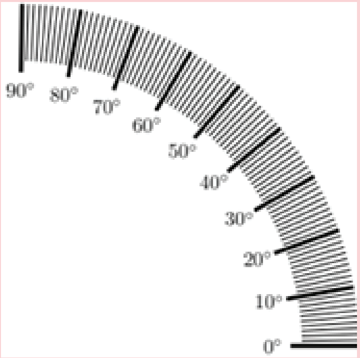




m<AMP=β=158°

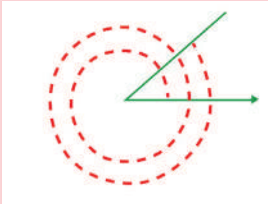
Lados : $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MP}$
Vértice : M
Ángulo : $\measuredangle AMP$ o $\widehat{AMP}$
Medida : $m\measuredangle AOB = \beta = 158°$

GRADO SEXAGESIMAL



DESAFÍO

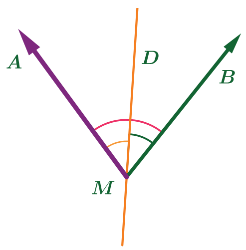
¿Cuánto mide el siguiente ángulo?



b) Operaciones básicas con ángulos

La suma de ángulos consiste en formar uno a continuación del otro, de tal modo que exista otro ángulo que los una, mientras que la resta de ángulos consiste en obtener el ángulo que resulta después de quitar el ángulo que asume ser el sustraendo.

Ejemplo: Hallar el ángulo que forman las manecillas del reloj en la gráfica, si sus aberturas miden 35° y 40° con MD.

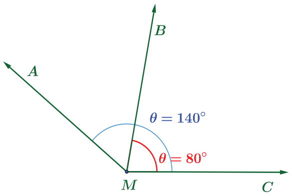


Solución: colocamos los elementos de los ángulos para luego calcular:

DATOS:
$\measuredangle BMD = 35°$
$\measuredangle DMA = 40°$

Sumando tenemos:
$\measuredangle AMB = \measuredangle BMD + \measuredangle DMA$
$\boxed{\measuredangle AMB = 35° + 40° = 75°}$

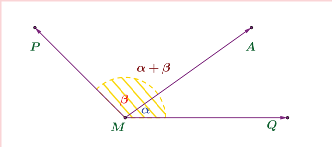
Ejemplo: Hallar la medida: $\measuredangle AMB$, si $\measuredangle AMC = 140°$ $\measuredangle BMC = 80°$
Coloca los datos en una gráfica, luego reste.



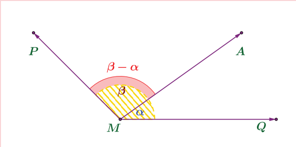
DATOS:
$\measuredangle AMC = 140°$
$\measuredangle BMC = 80°$
$\measuredangle AMB = ??$

Del gráfico se tiene :
$\measuredangle AMB = \measuredangle AMC \quad \measuredangle BMC$
$\measuredangle AMB = 140° - 80°$
$\measuredangle AMB = 60°$

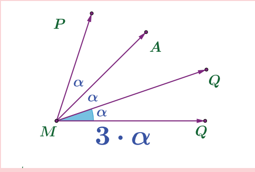
SUMA DE ÁNGULOS



RESTA DE ÁNGULOS



MULTIPLICACIÓN DE ÁNGULOS



Actividad

Con los siguientes ángulos α=76°; β=36° Hallamos y graficamos:

a) α-β

b) α+β

c) 3α-β

Con los siguientes ángulos α=80°; β=24°. Hallamos y graficamos:

a) α-2β

b) 4α+β

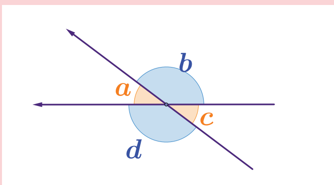
c) 3α-β

DESAFÍO

¿La bisectriz de una bisectriz de otra bisectriz, qué relación tiene con el ángulo dado?

CALCULANDO

Dado el ángulo a=25°, calcule el valor de los demás ángulos.



Por $\measuredangle$ opuestos por el vértice

$$\alpha = d \ - 25°$$

Por $\measuredangle$ Suplementario, tenemos

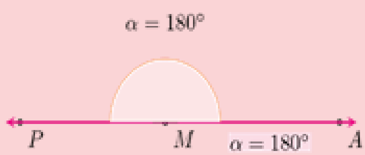
$$b = \ S_\alpha = 180° - \ 25°$$

$$s_\alpha = 155°$$

Por $\measuredangle$ opuestos por el vértice

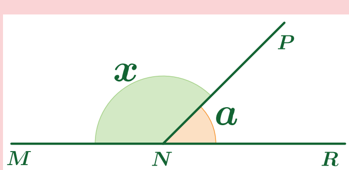
$$b = c \ = 155°$$

ÁNGULO LLANO



Seguimos calculando

Calcular el suplemento de a = 53°



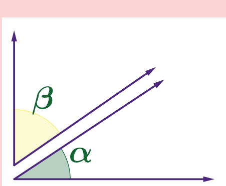
Sea x el suplemento

$$x = \ S_\alpha = 180° \ - a$$

$$S_\alpha = 180° \ - 53°$$

$$S_\alpha = 127°$$

Calcular el complemento si el ángulo conocido es 40°



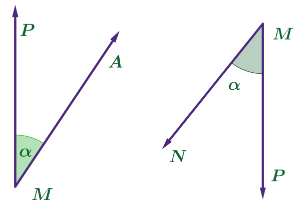
Sea $\alpha = 40°$, entonces

$$\beta = \ C_\alpha = 90° \ - 40°$$

$$C_\alpha = 50°$$

c) Congruencia de ángulos

En geometría dos objetos son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño, pero en lugares o posiciones diferentes.

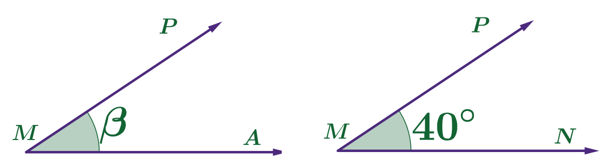


Como se observa, ambos objetos geométricos poseen lados homólogos paralelos, entonces generan el mismo ángulo (misma medida). Como genera el mismo ángulo, tiene la misma forma, por ambas condiciones se dice que son congruentes.

Su expresión es $\measuredangle AMP \cong NMP$ y sus medidas angulares son iguales.

Ejemplo: Por congruencia, hallar β

Por igualdad de la medida de ángulos tenemos:



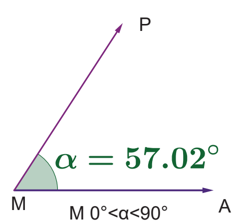
Por congruencia, tenemos β=40°

5. Clasificación de ángulos

Atendiendo a sus características, los ángulos pueden clasificarse como sigue.

a) Clasificación según sus medidas: según la medida que tiene un ángulo se clasifican en agudo, obtuso, recto y llano.

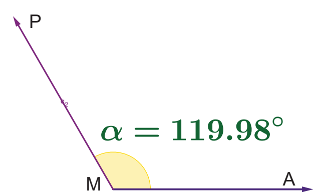
ángulo agudo



M 0°<α<90°

Cuando la medida de su ángulo es menor a 90°

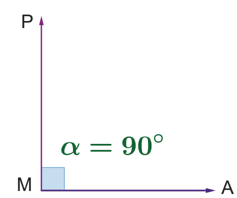
ángulo obtuso



M 90°<α<180°

Cuando la medida de su ángulo es mayor a 90° y menor a 180°

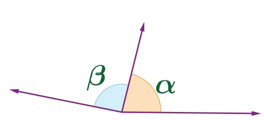
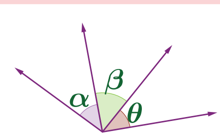
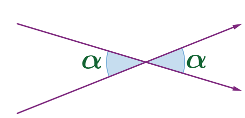
ángulo recto



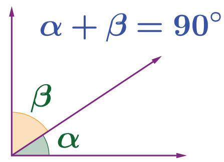
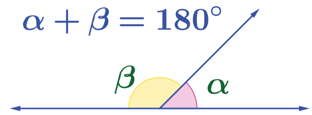
M α<90°

Cuando el ángulo mide 90° y posee lados perpendiculares

b) Clasificación según su posición: la posición de un ángulo con respecto a otro determina la siguiente clasificación:

Ángulo adyacente	Ángulo Consecutivo	Opuesto por el vértice
		
Son dos ángulos que comparten un lado y tienen el vértice en común.	Son aquellos ángulos separados por un lado común y son tomados uno a continuación de otro.	Son aquellos ángulos que comparten un mismo vértice y lados prolongados. Se cumple: $\beta = \phi$

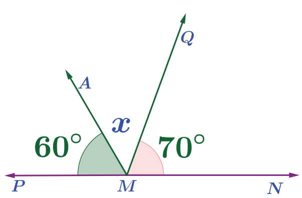
c) **Según la suma con otro ángulo:** según el resultado de la suma de dos ángulos determina la siguiente clasificación:

Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
	
α es el complemento de β y viceversa. **Notación:** C_α : se lee, complemento de α $\therefore C_{(\alpha)} = 90° - \alpha$	α es el suplemento de β y viceversa. **Notación:** S_α : se lee, suplemento de α $\therefore S_{(\alpha)} = 180° - \alpha$

A continuación, se estudiará cada propiedad asociada a los ángulos y su clasificación.

Ejemplo: Hallar x en la gráfica, use los ángulos suplementarios.

Identifica los datos en la gráfica, luego resuelva.

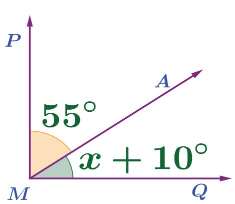


DATOS:
$\measuredangle PMA = 60°$
$\measuredangle AMQ = x$
$\measuredangle NMQ = 70°$
$x = ?$

Por ángulo llano, se tiene:
$60° + x + 70° = 180°$
$x + 130° = 180°$
La igualdad se cumple con:
$x = 50°$

Ejemplo: Hallar x en la gráfica, use la propiedad del ángulo complementario.

Identifica los datos en la gráfica, luego resuelva.

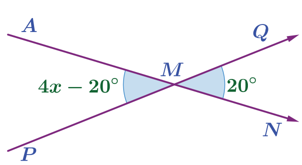


DATOS:
$\measuredangle PMA = 55°$
$\measuredangle AMQ = x + 10°$
$x = ?$

Por complemento, se tiene:
$x + 10° + 55° = 90°$
$x + 65° = 90°$
La igualdad se cumple con:
$x = 25°$

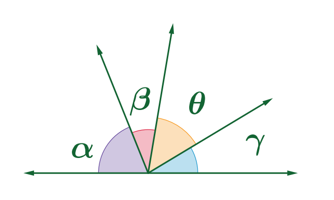
Ejemplo: Hallar x en la gráfica, use la propiedad de ángulos opuestos por el vértice.

Identifica los datos en la gráfica, luego resuelva con la propiedad.

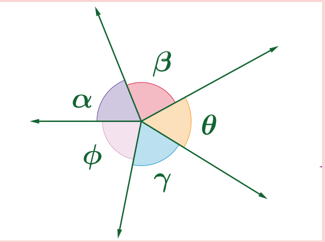


Por ángulos opuestos por el vértice, se tiene:
$\measuredangle AMP = \measuredangle NMQ$
$4x - 20° = 20°$
La igualdad se cumple para:
$x = 10°$

ÁNGULOS SOBRE UNA RECTA

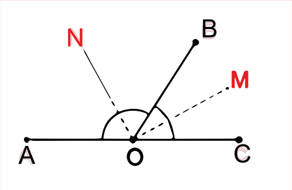


ÁNGULOS CON VÉRTICE COMÚN



La suma de los ángulos con vértice común es 360° (una vuelta)

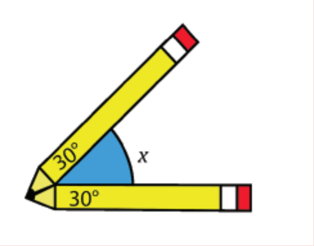
BISECTRIZ DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS



Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

Si el ángulo en la punta de cada lápiz en la figura es 30°, ¿cuál es el valor de x?



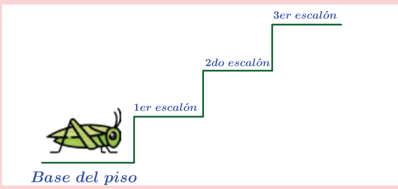
Olimpiadas científicas escolares 2018 (UMSA)

6. Problemas con ángulos y segmentos aplicados al contexto

En los diferentes contextos, en especial, en los objetos creados por el hombre, la geometría elemental está muy presente por lo que podemos encontrar variedad de ejemplos, alguno de ellos los presentamos a continuación.

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

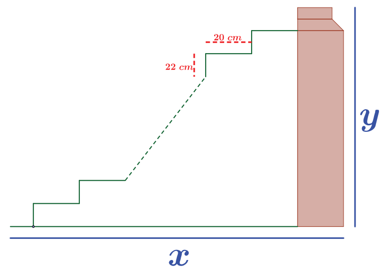
Un saltamontes quiere subir una escalera de muchos escalones. Puede saltar de dos formas: 3 escalones para abajo. Si comienza al nivel del piso, ¿por lo menos cuántos saltos deberá hacer para llegar al escalón 22?



Fuente: Problemas de entrenamiento KANGURO 2021

Ejemplo: una persona desea construir una escalera con 15 escalones para subir al segundo piso de su vivienda, como se muestra en la figura. a) Calcular la altura de su primer piso b) calcular la distancia de la pared al primer escalón.

Identifica los datos y suma las medidas como segmentos apilados.



Datos e incógnitas:
$h = 22\ [cm]$ (altura de cada escalón)
$h = 20\ [cm]$ (largo de cada escalón)
$x = \ ??$
$y = \ ??$

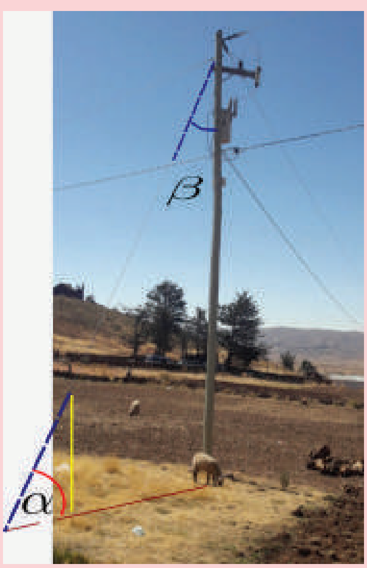
Sea x la distancia hasta la pared.

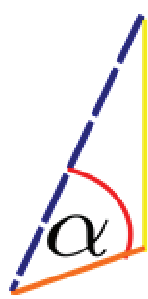
$$x = 20 + 20 + \cdots + 20$$
$$x = 15 \cdot 20$$
$$x = 300\ [cm]$$

Sea y la altura del primer piso.

$$y = 22 + 22 + \cdots + 22$$
$$y = 15 \cdot 22$$
$$y = 330\ [cm]$$

Ejemplo: en el área rural, los postes de energía eléctrica poseen tirantes, como se muestra en la fotografía de la derecha. Con la ayuda de algún instrumento o algún método heurístico, determinar de forma aproximada los ángulos de β sabiendo que α y β son complementarios.





Identificando la propiedad de congruencia cuando los lados homólogos de dos ángulos son paralelos, entonces se elabora un plan:

Primero, plantamos una madera (palo) lo más vertical posible, de modo que coincida con el tirante a cualquier distancia (segmento de color amarillo).

Segundo, con dos hilos o cuerdas delgadas, formamos el ángulo sujetando sus extremos al palo, haciendo una marca en el vértice de dicho ángulo formado.

Tercero, extraemos cuidadosamente el palo plantado, de modo que la réplica creada para el ángulo no se distorsione y estemos en la posibilidad de medir con un transportador.

Finalmente, si α = 47° entonces β será: Cα = 90° - 47° = 43° aprox.

Ejemplo: En la fotografía se muestra la mitad de una puerta hecha con tubos de acero. Calcular la longitud total de tubos de acero que se usó, sabiendo las medidas dadas en fotografía.

Datos e incógnita

$h = 3 \cdot 90$ [cm] (altura)
$w = 2 \cdot 70$ [cm] (largo)
x = ? (total horizontales)
y = ? (total verticales)

Total $\mathbf{y_1}$ para la mitad de la puerta

$$y_1 = (3 \cdot 90) + (3 \cdot 90) + (3 \cdot 90)$$
$$y_1 = 3 \cdot 270$$
$$y_1 = 810\ [cm]$$

Total de x_1 para mitad de puerta

$$x_1 = (2 \cdot 70) + (2 \cdot 70) + (2 \cdot 70) + (2 \cdot 70)$$
$$x_1 = 4 \cdot 140$$
$$x_1 = 560\ [cm]$$

Total tubos en la puerta

$$\text{TOTAL} = 2 \cdot 810 + 2 \cdot 560$$
$$\text{TOTAL} = 1120\ [cm]$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios sobre segmentos:

a) En una recta, los puntos A, B, C son consecutivos. Si AB = CD y AD+BC=16[u], calcular BD.

b) En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C, si: AB+AC=28[u], calcular AM, siendo M un punto medio de BC.

c) En una recta, los puntos A, B, C y D son consecutivos, calcular AD si AC=12[u] y AD+CD=26[u].

d) En una recta, los puntos A, B, C y D son consecutivos. Si AC + BD = 64[u], calcular PQ, siendo P y Q puntos medios de AB y CD respectivamente.

En el aula, en grupos reducidos, resolvemos los siguientes ejercicios sobre ángulos.

a) Se tienen los ángulos consecutivos y suplementarios AOB y BOC tal que: el ángulo BOC=2(AOB). Calcular el ángulo AOB.

b) Se tienen los ángulos consecutivos y complementarios AOB y BOC tal que: AOB=4(BOC), calcule BOC.

c) Calcule la diferencia entre el suplemento del complemento de 65° y el complemento de 55°.

d) Si el suplemento de un ángulo es igual a 116°, calcular el complemento de dicho ángulo.

VALORACIÓN

Actividad

En clases conversamos sobre: ¿en qué actividades cotidianas podría colaborar los conocimientos adquiridos sobre elementos básicos de la geometría? Tomemos nota sobre lo que dicen tus compañeros en el aula.

....

....

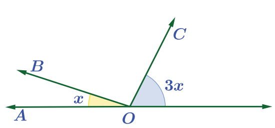
PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: En grupos, expone las réplicas o esquemas de la realidad que se construyó al inicio. Comparte las soluciones obtenidas a los desafíos y olimpiadas.

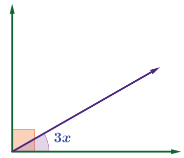
Producción teórica: Resuelva los siguientes ejercicios y problemas.

Ejercicio 1: Resuelva

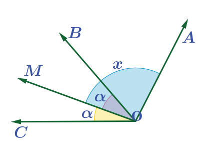
1) Calcule el mayor valor entero de "x" Si $\measuredangle BOC$ es obtuso



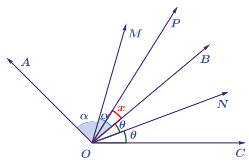
2) Calcule el máximo valor entero de "x".



3) Calcule "x" Si: $\measuredangle AOC + \measuredangle AOB = 100°$



4) En la figura, calcule "x". OP es bisectriz de $\measuredangle AOC$ Si $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC = 40°$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FORMAS EN EL PLANO CARTESIANO

PRÁCTICA

Construyendo un modelo de ejes referenciales

En los predios de la unidad educativa, en un espacio plano con preferencia en el espacio deportivo, extienda dos líneas referenciales y perpendiculares como el de la imagen (derecha). Puede usar cuerdas u otro material y atarlas a una piedra o a una estaca; se deja libre dicha construcción.

Fuente: fotografía propia

También, construye una escuadra (90°) de cualquier material, relativamente grande, al que llamaremos escuadrón, ten listo el siguiente material adicional: el metro o cinta métrica, cuerdas adicionales o hilo grueso, estuche geométrico.

Modelo experimental: "Comunico mi ubicación"

Ubícate en cualquier punto del plano, coloca bajo tus pies el escuadrón de forma que sus lados sean paralelos a los ejes referenciales, luego, de los extremos del escuadrón, desprende hilo o cuerda de tal forma que intersecten con los ejes referenciales a 90° (verificar con la escuadra del estuche geométrico). Mide con cinta métrica desde el origen de los ejes referenciales hasta cada intersección del eje con los hilos desprendidos del escuadrón, en [cm]. Finalmente, comunica o escribe las dos medidas, dichos valores representarán las coordenadas de nuestra posición en el plano; puedes nombrar a uno de los ejes referenciales con el nombre de abscisa y al otro como ordenada.

Actividad

Con la ayuda de uno o dos compañeros de curso, registramos las coordenadas de la posición de varios objetos o personas que está en el plano; anotamos a continuación, como el ejemplo.

Ejemplo: Posición en el plano de Juana 34[cm] en abscisa y 45[cm] en ordenada.

....

....

....

TEORÍA

RENÉ DESCARTES

Filósofo, matemático y físico francés considerado el padre de la geometría analítica y la filosofía moderna.

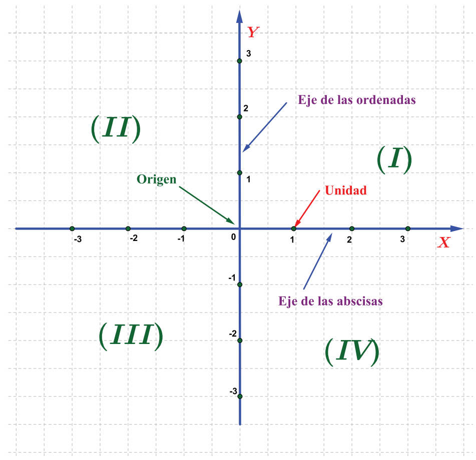
1. Plano cartesiano

El plano junto a los ejes referenciales, vistos en el momento metodológico de la práctica, conforman el plano cartesiano, es decir, es un plano que tiene dos ejes perpendiculares (ejes referenciales), el eje horizontal recibe el nombre de abscisa o simplemente eje 'X' y la recta vertical es el eje de las ordenadas o eje 'Y'. La intersección de los ejes es el origen de coordenadas.

Los ejes del plano deben ser perpendiculares (90°) entre sí, cada una de ellas tienen semiejes positivo y negativo como la recta numérica, la intersección entre ambos constituye el origen de coordenadas.

Los ejes del plano cartesiano dividen a esta en cuatro cuadrantes, los cuales son numeradas en el sentido antihorario con números romanos (I, II, III, IV).

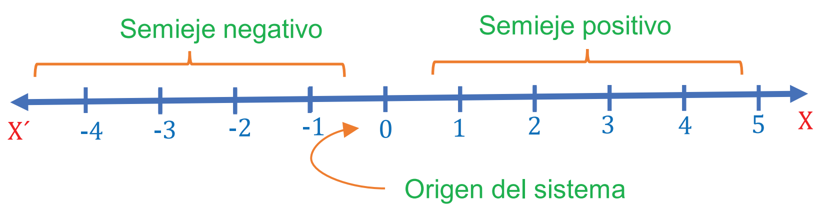
A continuación, presentamos gráficamente los elementos que conforman el sistema de coordenadas cartesianas:



Para este grado de escolaridad, es importante que los ejes sean graduados con una misma unidad de medida, como se muestra en el gráfico.

Construcción del sistema de coordenadas cartesianas

Al ser los primeros contactos del estudiante con un sistema de coordenadas, a continuación, pasemos a detallar la conformación del eje X del sistema de coordenadas cartesianas.

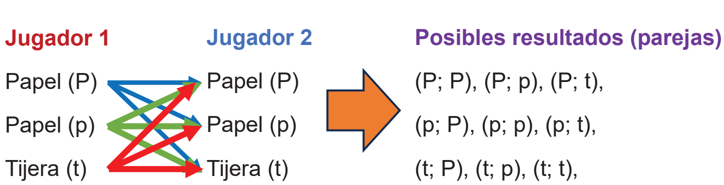


Trace una recta horizontal, en dicha recta, marque un punto que será el origen del eje X, a partir del origen escoja una unidad de medida que formará parte de la escala de unidades de dicho eje; con la unidad de medida gradúe la recta con números positivos, a la derecha del cero y su izquierda con números negativos.

De modo análogo se construye el eje Y o eje de las ordenadas del sistema.

2. Par ordenado

Para acercarnos a este concepto usaremos los resultados posibles del juego piedra, papel o tijera. A continuación, se observa cuántas parejas se puede formar.



Las parejas formadas por los resultados posibles del juego es semejante a un par ordenado, pues el resultado piedra – papel es muy diferente a papel – piedra.

Un par ordenado es una pareja de números escritos de la forma (a, b), representa la coordenada de un punto en el plano, es decir, el primer número es el primer componente y registra la posición respecto al eje X, mientras que el otro número es el segundo componente del par ordenado y hace referencia a la posición respecto al eje vertical (eje Y)

SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICO

Es un sistema de coordenadas que expresa una posición de un objeto o persona en la tierra a través de una latitud y longitud.

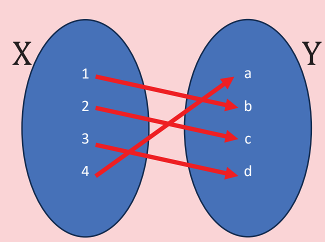
Latitud, *en términos sencillos, expresa qué tan al norte o que tan al sur se encuentra un punto sobre la tierra. Es semejante al eje Y.*

Longitud, *expresa qué tan al este o al oeste se encuentra un punto en la tierra.*

Los ejes referenciales que usa son la línea del Ecuador y el meridiano de Greenwich.

DESAFÍO

Describe en tus palabras, en qué consiste la trilateración como método usado por el sistema GPS para determinar una posición en el planeta Tierra.



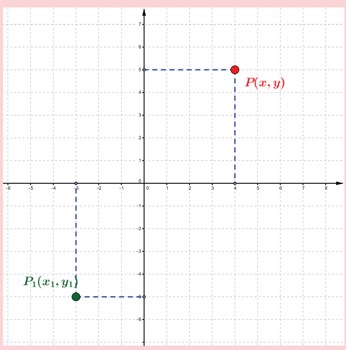
Representación de los pares ordenados desde el diagrama de conjuntos.

PRODUCTO CARTESIANO

Son pares ordenados con elementos de dos conjuntos y se representa por AxB, si los conjuntos son A y B.
Ejemplo.
Sea A={1,2,3} y B={a,e}, luego el producto cartesiano es:

AxB={(1,a),(1,e),(2,a),(2,e),(3,a),(3,e)}

EL PAR ORDENADO EN EL PLANO CARTESIANO

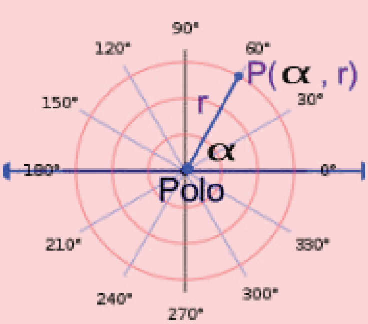


Como se observa, cada par ordenado representa la coordenada de un punto en el plano.

DESAFÍO

Represente las coordenadas de los personajes perdidos (ejemplo) en el sistema de coordenada polares.

Fíjate la imagen del plano polar



El par ordenado se escribe del siguiente modo:

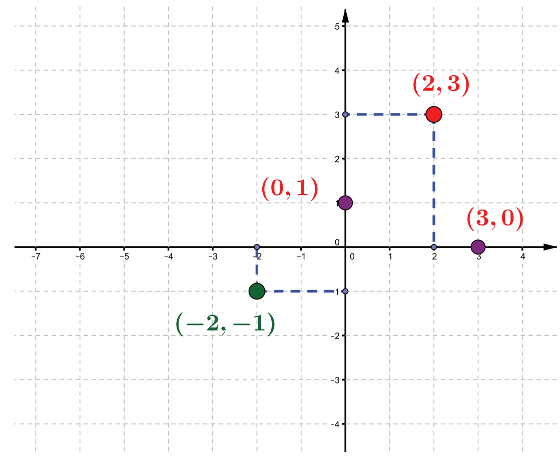
(a, b)

primer componente ↑ ↑ segundo Componente

Utilizamos un par ordenado para indicar las dos coordenadas de un punto u objeto en el plano. El primer componente representa la coordenada del eje X y la segunda componente señala la coordenada en el eje Y.

Ejemplo: Ubicar los siguientes pares ordenados (2,3), (-2,-1), (0,1) y (3,0) en el plano cartesiano.

Ubicamos el primer componente del par (2, 3) en el eje X desde esa coordenada, trace una línea vertical, luego, ubicamos la segunda componente del par (2,3) en el eje Y para trazar una línea horizontal desde esa posición. La intersección de ambas líneas es la posición buscada, el que se representa con un punto. El mismo procedimiento se sigue para representar las otras coordenadas.

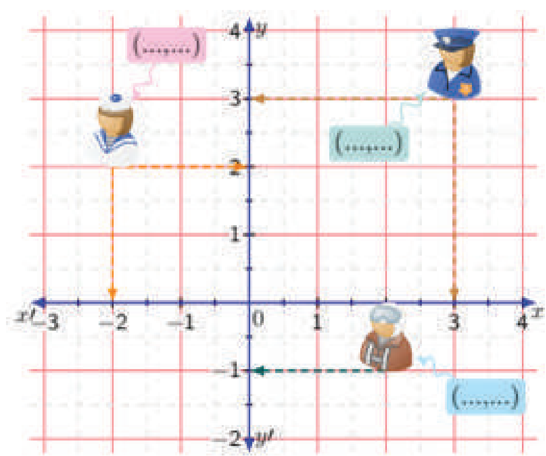


Los pares ordenados (0,1) y (3,0) están sobre los ejes, esto es porque uno de sus componentes es cero.

Ejemplo: Anote las coordenadas que ubican a los personajes que están perdidos en el plano cartesiano.

Sabemos que un sistema coordenado sirve para determinar la posición de un objeto o persona, entonces fíjese en los números que le corresponde a cada componente para formar el par ordenado que es la coordenada de ubicación en el plano. Así, las coordenadas son:

$$(-2,2), (3,3), (2,-1)$$



Finalmente, notemos que la ubicación de la enfermera es (-2,2) que pertenece al II cuadrante, si cambiamos el orden al mismo par, entonces la enfermera tendría que estar en el cuadrante IV.

$$(-2,2) \neq (2,-2)$$

La suma y resta de pares ordenados se realiza de componente a componente, así, sumar (2,3) + (-3,5) = (2-3,3+5) = (-1,8), en general la suma y resta será

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ suma de coordenadas
$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$ resta de coordenadas
$k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$ multiplicación por un escalar

Igualdad de los pares ordenados

Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales si sus primeras y segundas componentes son iguales, entonces representan la misma posición en el plano cartesiano; así tenemos:

$$(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c\ \ \wedge\ \ b=d$$

Ejemplo: Dado el gráfico de la derecha, calcular: a + b + c + d + n

Use la igualdad de las coordenadas, así, se tiene las siguientes igualdades.

Del gráfico tenemos:

$(7,n)=(c,c+3)$

Igualando en el eje X

$\rightarrow c=7$

Igualando en el eje Y

$n=c+3$

Pero $c=7$

$\therefore n=7+3=10$

Del gráfico tenemos:

$(a,b)=(a,n-6)$

Igualando en el eje X

$\rightarrow a=a=9$

Igualando en el eje Y

$d=n-6$

Como $n=6$

$d=10-6=4$

Del gráfico tenemos:

$(3{,}6)=(a-6,b)$

Igualando en el eje X

$\rightarrow 3=a-6$

La igualdad se cumple para:

$a=9$

Igualando en el eje Y

$6=b$

Finalmente, calculamos:

$a+b+c+d+n=9+6+7+4+10$

$a+b+c+d+n=36$

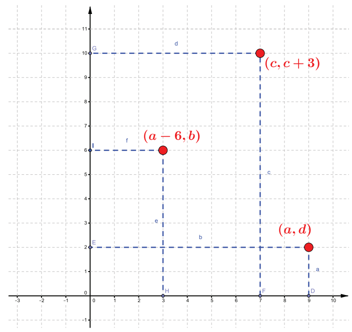
IGUALDAD DEL PAR ORDENADO

Si $(a+1{,}5)=(8,b-3)$

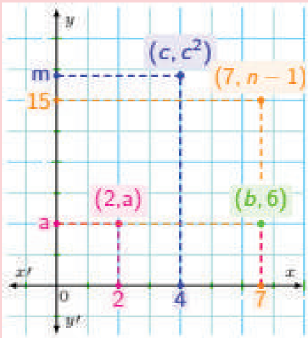
Se cumple:

$a+1=8\quad\wedge\quad 5=b-3$

$\therefore a=7\quad\wedge\quad b=8$

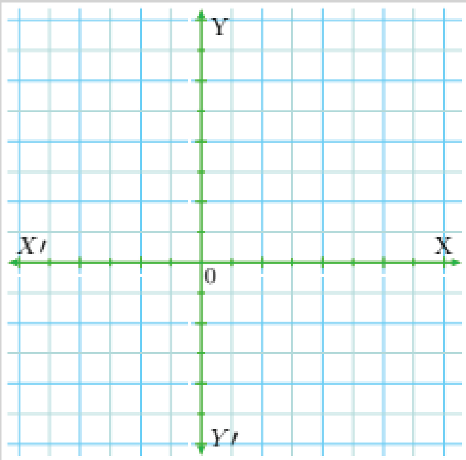


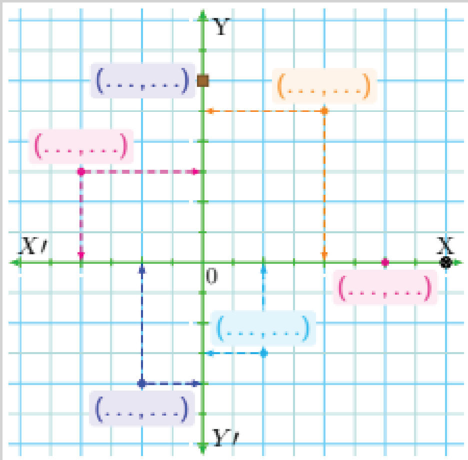
DESAFÍO



Actividad

Ubiquemos los siguientes pares ordenados en el plano cartesiano (2,3), (0,0), (0,-3), (0,4), (-2,0), (-2,-3) y en la figura de la derecha escribimos las coordenadas.





DESAFÍO

¿Cuál es la diferencia entre el punto, el segmento y la recta que están en el plano cartesiano y los que no están en el plano cartesiano?

OPERACIONES

Si A(2,1) y B(3,-2) para hallar A+B se sumarán componentes entre si, entonces:

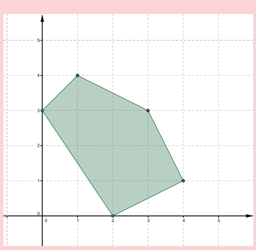
A+B=(2,1)+(3,-2)
A+B=(2+3, 1-2)
A+B=(5,-1)

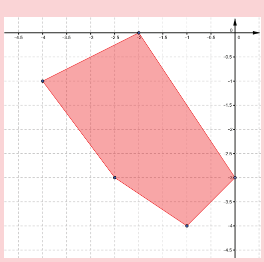
Para Hallar 3A=3(2,-3), se realizará una multiplicación del número con cada componente, es decir:

3A=3(2,-3)
3A=(6,-9)

MULTIPLICANDO POR (-1)

Sea el polígono dador por los puntos A(0,3) B(1,4), C(3,3) D(4,1), E(2,0) Multiplicando por (-1) tenemos A'(0,-3) B'(-1,-4), C'(-3,-3) D'(-4,-1), E'(-2,0).





DESAFÍO

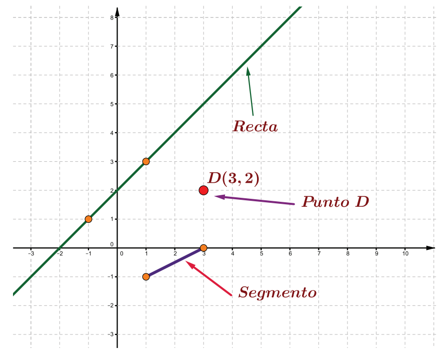
Explique lo que pasa con una figura cuando a cada una de sus coordenadas se multiplica por (1). ¿Es simetría, traslación, rotación u otra transformación?

3. Puntos, segmentos, rectas y polígonos

Para acercarnos a este concepto usaremos los resultados posibles del juego piedra, papel o tijera. A continuación, se observa cuántas parejas se pueden formar.

Una coordenada en el plano cartesiano representa la ubicación de un punto, entonces se escribe M (2,3) y se lee el punto M con abscisa 2 y ordenada 3.

La recta y el segmento siguen la notación conocida, sus representaciones en el plano cartesiano es usando las coordenadas de los puntos que lo componen.



Ejemplo: Representar el punto D(3,2), la recta que pasa por los puntos Q(-1,1) y A(1,3) y el segmento dado por los puntos M(1,-1) y R(3,0).

Use el mismo procedimiento que se hizo para ubicar un par ordenado en el plano cartesiano, luego escriba el punto y su coordenada, trace el segmento y la línea recta pedida.

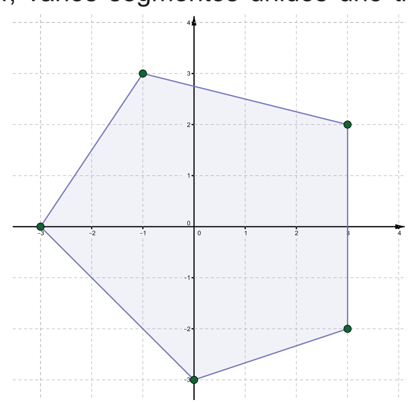
Como se observa el segmento es una parte de la recta limitado por dos puntos, en la gráfica es $\overline{MR}$.

Una recta es una línea continua en ambos extremos, se representa por dos puntos que pertenecen a dicha recta o por una letra minúscula, en la gráfica es: ℓ

Un polígono en el plano cartesiano sigue siendo una figura cerrada formado por varios lados (segmentos), es decir, varios segmentos unidos uno tras otro hasta formar una figura cerrada.

Ejemplo: Represente los puntos y únalos con segmentos de tal forma que se forme un polígono. D(-1,3), A(3,2), Q(3,-2), R(0,-3) y M(-3,0)

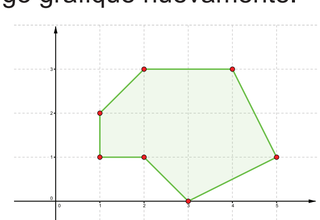
Ubique los puntos dados y dibuje segmentos uniendo los puntos en el orden dado. Se observa que la unión de dos segmentos forma el vértice del polígono.

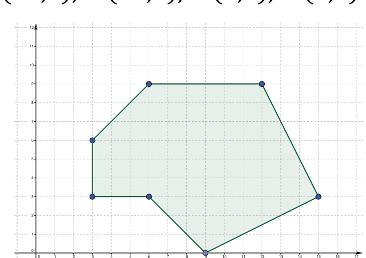


Ejemplo: forme un polígono con los puntos A(1,1), B(1,2), C(2,3), D(4,3), E(5,1) F(3,0), G(2,1) luego realice la operación 3(a,b) para graficar nuevamente.

Grafique el polígono con los puntos dados, luego multiplicar por 3 a cada componente: $A'(3,3), B'(3,6), C'(6,9), D'(12,9), E'(15,3), F'(9,0), G'(6,3)$

luego grafique nuevamente.





Se observa que la multiplicación por tres amplificó el polígono.

4. Distancias entre dos puntos en rectas horizontales y verticales

Para la distancia entre dos puntos de una recta o simplemente de un segmento es necesario considerar un punto de inicio y el otro un punto final, es decir, dado dos puntos colineales o dos puntos extremos de un segmento, uno de ellos será el inicial y el otro el punto final.

La distancia entre dos puntos queda definida como el valor absoluto de la diferencia entre el punto final y el punto inicial.

Distancias horizontales

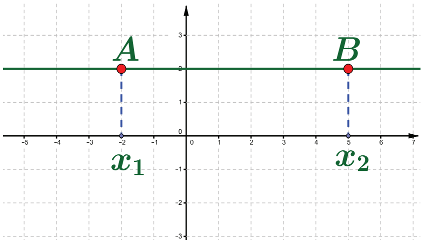
Si, A: punto inicial $d_{AB} = |x_2 - x_1|$

B: punto final

Otra fórmula equivalente es:

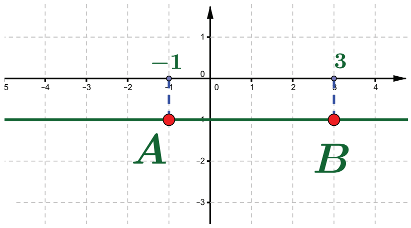
Si, A: punto final $d_{BA} = |x_1 - x_2|$

B: punto inicial



Ejemplo: Hallar la distancia horizontal entre los puntos A(-1,-1) y B(3,-1).

Grafique las coordenadas y aplica la fórmula.



DATOS:

$x_2 = 3\ (P.\ final)$

$x_1 = -1\ (P.\ inicial)$

La fórmula es:

$d_{AB} = |x_2 - x_1|$

$d_{AB} = |3 - (-1)|$

$d_{AB} = |3 + 1|$

$d_{AB} = |4| = 4$

Distancias verticales

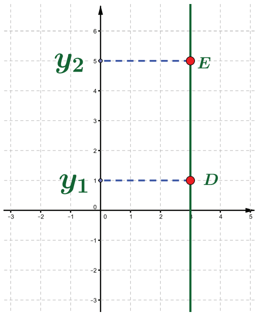
Si, D: punto inicial $d_{DE} = |y_2 - y_1|$

E: punto final

Otra fórmula equivalente es:

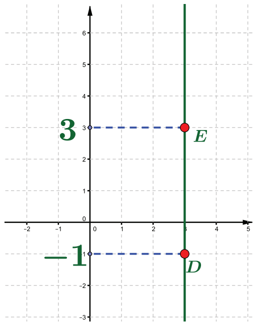
Si, A: punto final $d_{BA} = |x_1 - x_2|$

B: punto inicial



Ejemplo: Hallar la distancia horizontal entre los puntos A(1,-1) y B(1,3).

Grafique las coordenadas en el eje Y, y aplica la fórmula.



DATOS:

$y_2 = 3$ (P. final)

$y_1 = -1$ (P. inicial)

La fórmula es:

$d_{ED} = |y_2 - y_1|$

$d_{ED} = |3 - (-1)|$

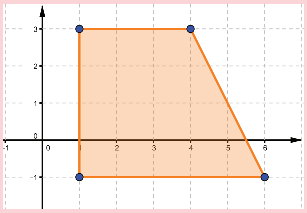
$d_{ED} = |3 + 1|$

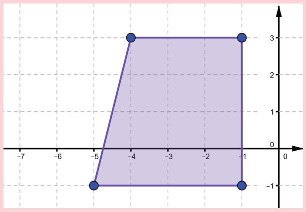
$d_{ED} = |4| = 4$

Bajo los ejemplos anteriores, la distancia horizontal y vertical representa las unidades contenidas entre los puntos del segmento, será la diferencia entre la coordenada final del segmento y su coordenada inicial.

SIMETRÍA AXIAL

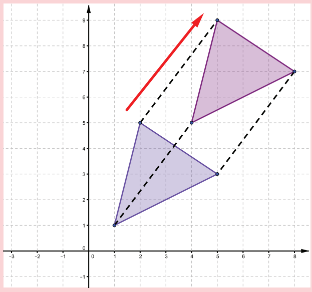
La simetría axial con respecto al eje 'Y' es cuando la primera componente de la coordenada cambia de signo, es decir, P(x,y) tendrá simetría respecto al eje 'Y' en P'(-x,y).





INVESTIGANDO

Junto a un compañero investiga qué tipo de transformación ha sufrido la siguiente figura geométrica

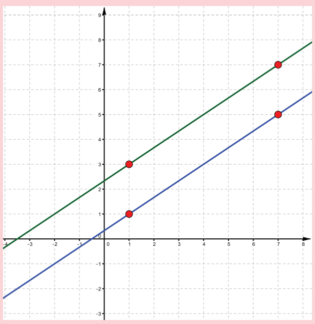


DESAFÍO

Si A(2,3) y la distancia entre AB es 5[u], hallar 'x' en B(x,3) y hallar 'y' en C(2,y). Indique además por qué existe dos posibles resultados.

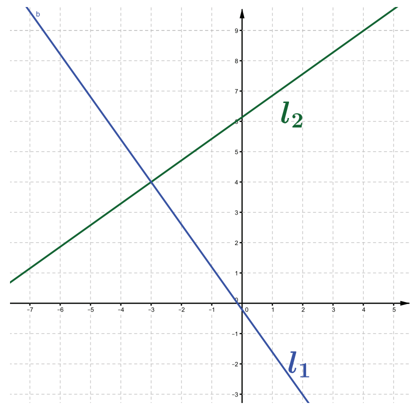
INVESTIGA

Coloque las coordenadas de los puntos sobre las rectas. Compare las coordenadas de los puntos marcados. Investiga ¿qué tipo de transformación es?



5. Rectas paralelas y perpendiculares

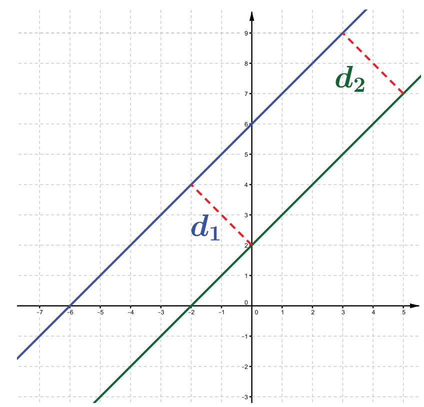
Dos rectas son paralelas cuando la distancia entre ambas rectas es igual y son perpendiculares cuando entre las rectas forman 90°.



Son perpendiculares

$\therefore l_1 \perp l_2$

El ángulo entre ellos es de $90°$



Son paralelas, entonces:

$l_1 \parallel l_2$

Y las distancias son iguales:

$d_1 = d_2$

Actividad

Realizamos lo siguiente:

Hallamos la distancia entre los puntos: a) A(-2,3) y B(5,3) b) C(-2,-3) y D(-2,3) c) E(4,0) y F(0,0)

Del polígono formado por los puntos A(2,3), B(-2,3), C(-1,-1), D(2,-1), hallamos y graficamos el otro polígono resultante de multiplicar por 2 a cada punto, es decir 2(a,b).

Trazamos dos rectas paralelas y dos perpendiculares a ellas, luego en cada par de intersecciones mida las distancias, luego de comparar los resultados, elaboramos una conclusión.

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Ubicación de un punto en el sistema de coordenadas geográficas, para ubicar un lugar en dicho sistema, primero debemos identificar la línea del ecuador y los paralelos, estas líneas imaginarias dividen a la tierra en latitudes tanto hacia el norte como al sur, se expresa en grados; se trazará una línea horizontal que pasa por el punto que se desea ubicar. En segundo lugar, identificamos el meridiano de Greenwich y la distancia de este meridiano a otro se denomina longitud y se expresa en grados de 0° a 180°; se traza una línea vertical por el punto que se quiere ubicar.

La intersección de ambas líneas nos dará la ubicación que se busca y se expresará como: X° latitud norte o sur, Y° longitud este u oeste.

Ejemplo: hallar la ubicación geográfica del lago Titicaca.

Trace una recta horizontal como se observa en el mapa de la derecha, luego trazamos otra línea vertical que también pase por el lago Titicaca. La intersección de dicha línea es la coordenada geográfica del lago.

Latitud: 16° S

Longitud: 69° O

Ahora verifique, anote en Google Maps las coordenadas halladas y se situará en el punto buscado.

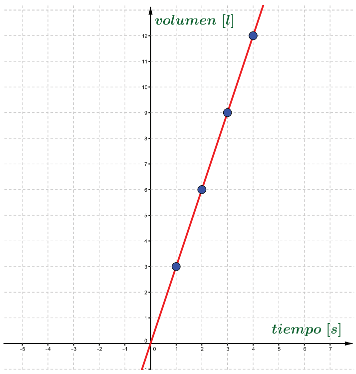
Ejemplo: Se está llenando un tanque de agua, de tal manera que cada segundo se aumenta 3 litros de agua, luego del 4to segundo se tiene registrado el siguiente cuadro. Represente la información en el plano geométrico.

Tiempo	1[s]	2[s]	3[s]	4[s]
Volumen	3 litros	6 litros	9 litros	12 litros

Forme los pares ordenados de la información obtenida, luego grafique las coordenadas y una con segmentos, así tendremos la representación gráfica de dicho fenómeno.

Tiempo	1[s]	2[s]	3[s]	4[s]
Volumen	3 litros	6 litros	9 litros	12 litros
Pares	(1,3)	(2,6)	(3,9)	(4,12)

Representacion gráfica de la proporcionalidad directa



COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Existe varias formas de expresar las coordenadas geográficas, por ejemplo, la latitud y longitud de Bolivia puede ser expresada por:

Estándar decimal simple
-16.290154 -63.588653
Grados decimales (GD)
16.2902° S 63.5887° O
Grados y Minutos Decimales (GMD)
16°17.409' S 63°35.319' O
Grados, Minutos y Segundos (GMS)
16°17'24.6" S 63°35'19.2" O

¿Qué sistema de coordenadas utiliza el GPS?

Sistema Geodésico Mundial Sistema de Referencia 1984 (WGS 84). Está basado en un un conjunto consistente de constantes y parámetros que describen el tamaño.

Su centro de origen es el centro gravitacional de la Tierra.

VALORACIÓN

Actividad

En clases conversamos sobre: ¿cómo los sistemas de coordenadas han ayudado a nuestro diario vivir y al desarrollo social? Tomamos nota sobre lo que dicen los compañeros en el aula.

....

....

....

PRODUCCIÓN

Producción teórica: resuelve los siguientes ejercicios y problemas.

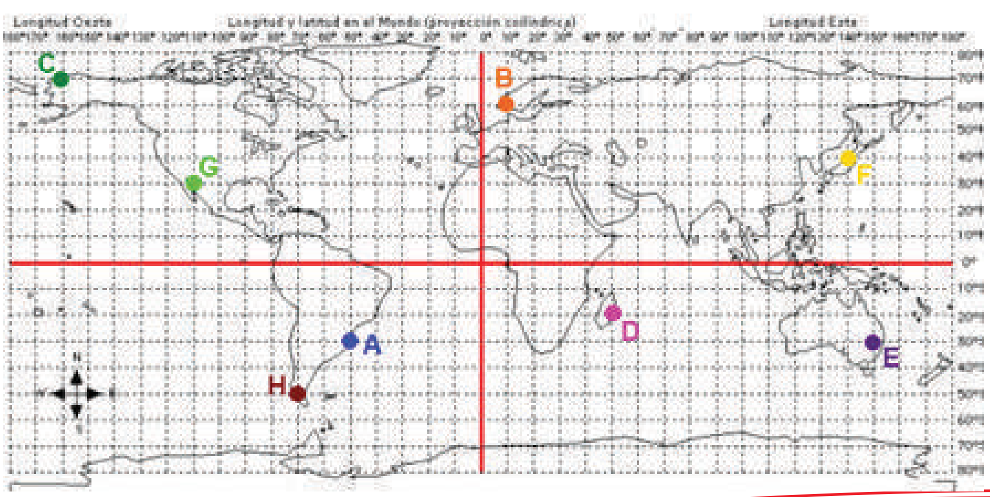
Ejercicio 1: resuelve:

1) Grafica el polígono formado por A(-4,6), B(3,2),

C(-7,-4), D (6,-6), luego sume el par (3,-1) a cada coordenada, finalmente grafique el polígono resultante.

2) Escribe, en sus tres formas, las coordenadas geográficas de los puntos marcados en el planisferio.

3) Si A(a+1, b), B(b+1, c+2), C(c-1, d-1) y D(2a-3, a+2), donde A=D y C=B, hallar a+b+c+d



REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

LOS NÚMEROS ENTEROS Y SU ORIGEN EN NUESTRO CONTEXTO

El conjunto de los números enteros

a) Con los números:

$$3.2; -1; 2; \frac{3}{2}; -5; +3; +2.71; \pi; 10$$

forme un conjunto de números enteros.

b) Un edificio cuenta con 7 plantas y 4 sótanos, exprese el conjunto de números enteros correspondiente a los pisos o plantas del edificio.

c) En una ciudad de Bolivia, la temperatura cambió de 3°C bajo cero a 17°C, exprese con números enteros la variación de temperatura.

Orden de los Z y su representación en la recta

a) Represente en la recta numérica los números: $-3, 0, +4, -7, +3$, luego ordene de mayor a menor.

b) En un sorteo, Juan ganó 10 Bs, José perdió 3 Bs, Luis se endeudó 5 Bs, Mario no ganó ni perdió y Luisa extravió su moneda de 2 Bs; represente dichas cantidades en la recta numérica y ordene de menor a mayor.

c) Registre todas medidas de las montañas más altas de Bolivia, luego represente en una recta numérica y ordene de mayor a menor.

d) Escriba >, < o = en los espacios punteados

i. $-3 \ \ldots \ +3$
ii. $|-12| \ \ldots \ |+12|$
iii. $-10 \ \ldots \ 0$
iv. $|-4| \ \ldots \ 0$

Valor absoluto

a) Halle los valores absolutos de:

$$|-4|; \ |+2|; \ |-6|$$

y exprese gráficamente su significado.

b) Resuelva las operaciones:

i. $|-2|+|-3|+|-3|=$
ii. $|-13|-|+5|=$

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS APLICADOS A LA COTIDIANIDAD

Adición y sustracción

Resuelva las sumas y restas correspondientes:

a) $-8+10-3-4+5=$
b) $(-151)-(-28)=$
c) $(-4)-6=$
d) $-(-1)+(-4)-(-2)+7=$
e) $11+(-3)-(+2)-8=$

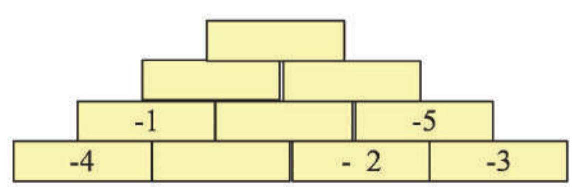
f) En la ciudad de La Paz la temperatura mínima fue 3°C bajo cero, luego ascendió a 17°C sobre cero. ¿cuánto fue la variación de temperatura?

g) En una rifa se recaudó 800 Bs, se premió por un monto de 300 Bs; el costo de organización fue de 150 Bs y los premios no recogidos alcanza un monto de 100 Bs. ¿Cuál es el saldo del evento?

h) ¿Qué número falta en los espacios?

i. - 23 + ___ = 0
ii. ___ + (-37) + 37 = 28
iii. ___ + 13 + 7 = 0
iv. 23 + ___ = 0
v. - 63 + ___ + 63 = 0
vi. - 35 + __ + 5 = -10

i) Completa la pirámide para que el número de cada ladrillo sea la suma de los dos que están por debajo.



Cálculos con signos de agrupación

a) $-6-(6-9-10)+(+3-13)=$
b) $-4+(-2-8+16)-(-20+9-10)=$
c) $7-[-3-(4-5)+2]=$
d) $-[-20-(7-12)+6]-[-4-(-3+6)]=$
e) $-5+\{-4-[6-(-2+1)-2]+1\}-3=$

4. Multiplicaciones, divisiones y propiedades

a) $(-15)(+2)(-3)(+1)(-1)=$

b) $(-756)(+2)(-230)(0)(-2023)=$

c) Calcule

$(-2023):1= \quad ,(+7):1= \quad ,0:1=$

d) Sean:

$0:(-2)= \quad ,0:(+2024)= \quad ,0:(-1)=$

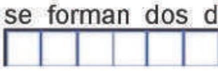
¿qué podemos decir del cero en la división?

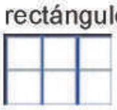
e) ¿Qué valor lleva 'x' y por qué?

i. $(-2024)\cdot x=(-4)\cdot(-2024)$
ii. $-13\cdot[(-100)\cdot x]=[(-13)\cdot(-100)]\cdot 12$
iii. $x\cdot(1)=-2024$
iv. $x\cdot(1)=-2025$
v. $2(-8+4)=2\cdot x+2\cdot 4$

f) Resuelva por distributividad

i. $-2(4-2+1-3)=$
ii. $(-3+4-5+1)\cdot(-10)=$

g) Con 6 cuadrados se forman dos diferentes rectángulos, como  y



i. ¿Cuántos se pueden armar con 8 cuadraditos?

ii. ¿Cuántos con 9, 11, 7 y 15 cuadraditos?

Saque alguna conclusión.

h) ¿Cuáles son todos los valores de 'm' para que $3\cdot(m)+8$ sea un entero negativo?

i) Si 'a' y 'b' son números enteros, ¿es verdad que 8a siempre resultará mayor que 2b. Demuestra con los ejemplos necesarios tu conclusión.

Operaciones combinadas

a) Según el orden de operadores, resuelva:

i. $16:(-4)-(-6+4)+(10-1)=$
ii. $-\{-24:(-9+3)-[-7\cdot(-11)]-1\}:2=$
iii. $[-20-(-18):2+(-1-2)]:(6-4\cdot 2)=$

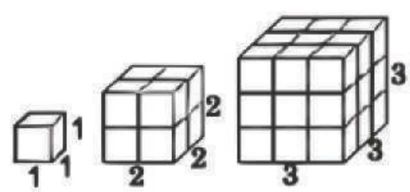
b) Realiza las operaciones:

1. $2(7-4)+3(1-5)+8=$
2. $-4(2-3-1)+2(8-5)+3(4-5)=$
3. $-6+\{3-[4-2(4-7)]\}=$
4. $8-\{5-4[-6+7(5-2)]-3\}=$
5. $-\{-6+4[2-5(4-3(4-3)+2(7-3))]+2\}=$
6. $6-[4-3(4-2)]-\{7-5[4-2(7-1)]\}=$
7. $-2+\{-3-[7+4(-2+5)]\}-4=$
8. $12+3\{-6+2[5-4(3-2)+5(7-8)]-5\}=$
9. $-2(-7+11)-5-\{-2+(-3)-[4-(2+3)]\}=$
10. $-11+7-2\{-4+1-[-2(-3+4)-2]-4\}=$

Operaciones con raíces y potencias

a) Un árbol tiene tres ramas y cada una tiene otras tres (sub ramas), por cada terminal de rama existe 3 frutos. ¿cuántos frutos hay en total?, ¿cuál su expresión como potencia?, ¿cuál es su gráfica?

b) Las siguientes figuras generan los números llamados cubos perfectos, encuentre los primeros 7 cubos perfectos expresados en potencia.



c) Calcule los siguientes ejercicios.

i. $(-1)^{2023}=$
ii. $\sqrt[2023]{-1}=$
iii. $3^2-(-2)^2-8-(-5)^2=$
iv. $3^2-(-2)^3-8-(-5)^2=$
v. $(-5)^3-6^2+(-3)^4-(-3)^3=$
vi. $\sqrt{16}-\sqrt[5]{-32}+\sqrt[3]{-100}=$
vii. $\sqrt{-[3^2-(-7)]}=$
viii. $\sqrt{-(2-3^3)}=$

6. Propiedades con raíces y potencias

Con la ayuda del profesor, explique, por qué está mal la resolución de los siguientes ejercicios.

a) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$, está mal, ¿por qué?

b) $\sqrt{(-4)\cdot(-9)} \neq \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$, explique por qué no es posible distribuir en ese caso en particular.

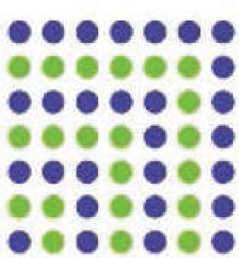
Resuelve los siguientes ejercicios usando las propiedades de las potencias y raíces.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}\cdot\sqrt[6]{64} =$
b) $\sqrt{125} \div \sqrt{25} =$
c) $\sqrt[3]{(-2)^9} - \sqrt[2023]{(-2)^{2023}} =$
d) $\frac{[(-3)^2]^{-3}\cdot[(-2)^{-2}]^3}{(-3)^{-2}\cdot(-3)^{-4}\cdot(-2)^{-10}\cdot(-2)^3} =$
e) $\frac{(2\cdot7)^3\cdot(2\cdot7)\cdot(-2)^3\cdot(-7)^3}{(-2)^3\cdot(-7)^2\cdot7\cdot2}$

Operaciones combinadas

a) $-(-28)^0 - \sqrt{10^2-6^2} - \sqrt{10+(-1)^3} =$
b) $|-6| - \sqrt[3]{(-5)^0+63} - 2 \div (2023)^0 =$
c) $-40 \div (-2)^3 + \sqrt[3]{3\cdot(-10)+(-2)^2-1-2}$
d) $\sqrt{2^4}\cdot\sqrt[5]{(-3)^3} + \sqrt{(-10)^0\cdot 8 \div 2 + 2} =$

e) Cada bolita es un número impar, la suma de dichos números es una potencia, halle todas las potencias.

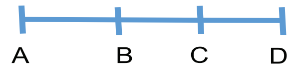


Observa el patrón
$1 = 1 \ldots 1^2$
$1 + 3 = 4 \ldots 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 \ldots 3^2$

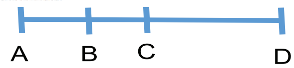
GEOMETRÍA

Operaciones con segmentos.

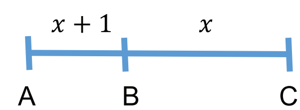
a) Si AB=3, BC=5 y AD=10, calcula CD.



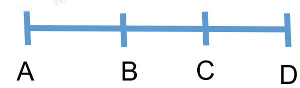
b) Si AB=BC=2 y "C" es punto medio de AD, calcula AD.



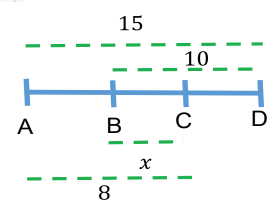
c) Calcula el valor de "x" si AC=11.



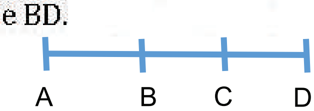
d) Si AB=4, BC=5 y CD=6, calcula la distancia entre los puntos medios de AB y CD.



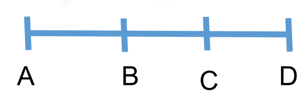
e) Calcula "x".



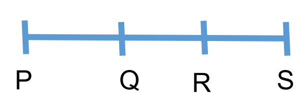
f) Calcula AC, si AB=5, BD=12 y "C" es punto medio de BD.



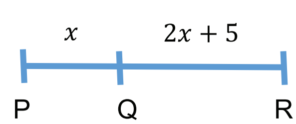
g) Si AC=BD=5 y AD=8, halla BC.



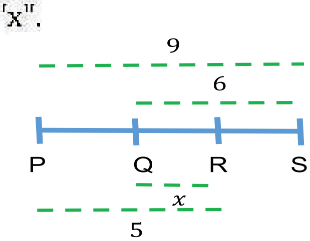
h) Si PR=QS=7 y PS=10, halla QR.



i) Calcular "x" si PR=20.



j) Calcular "x".



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FORMAS

Plano cartesiano

Representa gráficamente, en el plano cartesiano, los siguientes puntos:

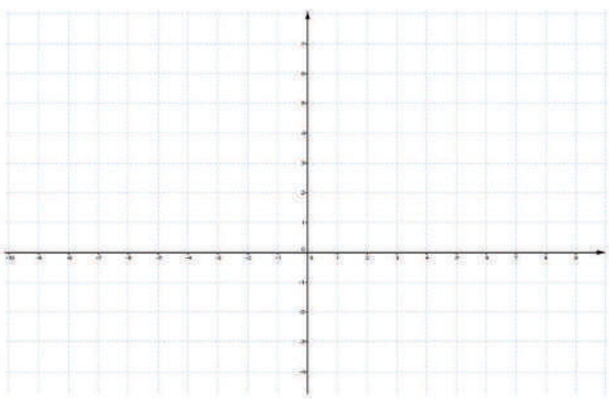
(-4,3); (-2,1); (3,-4); (0,-2); (-3,-1); (-4,0);

(5,4); (2,-5); (-1,-3); (4.1); (5,-6); (-6,-3);

(-5,5); (-3,1); (4,1); (2,5); (-1;-4); (1; -3);

(1; -8); (0;9); (-2;0); (-3; -1); (-3; -3);

(-4,2); (-3,-1); (0; -9) (1;2); (-1; 9)



¿Son paralelas o perpendiculares?

a) Recta IJ, que pasa por los puntos I(-6;6) y J(2;10) Recta KL, que pasa por los puntos K(-8; -2) y L(4;6).

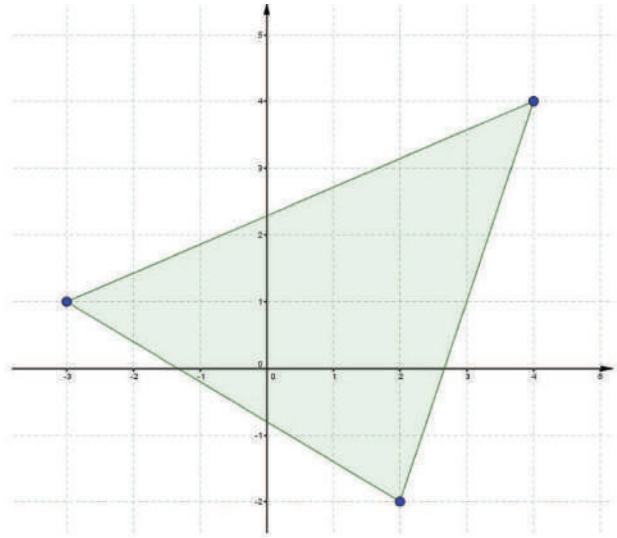
b) Recta MN, que pasa por los puntos M(6;0) y N(-6;6) Recta OP, que pasa por los puntos O(8;4) y P(4;6).

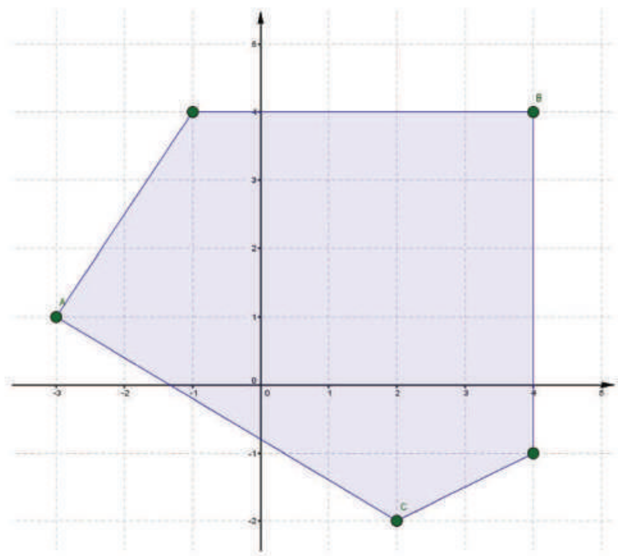
c) Recta QR, que pasa por los puntos Q(4;4) y R(6;6) Recta ST, que pasa por los puntos S(4;2) y T(2;4).

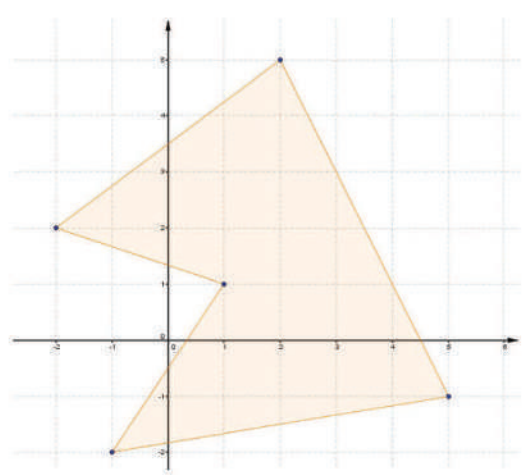
d) Recta AB, que pasa por los puntos A(4;0) y B(2;4) Recta CD, que pasa por los puntos C(0;2) y D(-2;6).

e) Recta EF, que pasa por los puntos E(4;0) y F(-4;2) Recta GH, que pasa por los puntos G(0;2) y H(-8;4).

De los siguientes gráficos, anota las coordenadas de sus vértices:







(Ejercicios recopilados)

LOS NÚMEROS RACIONALES

PRÁCTICA

Juan David es un estudiante que asiste puntualmente a clases en su unidad educativa, sus padres son agricultores y diariamente le dan 50 centavos, con lo que compra un pan para alimentarse en el recreo. Cierto día ve que su amigo no traía recreo, compartió su pan partiéndolo por la mitad. Los fines de semana suele trabajar para ayudar a su familia, entonces su recreo incrementó a Bs. 3, ahora va a la tienda con tres de sus amigos para comprar 5 panes, guarda 50 centavos para el recreo del día siguiente. Como a él le gusta practicar la igualdad, repartió los panes en partes iguales entre sus amigos y él.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en función de la lectura anterior:

- ¿Cómo repartió Juan David los cinco panes entre sus 3 amigos y él?

- ¿En qué actividades de la vida diaria se pueden emplear los números racionales?

TEORÍA

1. Origen de los números racionales.

Las matemáticas nacieron por la necesidad de contar, operar, repartir y otras que el hombre consideraba importante para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división. En cierto momento surgió la necesidad de repartir un pan en varios pedazos para compartir entre todos y los egipcios fueron una civilización que utilizaron fracciones para resolver problemas de repartición de alimentos entre varios hombres, de la misma manera los babilonios empleaban fracciones cuyo denominador es potencia de 60.

Los números racionales son importantes en la vida cotidiana para realizar compras o ventas de productos agrícolas, productos cárnicos, productos lácteos, repartir un pastel en un cumpleaños, repartir una pizza o repartir una fruta en partes iguales y otras actividades que se desarrollan de manera habitual.

CURIOSIDAD MATEMÁTICA

¿Cuánto es la mitad de la cuarta parte de 12?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$

El doble de la cuarta parte de 18 es:

a) $\frac{9}{3}$ b) $\frac{9}{2}$ c) 9

¿Cómo se puede repartir una torta en 8 partes con solo 3 cortes?

2. El conjunto de los números racionales.

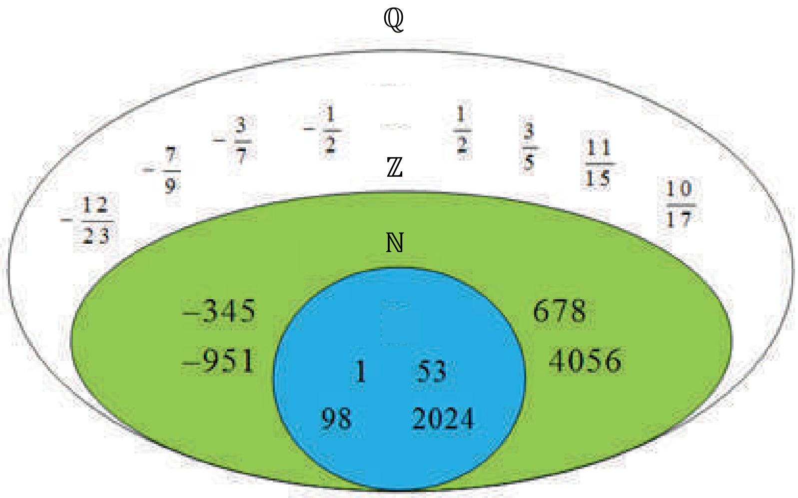
Se considera número racional a todo número que se representa como el cociente de 2 números enteros con denominador diferente de cero, se expresa como fracción de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \quad ; \quad b \neq 0}$$

donde a y b son números enteros y b es diferente de cero.

Simbólicamente se representa:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} ;\ b \in \mathbb{Z} ;\ b \neq 0 \right\}$$



RECUERDA

Los números naturales ℕ comprenden todos los números positivos.

Los números enteros ℤ comprenden todos los números negativos, el cero y los números positivos.

Los números racionales ℚ comprenden a todos los números representados como una fracción.

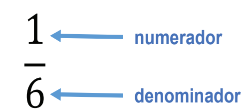
Elementos de la fracción.

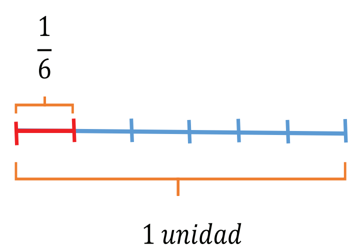
Toda fracción tiene los siguientes elementos; numerador, línea de fracción y denominador, estas se pueden ver en la imagen de la derecha.

Las fracciones se emplean para mostrar partes de un todo.

Numerador. Es el número de partes seleccionadas y está ubicada en la parte superior de la fracción.

Denominador. Es el número de partes iguales en la que se divide la unidad y se encuentra en la parte inferior de la fracción.





Si dividimos la unidad en 6 partes, cada una de ellas representa $\frac{1}{6}$.

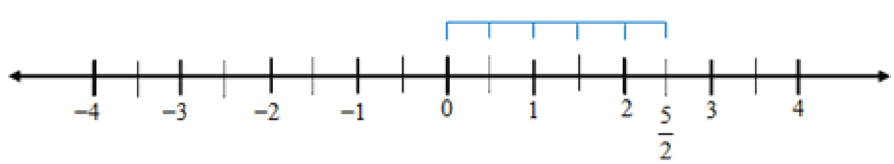
Fuente:https://toctocmatematicas.blogspot.com/p/elementos-de-una-fraccion.html

3. Los números racionales en la recta numérica.

Para representar un número racional $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, es necesario dividir cada segmento unidad en b partes iguales y se toman a de esas partes.

Ejemplo:

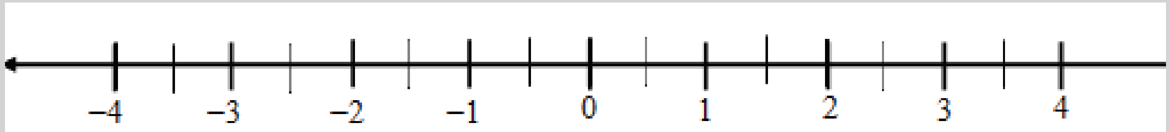
Representamos en la recta numérica el número racional $\frac{5}{2}$



Actividad

Representamos los siguientes números racionales, en la recta numérica:

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{7}{2}$



4. Representación gráfica y relación de orden de los números racionales.

Para representar gráficamente los números racionales se emplean figuras geométricas, generalmente se utilizan los rectángulos o circunferencias, pero es posible el empleo de otras figuras geométricas como el triángulo, el hexágono, entre otros.

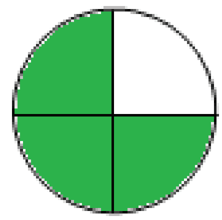
Ejemplo:

Realizamos la representación del número racional $\frac{3}{4}$

Para representar el número racional seguiremos los siguientes pasos:

- Dibujamos una circunferencia, observamos que el denominador es 4, por tanto, lo dividimos entre 4.

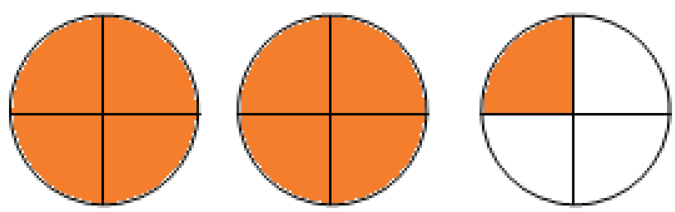
- Como el numerador es 3 pintamos 3 partes. La parte coloreada $\frac{3}{4}$



Ejemplo:

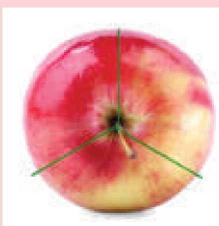
Realizamos la representación gráfica del número racional $2\frac{1}{4}$

Representamos la parte entera con dos círculos coloreados y un tercer círculo lo dividimos en cuatro partes iguales y pintamos una parte.



¡GENIAL!

¿Cómo dividir una manzana en tres partes iguales?



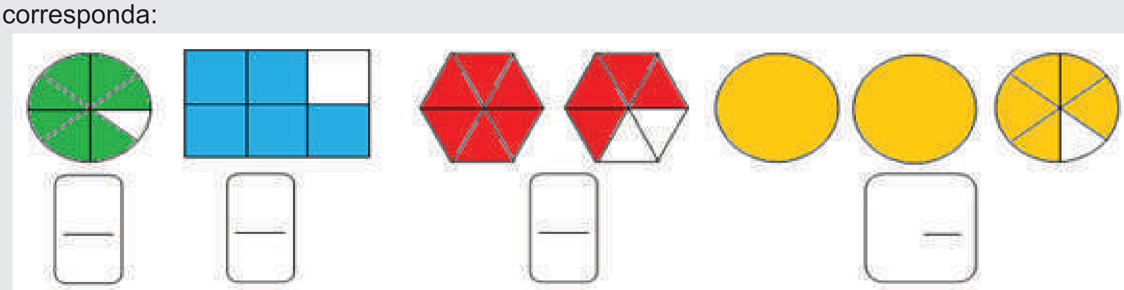
Actividad

Realizamos lo siguiente:

- Representamos los siguientes números racionales:

$a)\ \frac{7}{9}$ $b)\ \frac{8}{7}$ $c)\ 3\frac{2}{3}$ $d)\ \frac{3}{5}$ $e)\ \frac{9}{4}$

- Observamos los siguientes gráficos, completemos los numeradores y denominadores según corresponda:



5. Simplificación de fracciones.

Simplificar una fracción significa convertirla en otra fracción equivalente, cuyo numerador y denominador sean primos entre sí, reduciéndolos a su mínima expresión mediante la división.

Fracción equivalente

Dos fracciones son equivalentes si el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, es igual al producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

En símbolos tenemos:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a\cdot d=b\cdot c}$$

Ejemplo:

Comprobar si las fracciones son equivalentes:

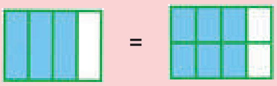
$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$$

Para comprobar multiplicamos de forma cruzada.

$$4\cdot 10=5\cdot 8$$
$$40=40$$

Ambos resultados coinciden, por tanto, las fracciones son equivalentes.

TOMA NOTA



$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$
$$3\cdot 8 = 6\cdot 4$$
$$24 = 24$$
$$\frac{3}{4} \; y \; \frac{6}{8}$$

Son fracciones equivalentes.

Actividad

Comprobamos si las siguientes fracciones son equivalentes. En caso de que lo sean anotamos SI en el espacio, en caso contrario anotamos NO.

a) $\frac{8}{9}=\frac{24}{28}$ Las fracciones _____son equivalentes.

b) $\frac{7}{8}=\frac{42}{48}$ Las fracciones _____son equivalentes.

c) $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ Las fracciones _____son equivalentes.

d) $\frac{6}{7}=\frac{18}{20}$ Las fracciones _____son equivalentes.

e) $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$ Las fracciones _____son equivalentes.

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción, se divide el numerador y el denominador por sus factores comunes hasta convertirlos en primos entre sí, es decir, que se dividen el numerador y denominador por el máximo común divisor.

TOMA NOTA

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{6}{8}$$

Son fracciones equivalentes porque una es la fracción simplificada de la otra.

Dada la fracción $\frac{6}{8}$, sacando mitades al numerador y denominador $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Así, simplificando $\frac{6}{8}$ encontramos $\frac{3}{4}$.

Ejemplo

Simplificar la fracción $\frac{12}{20}$

$\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{20}^{10}}$, sacamos la mitad (dividimos entre 2), resulta $\frac{6}{10}$.

Seguimos simplificando: $\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}^{5}}$ y llegamos a la fracción irreductible de $\frac{3}{5}$.

De este modo, simplificando $\frac{12}{20}$ obtendremos $\frac{3}{5}$.

Ejemplo

Simplificar la fracción $\frac{60}{90}$

Para simplificar esta fracción, dividiremos entre 2 el numerador y el denominador, luego entre 3 y por último entre 5.

$$\frac{60 \div 2}{90 \div 2} = \frac{30}{45} \rightarrow \frac{30 \div 3}{45 \div 3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

El resultado de simplificar la fracción $\frac{60}{90}$ es $\frac{2}{3}$

Actividad

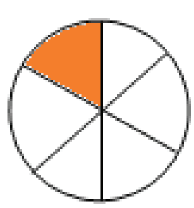
Simplificamos las siguientes fracciones:

a) $\frac{20}{36}$ b) $\frac{90}{120}$ c) $\frac{18}{24}$ d) $\frac{48}{72}$ e) $\frac{60}{150}$

f) $\frac{30}{96}$ g) $\frac{100}{180}$ h) $\frac{36}{48}$ i) $\frac{90}{120}$ j) $\frac{20}{48}$

6. Fracciones propias, impropias y mixtas

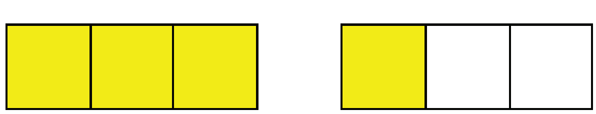
Fracciones propias. Las fracciones son propias cuando el numerador es menor que el denominador.



$\frac{1}{6}$ Se lee "un sexto"

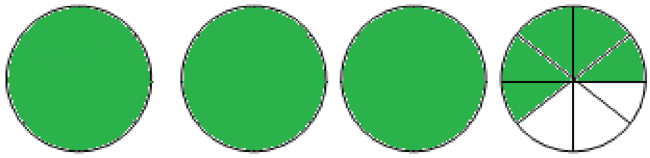
Observamos que la unidad se divide en 6 partes y se colorea una parte.

Fracciones impropias. Las fracciones son impropias cuando el numerador es mayor que el denominador.



$\frac{4}{3}$ Se lee "cuatro tercios"

Fracciones mixtas. Las fracciones mixtas son la combinación de un número entero y una fracción propia.



$3\frac{5}{8}$ Se lee “tres enteros cinco octavos”

Convertir de fracción impropia a mixta

Para convertir una fracción impropia en una fracción mixta, se divide el numerador entre el denominador. El cociente será la parte entera del número y el residuo será el numerador de la fracción restante y tendrá el mismo denominador que la fracción.

$$\frac{7}{2} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \hline (1) & 3 \end{array} \quad \therefore \quad \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Actividad

Convertimos las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas:

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{6}{5}$

Convertir de fracción mixta a impropia

Para convertir una fracción mixta a fracción impropia, se siguen los siguientes pasos:

- Multiplicamos la parte entera por el denominador
- El resultado obtenido sumamos al numerador.
- Escribimos el resultado obtenido en el numerador.

Ejemplo:

$$3\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3+5}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

Actividad

Convertimos las siguientes fracciones mixtas a fracciones impropias:

$a)\ 3\frac{1}{3}$ $b)\ 4\frac{1}{2}$ $c)\ 2\frac{2}{5}$ $d)\ 5\frac{2}{7}$ $e)\ 2\frac{1}{4}$

VALORACIÓN

Luego de adquirir saberes y conocimientos respecto a los números racionales en la comunidad, se pide responder de manera reflexiva las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se emplean los números racionales en la comunidad, barrio o zona?
- ¿Por qué es importante el empleo de números racionales en la vida cotidiana?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se pueden aplicar al emplear los números racionales?

PRODUCCIÓN

Elaboremos una receta con alimentos característicos de la región o que se pueden adquirir en el mercado o feria, empleando los números racionales de acuerdo a la cantidad necesaria para la preparación.

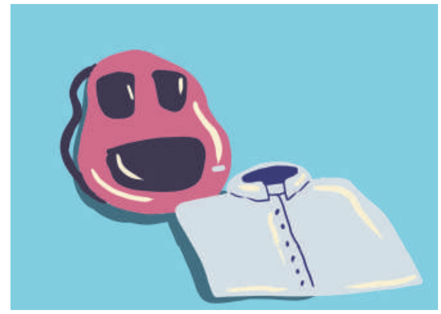
OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

PRÁCTICA

Jhonatan cuenta con Bs. 400, decide salir de compras al mercado.

En el mercado compra un libro con tres octavas partes de su dinero, una camisa con la quinta parte y una mochila con tres décimos de su dinero.

Una vez realizada la compra retorna alegre porque tenía un saldo que podía disponer en sus gastos de la semana



Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto dinero gastó Jhonatan en las compras realizadas y cuánto es el saldo?
- ¿Cuánto cuesta cada objeto?

TEORÍA

1. Adición y sustracción de números racionales

En las operaciones de adición de números racionales existen dos casos:

- Adición de fracciones homogéneas que tienen el mismo denominador.
- Adición de fracciones heterogéneas que tienen diferente denominador.

Adición y sustracción de fracciones homogéneas

Para sumar o restar dos o más fracciones homogéneas, se suman o restan los numeradores y se mantiene el denominador. Simbólicamente se tiene:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}}$$

Ejemplo:

Sumar las siguientes fracciones:

$$a)\ \frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5} \qquad b)\ \frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}$$

Ejemplo:

Sumar y restar las siguientes fracciones:

$$\frac{7}{9}+\frac{2}{9}-\frac{5}{9}$$

Se debe operar de la siguiente manera:

$$\frac{7}{9}+\frac{2}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7+2-5}{9}=\frac{4}{9}$$

PIENSA UN MOMENTO

Problema 1.

Susana compró un televisor con Bs. 900, de los cuales la mitad del costo lo pagó al contado y el resto del saldo lo debe pagar en tres cuotas.

¿Cuánto debe pagar en cada cuota?

Problema 2.

Pedro y Alberto recibieron de su padre cada uno Bs. 15. Pedro gastó $\frac{2}{3}$ del dinero que recibió y Alberto gastó los $\frac{3}{5}$ del dinero recibido. ¿Quién gastó más dinero?

Adición y sustracción de fracciones heterogéneas

Para sumar y restar fracciones heterogéneas, se reducen los denominadores al común denominador (mínimo común múltiplo), se suman o restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas. Simbólicamente se tiene:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{bd}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{bd}}$$

Para sumar y restar dos o más fracciones heterogéneas seguimos los siguientes pasos:

1. Se obtiene el común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores).
2. Se divide el común denominador entre el denominador de primera fracción y se multiplica por su numerador respectivo, este proceso se hace también con la otra fracción.
3. En la nueva fracción, se mantiene el común denominador y el numerador, se suman y restan los resultados.
4. Se simplifica la fracción resultante si es posible hasta obtener una fracción irreductible.

Ejemplo:

Sumar las siguientes fracciones heterogéneas: $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

Calculamos el m. c.m.de 4 y 6 (12)

Dividimos el m. c. m. entre el denominador y el resultado obtenido multiplicamos por el numerador.

$$\frac{12}{4}=3 \quad \wedge \quad \frac{12}{6}=2$$
$$3\cdot 3=9 \quad \wedge \quad 2\cdot 5=10$$

Realizamos las operaciones de adición.

$$\frac{3\cdot 3+5\cdot 2}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$$

Si es fracción impropia se convierte en número mixto

$$\begin{array}{l|l} 19 & 12 \\ \hline (7) & 1 \end{array} \quad \therefore \quad \frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

Ejemplo:

Sumar y restar las siguientes fracciones heterogéneas: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$

Calculando el m. c. m. de 2, 3 y 5 obtendremos 30.

Realizamos las operaciones de adición y sustracción.

$$\frac{15\cdot 1+10\cdot 2-6\cdot 4}{30}=\frac{15+20-24}{30}=\frac{11}{30}$$

¿CÓMO SE HACE?

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

$$m.c.m.\ (4,6)=2^2\cdot 3=12$$

¿CÓMO SE HACE?

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & \end{array}$$

$$m.c.m.\ (2,3,5)=2\cdot 3\cdot 5=30$$

Actividad

Operamos las fracciones:

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=$ b) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=$ c) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}-\frac{2}{7}=$ d) $\frac{3}{10}-\frac{5}{10}+\frac{9}{10}=$ e) $\frac{8}{15}+\frac{7}{15}-\frac{2}{15}=$

f) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=$ g) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{6}=$ h) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=$ i) $\frac{4}{5}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=$ j) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

IMPORTANTE

- *Se sobreentiende que todo número tiene a la unidad como denominador, así un número entero tiene la unidad como denominador.*
- *Si una fracción no lleva signo, se sobreentiende que es positiva.*

2. Multiplicación y división de números racionales

Multiplicación de números racionales

Para multiplicar números racionales se siguen los siguientes pasos:

1. Obtenemos el numerador multiplicando los numeradores entre sí aplicando la ley de signos.
2. Obtenemos el denominador multiplicando los denominadores entre sí.
3. Simplificar el producto hasta obtener una fracción irreductible.

Ejemplo

Multiplicar las siguientes fracciones:

$$\left(+\frac{5}{9}\right)\left(+\frac{7}{8}\right)=\frac{5\cdot 7}{9\cdot 8}=\frac{35}{72}$$

Ley de signos de la multiplicación →

$(+)\cdot(+)=(+)$
$(+)\cdot(-)=(-)$
$(-)\cdot(+)=(-)$
$(-)\cdot(-)=(+)$

Ejemplo:

Multiplicar las siguientes fracciones:

$$\left(+\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{6}{8}\right)=\frac{4\cdot(-6)}{7\cdot 8}=\frac{-\cancel{24}^{\cancel{12}^{\cancel{6}^{3}}}}{\cancel{56}^{\cancel{28}^{\cancel{14}^{7}}}}=-\frac{3}{7}$$

Actividad

Multiplicamos las siguientes fracciones:

a) $\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{4}=$ b) $\left(-\frac{15}{7}\right)\left(-\frac{4}{9}\right)=$ c) $\left(+\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)=$ d) $\frac{12}{5}\cdot\frac{8}{3}=$ e) $10\left(-\frac{3}{8}\right)=$

División de números racionales

En la división de números racionales, el numerador es el producto de los extremos y el denominador el producto de los medios, tomando en cuenta:

Ley de signos de la división

$(+)\div(+)=(+)$
$(+)\div(-)=(-)$
$(-)\div(+)=(-)$
$(-)\div(-)=(+)$

- Por numerador el producto de extremos
- Por denominador el producto de los medios

Medios $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$ Extremos

Ejemplo:

Dividir las siguientes fracciones.

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{-2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{-\cancel{10}^{5}}{\cancel{12}^{6}}=-\frac{5}{6}$$

Multiplicamos los extremos y medios y simplificamos hasta convertir en fracción irreductible.

Para realizar la división de manera horizontal, la división se convierte en multiplicación al invertir la fracción del divisor y se resuelve como multiplicación de fracciones.

Ejemplo:

Dividir las fracciones $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} =$

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{20}^{10}} = \frac{9}{10}$$

De otro modo, se puede multiplicar de forma cruzada el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

Ejemplo:

Dividir las siguientes fracciones: $\frac{4}{5} \div \frac{8}{9} =$

$$\frac{4}{5} \div \frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{\cancel{36}^{\cancel{18}^{9}}}{\cancel{40}^{\cancel{20}^{10}}} = \frac{9}{10}$$

Actividad

Dividimos las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{9}} =$ b) $\frac{14}{15} \div \frac{2}{3} =$ c) $\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{7}{8}} =$ d) $\frac{11}{5} \div \frac{7}{3} =$ e) $\frac{25}{35} \div \frac{-5}{6} =$

3. Potenciación y radicación de números racionales

Potenciación de números racionales

Es una operación que consiste en la multiplicación reiterada como indica el exponente en el numerador y el denominador. Simbólicamente se tiene.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}}$$

EXPONENTE, BASE Y POTENCIA:

Exponente, indica la cantidad de veces que se repite la base.

Base, es el factor que se repite.

Potencia, es el resultado.

Elementos de la potenciación:

Exponente

Base $\rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16} \leftarrow$ Potencia

Signos de la potenciación de números racionales

- Si la base es positiva y el exponente es par o impar, el signo de la potencia siempre será negativa.

- Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia será negativa.

- Si la base es negativa y el exponente es par, la potencia será positiva.

Ejemplo:

Calcular la potencia de la siguiente fracción:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$$

EJEMPLO

Calcular la potencia de la siguiente fracción:

$$\left(-\frac{6}{7}\right)^3 = \left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{216}{343}$$

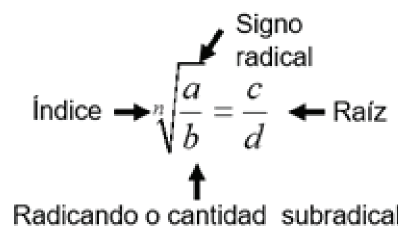
Actividad

Calculamos la potencia de las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5=$ b) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3=$ c) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4=$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^4=$ e) $\left(\frac{11}{14}\right)^2=$ f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^6=$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^7=$

Radicación de números racionales

Considerada como la operación inversa de la potenciación, donde se extrae la raíz n-ésima de un número, concretamente consiste en calcular la base de una potencia conociendo su exponente.



EJEMPLO

Calcular la raíz de la siguiente fracción.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{4^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{3}{4}$$

Cálculo de radicales

Para calcular el radical de un número racional, los exponentes del radicando deben ser iguales al índice.

Ejemplo

Calcular la raíz de la siguiente fracción.

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2}{3}$$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver cualquier problema matemático con números racionales debemos leer y comprender el problema luego elegimos una estrategia de resolución o plan para resolver el problema.

Problema. Brayan compró una memoria USB (pendrive) de 16 gigabytes de capacidad para almacenar música, fotos e información, de los cuales $\frac{1}{2}$ de su capacidad ocupa en almacenar música, $\frac{1}{4}$ de su capacidad almacena fotos y $\frac{1}{8}$ de su capacidad almacena información relacionada a trabajos de estudio. ¿Qué cantidad de su memoria está ocupada?

Datos:

Música $= \frac{1}{2}$

Fotos $= \frac{1}{4}$

Información $= \frac{1}{8}$

Solución:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{8} \cdot 16 = 14$$

Brayan ocupa 14 gigabytes de su memoria USB

Problema. Un padre de familia cobró su sueldo de Bs. 2000 y realizó los gastos de la siguiente manera: $\frac{1}{4}$ lo destinó a cancelar deudas, con $\frac{1}{10}$ compró 1 quintal de arroz, con $\frac{3}{40}$ compró 1 quintal de azúcar y con $\frac{1}{40}$ de compró un bidón de aceite. ¿Cuánto gasto en total y cuánto dinero le sobra?

Datos: $Deuda = \frac{1}{4}$ $\quad Arroz = \frac{1}{10}$ $\quad Azúcar = \frac{3}{40}$ $\quad Aceite = \frac{1}{40}$

Solución:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{3}{40} + \frac{1}{40} = \frac{10 + 4 + 3 + 1}{40} = \frac{18}{40}$$

$$\frac{18}{40} \cdot 2000 = 900$$

$$2000 - 900 = 1100$$

El padre de familia gastó Bs. 900 y le sobra Bs. 1100.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

a) María fue al mercado y compro $\frac{3}{4}$ kilos de arroz, $\frac{5}{4}$ kilos de fideo y $\frac{6}{4}$ kilos de azúcar ¿Cuántos kilos de alimentos compró en total?

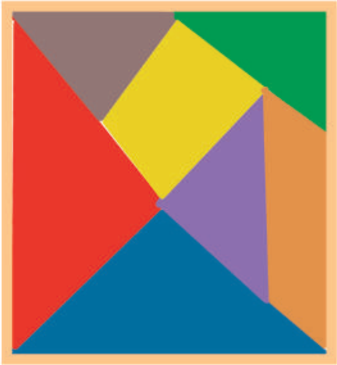
b) Un trabajador gasta $\frac{1}{4}$ de su sueldo en pagar alquiler, $\frac{1}{3}$ de su sueldo en alimentación, y $\frac{1}{6}$ de su sueldo en vestimenta. ¿Cuánto gasta, si tiene un sueldo es Bs. 3000?

VALORACIÓN

Luego de adquirir saberes y conocimientos respecto al tema de operaciones con números racionales, respondemos de manera reflexiva, las siguientes preguntas:

¿Por qué es importante realizar operaciones con números racionales en la vida cotidiana?

¿En qué situaciones de la vida cotidiana realizas operaciones con números racionales?



PRODUCCIÓN

Elaboramos un Tangram con materiales reciclables como cartón, u otros materiales y realiza operaciones con las partes del Tangram.

NÚMEROS DECIMALES COMO CONSECUENCIA DE LOS RACIONALES

PRÁCTICA

María del Carmen fue a la tienda a comprar algunos alimentos para preparar el desayuno por encargo de su madre, compró 5 huevos a Bs. 4,50, un kilogramo de azúcar a Bs. 5,50, una bolsa de fideos de 400 gramos a Bs. 3,70, cinco panes a Bs. 2,50. Para pagar lo que había adquirido sacó un billete de Bs. 20. La señora que atiende la tienda le dio el cambio correspondiente con monedas.

Actividad

Luego de analizar la lectura anterior, respondemos:

- ¿Según la lectura, cuánto cuesta cada unidad de huevo?
- ¿Cuánto es la suma total por las compras realizadas por María del Carmen?
- ¿Cuánto de cambio recibió María del Carmen por las compras realizadas?

TEORÍA

NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales se originan a partir de una división inexacta, se basa en el sistema de numeración decimal.

Por ejemplo, cuando se desea partir un pan entre dos personas, esta se representa por 0,5 que significa la mitad de un todo o 0,25 que representa la cuarta parte de un todo.

Todos los números decimales tienen una fracción de origen.

1. Números decimales en la comunidad

Los números decimales se aplican de manera constante en la vida cotidiana, como al realizar la compra de productos de la canasta familiar, por ejemplo un huevo cuesta Bs. 0,90 o 90 centavos, el kilo de azúcar cuesta Bs. 5,50, la compra de carburantes como el diesel que tiene un costo de Bs. 3,72, la gasolina de Bs. 3,74, lo que se compra en el recreo galletas que cuestan Bs. 0,50 (50 centavos), la estatura de cada estudiante, medidas de las paredes, pupitres y otros objetos que existen en nuestro contexto. Con lo anteriormente expuesto afirmamos que los números decimales son importantes en nuestra comunidad para realizar diferentes actividades que beneficien al desarrollo de nuestro país.

2. Definición de números decimales

Los números decimales son números que están compuestos, por una parte entera y la otra parte decimal (menor que la unidad), estas dos partes están separadas por una coma o punto decimal.

Parte entera $\rightarrow$ **5,0749** $\leftarrow$ Parte decimal

Coma decimal

ENTERO	COMA DECIMAL	DÉCIMO	CENTÉSIMO	MILÉSIMO	DIEZ MILÉSIMO
5	,	0	7	4	9

Se lee cinco enteros, setecientos cuarenta y nueve, diez milésimos

3. Conversión de fracciones a decimal exacto o periódico

Conversión de fracción a decimal exacto

Para convertir una fracción propia o impropia en decimal exacto dividimos el numerador entre el denominador, el resultado es un decimal. Si la fracción es mixta se mantiene el entero y se divide la fraccionaria que pasa a ser la parte decimal.

Ejemplo:

Convertir la fracción $\frac{3}{4}$ a número decimal

Si observamos el 3 no es divisible entre 4 porque es menor, entonces en el dividendo aumentamos cero al 3 y se convierte en 30 y el cociente anotamos cero seguido de una coma y procedemos a dividir de forma natural.

$$\begin{array}{l|l} 30 & 4 \\ \hline \;\;20 & 0,75 \\ \;\;(0) & \end{array}$$

Así $\frac{3}{4}$ Equivale a 0,75

Ejemplo:

Convertir la fracción mixta $2\frac{4}{5}$ a número decimal.

Se mantiene la parte entera, en este caso el 2 y se divide la fracción.

$$\begin{array}{l|l} 40 & 5 \\ \hline (0) & 0,8 \end{array}$$

Así, $2\frac{4}{5}$ Equivale a 2,8

Conversión de fracción a decimal periódico puro

Se considera un decimal periódico puro, cuando la parte decimal está formada uno o más números repetidos indefinidamente. Para denotar el número periódico se anota un arco encima del primer periodo.

Ejemplo: Convertir la fracción $\frac{1}{3}$ a decimal periódico.

$$\begin{array}{l|l} 10 & 3 \\ \hline \;\;10 & 0,33... \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;... & \end{array}$$

$\frac{1}{3}$ Equivale a $0,3$ es un número decimal periódico puro.

Conversión de fracción a decimal periódico mixto

Se considera un decimal periódico mixto, cuando la parte decimal está formada por un número que no se repite que recibe el nombre de anteperiodo y una parte decimal que se repite indefinidamente. Para denotar el número periódico se anota un arco encima de la parte decimal.

DIVISIÓN CURIOSA

La matemática presenta diferentes curiosidades, una de ellas es la división de 10 entre 81 cuyo resultado es 0, 1234567890 y tiene como periodo las cifras desde el cero hasta el nueve.

$$\frac{10}{81} = 0,\overline{123456790}$$

Si aumentamos un cero al numerador y un nueve entre el 81, sucederá lo siguiente:

$$\frac{100}{891} = 0,112233445566778...\ ...900...$$

Si aumentamos un cero al numerador y un nueve entre el 891, sucederá lo siguiente:

$$\frac{1000}{8991} = 0,111222333444555666...\ ...777889000...$$

Ejemplo:

Convertir la fracción $\frac{5}{6}$ a decimal periódico.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 6 \\ \hline \ \ 20 & 0,833... \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ ... & \end{array}$$

$\frac{5}{6}$ Equivale a $0,8\overset{\frown}{33}$ y es un número decimal periódico mixto

Actividad

Transformamos las siguientes fracciones en números decimales y menciona el tipo de decimal.

a) $\frac{5}{8}$ = b) $\frac{8}{9}$ = c) $7\frac{5}{6}$ = d) $\frac{4}{9}$ = e) $\frac{10}{11}$ = f) $\frac{15}{18}$ = g) $\frac{23}{25}$ =

3. Operaciones con números decimales

Adición y sustracción

Para sumar o restar números decimales se debe agrupar en dos columnas una de sumas y otra de restas, luego se debe ordenar las columnas haciendo coincidir las comas y realizar las operaciones indicadas de suma y resta para finalmente hallar el resultado final.

Ejemplo:

Calcular el valor de los siguientes números decimales: $0,53-14,7543+125,00045-5+0,009-7,0723$

Suma de valores positivos	Suma de valores negativos
$+0,53$ $+125,00045$ $+0,009$ $+125,53945$	$-14,7543$ $-5,0$ $-7,0723$ $-26,8266$
El resultado final es la resta de los valores parciales tomando en cuenta el signo del mayor. $+125,53945$ $-26,8266$ $+98,71285$	

Actividad

Sumamos y restamos los siguientes números decimales:

a) 0,89 - 12,4529 + 345,00254 - 7 + 0,098 - 5,0823 =

b) 0,275 + 19,2956 - 14,0391 + 7,956 - 0,0523 + 7,2023 =

c) 0,945 - 27,8531 + 827,934 - 18,734 + 0,0749 - 3,5024 =

Multiplicación y división de números decimales

Multiplicación

Para la multiplicación de números decimales, se multiplican los factores como si fueran números naturales y en el resultado se agrega la coma contando desde la derecha la cantidad de cifras decimales que tienen todos los factores.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes números decimales: $(3,453)\cdot(2,67)$

$$\begin{array}{r} 3,453 \\ \times\ 2,67 \\ \hline 24171 \\ 20718 \\ 6906 \\ \hline 9,21951 \end{array}$$

Se multiplica el primer factor que tiene 3 decimales por el segundo factor que tiene 2 decimales como si fueran números naturales el producto consta de 6 cifras, se cuenta a partir de la derecha 5 decimales que es la cantidad de decimales sumados de los factores.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes números decimales: $(5,321)\cdot(-2,36)\cdot(4,7)$

$$\begin{array}{r} 5,321 \\ \times -\ 2,36 \\ \hline 31926 \\ 15963 \\ 10642 \\ \hline -12,55756 \end{array}$$

Producto parcial

Se aplica la ley de signos, la misma se anota en el producto luego se multiplican los primeros factores como números naturales el producto parcial tiene 5 decimales. Para calcular el producto final se multiplica el producto parcial con el tercer factor aplicando la ley de signos y siguiendo los procedimientos de multiplicación de decimales.

$$\begin{array}{r} -12,55756 \\ \times 4,7 \\ \hline 8790292 \\ 5023024 \\ \hline -59,020532 \end{array}$$

Producto final

Actividad

Multiplicamos los siguientes números decimales:

a) (2,89) ▪ (-5,34)=

b) (7,521) ▪ (4,628)=

c) (3,742)▪(-6,82) ▪ (8,1)=

División

a) División de un número decimal entre un número entero

Se divide como si fueran números naturales, al bajar la primera cifra decimal se coloca la coma decimal en el cociente prosiguiendo con la división. Si la parte entera del dividendo es menor que el divisor, se escribe 0 y coma en el cociente, se continúa con la división como si fueran números naturales.

Ejemplo:

Dividir 25,3 entre 4

$$\begin{array}{l|l} 25,3 & 4 \\ \cline{2-2} \ \ 13 & 6,325 \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ (0) & \end{array}$$

Ejemplo

Dividir 24,5 entre 28

$$\begin{array}{l|l} 24,5 & 28 \\ \cline{2-2} \ \ 210 & 0,875 \\ \ \ \ \ 140 & \\ \ \ \ \ \ (0) & \end{array}$$

b) **División de un número entero entre un número decimal**

Para efectuar una división así, se convierte el divisor en número entero, para tal efecto se multiplica al dividendo y al divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor, luego se procede la división como números naturales.

Ejemplo:

Dividir 81 entre 0,6

$$81 \;\; \underline{|0,6}$$
$$81 \cdot 10 = 810 \;\; \wedge \;\; 0,6 \cdot 10 = 6$$
$$\begin{array}{ll} 810 & \underline{|6} \\ 21 & 135 \\ \;\;30 & \\ \;\;(0) & \end{array}$$

Ejemplo:

Dividir 96 entre 0,25

$$96 \;\; \underline{|0,25}$$
$$96 \cdot 100 = 9600 \;\; \wedge \;\; 0,25 \cdot 100 = 25$$
$$\begin{array}{ll} 9600 & \underline{|25} \\ 210 & 384 \\ \;\;100 & \\ \;\;(0) & \end{array}$$

c) **División de un número decimal entre otro número decimal**

Se convierte el divisor en un número natural multiplicando el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor, luego se divide como en los casos anteriores.

Ejemplo:

Dividir 4,375 entre 1,25

$$4,375 \;\; \underline{|1,25}$$
$$4,375 \cdot 100 = 437,5 \;\; \wedge \;\; 1,25 \cdot 100 = 125$$
$$\begin{array}{ll} 437,5 & \underline{|125} \\ 375 & 3,5 \\ \;\;625 & \\ \;\;(0) & \end{array}$$

Ejemplo:

Dividir 35,1 entre 0,234

$$35,1 \;\; \underline{|0,234}$$
$$35,1 \cdot 1000 = 35100 \;\; \wedge \;\; 0,234 \cdot 1000 = 234$$
$$\begin{array}{ll} 35100 & \underline{|234} \\ 1170 & 150 \\ \;\;(0) & \end{array}$$

Actividad

Dividimos los siguientes números decimales:

a) $5,84 \div 4 =$ b) $85,27 \div 3 =$ c) $96 \div 0,3 =$

d) $84 \div 0,7 =$ e) $8,412 \div 0,04 =$ f) $79,648 \div 0,524 =$

4. Fracción generatriz

La fracción generatriz es la fracción que generó o dio origen a un número decimal.

a) **Fracción generatriz de un número decimal exacto**

Si el número decimal es exacto, se escribe el número decimal en el numerador de una fracción, sin la coma decimal, luego se anota denominador a la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Ejemplo:

Hallar la fracción generatriz del número decimal 0,8

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo:

Hallar la fracción generatriz del número decimal 1,5

$$1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo:

Hallar la fracción generatriz del número decimal 3,75

$$3,75 = \frac{375}{100} = \frac{75}{20} = \frac{15}{4}$$

La fracción generatriz de 0,8 es $\frac{4}{5}$ La fracción generatriz de 1,5 es $\frac{3}{2}$ La fracción generatriz de 3,75 es $\frac{15}{4}$

b) Fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Si el número decimal es decimal periódico puro, se escribe el número decimal en el numerador de una fracción sin la coma decimal y como denominador se anota tantos nueves como cifras decimales tenga el periodo.

Ejemplo:

Hallar la fracción generatriz del número decimal $1{,}\widehat{3}$

$$1{,}\widehat{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

La fracción generatriz de $1{,}\widehat{3}$ es $\frac{4}{3}$

Ejemplo

Hallar la fracción generatriz del número decimal $3{,}\widehat{72}$

$$3{,}\widehat{72} = \frac{372\text{-}3}{99} = \frac{369}{99} = \frac{41}{11}$$

La fracción generatriz de $3{,}7\widehat{2}$ es $\frac{41}{11}$

c) Fracción generatriz de un número decimal periódico mixto

Si el número decimal es decimal periódico mixto, se escribe en el numerador el número sin la coma decimal menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicos y como denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplo	**Ejemplo**
Hallar la fracción generatriz del número decimal $5{,}1\widehat{3}$	Hallar la fracción generatriz del número decimal $0{,}9\widehat{14}$
$5{,}1\widehat{3} = \frac{513\text{-}51}{90} = \frac{462}{90} = \frac{77}{15}$	$0{,}9\widehat{14} = \frac{914 - 9}{990} = \frac{905}{990} = \frac{181}{198}$
La fracción generatriz de $5{,}1\widehat{3}$ es $\frac{77}{15}$	La fracción generatriz de $0{,}9\widehat{14}$ es $\frac{181}{198}$

Actividad

Calculamos la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 0,75 = b) 1,24 = c) $2{,}\widehat{3}$ = d) $3{,}\widehat{96}$ = e) $2{,}2\widehat{3}$ = f) $3{,}2\widehat{14}$ =

VALORACIÓN

Responde:

- ¿Cómo empleo los números decimales en mi comunidad?
- ¿Por qué es importante el empleo de números decimales en la vida cotidiana?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se puede aplicar al emplear los números decimales?

PRODUCCIÓN

Elaboramos una lista de los materiales escolares de la presente gestión escolar, indicando la cantidad y los precios correspondientes de cada material, luego calculemos el total de costos empleando las operaciones con los números decimales.

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES Y DECIMALES

PRÁCTICA

Esta situación es insólita, pero podría suceder:

René trabaja en el rubro de la construcción. Por día trabajado le pagan Bs. 200, los dos primeros días de la semana trabajó de manera puntual cumpliendo con sus deberes, el tercer día trabajó media jornada por lo que recibió el pago de la raíz cuadrada de un cuarto respecto a su pago diario, el cuarto día llegó a media mañana, le pagaron $0,83$ de su pago diario y el último día de la semana trabajó hasta media mañana, el encargado le pagó un medio elevado al cuadrado con respecto a su pago diario.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Según la lectura, cuánto pagaron a René por concepto de trabajo en construcción?
- ¿Cuánto le pagaron a René por el cuarto día de trabajo?
- ¿Qué operaciones se tiene que realizar para calcular el dinero que recibió René en total?

TEORÍA

PARA PENSAR UN MOMENTO

Un estudiante invita a su casa a 5 compañeros para realizar la tarea de matemática, dispone una caja de galletas que contiene la mitad de galletas que contenía al principio para invitar a sus compañeros. Les propone un reto que consiste en adivinar la cantidad de galletas que aún tiene el cajón con las siguientes pistas:

- Menos de tres decenas
- Están ordenados en filas de 5
- Si reparten entre todos, sobraría uno.

¿Cuántas galletas tiene la caja?

¿Cuántas galletas contenía la caja inicialmente?

1. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Para realizar de manera correcta las operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales, es necesario conocer la jerarquía de operaciones.

Jerarquía de operaciones

Para realizar operaciones combinadas seguiremos los pasos:

1. Se efectúan operaciones al interior de los signos de agrupación (paréntesis “( )”, corchetes “[ ]”, llaves “{ }”).
2. Dentro de los paréntesis o una vez eliminados, las operaciones se efectúan en el siguiente orden:
   a) Las potencias y raíces.
   b) Las multiplicaciones y las divisiones (de izquierda a derecha)
   c) Las sumas y las restas.

Ejemplo:

$2+\frac{1}{2}+0,3$ Suma de un número entero, racional y decimal

$=\frac{4+1}{2}+\frac{3}{10}$ Operaciones de suma de fracciones y conversión de decimal a fracción

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{5}{2}+\frac{3}{10}\\&=\frac{25+3}{10}=\frac{28}{10}\end{aligned}\right\}\text{Suma de fracciones}$$

$=\frac{14}{5}$ Resultado final

Ejemplo:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\left(\sqrt{\frac{36}{64}}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ Suma, radicación, multiplicación y potenciación.

$=\frac{2+3}{4}+\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{8}^{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}^{3}}$ Suma, multiplicación y simplificación.

$=\frac{5}{4}+\frac{2}{6}=\frac{15+4}{12}$ Suma de fracciones heterogéneas.

$=\frac{19}{12}$

Ejemplo:

$\sqrt{\frac{9}{16}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(0,75\cdot 0,8\widehat{3}\right)$ Radicación, potenciación y multiplicación de decimales

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\left(\frac{75}{100}\cdot\frac{83-8}{90}\right)$ Resta de fracciones y conversión de decimal a fracción

$=\frac{3-1}{4}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{75}{90}\right)$ Resta de fracciones, simplificación y multiplicación de fracciones.

$=\frac{2}{4}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)$ Suma y multiplicación de fracciones

$=\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{4+5}{8}$ Suma de fracciones

$=\frac{9}{8}$

¡JUEGA CON LAS FRACCIONES!

(Extraído de www.soymatematicas.com)

¿Te aburren las fracciones?

Te propongo un juego: Voy a mostrarte una identidad para que puedas sacarles más provecho a las fracciones. Algunos lo llaman la ***FÓRMULA FELIZ.***

$$\boxed{\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}}$$

Puedes sustituir la letra por cualquier número natural. Por ejemplo, si n= 4 se cumple que:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4(4+1)}+\frac{1}{4+1}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$$

Ahora podrías volver a transformar la fracción un quinto y modificar otra vez la igualdad. Las matemáticas son para jugar:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{6}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes operaciones combinadas de números racionales:

a) $\sqrt{\frac{81}{36}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^{2}=$

b) $\frac{7}{8}\cdot\frac{14}{40}+\sqrt{\frac{49}{64}}+\left(1{,}5\right)^{2}\cdot\frac{20}{27}=$

c) $\left(\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt{0{,}25}\right)^{2}+0,5\div\frac{30}{18}-\sqrt{\frac{4}{36}}=$

d) $\sqrt{\frac{100}{36}}-\frac{1}{6}+\left(0{,}\widehat{5}-0{,}75\right)^{2}\div\frac{3}{4}=$

2. Notación científica

La notación científica es una manera de escribir abreviadamente números grandes y pequeños mediante potencias de diez.

Representar un número en notación científica consiste en escribir como un número entero o decimal con una sola cifra entera comprendida de 1 al 9 multiplicado por una potencia de 10 positiva o negativa.

Mantisa → $\boxed{N\cdot 10^{n}}$ ← Exponente

Base potencia de 10

Reglas para escribir en notación científica

Para escribir en notación científica se consideran los siguientes aspectos:

a) Si el número es 10 o más se debe mover la coma hacia la izquierda y la potencia de diez será positiva.

$$180000 = 1{,}8 \cdot 10^5$$
$$23000000 = 2{,}3 \cdot 10^7$$
$$500000000000000 = 5 \cdot 10^{14}$$

b) Si el número es menor a 1 se debe mover la coma a la derecha y la potencia de diez será negativa.

$$0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$$
$$0{,}00000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$$
$$0{,}00000000000000157 = 1{,}57 \cdot 10^{-15}$$

Actividad

- Escribimos en notación científica los siguientes números:

a) $1500000 =$ b) $94000000000=$ c) $560000000000000 =$ d) $700000000000000000 =$

e) $0{,}00007 =$ f) $0{,}0000000034 =$ g) $0{,}0000000000976 =$ h) $0{,}0000000000005287 =$

Operaciones con notación científica

Adición y sustracción con notación científica

Para sumar y restar en notación científica los exponentes de las potencias de diez deben ser las mismas, luego se procede a realizar las operaciones conocidas manteniendo las potencias de diez. Si los exponentes de las potencias de diez no son iguales, se deben realizar operaciones hasta convertir en una sola potencia para sumar o restar sin dificultad.

Ejemplo:

Sumar y restar los siguientes números en notación científica.

$$2 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5 = 9 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5$$

Ejemplo:

Sumar y restar los siguientes números en notación científica.

$$4 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^8$$

Como los exponentes de las potencias de diez son diferentes, convertimos a la potencia con mayor exponente y realizamos las operaciones indicadas:

$$4 \cdot 10^7 = 0{,}4 \cdot 10^8$$
$$9 \cdot 10^5 = 0{,}009 \cdot 10^8$$
$$2 \cdot 10^6 = 0{,}02 \cdot 10^8$$
$$0{,}4 \cdot 10^8 + 0{,}009 \cdot 10^8 - 0{,}02 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^8 = 5{,}389 \cdot 10^8.$$

Multiplicación en notación científica

Para multiplicar números en notación científica se multiplican las mantisas y los exponentes de las potencias de diez se suman.

a) $(3 \cdot 10^6)(7 \cdot 10^8) = 3 \cdot 7 \cdot 10^{6+8} = 2{,}1 \cdot 10^{15}$

b) $(2{,}7 \cdot 10^4)(5 \cdot 10^3) = 2{,}7 \cdot 5 \cdot 10^{4+3} = 1{,}35 \cdot 10^8$

División en notación científica

Para dividir números en notación científica se dividen las mantisas y los exponentes de las potencias de diez se restan.

Ejemplo:

$$a)\ \frac{48\cdot 10^{7}}{16\cdot 10^{3}}=3\cdot 10^{7-3}=3\cdot 10^{4} \qquad b)\ \frac{7,5\cdot 10^{15}}{0,15\cdot 10^{7}}=\frac{75\cdot 10^{14}}{15\cdot 10^{5}}=5\cdot 10^{14-5}=5\cdot 10^{9}$$

Actividad

- **Realizamos las operaciones indicadas con notación científica:**

$$a)\ 3,2\cdot 10^{7}+4,5\cdot 10^{5}-7,9\cdot 10^{6}+9,6\cdot 10^{8}=$$

$$b)\ (5,7\cdot 10^{6})\cdot(8,3\cdot 10^{8})=$$

$$c)\ \frac{9,6\cdot 10^{17}}{2,4\cdot 10^{9}}=$$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Una vacuna tiene $1\cdot 10^{8}$ bacterias por cm^3 ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 50 ampollas de 70 mm^3 cada una?

Resolución.

$$50\cdot 70mm^{3}=3500mm^{3}$$

$$3500mm^{3}\cdot\frac{(1cm)^{3}}{(10mm)^{3}}\Rightarrow 35\cancel{00}\ \cancel{mm^{3}}\cdot\frac{1cm^{3}}{10\cancel{00}\ \cancel{mm^{3}}}=3,5cm^{3}$$

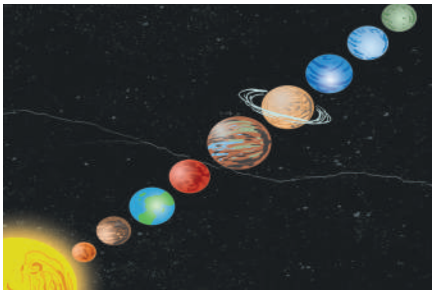
$$3,5cm^{3}\cdot 1\cdot 10^{8}=3,5\cdot 10^{8}cm^{3}$$

En una caja de 50 ampollas de 70 mm^3 habrá $3,5\cdot 10^{8}$ bacterias.

VALORACIÓN

Se pide observar la imagen, luego responder de manera reflexiva las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se expresan las distancias entre los planetas del sistema solar?
- ¿Por qué es importante el empleo de la notación científica en la vida cotidiana?



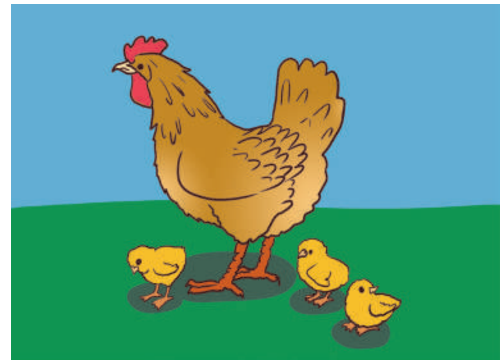
PRODUCCIÓN

Elaboramos una página de apuntes de notación científica con objetos reales del contexto, exponiendo los saberes y conocimientos adquiridos en el desarrollo del tema.

RAZONES, PROPORCIONES Y REGLA DE TRES

PRÁCTICA

Pedro tiene una gallina y 7 pollitos que alimenta con maíz, cuyo costo es de Bs 2,5. Desea viajar para visitar a algunos familiares por unos días, por lo que solicita la ayuda a una de sus vecinas para comprar 8 libras de maíz y alimentar a su gallina y pollitos, dejándole el dinero necesario.



Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Según la lectura, cuál es el costo de las 8 libras de maíz?
- Suponiendo que son 12 libras de maíz, lo necesario para alimentar a los pollitos, ¿cuánto sería el costo?
- ¿Cuántas libras de maíz se compraría con Bs. 50?

TEORÍA

RAZÓN

Es una comparación entre dos o más cantidades. Esta comparación se puede hacer mediante una diferencia, en tal caso se llama "razón aritmética", o mediante una división en tal caso se llama "razón geométrica".

Razón Aritmética

a-b=d

Razón Geométrica

$a \div b \qquad a/b \qquad \frac{a}{b}$

Donde:

a=antecedente

b=consecuente

PIENSA Y RESPONDE

¿Cuál sería tu respuesta?

Guante es a mano como

zapato es a ………………..

1. Razones y proporciones

Razón

Es la comparación de dos cantidades por medio de la división o cociente. La razón nos permite saber cuántas veces el mayor contiene al menor, sus términos son el antecedente y el consecuente.

$$\frac{antecedente}{consecuente} = razón \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{2} = 5$$

La razón entre a y b, siendo b un número diferente de cero, se denota:

$\frac{a}{b}$ ó $a : b$ Se lee "a es a b"

Ejemplo:

La razón entre 10 y 5 se escribe $\frac{10}{5}$ o $10 \div 5$, se lee "diez es a cinco"

¿Cómo calculamos la razón?

Calculamos la razón dividiendo el antecedente entre el consecuente.

Ejemplo:

Calcular la razón entre 18 y 6.

$$\frac{18}{6} = 3$$

La razón entre 18 y 6 es 3.

Proporción

Es una igualdad entre dos razones de una misma clase. Los términos de una proporción son los medios y los extremos. Simbólicamente se representa:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Donde:

"a" y "d" son los extremos de la proporción.

"b" y "c" son los medios de la proporción.

Se lee a es b como c es a d

Ejemplo:

$$\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$$ Se lee 4 es a 5 como 12 es a 15

Propiedad fundamental de las proporciones

Dos razones son proporcionales si cumplen con la relación siguiente:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a\cdot d=b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{7}=\frac{20}{28} \quad \Rightarrow \quad 5\cdot 28=7\cdot 20$$

$$140=140$$

PROBLEMA

Manuel tiene 12 canicas rojas y 8 canicas negras, luego utilizando razones se tendrá:

Razón aritmética:

12 - 8 = 4

"Manuel tiene 4 canicas rojas más que blancas"

Razón geométrica:

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Manuel, por cada tres canicas rojas, tiene dos canicas negras.

"El número de canicas rojas y el número de canicas negras están en relación de 3 a 2"

Actividad

- **Comprobemos la propiedad fundamental en las siguientes proporciones y completar la tabla:**

$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$	$3\cdot 16=4\cdot 12$ $48=48$	Se lee 3 es a 4 como 12 es a 16
$\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$		
$\frac{11}{9}=\frac{55}{45}$		
$\frac{3}{8}=\frac{30}{80}$		

¿Cómo calcular el término desconocido de una proporción?

Si en una proporción existe un término desconocido, se multiplica en forma cruzada los términos de la proporción y se despeja el término desconocido.

Ejemplo:

Calcular el valor de "x"

$$\frac{x}{4}=\frac{20}{16}$$

$x \cdot 16 = 4 \cdot 20$ Multiplicación cruzada

$x=\frac{80}{16}$ Despejar el término desconocido

$\boxed{x=5}$ Valor del término desconocido

Ejemplo:

Calcular el valor de "x"

$$\frac{9}{2}=\frac{72}{x}$$

$x=\frac{72\cdot 2}{9}$ Por proporción

$\boxed{x=16}$ Valor del término desconocido

Actividad

Calculamos "x" en las siguientes proporciones:

$a)\ \frac{x}{7}=\frac{40}{35}=$ $\quad b)\ \frac{11}{x}\ \ \frac{110}{90}=$ $\quad c)\ \frac{6}{15}=\frac{54}{x}=$

$d)\ \frac{8}{5}=\frac{x}{70}=$ $\quad e)\ \frac{x}{12}=\frac{70}{120}=$ $\quad f)\ \frac{12}{20}=\frac{x}{100}=$

$g)\ \frac{16}{15}=\frac{48}{x}=$ $\quad h)\ \frac{x}{6}=\frac{70}{42}=$ $\quad i)\ \frac{x}{18}=\frac{49}{126}=$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar o disminuir una de ellas, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

Ejemplo:

25 unidades de naranja se compran con Bs. 10, ¿cuántas naranjas se pueden comprar con Bs. 60?

Cantidad de naranjas (u)	25	50	75	100	125	150
Precio de las naranjas (Bs,)	10	20	30	40	50	60

Con Bs. 60 se puede comprar 150 unidades de naranjas.

Las magnitudes son directamente proporcionales, a mayor cantidad de naranjas se paga mayor precio.

Actividad

Completemos el siguiente cuadro de magnitudes directamente proporcionales:

Litros de leche	1		3		5
Precio litro de leche (Bs.)	7	14		28	

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una magnitud, la otra magnitud disminuye o viceversa.

Ejemplo:

Un pintor pinta un muro en 12 días ¿En cuántos días acabarán de pintar el muro 6 pintores?

Pintores	1	2	3	4	6
Días	12	6	4	3	2

6 pintores pintarán el muro en 2 días.

COMPRENDIENDO

"a mayor cantidad de pintores, menor será el tiempo necesario para pintar un muro"

Las magnitudes son inversamente proporcionales a mayor cantidad de pintores menos días de pintado del muro.

Actividad

Completemos el siguiente cuadro de magnitudes inversamente proporcionales:

Obreros	15	12		9	
Días	12		18		36

2. Porcentaje

Se llama porcentaje o tanto por ciento al valor que corresponde a 100 en una proporción. Se representa "%".

Ejemplo:

Hallar el 40% de 300.

% | Número
100 % | 300
40 % | x

$$\frac{100\%}{40\ \%} = \frac{300}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{40\boxed{\%}\cdot 3\boxed{00}}{1\boxed{00}\boxed{\%}} \quad \therefore \quad \boxed{x\ =\ 120}$$

PROPORCIONALMENTE SUCEDE

100% es a 300

como 40% es a 120

El 40% de 300 es 120

Otra manera más sencilla de resolver es anotar la cantidad total multiplicado por el porcentaje que deseamos averiguar divido por el 100 %.

$$3\cancel{00}\cdot\frac{40\cancel{\%}}{1\cancel{00}\ \cancel{\%}} = 120$$

Ejemplo:

En un curso de 32 estudiantes, 8 estudiantes faltaron a clases ¿Cuál es el porcentaje de asistencia y cuál es el porcentaje de inasistencia?

Estudiantes | Porcentaje
32 | 100 %
8 | x

$$\frac{32}{8} = \frac{100\%}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8\cdot 100\%}{32} \quad \therefore \quad \boxed{x\ =\ 25\%}$$

El porcentaje de inasistencia es 25%.

El porcentaje de asistencia es 100% - 25% =75%

Actividad

Calculamos el porcentaje en los siguientes problemas:

a) Hallar el 75% de 500.

b) Hallar el 23% de 2500.

c) Hallar el 8% de 40.

d) En un curso de 36 estudiantes, 9 reprobaron el área de matemática. Determinar el % de estudiantes reprobados.

e) Juan compró una chamarra con un descuento del 10%, si el precio original de la chamarra es de Bs. 80. ¿Cuánto pagó Juan por la chamarra?

3. Regla de tres simple

Es una forma sencilla de resolver problemas de proporcionalidad en la que se tiene tres datos conocidos y una incógnita. Recordemos que una incógnita es una cantidad desconocida, generalmente se representa con las últimas letras del abecedario. La regla de tres es simple cuando solamente intervienen en ella dos magnitudes, las cuales pueden ser directas o inversas.

Regla de tres simple directa

Al aumentar una magnitud la otra también aumenta, al disminuir una magnitud la otra también disminuye, a esto se llama regla de tres directa.

Ambas aumentan

Ambas disminuyen

PROPORCIONALMENTE SUCEDE

Para resolver un problema aplicando regla de tres simple directa, hay que seguir 3 pasos:

1. *Agrupar datos tomando en cuenta las magnitudes.*
2. *Multiplicar datos en diagonal o cruz.*
3. *El número que multiplica a la incógnita se divide.*

Ejemplo:

Si 2 kilogramos de azúcar se compran con Bs. 12, ¿cuánto se necesita para comprar 5 kilogramos de azúcar?

Azúcar (Kg.)	Bs.
2	12
5	x

$$2 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$x = \frac{60}{2} \Rightarrow \boxed{x = 30}$$

Agrupamos datos

Multiplicamos en cruz.

Operamos.

Se necesitan Bs. 30 para comprar 5 kilogramos de azúcar.

Ejemplo:

Un obrero gana por tres días de trabajo Bs 240 ¿Cuánto ganará por 15 días de trabajo?

Por 15 días de trabajo el obrero gana Bs. 1200.

CÁLCULOS AUXILIARES

3	240
15	x

$$\frac{3}{15} = \frac{240}{x}$$

$$x = 1200$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres simple directa:

a) Si 3 metros de tela tienen un costo de 21, ¿cuánto costarán 10 metros de tela?

b) Un automóvil tarda 3 horas en desplazarse 240 kilómetros con una velocidad constante, ¿en cuántas horas se desplazará 400 kilómetros si mantiene la misma velocidad?

c) Si un maple de 30 huevos cuesta Bs. 27, ¿cuánto costarán 10 unidades de huevo?

Regla de tres simple, inversa

Al aumentar una magnitud la otra disminuye o al disminuir la otra magnitud aumenta.

Una aumenta y la otra disminuye

Una disminuye y la otra aumenta.

Ejemplo:

10 obreros hacen una obra en 16 días ¿En cuántos días podrían hacer 8 obreros la misma obra?

	Obreros		Días	
Menos obreros	10	$\longleftrightarrow$	16	Más días
	8	$\longleftrightarrow$	x	

$$\frac{10}{8} = \frac{x}{16}$$

$$x = \frac{160}{8}$$

$$\boxed{x = 20}$$

En conclusión, 8 obreros podrían realizar la misma obra en 20 días.

PROPORCIONALMENTE SUCEDE

Para resolver un problema aplicando regla de tres, simple inversa, hay que seguir 3 pasos:

1. *Agrupar datos tomando en cuenta magnitudes.*
2. *Multiplicar datos en paralelo.*
3. *El número que queda solo divide.*

Ejemplo:

12 personas tienen alimentos para 30 días, si se aumentan 6 personas ¿Para cuántos días alcanzarán los alimentos?

	Personas		Días	
Menos obreros	12	$\longleftrightarrow$	30	Más días
	18	$\longleftrightarrow$	x	

$$18 \cdot x = 12 \cdot 30$$

$$x = \frac{360}{18}$$

$$\boxed{x = 20}$$

En conclusión, 18 personas tienen alimento para 20 días.

PARA TOMAR EN CUENTA

A mayor número de personas, menor será el tiempo de duración de los alimentos.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres, simple inversa:

a) 4 obreros descargan un camión en 3 horas, ¿en cuánto tiempo descargarán el mismo camión 2 obreros?

b) Un camión se desplaza de una ciudad a otra durante 3 horas a una velocidad de 60 km/h, ¿qué tiempo empleará en desplazarse la misma distancia con una velocidad de 90 km/h?

c) 3 trabajadores tardan 10 días en construir un muro, ¿cuántos días tardarán 6 trabajadores en construir el mismo muro?

d) En un hotel hay tres jardineros que riegan y cuidan todos los jardines en 6 horas durante el invierno. Si durante el verano se aumentan 3 jardineros más, ¿en cuánto tiempo regarán y cuidarán los jardines del hotel entre los 6 jardineros?

e) El equipo de fútbol del Colegio hará un regalo a su entrenadora. Al principio se juntan 4 compañeros para pagar cada uno Bs 10, pero al final son 8 compañeros los que se juntan para pagar el regalo, ¿cuánto dinero tendrá que poner cada uno?

4. Regla de tres compuesta

Cuando se relacionan tres o más magnitudes o variables, se trata de una regla de tres compuesta. Las situaciones problemáticas en las que se aplica la regla de tres compuesta, dependiendo del tipo de proporcionalidad entre variables, pueden ser directas, inversas o mixtas.

Para resolver un problema aplicando regla de tres compuesta, hay que seguir los siguientes pasos:

1. Primero se identifican las variables o magnitudes.
2. Se observa la relación de proporcionalidad entre las magnitudes y la incógnita, si es directa o inversa aplicamos como en la regla de tres simple, colocando signo (+) a las cantidades que se multiplican y (–) a las que se dividen.

Ejemplo:

10 obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan una obra en 30 días, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar la misma obra 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

	Obreros	Días	Horas	
Menos obreros más días (I)	$+10$	$+30$	$+8$	Más horas menos días (I)
	-5	x	-10	

$$\frac{x}{30}=\frac{10}{5}\cdot\frac{8}{10} \qquad x=\frac{10\cdot 30\cdot 8}{5\cdot 10} \Rightarrow \boxed{x=48}$$

5 obreros tardan 48 días en terminar la obra trabajando 10 horas diarias.

Ejemplo:

Por enviar un paquete de 6 kg de peso a una ciudad que está a 50 km de distancia el transportista cobra Bs. 10 ¿Cuánto costará enviar un paquete de 15 kg a una distancia de 120 km?

	Peso (kg)	Costo (Bs.)	Distancia	
Más peso más costo (D)	-6	$+10$	-50	Más distancia más costo (D)
	$+15$	x	$+120$	

$$x=\frac{15\cdot 10\cdot 120}{6\cdot 50} \Rightarrow \boxed{x=60}$$

El envío de un paquete de 15 kg a una distancia de 120 km tiene el costo de Bs. 60.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres compuesta:

a) 4 obreros trabajando 7 horas diarias construyen un muro en 3 días, ¿cuántos días tardarán 2 obreros trabajando 6 horas diarias en construir un muro igual?

b) 5 carpinteros fabrican 20 muebles en 6 días, ¿en cuántos días 2 carpinteros fabrican 30 muebles?

c) 3 trabajadores tardan 10 días en construir un muro, ¿cuántos días tardarán 6 trabajadores en construir el mismo muro?

5. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las razones, proporciones, porcentaje, regla de tres simple directa, inversa y regla de tres compuesta son de uso cotidiano en diferentes actividades que realizamos en diferentes rubros, en nuestro contexto y en la tecnología, su uso abarca diferentes situaciones que nos permiten calcular la magnitud que desconocemos. Por ejemplo:

Problema. Juan tiene dispositivo de almacenamiento (USB) de 8 Gigabytes, desea almacenar archivos de música, cada 2 archivos de música ocupa aproximadamente 10 Megabytes. Si Juan desea almacenar 500 archivos de música.

¿Cuántos megabytes ocuparán, aproximadamente, los 500 archivos de música?

¿Cuántos megabytes tienen 8 gigabytes?

¿Qué porcentaje USB ocupa los 500 archivos de música?

Para resolver este problema debemos saber que 1 Gigabytes (GB) tiene 1024 Megabytes (MB)

Archivos	Megabytes (MB)
2	10
500	x

$$2 \cdot x = 500 \cdot 10$$

$$x = \frac{5000}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2500}$$

500 archivos de música ocuparán aproximadamente 2500 MB.

Calculamos cantidad de megabytes en 8 gigabytes.

$$8GB \cdot \frac{1024MB}{1GB} = 8192MB$$

Calculamos el porcentaje que ocupa 500 archivos de música.

Megabytes	Porcentaje
8192	100%
2500	x

$$8192 \cdot x = 2500 \cdot 100\%$$

$$x = \frac{250000\%}{8192} \Rightarrow \boxed{x = 30,51\%}$$

RECUERDA

1 Gigabyte (GB) equivale a 1024 Megabytes (MB)

1 GB = 1024 MB

2500 archivos de música representan aproximadamente el 30,51% del total de la capacidad de almacenamiento.

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función de lo aprendido

- ¿Cuál es la importancia de aprender razones y proporciones?
- ¿Por qué es importante el empleo de la regla de tres simple o compuesta?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se pueden aplicar al emplear razones y proporciones?
- ¿Cómo nos ayuda la regla de tres en la resolución de problemas en nuestra región?

PRODUCCIÓN

- Con objetos del contexto realizamos cálculos con razones y proporciones.
- Anotamos en el cuaderno las proporciones entre las cantidades de varones y mujeres que existen en tu curso.
- Anotamos en el cuaderno teniendo como base tu recreo diario, ¿cuánto dinero recibirías durante una semana, un mes y durante todo el año escolar?

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

NÚMEROS RACIONALES

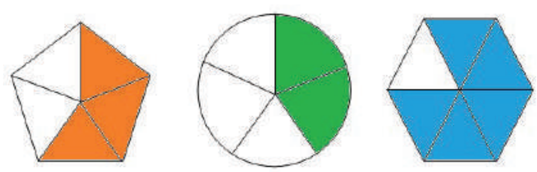
Representación gráfica y relación de orden de los números racionales

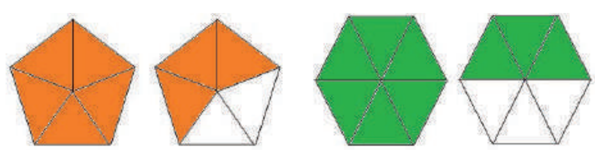
Representa los siguientes números racionales:

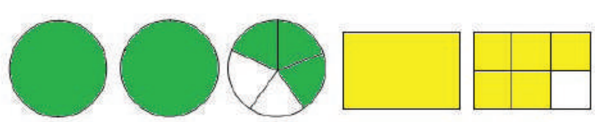
$a)\ \frac{5}{8}$ $\quad b)\ \frac{9}{5}$ $\quad c)\ 5\frac{1}{4}$ $\quad d)\ \frac{3}{7}$

$e)\ \frac{11}{15}$ $\quad f)\ \frac{4}{11}$ $\quad g)\ 9\frac{2}{3}$ $\quad h)\ \frac{8}{3}$

Observa los siguientes gráficos, completa los numeradores y denominadores según corresponda:







Simplificación de fracciones

Comprobar si son equivalentes las siguientes fracciones. En caso de que lo sean anota SI en el espacio en caso contrario anota NO.

$a)\ \frac{4}{5}\ \ \frac{20}{25}$ Las fracciones _____son equivalentes.

$b)\ \frac{7}{8}=\frac{49}{56}$ Las fracciones _____son equivalentes.

$c)\ \frac{4}{7}=\frac{12}{20}$ Las fracciones _____son equivalentes.

$d)\ \frac{8}{9}=\frac{65}{72}$ Las fracciones _____son equivalentes.

$e)\ \frac{2}{7}=\frac{10}{35}$ Las fracciones _____son equivalentes.

Simplificación de fracciones

Simplificar las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{40}{72}$ $\quad b)\ \frac{180}{150}$ $\quad c)\ \frac{36}{40}$ $\quad d)\ \frac{96}{144}$

$e)\ \frac{50}{150}$ $\quad f)\ \frac{40}{96}$ $\quad g)\ \frac{200}{360}$ $\quad h)\ \frac{24}{72}$

$i)\ \frac{80}{150}$ $\quad j)\ \frac{10}{96}$ $\quad k)\ \frac{120}{180}$ $\quad l)\ \frac{135}{150}$

Fracciones propias, impropias y mixtas

Convertir las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas:

$a)\ \frac{11}{5}$ $\quad b)\ \frac{7}{3}$ $\quad c)\ \frac{15}{6}$ $\quad d)\ \frac{9}{4}$ $\quad e)\ \frac{9}{8}$

Convierte las siguientes fracciones mixtas a fracciones impropias:

$a)\ 5\frac{3}{4}$ $\quad b)\ 9\frac{2}{3}$ $\quad c)\ 3\frac{1}{5}$ $\quad d)\ 7\frac{5}{9}$ $\quad e)\ 6\frac{3}{7}$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Adición y sustracción

Sumar y restar las siguientes fracciones homogéneas y heterogéneas:

$a)\ \frac{4}{9}+\frac{2}{9}$ $\quad b)\ \frac{3}{7}+\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ $\quad c)\ \frac{5}{12}+\frac{9}{12}-\frac{7}{12}$

$d)\ \frac{6}{25}-\frac{1}{25}+\frac{17}{25}$ $\quad e)\ \frac{9}{14}+\frac{8}{14}-\frac{5}{14}$

$f)\ \frac{5}{6}+\frac{6}{7}$ $\quad g)\ \frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$ $\quad h)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{5}$

$i)\ \frac{5}{6}+\frac{1}{8}-\frac{3}{4}$ $\quad j)\ \frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$

Multiplicación y división de números racionales

Multiplica las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}$ $\quad b)\ \left(-\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{6}{9}\right)$ $\quad c)\ \left(+\frac{6}{8}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)$

$d)\ \frac{15}{10}\cdot\frac{4}{7}$ $\quad e)\ 12\left(-\frac{5}{8}\right)$ $\quad f)\ \left(-\frac{18}{20}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$

$g)\ \frac{23}{11}\cdot\frac{9}{15}$ $\quad h)\ \left(\frac{5}{7}\right)\left(-\frac{8}{9}\right)$ $\quad i)\ \left(-\frac{12}{10}\right)\left(-\frac{8}{14}\right)$

División de números racionales

Dividir las siguientes fracciones:

$$a)\ \frac{\frac{6}{9}}{\frac{3}{4}} \qquad b)\ \frac{16}{14}\div\frac{4}{7} \qquad c)\ \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{5}{6}}$$

$$d)\ \frac{15}{11}\div\frac{7}{8} \qquad e)\ \frac{45}{55}\div\frac{-9}{11} \qquad f)\ \frac{-\frac{10}{12}}{\frac{15}{24}}$$

Potenciación y radicación de números racionales

Potenciación de números racionales

Calcular la potencia de las siguientes fracciones:

$$a)\ \left(\frac{3}{7}\right)^5 \quad b)\ \left(-\frac{8}{9}\right)^3 \quad c)\ \left(-\frac{5}{6}\right)^4 \quad d)\ \left(\frac{5}{7}\right)^4$$

$$e)\ \left(\frac{15}{17}\right)^2 \quad f)\ \left(-\frac{3}{9}\right)^6 \quad g)\ \left(\frac{3}{8}\right)^7 \quad h)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^8$$

Radicación de números racionales

Calcular las raíces de los siguientes radicales de números racionales.

$$a)\ \sqrt{\frac{121}{225}} \quad b)\ \sqrt[3]{\frac{-27}{64}} \quad c)\ \sqrt[4]{\frac{81}{625}} \quad d)\ \sqrt[5]{\frac{32}{243}}$$

$$e)\ \sqrt[6]{\frac{64}{729}} \quad f)\ \sqrt[3]{\frac{125}{512}} \quad g)\ \sqrt[5]{\frac{3125}{7776}} \quad h)\ \sqrt{\frac{400}{900}}$$

Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Resolver los siguientes problemas de fracciones:

a) Elena sale de viaje a comprar maní, en su primer viaje compra ¼ kilo de maní, en su segundo viaje compro ¾ kilo de maní y en el último viaje compra ½ kilo de maní, ¿cuánto maní compro Elena?

b) Un padre decide repartir Bs. 200 entre sus tres hijos al primero le da la mitad, al segundo tres décimos y al tercer hijo dos décimos, ¿cuánto dinero recibe cada hijo?

c) Un camión recorre un tercio de camino el primer día, el segundo recorre cinco octavos, ¿cuánto le falta recorrer al camión si el total del camino es 600 km?

d) Se reparten 40 caramelos entre tres niños el primero recibe 9/20 del total de caramelos, el segundo niño recibe 3/10 del total de caramelos y el último recibe ¼, ¿cuántos recibió cada niño?

NÚMEROS DECIMALES COMO CONSECUENCIA DE LOS RACIONALES

Transformar las siguientes fracciones en números decimales y mencionar el tipo de decimales.

$$a)\ \frac{1}{8} \quad b)\ \frac{5}{18} \quad c)\ 5\frac{5}{6} \quad d)\ \frac{5}{9} \quad e)\ \frac{11}{12}$$

$$f)\ \frac{5}{18} \quad g)\ \frac{7}{11} \quad h)\ \frac{15}{20} \quad i)\ \frac{29}{50} \quad j)\ \frac{13}{40}$$

Operaciones con números decimales.

Adición y sustracción de números decimales

Sumar y restar los siguientes números decimales:

$a)\ 0,587-2,874+45,0371-9+0,067-1,0671$

$b)\ 4,759+23,8234-24,0239+9,342-0,0578$

$c)\ 0,023-18,054+542,659-11,834+0,0053$

$d)\ 3,47+53,785-48,945+99,782-0,045$

$e)\ 11,03+88,056-42,391+17,481-0,67$

Multiplicación y división de números decimales

Multiplicación de números decimales

Multiplicar los siguientes números decimales:

$a)\ (7,23)\cdot(-6,89)$

$b)\ (5,342)\cdot(6,715)$

$c)\ (4,943)\cdot(-7,45)\cdot(3,1)$

$d)\ (3,56)\cdot(4,65)\cdot(2,4)$

$e)\ (8,79)\cdot(-3,678)\cdot(-5,6)$

División de números decimales

Dividir los siguientes números decimales:

$a)\ 6,93\div 3$ $\qquad b)\ 32,08\div 4$

$c)\ 112\div 0,4$ $\qquad d)\ 96\div 1,2$

$e)\ 6,842\div 0,08$ $\qquad f)\ 150,625\div 0,125$

Fracción generatriz

Calcular la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

$a)\ 0,55 \quad b)\ 1,75 \quad c)\ 3,\widehat{4}$

$d)\ 5,\widehat{12} \quad e)\ 0,9\widehat{4} \quad f)\ 1,3\widehat{45}$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS RACIONALES Y DECIMALES

Resolver las siguientes operaciones combinadas de números racionales:

$a)\ \sqrt{\frac{49}{36}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)^2=$

$b)\ \frac{8}{9}\cdot\frac{27}{16}+\sqrt{\frac{25}{81}}-(2,5)^2\cdot\frac{20}{25}=$

$c)\ \left(\sqrt{\frac{25}{16}}-\sqrt{0,81}\right)^2+0,\widehat{6}\div\frac{27}{8}+\sqrt{\frac{16}{10}}=$

$d)\ \sqrt{\frac{144}{49}}-\frac{5}{7}+(0,2+0,4)^2\div 0,216=$

$e)\ \sqrt[3]{\frac{64}{729}}\div\frac{27}{32}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(0,\widehat{6})-\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\cdot(1,\widehat{6})$

Notación científica

Escribir en notación científica los siguientes números:

$a)$ 45000000
$b)$ 7230000000000
$c)$ 96400000000000000
$d)$ 857000000000000000000
$e)$ 0,00000009
$f)$ 0,000000000794
$g)$ 0,00000000000001376
$h)$ 0,0000000000000000003498
$i)$ 0,000000000000000000000000000453
$j)$ 0,0000000000000000000000000000000739

Operaciones con notación científica

Realizar las operaciones indicadas con notación científica:

$a)\ 4,5\cdot10^8+9,2\cdot10^7-17,5\cdot10^6+3724,5\cdot10^5=$

$b)\ 8,3\cdot10^{14}-5,8\cdot10^{13}+34,9\cdot10^{12}-7562,4\cdot10^{11}=$

$c)\ (3,9\cdot10^9)\cdot(5,2\cdot10^5)=$

$d)\ (6,8\cdot10^7)\cdot(3,7\cdot10^3)\cdot(4,1\cdot10^4)=$

$e)\ \frac{12,6\cdot10^{25}}{1,4\cdot10^{18}}=$

RAZONES, PROPORCIONES Y REGLA DE TRES

Razones y proporciones

Comprobar la propiedad fundamental en las siguientes proporciones:

$\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$	$4\cdot20=5\cdot16$ $80=80$	Se lee 4 es a 5 como 16 es a 20
$\frac{5}{8}=\frac{35}{56}$		
$\frac{12}{17}=\frac{36}{51}$		
$\frac{6}{16}=\frac{24}{64}$		
$\frac{4}{7}=\frac{36}{63}$		
$\frac{6}{7}=\frac{42}{49}$		

Calcular "x" en las siguientes proporciones:

$a)\ \frac{x}{8}=\frac{45}{40}$ $b)\ \frac{9}{x}=\frac{108}{132}$

$c)\ \frac{7}{12}=\frac{x}{108}$ $d)\ \frac{3}{4}=\frac{x}{28}$

$e)\ \frac{x}{6}=\frac{75}{90}$ $f)\ \frac{14}{17}=\frac{x}{170}$

$g)\ \frac{11}{15}=\frac{77}{x}$ $h)\ \frac{x}{9}=\frac{72}{81}$

$i)\ \frac{x}{21}=\frac{100}{105}$ $j)\ \frac{5}{6}=\frac{45}{x}$

Magnitudes directamente proporcionales

Realizar las operaciones indicadas con notación científica:

Litros de aceite	1	2		4	
Precio litro de aceite (Bs.)	12		36		60

Magnitudes inversamente proporcionales

Completar el siguiente cuadro de magnitudes inversamente proporcionales:

Obreros	30	24		18	
Días	24		36		72

Vacas	20		10		5
Forraje (Kg)	30	40		75	

Porcentaje

Calcular el porcentaje en los siguientes problemas:

a) Hallar el 35% de 700.

b) Hallar el 43% de 5000.

c) Hallar el 37% de 36000.

d) Hallar el 15% de 140.

e) En un curso de 30 estudiantes, 8 reprobaron el área de matemática. Determinar el % de estudiantes reprobados.

f) Eliseo compró una zapatilla deportiva con un descuento del 18%, si el precio original de la zapatilla deportiva es de Bs. 150, ¿cuánto pagó Eliseo por la zapatilla deportiva?

g) Mario paga Bs. 150 por concepto de alquiler de una habitación, el dueño de la habitación decidió aumentar en un 4% el alquiler, ¿cuánto paga Mario por el alquiler de la habitación con el aumento del 4%?

Regla de tres simple directa

Resolver los siguientes problemas de regla de tres simple directa:

a) Si 5 metros de tela cuestan 40, ¿cuánto costara 12 metros de tela?

b) Un costurero confecciona por día 7 prendas, ¿cuántas prendas confeccionara en 15 días?

c) Por 8 metros de tela se paga Bs. 96, ¿cuánto costará 2 metros de tela?

d) Por 2 kilogramos de carne se pagó Bs. 56, ¿cuánto costará 6 kilos de carne?

e) En un curso de 30 estudiantes solo asistieron 21 estudiantes. Calcular el porcentaje de inasistencia.

f) Manuel trabajando gana por jornada Bs. 80, ¿cuánto ganará si trabaja 15 jornadas?

g) Un automóvil recorre 350 km en 5 horas, ¿en qué tiempo recorrerá 210 km?

Regla de tres, simple inversa

Resolver los siguientes problemas de regla de tres, simple inversa:

a) 8 obreros tardan 15 días en terminar una obra, ¿en cuántos terminarán la misma obra 12 obreros?

b) 10 jardineros cultivan un jardín en 3 días, ¿en cuántos días cultivarán el mismo jardín 6 jardineros?

c) Si un bus que viaja a 80 km/h tarda 5 horas en llegar a su destino, si aumenta su velocidad a 100 km/h, ¿en cuánto tiempo llegará a su destino?

d) 15 personas tienen alimentos para 20 días, si se aumentan 10 personas, ¿para cuantos días alcanzará los alimentos?

e) Si 15 vacas comen un granero lleno de cebada en 90 días, ¿en cuánto tiempo comerían 45 vacas la misma cantidad de cebada?

f) 15 obreros acaban una obra en 7 días, ¿cuántos obreros acabarán la misma obra en 5 días?

Regla de tres compuesta

Resolver los siguientes problemas de regla de tres compuesta:

a) En 4 días 2 confeccionistas confeccionan 120 camisetas, ¿cuántas confeccionistas se requieren para confeccionar 180 camisetas en 3 días?

b) Dos albañiles trabajando 8 horas diarias construyen una pared en 15 días, ¿cuántos albañiles se requieren para construir el mismo muro en 10 días trabajando 6 horas diarias?

c) Un ganadero necesita 75 kg de forraje para alimentar 25 vacas durante 10 días, ¿cuántos días podrá alimentar 20 vacas si cuenta con 120 kg de forraje?

d) 3 personas trabajando 8 horas diarias realizaron 80 metros de una obra en 10 días, ¿cuántos días necesitan 5 personas trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros de la misma obra?

e) Por enviar un paquete de 10 kg de peso a una ciudad que está a 60 km de distancia se cobró Bs. 15, ¿cuánto será el costo de envió de un paquete de 20 kg a una ciudad distante 90 km?

f) 12 obreros trabajando 8 horas terminan la obra en 25 días, ¿cuánto tardarán en terminar la misma obra 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

(Ejercicios recopilados)

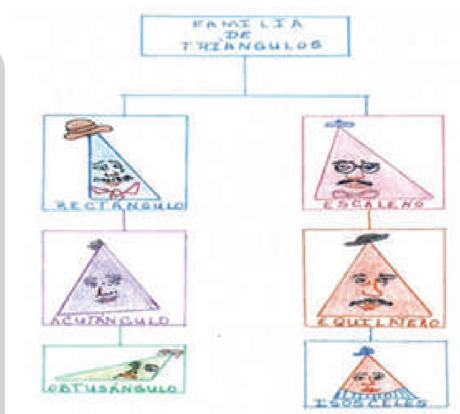
LA FORMA, EL NÚMERO Y SEMEJANZA EN GEOMETRÍA

PRÁCTICA

Buscamos en internet "La historia de Isósceles, el triángulo" y, luego de la lectura, respondemos las siguientes preguntas:

Actividad

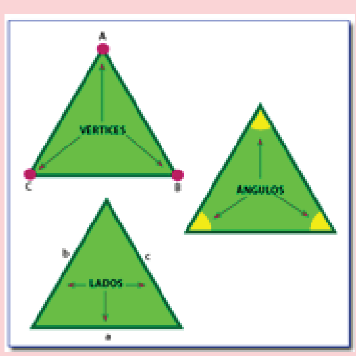
- ¿Cuál es tu opinión acerca de respetar la diferencia nuestra y la de los demás?
- ¿Cómo percibes o te sientes cuando nos dicen que "nos parecemos, pero no somos iguales"?
- Describimos según tu opinión el hecho de amar al prójimo sin establecer diferencias.
- Elaboremos un glosario con las palabras nuevas mencionadas en el cuento, que se refieren al tema.
- ¿Qué tipos de triángulos existen?



TEORÍA

TRIÁNGULOS

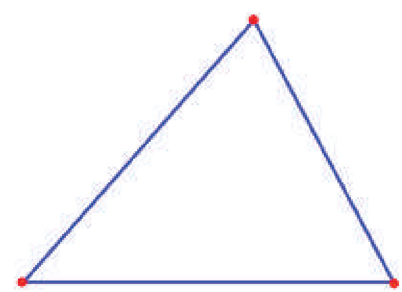
Se clasifican de acuerdo a sus ángulos o lados.



1. Triángulos y su clasificación

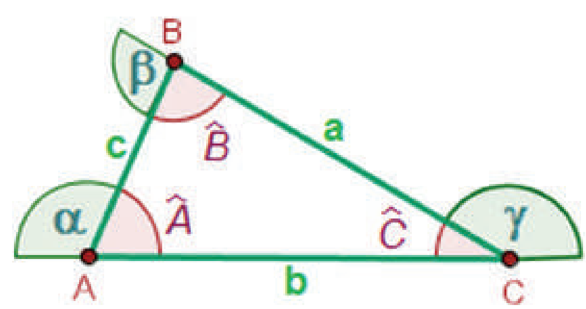
a) Definición

Se llama triángulo a la figura formada por la unión de segmentos determinados al unir tres puntos no colineales.



b) Elementos de un triángulo

Los elementos de un triángulo son: vértices, lados y ángulos interiores.



Actividad

Considerando el triángulo anterior, analizamos y escribimos los siguientes elementos:

Puntos: ________________ Rectas: ____________________ Segmentos: __$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ______

Plano: _______________ Ángulos internos: ______________ Ángulos externos: _________________

¿Cómo se llaman los puntos A, B, C? ____

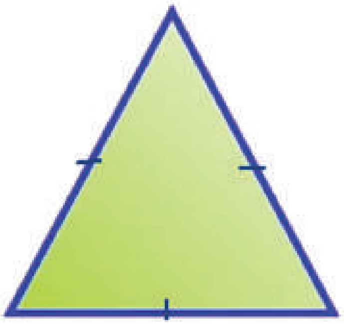
¿Cómo se llaman los segmentos? ____

¿Qué es una región triangular? ____

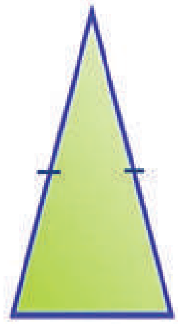
c) Clasificación

Los triángulos se clasifican por sus lados y por sus ángulos.

- **Por sus lados,** se clasifican en: Equilátero, Isósceles y Escaleno.



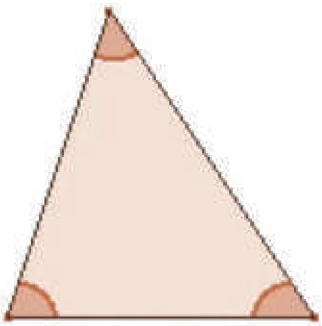
Triángulo Equilátero
3 lados iguales



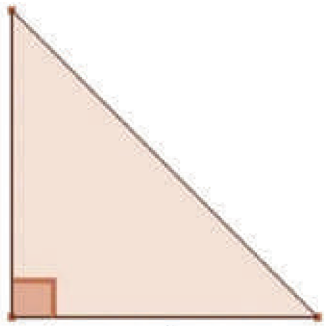
Triángulo Isósceles
2 lados iguales

Triángulo Escaleno
3 lados diferentes

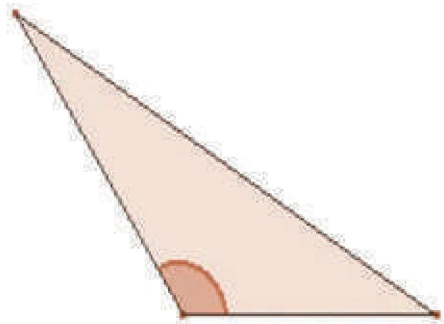
- **Por sus ángulos,** los triángulos se clasifican en: Acutángulo, Rectángulo y Oblicuángulo.



Triángulo Acutángulo
3 ángulos menores a 90º



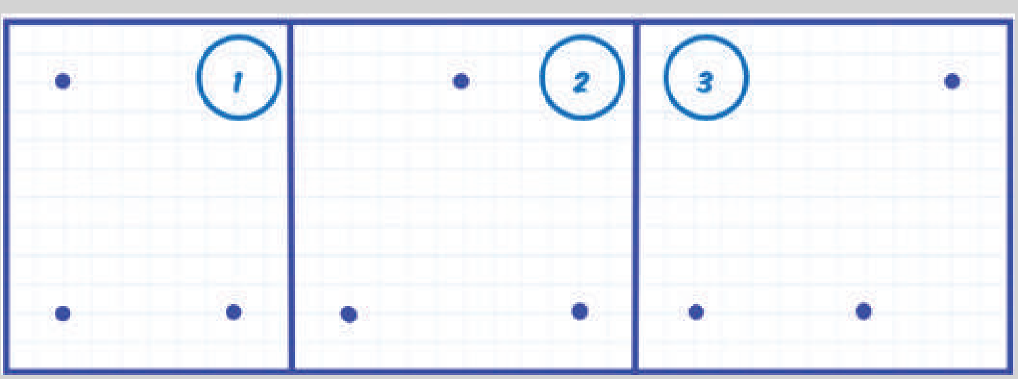
Triángulo Rectángulo
1 ángulo igual a 90º



Triángulo Oblicuángulo
1 ángulo mayor a 90º

Actividad

Trazamos los segmentos determinados por los puntos y medimos sus lados y ángulos, completamos la tabla con SI o NO según corresponda:



TRIÁNGULO	ESCALENO	ISÓSCELES	EQUILÁTERO	ACUTÁNGULO	OBTUSÁNGULO	RECTÁNGULO
1						
2						
3						

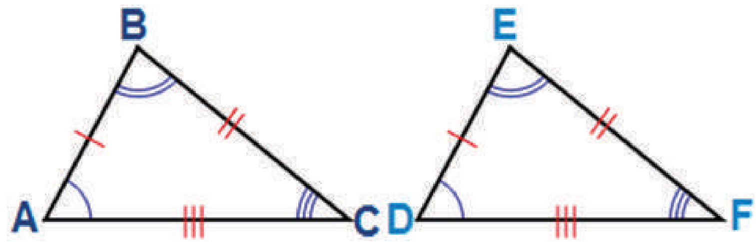
PARA INVESTIGAR Y ANALIZAR

Aparte de utilizar compás para el trazado de triángulos:

- *¿Qué datos debemos conocer para construir triángulos?*
- *¿Será necesario solo conocer los lados o solo los ángulos?*
- *Encuentra otra forma de construir triángulos sin compás.*

2. Congruencia de triángulos en el entorno

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.



Si el triángulo *ABC* es congruente al triángulo *DEF*, la relación puede ser escrita matemáticamente así:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

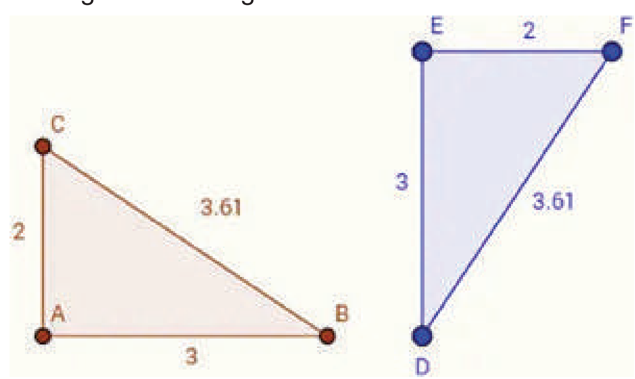
El triángulo es una figura que aparece frecuentemente en el campo de la ingeniería, por ejemplo, en las estructuras de los puentes, en la agrimensura para medir terrenos, en la navegación, en el cálculo de distancias, etc.

EL ARTE ABSTRACTO

Vassily Kandinsky (pintor ruso), es considerado como el gran creador de la pintura abstracta, en la que el artista no utiliza las formas y los colores para representar objetos de la naturaleza, percibía relaciones entre colores, las formas geométricas y las impresiones emocionales:

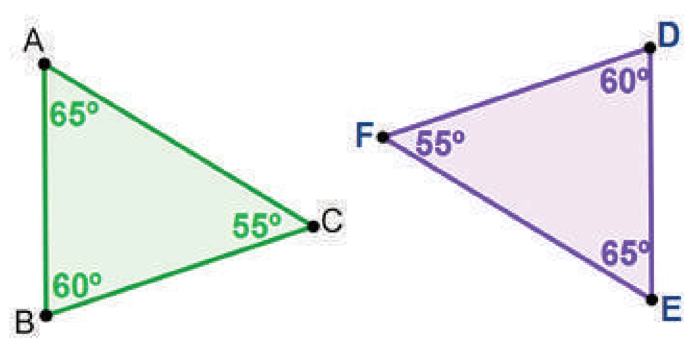
- *Amarillo: Cálido, convulso e irritante; Ángulo agudo; Triángulo.*
- *Azul: Tranquilo, severo y frío; Ángulo obtuso; Círculo.*
- *Rojo: Ardiente, pasional y viril; Ángulo recto; Cuadrado.*
- *Verde: Estático, neutro y pasivo.*
- *Blanco: "Silencio henchido de potencialidad recóndita".*
- *Negro: "Silencio sin futuro"*
- *La línea horizontal: "Una potencialidad fría de movimiento".*
- *La línea vertical: "Una potencia cálida".*

Analizamos los siguientes triángulos:



No importando la posición de los triángulos, nos damos cuenta de que los lados del triángulo *ABC* tienen la misma longitud que los lados del triángulo *DEF*:

$\overline{AB} \cong \overline{DE} \cong 3$ $\quad$ $\overline{BC} \cong \overline{DF} \cong 3.61$ $\quad$ $\overline{CA} \cong \overline{FE} \cong 2$



Actividad

En la imagen, encontramos:

- Figuras geométricas planas
- ¿Qué figura plana sobresale o se encuentra por mayor en este parque?
- Si existen triángulos congruentes.
- ¿Qué tipos de triángulos están presentes en este contexto?

3. Criterios para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA)

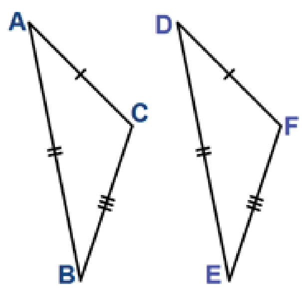
En general, se puede construir un triángulo si se conoce:

- Las medidas de dos de sus lados y del ángulo formado por ellos.
- Las medidas de dos de sus ángulos y el lado adyacente a ellos.
- Las medidas de sus tres lados.

Sabemos que dos triángulos son congruentes si sus tres lados y sus tres ángulos coinciden perfectamente, de ahí que podemos afirmar los siguientes criterios:

- LLL: lado, lado, lado

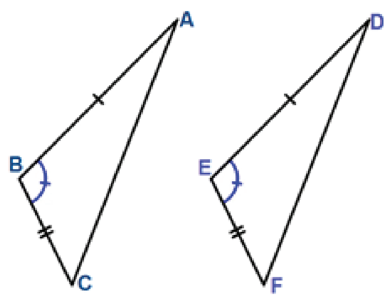
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}\quad\overline{DE}\\ \overline{BC}\cong\overline{EF}\\ \overline{CA}\cong\overline{FD}\end{array}\right\}\triangle ABC\cong\triangle DEF$$

- LAL: lado, ángulo, lado

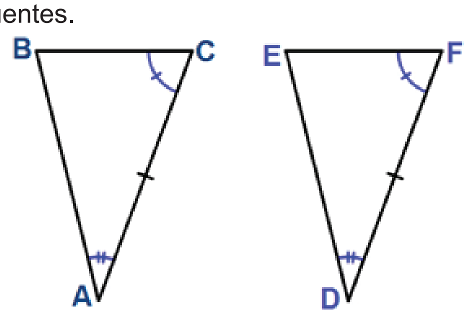
Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo formado por ellos respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}\cong\overline{DE}\\ \overline{BC}\cong\overline{EF}\\ \sphericalangle ABC\cong\sphericalangle DEF\end{array}\right\}\triangle ABC\cong\triangle DEF$$

- ALA: ángulo, lado, ángulo

Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\sphericalangle BCA\cong\sphericalangle EFD\\ \overline{AC}\cong\overline{DF}\\ \sphericalangle BAC\cong\sphericalangle EDF\end{array}\right\}\triangle ABC\cong\triangle DEF$$

PARA INVESTIGAR Y ANALIZAR

En la congruencia de triángulos:

¿Qué mediciones deberíamos realizar para estar seguros de la congruencia?

¿Podemos asegurar que dos triángulos son semejantes si conocemos dos lados o dos ángulos?

Actividad

Analiza cada trío de datos que se dan para indicar si son o no suficientes para construir un triángulo congruente con otro triángulo dado:

- Las medidas de sus tres ángulos.
- Las medidas de dos ángulos y de un lado (no necesariamente adyacente a ellos).
- Las medidas de dos lados y del ángulo opuesto al menor de ellos.

4. Planteamiento y resolución de problemas relacionados a la congruencia de triángulos

En nuestra vida diaria nos encontramos con situaciones en las que debemos reproducir la forma y el tamaño de algún objeto, ya sea para reemplazarlo, para fabricar otros, para copiarlo, etc. Figuras de igual forma y tamaño aparecen también en los edificios de departamentos, en las construcciones de puentes, en logotipos de algunas marcas o empresas, etc.

En matemática las figuras que tienen la forma y el mismo tamaño se llaman figuras congruentes.

En el caso específico de los triángulos, para asegurar que son congruentes es suficiente que tengan:

- Dos lados y el ángulo comprendido;
- Un lado y dos ángulos igualmente dispuestos;
- Los tres lados;
- Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

En el siguiente ejemplo nos indican que los ángulos $\measuredangle BAC \cong \measuredangle DEC$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EDC$ son congruentes, nos pide hallar los valores de x, y.

PROPIEDAD RECÍPROCA

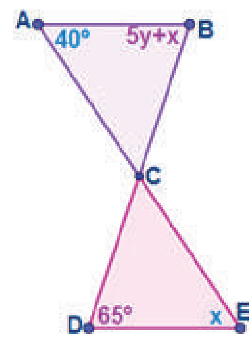
"Si dos lados de un triángulo son congruentes, los dos ángulos opuestos a ellos también lo son".

"Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los dos lados opuestos a ellos también lo son".

En ambos casos los enunciados son verdaderos.

PROPIEDAD DE ISÓSCELES

A todo triángulo que tiene al menos dos lados congruentes lo llamamos isósceles, al que tiene sus tres lados congruentes lo llamamos equilátero y al que tiene sus tres lados distintos, escaleno.



Como $\measuredangle BAC \cong \measuredangle DEC$ $\quad x = 40°$

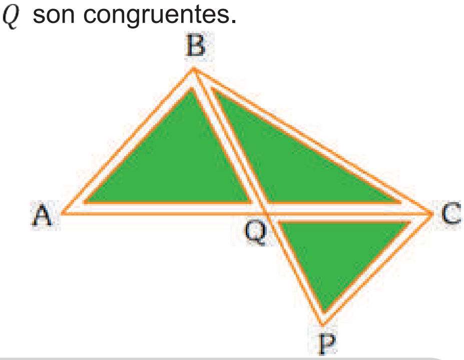
$\measuredangle ABC \cong \measuredangle EDC$ $\quad 5y + x = 65°$

$$5y + 40° = 65°$$
$$5y = 65° - 40°$$
$$5y = 25°$$
$$y = 5°$$

El Gobierno Municipal de la ciudad de La Paz requiere cercar los tres jardines tal como se muestra en la figura de abajo, sabiendo que el costo de cercar el lado $\overline{BC}$ es 160 bolivianos, además se sabe que los lados tienen un costo de $\overline{AB} = 105$ y $\overline{CP} = 70$ encontramos el costo total. Sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{AQ}$ y $\overline{CP} \cong \overline{PQ}$ son congruentes.

Datos:

$\overline{BC} = 160$
$\overline{AB} \cong \overline{AQ} = 105$
$\overline{CP} \cong \overline{PQ} = 70$

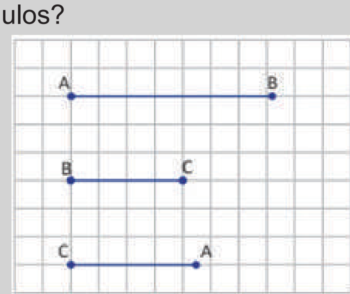


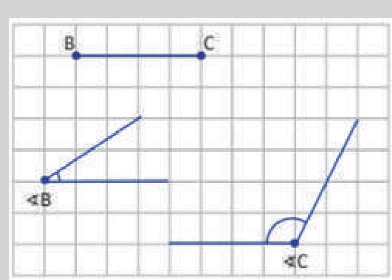
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PQ} + \overline{AQ} = 105 + 160 + 70 + 70 + 105 = 510$$

Actividad

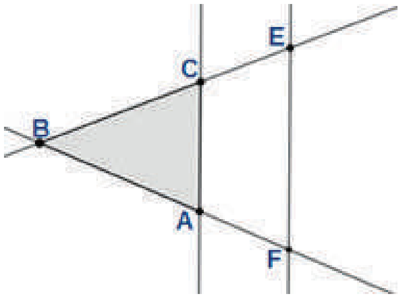
Utilizando compás y regla, realizamos lo siguiente:

- Construye un triángulo utilizando los tres segmentos.
- Construye un triángulo utilizando el segmento y los dos ángulos.
- Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros y compañeras, ¿cómo son los triángulos?





5. Triángulos semejantes



El teorema de Thales, es el teorema fundamental de la teoría de semejanza de triángulos y menciona que: “Si dos rectas cualesquiera en diferente posición y con un punto de corte son cortadas por otras dos rectas paralelas, entonces los segmentos que determinan a ellas son proporcionales”

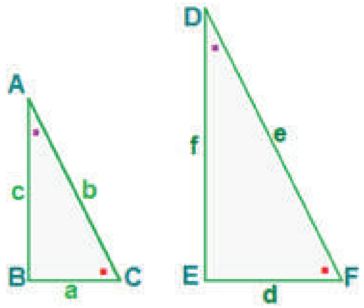
Entonces tendremos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CA}}$$

Mediante este teorema podremos establecer una proporción de lados.

Dos triángulos son semejantes si ambos tienen sus ángulos iguales, aunque no tengan la misma dirección.

Los triángulos son semejantes:



Por tanto:

$$\triangle BCA \sim \triangle EFD$$

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD; \sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$$

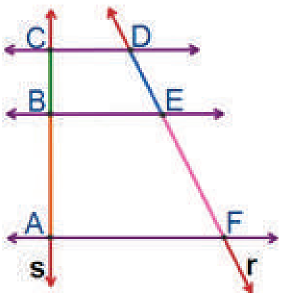
$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k$$

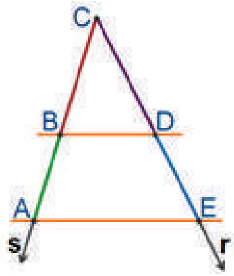
PARA TENER EN CUENTA

- *Dos triángulos están en posición de Thales, si tienen un ángulo en común y los lados respectivos opuestos a este ángulo son paralelos. Los triángulos en posición de Thales son semejantes.*

Otra forma de enunciar el teorema de Thales es:

Si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.



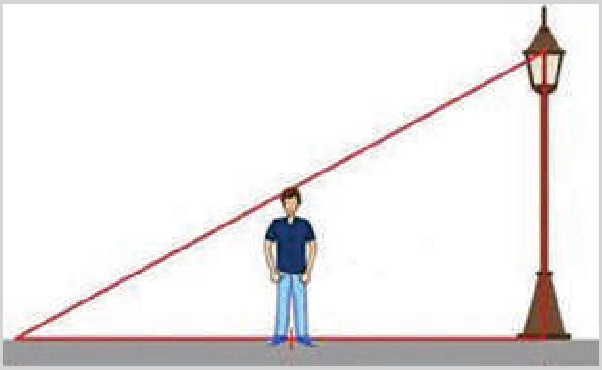


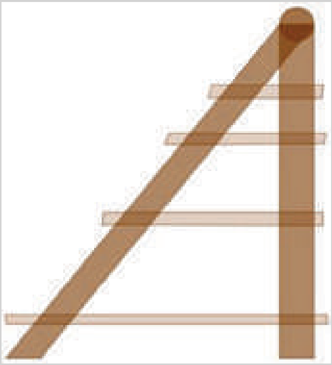
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} \qquad \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$$

Actividad

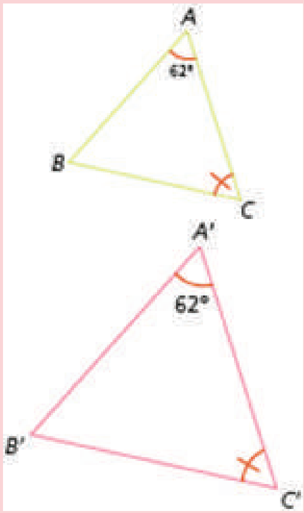
Analizamos y respondemos, ¿los triángulos formados por las siguientes situaciones, están en posición de Thales?





ANALIZANDO

Observa las siguientes figuras.



¿Es posible determinar si los triángulos ABC y A' B' C' son semejantes?

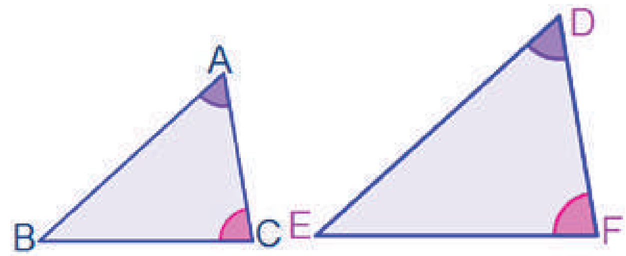
6. Criterios de semejanza de triángulos (AAA, LLL, LAL)

Para determinar si dos triángulos son semejantes, basta con comprobar si cumplen algunos criterios que exigen menos condiciones que la definición.

Se sabe que dos triángulos son semejantes si los ángulos y lados de los triángulos son correspondientes y congruentes, de ahí que podemos afirmar los siguientes criterios:

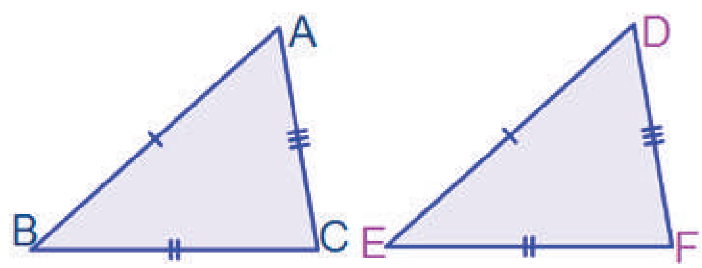
- AAA: ángulo, ángulo, ángulo

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos correspondientes congruentes, por ende, el tercer ángulo será congruente.



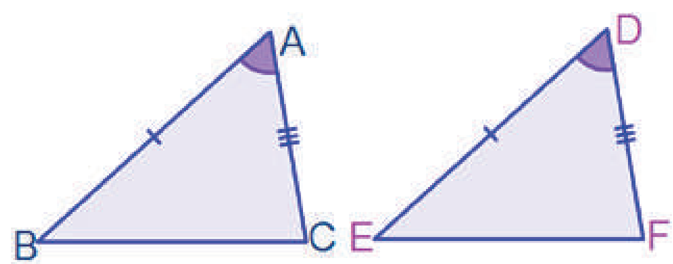
- LLL: lado, lado, lado

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.



- LAL: lado, ángulo, lado

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.

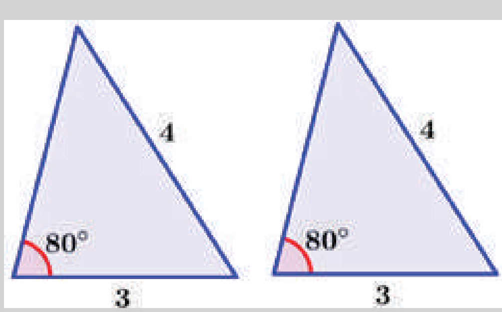


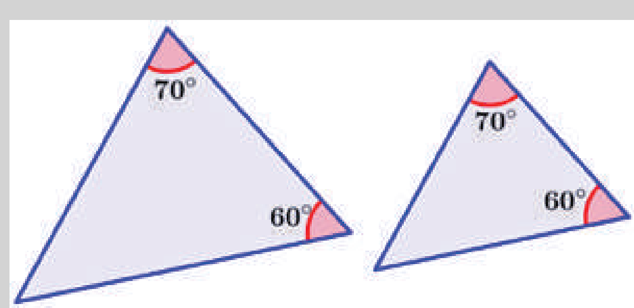
INVESTIGANDO

Indica la diferencia que existe en matemática sobre el concepto y definición de congruencia y semejanza.

Actividad

Determinamos si los siguientes pares de triángulos son semejantes, congruentes o ninguno.



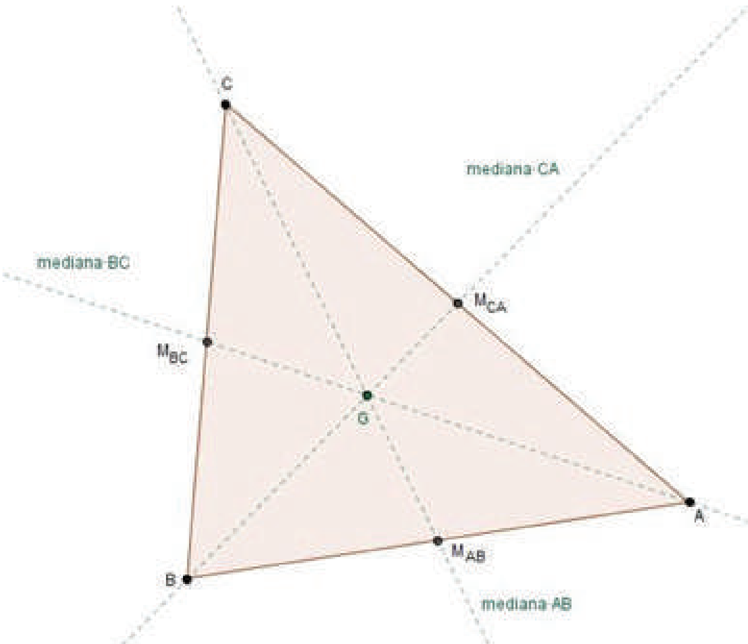


7. Rectas y puntos notables

En todo el universo matemático sobre triángulos hay toda una gama de características, propiedades, teoremas y curiosidades. En geometría para cualquier triángulo se pueden encontrar rectas y puntos muy importantes, entre las rectas notables más conocidos tenemos: las medianas, mediatrices, alturas y bisectrices, sobre los puntos notables al baricentro, circuncentro, ortocentro y el incentro.

a) Medianas

El segmento determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto se llama mediana, las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro, el baricentro se encuentra en el interior del triángulo



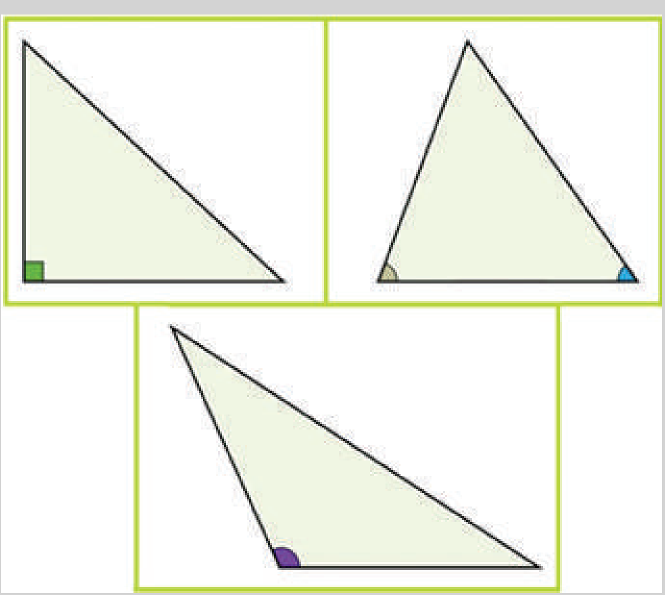
PROCEDIMIENTO

1) *Dibujamos el triángulo con el que se va a trabajar.*
2) *Ubicamos los vértices del triángulo.*
3) *Encontramos los puntos medios de cada lado.*
4) *Unimos cada punto medio con su vértice opuesto, de esta manera encontramos las medianas del triángulo dibujado.*
5) *El punto de intersección de las medianas nos da el baricentro del triángulo.*
6) *Este punto encontrado es el centro de gravedad del triángulo.*

Se cumple que el baricentro divide a cada mediana con razón 2:1, de manera que la distancia desde el baricentro a cada vértice es el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto. Además, cada mediana del triángulo lo divide en dos triángulos de igual área y las tres medianas dividen al triángulo en 6 triángulos de áreas iguales.

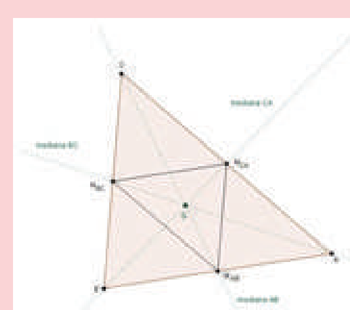
Actividad

Encontramos las medianas y el baricentro de los siguientes triángulos.



DATO CURIOSO

Uniendo los pies de las medianas (punto medio de cada lado) se obtiene un triángulo semejante al original con un cuarto de área de este.

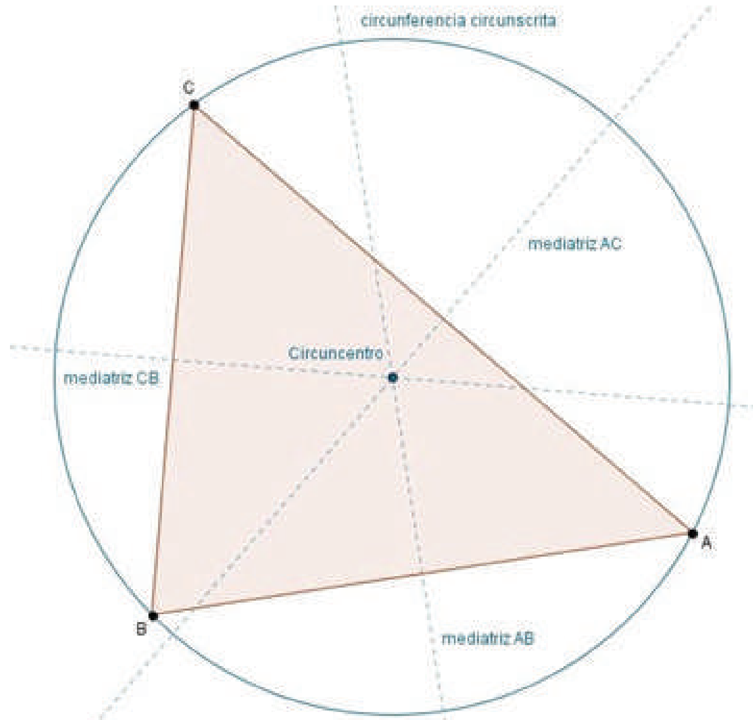


b) Mediatriz

La recta perpendicular que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo se llama mediatriz, las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro, la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo se llama circunferencia circunscrita al triángulo.

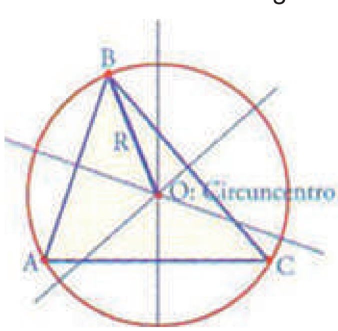
PROCEDIMIENTO

1) *Dibujamos el triángulo con el que vamos a trabajar.*
2) *Encontramos los puntos medios de cada lado.*
3) *Con ayuda de una escuadra dibujamos las líneas perpendiculares a cada punto medio, estas rectas son las mediatrices.*
4) *El punto de intersección de las mediatrices nos da el circuncentro del triángulo.*
5) *Este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices como se observa en la figura.*
6) *Para dibujar esta circunferencia debemos utilizar el compás con la abertura del centro a uno de los vértices.*



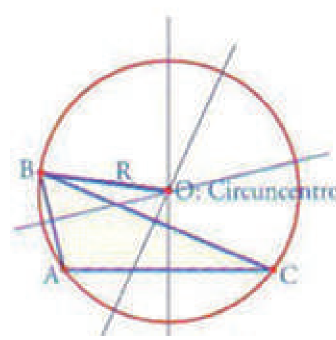
El circuncentro varía según el tipo de triángulo, como se muestra en la siguiente figura:

En el interior del triángulo



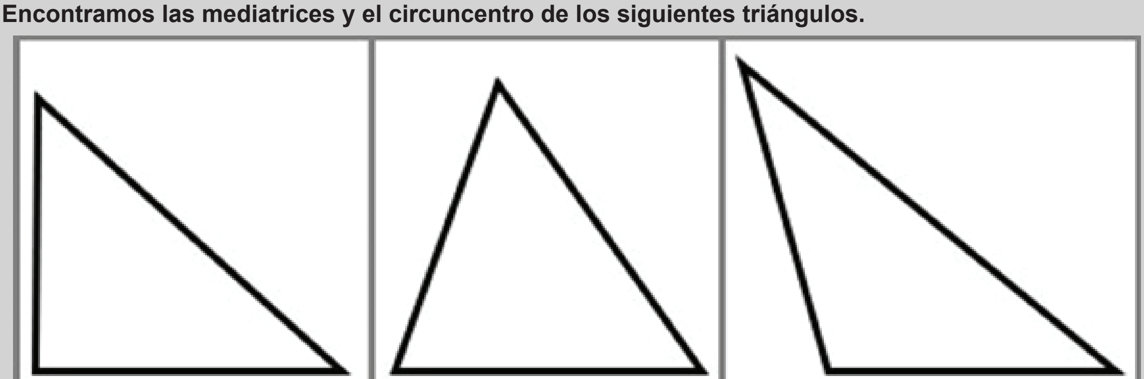
En el centro de la hipotenusa

En el exterior del triángulo



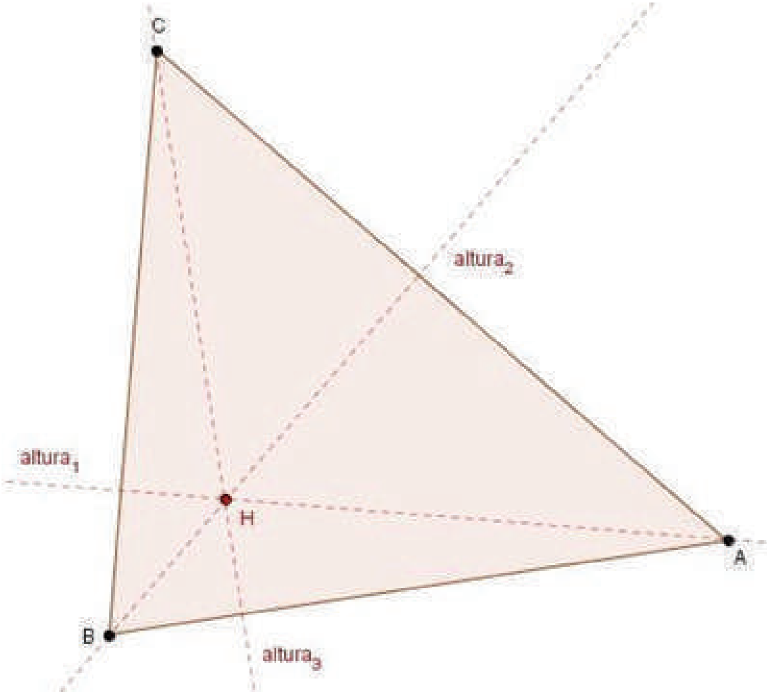
Actividad

Encontramos las mediatrices y el circuncentro de los siguientes triángulos.



c) Altura

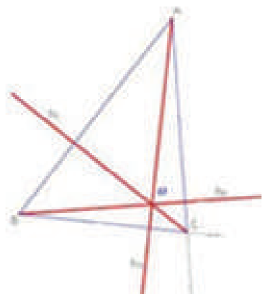
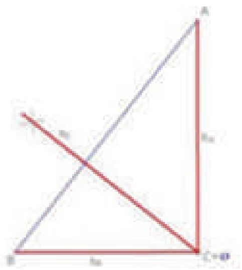
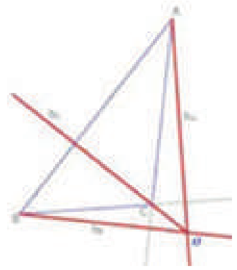
El segmento perpendicular determinado por un vértice y la recta que contiene el lado opuesto se llama altura, las rectas que contienen las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro, el punto de intersección de las medianas es el baricentro del triángulo.



PROCEDIMIENTO

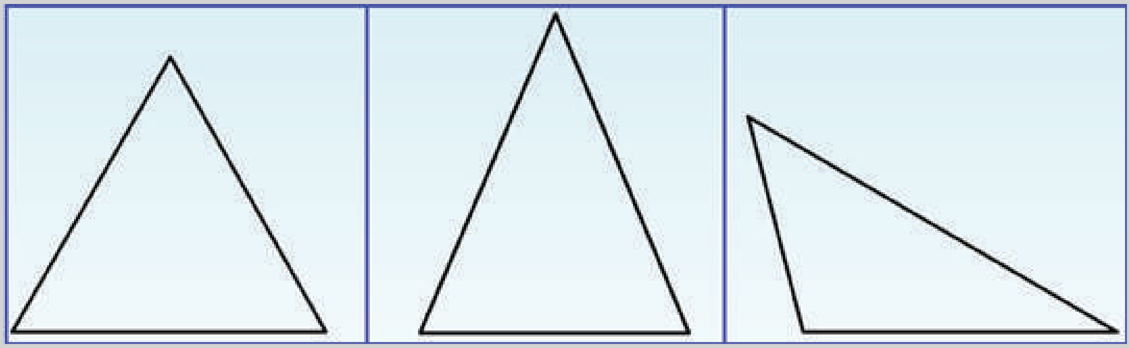
1) *Dibujamos el triángulo con el que vamos a trabajar.*
2) *A cada vértice con ayuda de una escuadra debemos trazar la línea perpendicular al lado opuesto, estas rectas son las alturas de cada vértice del triángulo.*
3) *El punto de intersección de las alturas se llama ortocentro.*
4) *La posición del ortocentro dependerá del triángulo utilizado.*

El ortocentro varía según el tipo de triángulo, como se muestra en la siguiente figura:

Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
		
Ortocentro dentro del triángulo	Ortocentro sobre el vértice del ángulo recto	Ortocentro fuera del triángulo

Actividad

Encontramos las alturas y el ortocentro de los siguientes triángulos



d) Bisectriz.

El segmento de recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales se llama bisectriz, las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto llamado incentro, la circunferencia cuyo centro equidista de los tres lados de un triángulo se llama circunferencia inscrita al triángulo.

PROCEDIMIENTO

1º) *Dibujamos el triángulo con el que vamos a trabajar.*

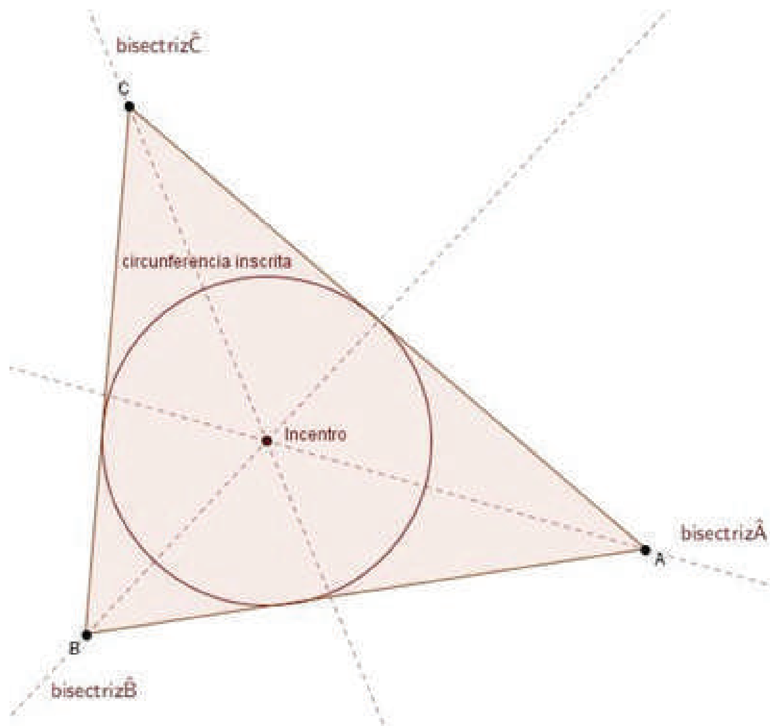
2º) *Con ayuda de un transportador medimos los ángulos interiores y marcamos los puntos medios de cada arco.*

3º) *Trazamos las líneas uniendo los vértices con los puntos medios de cada arco y así encontramos las bisectrices del triángulo.*

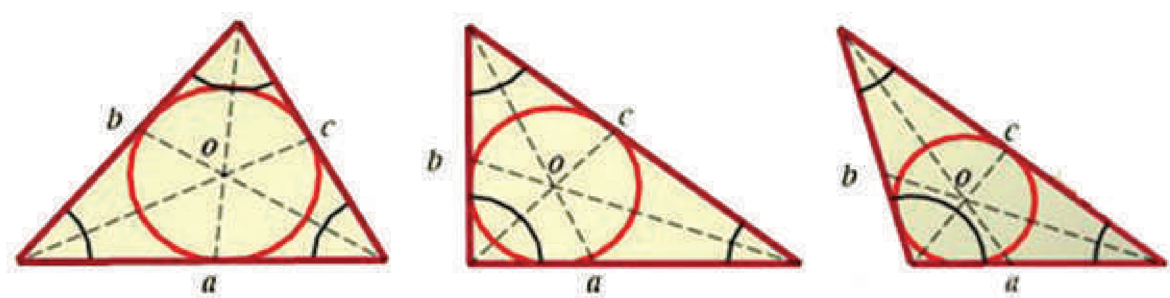
4º) *El punto de intersección de las bisectrices nos da el incentro del triángulo.*

5º) *Este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo tal como se observa en la figura.*

6º) *Para dibujar la circunferencia debemos utilizar el compás con la abertura del centro a uno de los lados.*

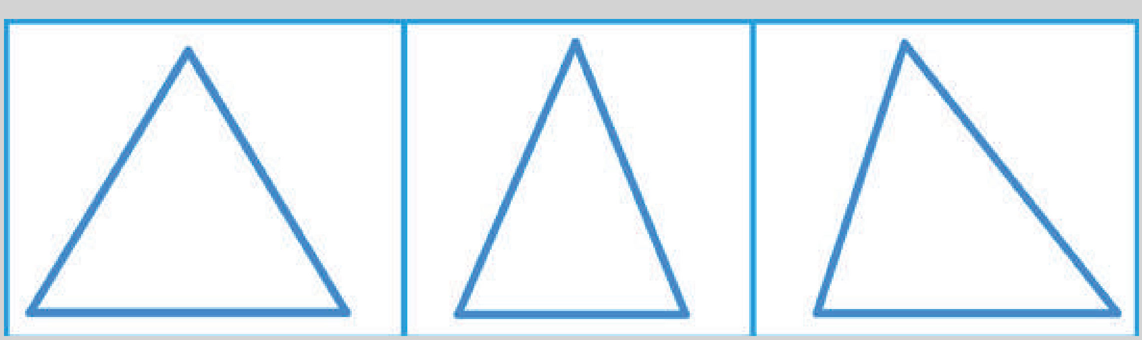


El incentro varía según el tipo de triángulo como se muestra en la siguiente figura:



Actividad

Encontramos las alturas y el incentro en los siguientes triángulos

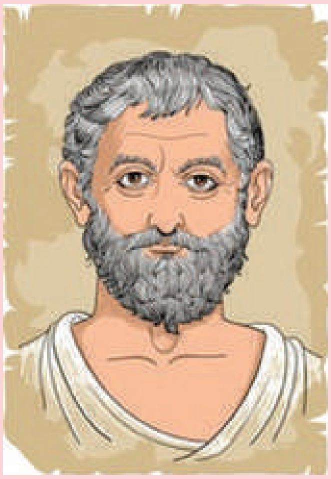


8. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Hoy en día, con el crecimiento y desarrollo de la tecnología, también la geometría está siendo muy utilizado en diversos campos profesionales y más aún en nuestro contexto, por ejemplo.

- Las computadoras utilizan triángulos para establecer sombras y colores de las imágenes en la pantalla. Un sistema llamado triangulación define la forma del objeto y utiliza funciones de la trigonometría para establecer los colores de las imágenes.
- En la navegación la triangulación es muy importante, ya que es muy utilizado para determinar posiciones de puntos, barcos, faros, medidas de distancias, etc.
- El GPS, muy utilizado en todo el mundo, utiliza triángulos para determinar la triangulación de llamadas, por ejemplo. Los triángulos en la industria, en la fabricación de tinglados, de soporte en algunas construcciones, etc.

TALES DE MILETO



Fuente: *https://www.freepik.es/fotos-populares*

VALORACIÓN

Actividad

Analizamos cada pregunta y respondemos con claridad:

- ¿La semejanza de triángulos es aplicable en situaciones de la vida?
- ¿Puedes identificar triángulos semejantes en tu entorno?
- ¿Cuál es tu opinión sobre la importancia del estudio de los triángulos semejantes?

Analizamos la imagen de abajo para resaltar la importancia que tiene el uso de triángulos en diversos campos profesionales:

- En tu opinión, ¿por qué crees que es muy utilizado el triángulo como forma geométrica en estos campos, podrá funcionar con otras figuras?

PRODUCCIÓN

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Observa la naturaleza y el entorno para identificar triángulos semejantes y representarlos en una maqueta.
- Para ello puedes utilizar materiales reciclados como cartón, botellas vacías, papel reciclado, etc.
- Presenta tu maqueta en la clase de matemática, explicando las propiedades de los triángulos semejantes.

PERÍMETROS, ÁREAS Y FORMAS GEOMÉTRICAS APLICADAS A LA VIDA COTIDIANA

PRÁCTICA

La diversidad cultural de nuestro país muestra una innumerable riqueza en cuanto a los diseños y tejidos propios de cada región; éstos son valorados bajo estándares internacionales.

Actividad

Desde nuestra vivencia familiar y tomando en cuenta nuestro contexto y antepasado, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los tejidos que puedes mencionar y son utilizados en nuestro diario vivir?
- En los diseños vistos, ¿cuáles son las figuras geométricas que se distinguen?
- Dibuja las figuras encontradas en nuestros diseños y nombra cada uno de ellos.

Actividad

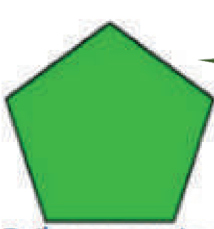
Respondemos:

- ¿Qué es lo que más te llama la atención?
- ¿Cuáles son las figuras geométricas planas que distingues?
- Si ves a tu alrededor siempre encontrarás figuras geométricas planas, ¿qué figuras puedes mencionar desde el lugar que te encuentras?
- ¿Por qué crees que es tan importante las figuras geométricas en nuestro diario vivir?

TEORÍA

POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES

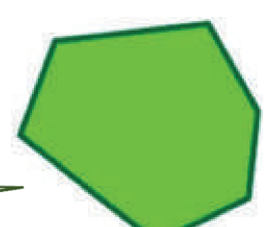
La palabra polígono hace referencia a una figura delimitada por lados rectos, también podemos indicar que se refiere a una figura geométrica plana formada por una línea poligonal cerrada. Los polígonos pueden ser regulares o irregulares.



Polígono regular

Cuando todos sus lados son iguales, por lo tanto, también sus ángulos son iguales

Cuando sus lados y ángulos son diferentes

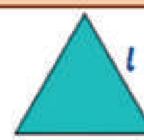
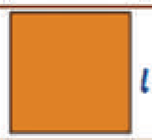
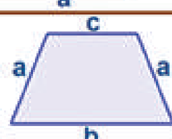
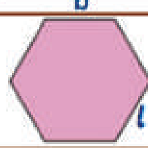


Polígono irregular

1. Perímetro de polígonos regulares e irregulares

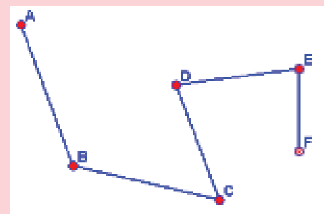
El perímetro de una figura geométrica plana, cualesquiera, es la longitud del contorno de la figura, en este sentido, hallar el perímetro es sumar las medidas de todos sus lados. El perímetro se mide en unidades lineales o de longitud, como el metro, centímetro, milla, etc.

El perímetro de un polígono, es igual a la suma de la longitud de todos sus lados.

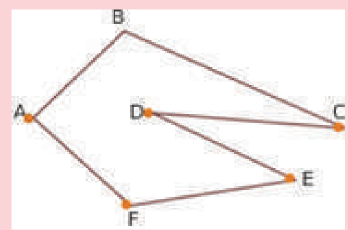
POLÍGONO	FIGURA	PERÍMETRO
Triángulo equilátero		$P=3\cdot l$
Cuadrado		$P=4\cdot l$
Rectángulo		$P=2a+2b$
Rombo		$P=4\cdot l$
Romboide o paralelogramo		$P=2a+2b$
Trapecio isósceles		$P=2a+b+c$
Polígono regular		$P=n\cdot l$ "n", número de lados iguales del polígono

DATO CURIOSO

Una línea poligonal puede ser abierta o cerrada. Es abierta cuando dos segmentos tales que uno de sus extremos no está unido a otro segmento.

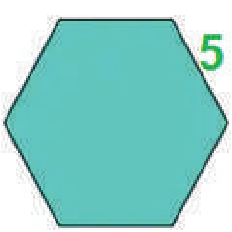


Es cerrada cuando todos los segmentos que lo forman están unidos a otros segmentos.

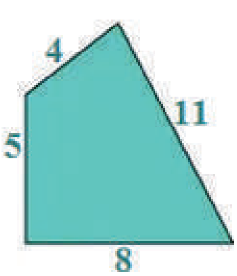


Ejemplo:

1) Encontrar el perímetro de cada figura:



$$P=n\cdot l$$
$$P=6\cdot l$$
$$P=6\cdot(5\,cm)$$
$$P=30\,cm$$



$$P=a+b+c+d$$
$$P=5+4+11+8$$
$$P=28\,cm$$

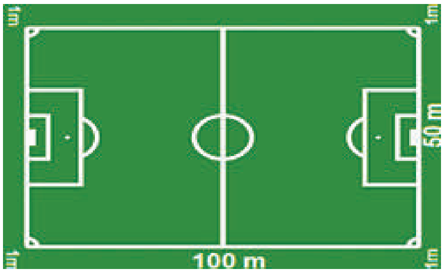
DATO CURIOSO

Algunos polígonos, por la cantidad de lados que tienen, reciben nombres especiales, por ejemplo:

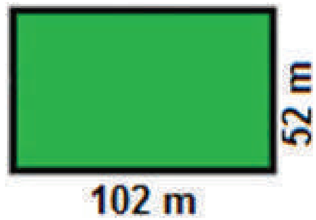
- *De 3 lados: Triángulo equilátero.*
- *De 4 lados: Cuadrado*
- *De 5 lados: Pentágono*
- *De 6 lados: Hexágono*
- *De 7 lados: Heptágono*
- *De 8 lados: Octágono*
- *De 9 lados: Eneágono*
- *De 10 lados: Decágono*
- *De 12 lados: Dodecágono*
- *De 20 lados: Icoságono*

2) En un campo de fútbol, el largo mide 100 metros y el ancho 50 metros, se requiere colocar una malla perimetral, con un margen de 1 metros en cada lado, para dejar espacio a los jugadores, ¿cuántos metros de valla debemos comprar?

La cancha mide 100 m por 50 m, sin embargo, debemos dar margen de 1 metro a cada lado, por tanto, el rectángulo se convierte en:



$\Rightarrow$

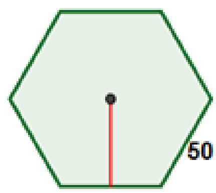


$$P = 2a + 2b$$
$$P = 2 \cdot 102 + 2 \cdot 52$$
$$P = 204\,m + 104\,m$$
$$P = 308\,m$$

Es decir que necesitaremos 308 metros de malla

3) Un carpintero que construye mesas hexagonales para el nivel inicial, colocará una cinta alrededor de la misma para evitar rasmilladuras en los niños, si cada mesa tiene de lado 50 cm y debe construir 6 mesas, ¿cuántos centímetros de cinta necesitará?

$\Rightarrow$



n = 6

l = 50 m

$$P = n \cdot l$$
$$P = 6 \cdot 50$$
$$P = 300\,m$$

El carpintero necesitará 6 mesas: $6 \cdot 300 = 1800\,m$

Para el borde de las mesas se necesita 1800 metros.

4) Doña Delma y su hija Aneth sembrarán verduras en su terreno y para evitar que los animales ingresen, cercará con cuatro filas de alambre este sector, su pequeño lote tiene las siguientes medidas, ¿cuántos metros de alambre necesitarán en total?

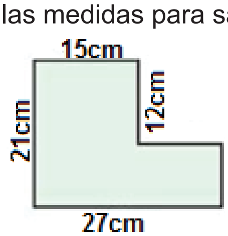
$$P = a + b + c + d$$
$$P = 10 + 15 + 15 + 25$$
$$P = 65\,m$$

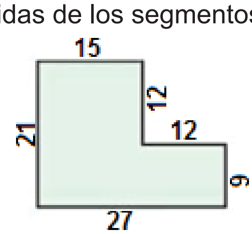
Como utilizará 4 filas de alambre, entonces necesitará un total de:

$$4 \cdot 65 = 260\,m$$

5) Encuentra el perímetro de la figura.

Como podemos apreciar en primera instancia no tenemos los datos de todos los lados, para ello es necesario analizar las medidas para saber las otras medidas de los segmentos faltantes.





$$P = a + b + c + d + e + f$$
$$P = 21 + 15 + 12 + 12 + 9 + 27$$
$$P = 96\,cm$$

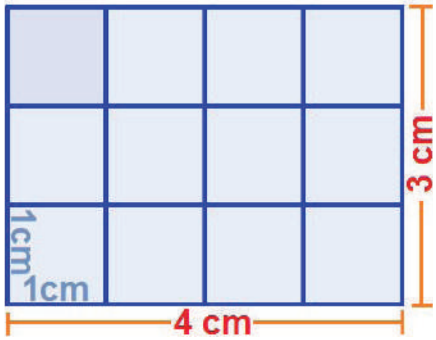
Actividad

Dibujamos y determinamos el perímetro de los siguientes polígonos:

- Cuadrado de 3 cm de lado.
- Rectángulo de base 4 cm y ancho 7 cm.
- Triángulo equilátero de 5 cm de lado.
- Un jardinero piensa cercar su jardín triangular de 4 m, 4 m y 5 m de lado con alambre de púa a su alrededor, ¿cuántos metros de alambre necesitará?
- Un albañil coloca ladrillos alrededor de un lote rectangular cuyas medidas son 15 m y 12 m de lado respectivamente, cada ladrillo tiene una longitud de 30 cm, ¿cuántos ladrillos necesitará para cercar el terreno?

2. Área de figuras planas: triángulos, polígonos regulares e irregulares

El área de una figura plana es el lugar geométrico comprendido dentro de los límites (el perímetro) de una figura geométrica cerrada, el cual es llamado también superficie o área. El área de las figuras geométricas está dado en unidades cuadradas “u²” (m²; cm²; km²; ft²; yard²; pulg²; etc.), lo cual nos indica cuántos cuadrados de una unidad de lado por otra unidad de lado entran en una figura geométrica. Analicemos el gráfico.



El rectángulo está formado por 12 cuadrados de 1cm por 1cm de lado, por lo tanto, se dice que el rectángulo tiene 12 cm² de superficie o de área.

A diferencia del perímetro, que se obtiene sumando sus lados. El área se obtiene multiplicando el largo por el ancho de sus lados, pero debido a las características que cada figura posee, la forma de determinar su área varía. Veamos.

- Área de un triángulo

En un triángulo el área se obtiene multiplicando la base (cualquiera de los lados), por la altura (distancia perpendicular a la base, con el vértice opuesto del triángulo) y dividido entre dos.

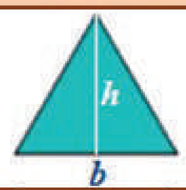
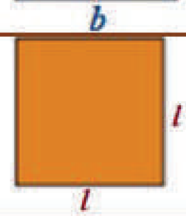
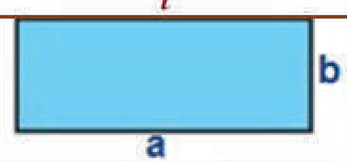
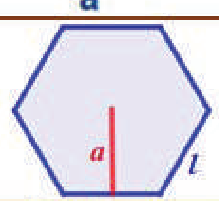
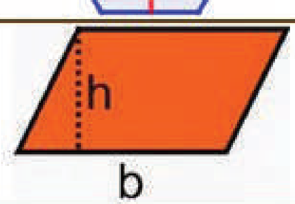
- Área de un polígono regular

Los polígonos regulares son figuras geométricas planas cuyos lados tienen el mismo tamaño, inscritos dentro una circunferencia, por lo cual la forma de determinar el área puede depender de los lados de la figura o del radio de la circunferencia. Nosotros estudiaremos la obtención del área, dependiendo de sus lados.

- Área de un polígono irregular

La forma de determinar el área de estas figuras es realizando una partición o cortes, seccionando la figura en otras más simples y de simple determinación de áreas, triángulos o rectángulos.

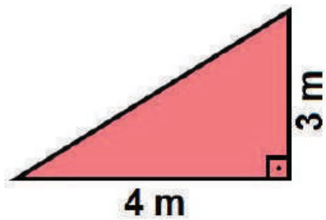
Antes de determinar áreas de figuras geométricas compuestas, iremos estudiando las áreas de figuras geométricas simples.

POLÍGONO	FIGURA	ÁREA
Triángulo		$A=\frac{b\cdot h}{2}$
Cuadrado		$A=l^2=l\cdot l$
Rectángulo		$A=a\cdot b$
Polígono regular		$A=\frac{n\cdot l\cdot a}{2}$
Paralelogramo		$A=b\cdot h$

Ejemplo

Encuentra el área de cada una de las siguientes figuras.

1) La figura se trata de un triángulo, entonces el área es:



b = 4 m

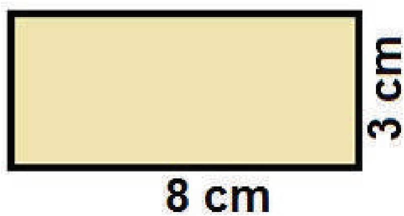
h = 3 m

$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

$$A=\frac{4\cdot 3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$A=6\,m^2$$

2) La figura se trata de un rectángulo, entonces su área es:



a = 8 cm

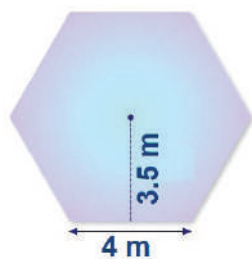
b = 3 cm

$$A=a\cdot b$$

$$A=8\cdot 3=24\,cm^2$$

$$A=24\,cm^2$$

3) Encontrar el área de un hexágono:



n = 6

l = 4

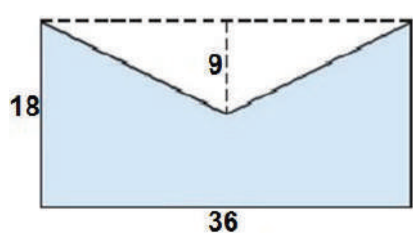
a = 3.5

$$A=\frac{n\cdot l\cdot a}{2}$$

$$A=\frac{6\cdot 4\cdot 3.5}{2}=\frac{84}{2}=42$$

$$A=42\,m^2$$

4) La siguiente figura es irregular, para hallar el área sombreada se dibuja una línea paralela a la base formando un rectángulo, luego se divide en dos áreas.



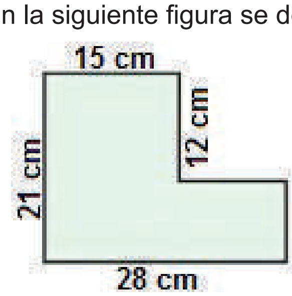
$$A_T=A_2-A_1$$

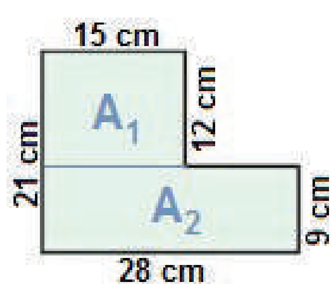
$$A_T=ab-\frac{bh}{2}$$

$$A_T=18\cdot 36-\frac{36\cdot 9}{2}=648-162$$

$$A_T=486$$

5) En la siguiente figura se debe hacer un corte para formar figuras planas conocidas.



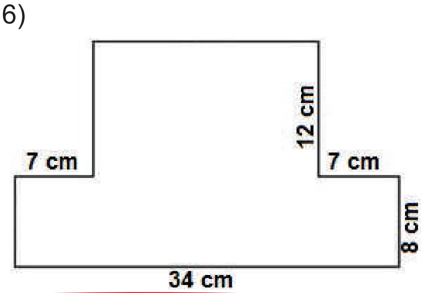


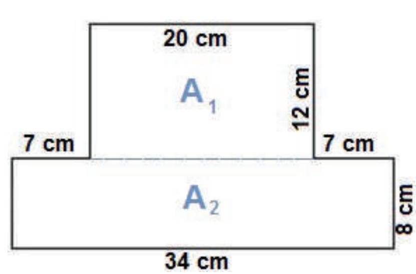
$$A_T=A_1+A_2$$

$$A_T=15\cdot 12+28\cdot 9=180+252$$

$$A_T=432\,cm^2$$

6)





$$A_T=A_1+A_2$$

$$A_T=20\cdot 12+34\cdot 8$$

$$A_T=512\,cm^2$$

3. Círculo y circunferencia

- Círculo

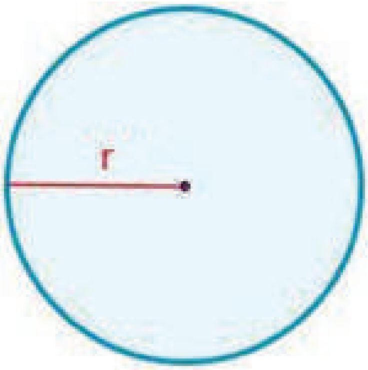
Es una figura geométrica plana, que representa a la superficie (o área) comprendida dentro de una circunferencia.

La forma de determinar su área está definida por la fórmula:

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot r$, donde "r" es la distancia del centro a cualquier parte de la circunferencia. Es importante hacer notar que π=3,14159265…

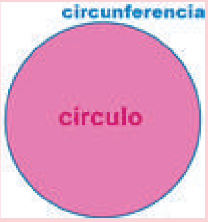
- Circunferencia

Es una figura geométrica que representa a la línea exterior de una figura circular, la cual puede ser considerada también como el perímetro del círculo. La forma de determinarla está dada por la fórmula: $P = 2\pi \cdot r$



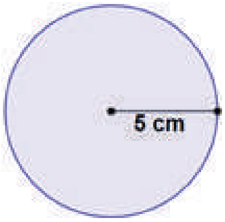
DATO CURIOSO

No es lo mismo circunferencia que círculo, la diferencia radica en que el círculo es toda el área que está contenida dentro la circunferencia, mientras que la circunferencia es el borde exterior del círculo.



Ejemplo:

1) Determinar el valor del círculo y de la circunferencia del radio de 5 m.



Perímetro:

$P = 2\pi \cdot r$

$P = 2 \cdot 3.1416 \cdot 5$

$P = 31.416\, cm$

Área:

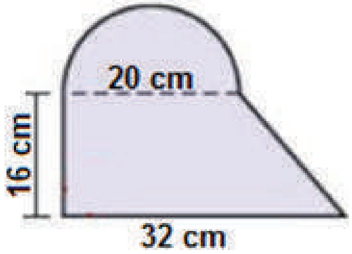
$A = \pi \cdot r^2$

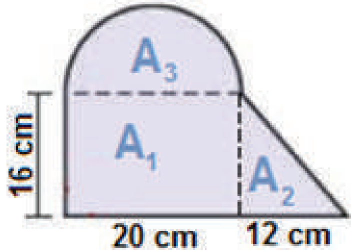
$A = 3.1416 \cdot 5^2$

$A = 3.1416 \cdot 25$

$A = 78.54\, cm^2$

2) Hallar el área de la siguiente figura





$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

$A_T = ab + \frac{b \cdot h}{2} + \pi r^2$

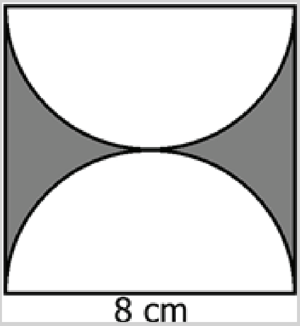
$A_T = 20 \cdot 16 + \frac{12 \cdot 16}{2} + 3.1416 \cdot 10^2$

$A_T = 730.16\, cm^2$

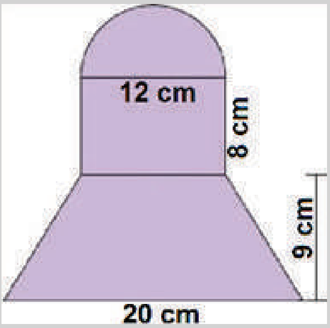
Actividad

Encuentra el área de las siguientes figuras:

1)



2)

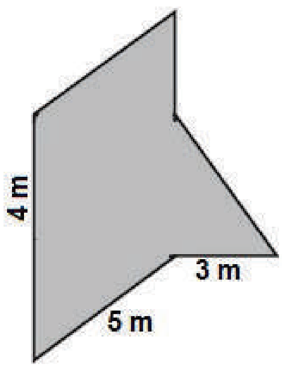


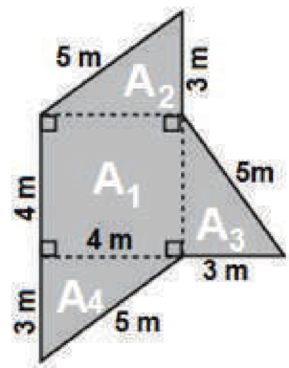
4. Problemas aplicados

Dentro nuestro contexto las figuras geométricas planas y los polígonos regulares e irregulares son muy utilizados en diversos campos profesionales, productivos, científicos y tecnológicos, veamos algunos ejemplos sobre el cálculo de perímetros y áreas.

Ejemplo:

1) La familia Mendoza tiene un terreno como se muestra en la figura de abajo, necesitan saber el área disponible para el sembradío de papa y el perímetro para el cercado con malla metálica, ¿cuánto será el costo del cercado si cada 100 metros tiene un costo de 2150 bolivianos?



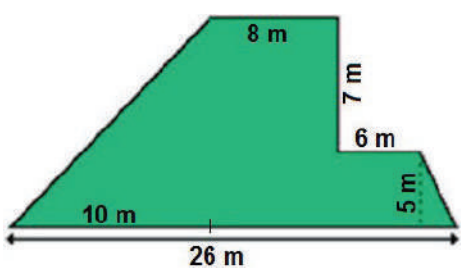


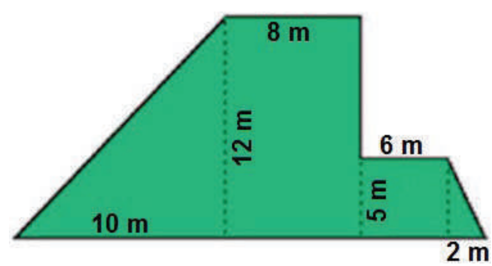
$$P = a+b+c+d+e+f+g$$
$$P = 4+3+5+3+5+3+5$$
$$P = 28\,m$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$A = l \cdot l + \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2}$$
$$A = 4 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2}$$
$$A = 16+6+6+6 = 34$$
$$A = 34\,m^2$$

Una vez encontrado el perímetro se procede a encontrar el costo de alambre: $C = 28 \cdot \frac{2150}{100} = 602$

La familia Mendoza gastará 602 bolivianos en cercar su terreno.

2) Una jardinera central tiene la siguiente figura, ¿cuántos metros cuadrados tendrá la jardinera?



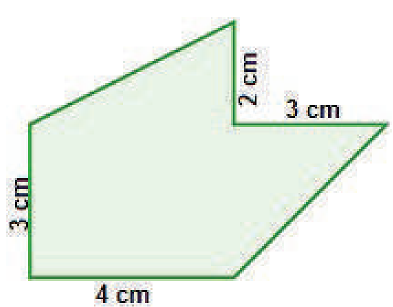


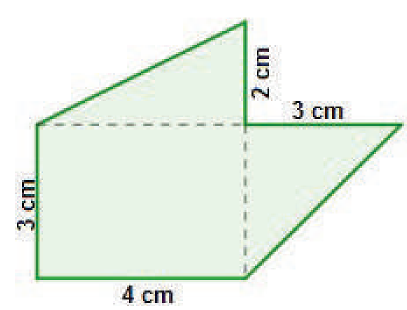
Haciendo los cortes en la figura: $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Y tomando en cuenta los lados de cada figura: $A = \frac{10 \cdot 12}{2} + 12 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + \frac{2 \cdot 5}{2} = 60+96+30+5$

La jardinera tiene un total de: $A = 191\,m^2$

3) Determinar el área total de la siguiente figura.





Haciendo los cortes en la figura: $A_T = A_1 + A_2 + A_3$

Y tomando en cuenta los lados de cada figura: $A = 3 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 12 + 4.5 + 4$

La figura tiene un total de: $A = 20.5\,m^2$

VALORACIÓN

El Estado Plurinacional de Bolivia cuenta con una multitudinaria muestra de tejidos que realizan nuestros artesanos. Conocedores de algunas formas geométricas o polígonos en la elaboración de estas muestras de tejido con calidad de exportación. Nos llevan a reflexionar acerca de la importancia de valorar lo nuestro. El tejido artesanal funciona como un instrumento histórico de nuestros pueblos indígenas, porque pone en evidencia el uso de los materiales y técnicas para su elaboración, mismos que inciden en contextos políticos, sociales y económicos de cada región.

Gran parte de los diseños artesanales dice mucho del espíritu de quien lo creó, de su comunidad y de la visión del mundo, gracias a esto es posible conocer más de nuestras culturas, valores y costumbres de diferentes comunidades.

Actividad

Observamos con mucha atención las imágenes de los tejidos, para responder las siguientes preguntas:

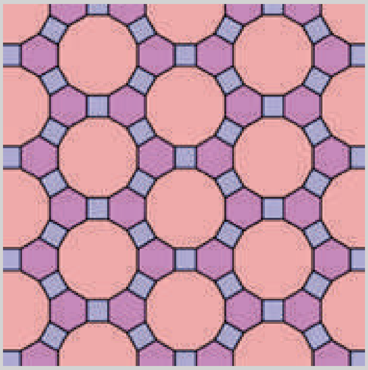
- ¿Qué polígonos ves en los tejidos artesanales?
- Desde tu punto de vista, nuestros ancestros utilizaban figuras geométricas y polígonos para representar situaciones culturales, ¿por qué crees que es de mucha importancia el uso de estas figuras?
- No solamente se utiliza en artesanías, también se utiliza en otros campos: ¿si nuestras casas o edificios tienen formas cuadrangulares o rectangulares, que podría pasar si no utilizamos estas figuras?, ¿tendría sentido todo nuestro espacio geométrico?

PRODUCCIÓN

Un teselado es la combinación de polígonos regulares o irregulares, que coinciden en alguno de sus lados y muestran así una sincronía tanto de colores como de polígonos utilizados.

Actividad

Realicemos dos teselados utilizando polígonos regulares e irregulares, tomando en cuenta el modelo de la figura.



Reforzando mis aprendizajes

Escanea el QR

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Ministerio de Educación (2022). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje" 1er. Año (2do trimestre)*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva *"Texto de aprendizaje" 1er. Año. primer, segundo y tercer trimestre*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. "Prontuario de mis aprendizajes MATEMÁTICA [En proceso de Publicación]." (2023)

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México

Peña Romay, Efraín (2017) *Matemáticas 1*. Ediciones GES. Bolivia

Quisbert Callisaya, Abraham (2019) *Matemáticas 1*. Editorial "ABYA YALA PATUJU". Bolivia

Huanquiri Quispe, Ismael (2013) *Matemática 1*. Editorial "CONSTRUYAMOS". Bolivia.

Allen R, A. (1998). *Algebra Elemental*. Mexico: Prentice Hall.

Graña, M., Gerónimo, G., Pacetti, A., Jancsa, A., & Petrovich, A. (2010). *Los Números, de los naturales a los complejos*. Buenos Aires - Argentina: Ministerio de Educación.

López Sancho, J., Moreno Gómez, E., Gómez Díaz, M., & López Álvarez, J. (2004). *La maravillosa historia de los números*.

Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. Obtenido de https://digital.csic.es/bitstream/10261/112435/1/La%20maravillosa%20historia%20de%20los%20numeros.pdf

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **1ER AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Roxana Mamani Tito

Lengua Castellana
Lider William Valero Chino

Ciencias Sociales
Willy Montalvo Pareja

Matemática
Justino Chipana Flores

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía
Judith Calvimontes Ossio

Lengua Castellana
Anthony Alberto Laura Achá

Ciencias Sociales
Raul Quiroga Freddy

Matemática
Albino Falcon Mamani

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Giovana Velarde Vargas

Ciencias Sociales
Marco Antonio Laura Gutiérrez

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD
rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN