ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

SEXTO AÑO DE ESCOLARIDAD

6 TO AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

"2025 BICE TENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 6to año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
María Virginia Orellana Vinoya

DIAGRAMACIÓN:
Nestor Monasterios Huanca

Depósito legal:
4-1-580-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 6to año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los *“Textos de aprendizaje 2025”*, para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los *“Textos de aprendizaje 2025”* tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

GEOMETRÍA ANALÍTICA, LA LÍNEA RECTA

PRÁCTICA

En nuestra vida cotidiana, la ubicación de puntos en el plano no es solo un concepto de la matemática teórica, sino que tiene aplicaciones prácticas en la vida diaria; por ejemplo, si deseas dirigirte a un lugar específico, necesitas conocer la dirección, entre qué calles se encuentra, cuáles son paralelas o perpendiculares, e incluso las intersecciones entre calles pueden orientarte para ubicar una dirección en particular. También podemos observar este concepto en el diseño de casas, techos, ventanas y más.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

De acuerdo a la lectura y la imagen, realizamos las siguiente actividades:

- En la imagen identificamos las figuras planas geométricas.
- Ahora identificamos los cuerpos geométricos que intervienen en la imagen.
- En qué situaciones de la imagen identificamos líneas rectas, líneas paralelas, perpendiculares e intersección de rectas.
- Describimos los diferentes tipos de líneas que se tiene en geometría.
- Mencionamos en qué otros campos se utiliza la línea recta.
- Dibujamos un croquis detallado de tu unidad educativa, resaltando los lugares de diversión o deportes.

TEORÍA

Antecedentes y origen de la línea recta

- *Es uno de los elementos geométricos fundamentales, junto al punto y al plano. Su definición solo es posible a partir de la descripción de las características de otros elementos similares.*
- *Una línea puede ser una sucesión infinita de puntos conectados entre sí o la trayectoria de un solo punto que se mueve a través de un plano o del espacio. Las líneas pueden existir en dos dimensiones (plano), en tres dimensiones (espacio) o en más dimensiones.*
- *René Descartes, cuyo tratado "El Discurso del Método", publicado en 1637, hizo conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste fundamento daría paso a lo que se conoce hoy en día como geometría analítica, rama de la matemática que fusiona el estudio de la Geometría Euclidiana con el álgebra, en el análisis de las líneas y figuras por medio de expresiones algebraicas.*

1. Definición y antecedentes

Toda línea está formada por puntos, que son la unidad gráfica más simple. Al colocar varios puntos juntos, se crea un trazo continúo llamado línea. Si los puntos mantienen una dirección constante, resultan en una línea recta. La recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos.

En geometría euclidiana, la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Se puede definir una recta como el conjunto de puntos ubicados a lo largo de la intersección de dos planos.

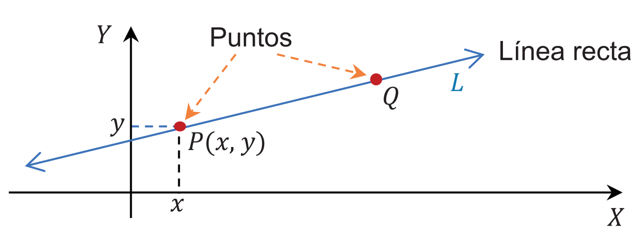
En matemáticas, se puede decir que una línea recta es un lugar geométrico, lo que significa que todos los puntos que la forman cumplen con las mismas condiciones. En este caso, la condición es que la pendiente entre cualquier par de puntos en la recta siempre es la misma.

Una de las características principales de una recta es su pendiente, la cual permite determinar su ángulo de inclinación.

Desde el punto de vista analítico, una línea recta es una ecuación lineal o de primer grado con dos variables. La representación gráfica de este lugar geométrico, cuya ecuación es de primer grado en dos variables, es una línea recta.

La línea recta:

Analíticamente es una ecuación lineal en dos variables x, y. Queda determinada completamente si se conocen: un punto y su pendiente, dos puntos, su ordenada y su pendiente, los puntos de intersección con los ejes cartesianos.



1. Ecuaciones de la recta

Una línea recta L queda determinada si se conocen por lo general dos condiciones:

a) Un punto y su pendiente
b) Dos puntos
c) Su ordenada y su pendiente
d) Los puntos de intersección con los ejes coordenados

Toda línea recta debe estar escrita de forma general, vale decir:

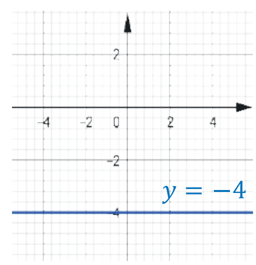
$$L: \quad Ax + By + C = 0$$

Ahora veamos cómo se grafican las rectas en el plano cartesiano.

Ejemplo:

$$y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -4$$

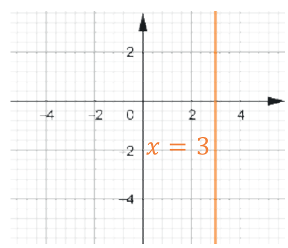
Analizando la pendiente de esta recta, se concluye que es nula por lo tanto la gráfica será paralela al eje *"X"*.



Ejemplo:

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Vemos que la pendiente de esta recta no está definida, es infinita, por lo tanto, la gráfica será paralela al eje *"Y"*.

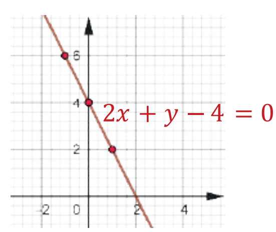


Ejemplo:

$$2x + y - 4 = 0$$

Utilizando tablas:

x	$y=-2x+4$
-1	$-2(-1)+4=2+4=6$
0	$-2(0)+4=0+4=4$
1	$-2(1)+4=-2+4=2$



Ejemplo:

Aplicamos el método del tapado:
Tapamos el valor de x:

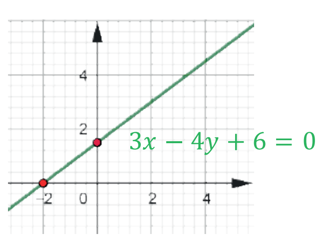
$$\cancel{3x} - 4y = -6$$

$$\Rightarrow y = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

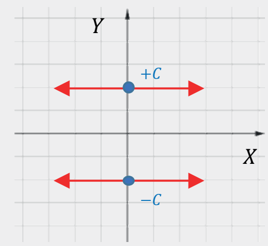
Tapamos el valor de y:

$$3x - \cancel{4y} = -6$$

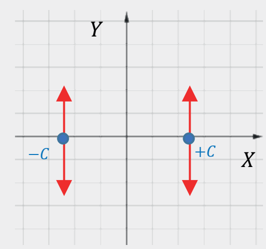
$$\Rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$$



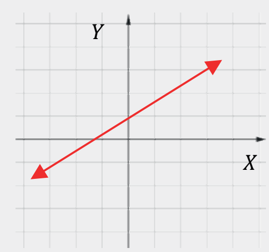
Pendiente nula, *cuando la recta es paralela al eje "X", es decir* $m = 0$ *y su ecuación es:* $y \pm C = 0$



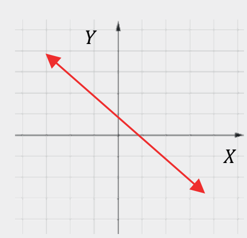
Pendiente no definida, *cuando la recta es paralela al eje "Y", es decir* $m = \infty$ *y su ecuación es:* $x \pm C = 0$



Pendiente positiva, *cuando la recta es diagonal y pasa por el I y III cuadrante, es decir* $m = +y$. *Su ecuación es:* $Ax - By + C = 0$



Pendiente negativa, *cuando la recta es diagonal y pasa por el II y IV cuadrante, es decir* $m = -y$. *Su ecuación es:* $Ax + By + C = 0$



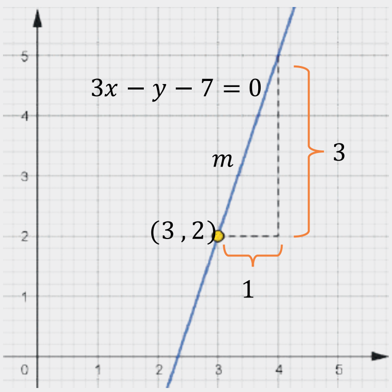
Actividad

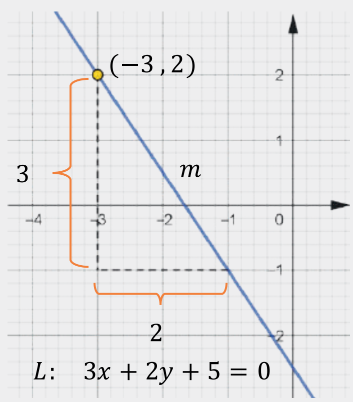
Graficamos en el plano cartesiano las siguientes rectas:

1) $y + 1 = 0$
2) $2x + 3y + 6 = 0$
3) $x - 2 = 0$
4) $3x - 3y + 1 = 0$
5) $3y - 5 = 0$
6) $x - y = 0$
7) $2x + 7 = 0$
8) $x - 4y - 4 = 0$
9) $x + y = 0$
10) $5x + y - 5 = 0$
11) $x - 2y + 2 = 0$
12) $8x + 5y - 10 = 0$

Trazando la recta: punto - pendiente

Se localiza el punto $P(3\ ,\ 2)$ en el plano. A partir de este punto, se avanza 1 unidad hacia la derecha, después 3 unidades hacia arriba. En seguida, se procede a trazar la recta que pasa por el punto dado.



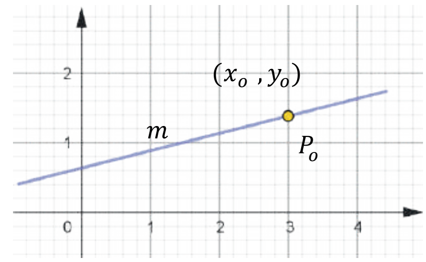


a) Ecuación de la recta: punto pendiente

La ecuación ordinaria de la recta L, queda determinada si se conocen la pendiente de la recta y las coordenadas de un punto por donde pasa la misma, para tal caso el punto $P_0(x_0\ ,y_0)$ y la pendiente m generan la ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Analíticamente la ecuación de la recta lineal está determinada y ordenada de la siguiente manera $Ax + By + C = 0$, donde la variable x debe ser positiva.



Ejemplo:

Hallamos la ecuación de recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ con pendiente 3.

$$\begin{aligned} P_o(3,2)\ \text{ y }\ m = 3 \quad &\Rightarrow\ y - y_o = m(x - x_o) \\ y - 2 = 3(x - 3) &\Rightarrow y - 2 = 3x - 9 \\ &\Rightarrow 0 = 3x - 9 - y + 2 \\ &\Rightarrow L:\ \ 3x - y - 7 = 0 \end{aligned}$$

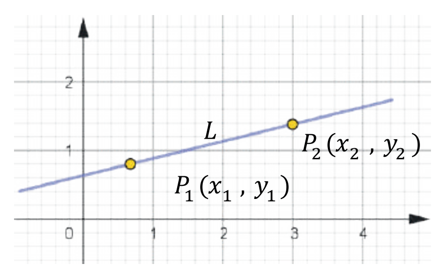
Ejemplo:

Encontramos la ecuación de recta que pasa por el punto $P(-3\ ,\ 2)$ con pendiente -3/2.

$$\begin{aligned} P_o(-3,2)\ \text{ y }\ m = -\frac{3}{2} \quad &\Rightarrow\ y - y_o = m(x - x_o) \\ y - 2 = -\frac{3}{2}(x - (-3)) &\Rightarrow 2(y - 2) = -3(x + 3) \\ &\Rightarrow 2y - 4 = -3x - 9 \\ &\Rightarrow 2y - 4 + 3x + 9 = 0 \\ &\Rightarrow L:\ \ 3x + 2y + 5 = 0 \end{aligned}$$

b) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Esta ecuación hace referencia al quinto postulado de Euclides, que aparece en el libro "Los Elementos": dos puntos determinan una recta.
La recta L que pasa por los puntos $P_1(x_1\ ,y_1)$ y $P_2(x_2\ ,y_2)$ tiene por ecuación:

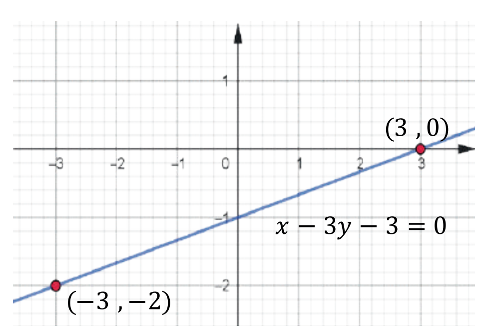


$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\cdot(x - x_1) \qquad \vee \qquad \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Ejemplo:

Calculamos la ecuación de la recta que atraviesa los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} &P_1(3\ ,0);\ P_2(-3\ ,-2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 3}{y} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ &x_1 = 3, y_1 = 0 \\ &x_2 = -3, y_2 = -2 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad \frac{x - 3}{y - 0} = \frac{-3 - 3}{-2 - 0} \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad L:\ \ x - 3y - 3 = 0 \end{aligned}$$



c) Ecuación de la recta abscisa - ordenada en el origen

Sean $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, los segmentos de una recta determinada sobre los ejes "X" e "Y", es decir, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son las intersecciones con los ejes coordenados, entonces $P_1(a, 0)$ y $P_2(0, b)$ son dos puntos que pertenecen a la recta, $\boldsymbol{a}$ es la abscisa en el origen y $\boldsymbol{b}$ es la ordenada en el origen. Entonces la ecuación de la recta se reduce a:

$$P_1(a, 0) \text{ y } P_2(0, b) \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo:

Determinamos la ecuación de la recta cuya abscisa en el origen es 3 y la ordenada es 2:

$$a = 3,\ b = 2 \Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad // \cdot 6$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{y}{2} = 6 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 6$$

$$\Rightarrow L: 2x + 3y - 6 = 0$$

Ejemplo:

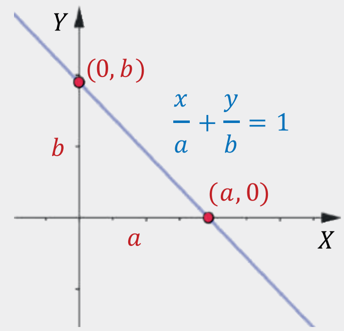
Encontramos los puntos de intersección de la recta L: $2x-3y+6=0$ con los ejes cartesianos:

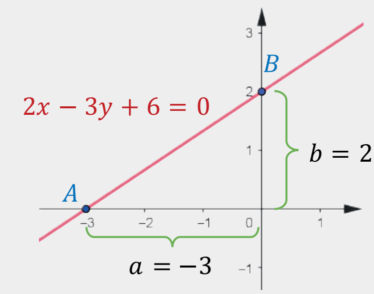
$$L: 2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = -6 \quad // \div -6$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \quad A(-3, 0); \quad B(0, 2)$$

Abscisa y ordenada en el origen





d) Forma general de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta en su forma general, viene expresada en la siguiente expresión, donde $A\neq 0$, $B\neq 0$ y C pertenecen a los números reales.

$$Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Toma la forma $y = mx + b$ donde la pendiente m y la ordenada b son: $m = -\dfrac{A}{B}$ y $b = -\dfrac{C}{B}$

Actividad

Escribimos la ecuación de la recta que pasa por el punto y pendiente dada:

1) $P_o(2, 3)$ y $m = -1$
2) $P_o(4, 0)$ y $m = 4$
3) $P_o(0, 4)$ y $m = \frac{3}{4}$
4) $P_o(-1, 2)$ y $m = -\frac{1}{5}$
5) $P_o(-2, 2)$ y $m = 0$
6) $P_o(-3, 7)$ y $m = 0.6$
7) $P_o(0, -3)$ y $m = 7$
8) $P_o(-1, 5)$ y $m = -1.5$
9) $P_o(0, 0)$ y $m = 2$

Determinamos la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos:

10) $P_1(-5, 3)$; $P_2(3, 6)$
11) $P_1(-3, 3)$; $P_2(-2, 1)$
12) $P_1(0, -3)$; $P_2(-1, 1)$
13) $P_1(2, -5)$; $P_2(-4, 3)$
14) $P_1(3, 2)$; $P_2(0, -1)$
15) $P_1(0, -3)$; $P_2(-1, 1)$
16) $P(0, 1)$; $Q(-3, 0)$
17) $P(1, 5)$; $Q(2, -3)$
18) $P(-1, -5)$; $Q(2, -3)$

Determinamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

19) $P_1(2, 0)$; $P_2(0, 2)$
20) $P(-3, 0)$; $Q(0, -1)$
21) $A(1, 0)$; $B(0, -3)$
22) $A(0, 4)$; $B(2, 0)$

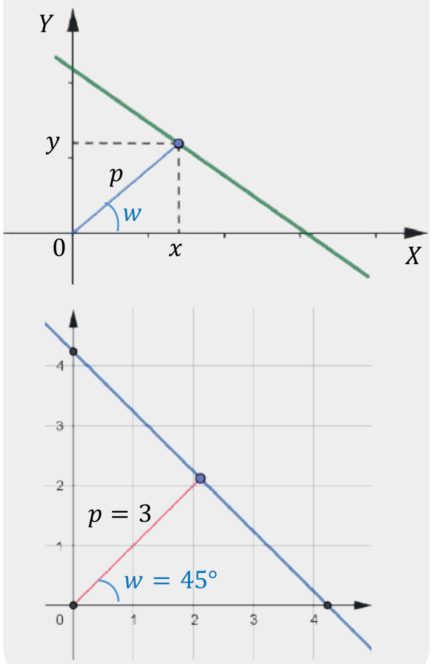
Buscamos la ecuación de la recta si:

23) Si la abscisa en el origen es 4 y su ordenada es 5.
24) Si la ordenada en el origen es -2 y su abscisa es 7.

Hallamos las intersecciones de las siguientes rectas con los ejes cartesianos:

25) L: $x + 2y - 4 = 0$
26) L: $3x - 4y - 8 = 0$
27) L: $x - y + 1 = 0$

Recta normal



e) Forma normal de la ecuación de una recta

Una recta también queda determinada si se conocen la longitud de la perpendicular a ella trazada desde el origen y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje “X“.

La distancia p (parámetro) se considera siempre positiva cualquiera sea la posición de la recta.

El ángulo w es el ángulo formado por el semieje positivo “X“ y p.

$$0° \leq w \leq 360°$$
$$x \cos w + y \text{ sen } w - p = 0$$

Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la recta que dista 3 unidades del origen, si la recta normal tiene un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{\pi}{4} = 45° \\ p = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \cos \omega + y \text{ sen } \omega - p = 0$$

$$\cos 45° + y \text{ sen } 45° - 3 = 0$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 = 0 \qquad // \cdot 2$$

$$\Rightarrow L: \quad \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 6 = 0$$

Actividad

Encontramos las ecuaciones de la recta si cumplen las siguientes condiciones:

1) Dista 4 unidades del origen y tiene un ángulo de 60°
2) Dista 6 unidades del origen y tiene un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$
3) $p = 2, \quad w = 30°$
4) $p = 5, \quad w = \frac{7\pi}{6}$

Determinamos la ecuación general de la recta si se tiene la ecuación normal de:

5) $x \cos 45° - \text{sen } 45° + 2 = 0$
6) $x \cos 225° + \text{sen } 225° - \sqrt{2} = 0$
7) $x \cos \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{2\pi}{3} - 3 = 0$
8) $x \cos \frac{5\pi}{4} - \text{sen } \frac{5\pi}{4} + 1 = 0$

VALORACIÓN

Una manera de determinar una recta es conociendo su pendiente (o ángulo de inclinación) y un punto de ella. La línea recta es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera, el valor de la pendiente “ m ”, es el más aplicable en la construcción, edificación de viviendas o edificios, donde se debe tomar en cuenta las condiciones del medio ambiente de la zona donde se construirá el edificio o vivienda.

- ¿Cómo se emplea el concepto de pendiente en los techos de las viviendas?
- ¿En qué situaciones de la vida se utilizan las rectas y sus pendientes como una herramienta importante para la solución de problemas?
- ¿Cómo se calcula la pendiente en un techo?

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

- Investigamos y elaboramos un informe sobre la aplicación de la línea recta en construcciones.
- Para modelizar tu investigación, utilizamos GeoGebra como herramienta gráfica y analítica.
- Investigamos sobre el diseño y construcción de rampas para sillas de ruedas en los ingresos a instituciones públicas o privadas, por ejemplo, entidades financieras, etc. ¿Cuál debe ser la inclinación mínima o máxima de la recta para que el usuario pueda ingresar al recinto?

APLICACIONES DE LA LÍNEA RECTA

PRÁCTICA

Las señoritas y los jóvenes de la promoción, están realizando el aseo de su curso, para lo cual están llenando agua de un grifo. Llenan agua en un recipiente de forma cilíndrica, de aproximadamente 80 litros, se midieron los niveles el agua en determinados intervalos de tiempo, los datos recolectados se muestran en la siguiente tabla, el tiempo inicial es cuando el nivel estaba a 20 centímetros.

Tiempo (x) (minutos)	Nivel (y) (centímetros)
0	20
2	29
4	38


Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué modelo matemático o ecuación nos permite predecir el nivel del agua en cualquier tiempo?
- ¿Cuál será el nivel de agua en el tanque a los 12 minutos?
- ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar un recipiente cilíndrico de 80 cm de altura?
- Pasados los 7 minutos, ¿cuál será el nivel de agua?

TEORÍA

1. Posición relativa de las rectas

a) Rectas secantes

Dos rectas L_1 y L_2 son secantes, cuando ambas tienen un punto en común. Es decir, las dos rectas se cruzan o se intersectan. Ese punto en común se halla resolviendo el sistema de ecuaciones por cualquier método.

$$\begin{cases} L_1: & ax + by = c \\ L_2: & dx + ey = f \end{cases}$$

Ejemplo:

Encontramos el punto de intersección de las siguientes rectas:

L_1: $2x + 4y - 16 = 0$ y L_2: $3x - 4y + 6 = 0$

$$L_1: \ 2x + 4y = 16$$
$$L_2: \ 3x - 4y = -6$$

Resolviendo por reducción:

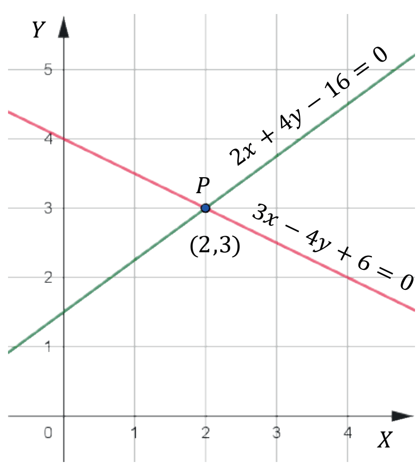
$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 16 \\ + \quad 3x - 4y = -6 \\ \hline 5x = 10 \ \Rightarrow \ x = 2 \end{array}$$

En la primera ecuación: (L_1)

$$2(2) + 4y = 16 \ \Rightarrow \ 4y = 12$$
$$\Rightarrow \ y = 3$$

Punto de intersección:

$$P(2\,,3)$$

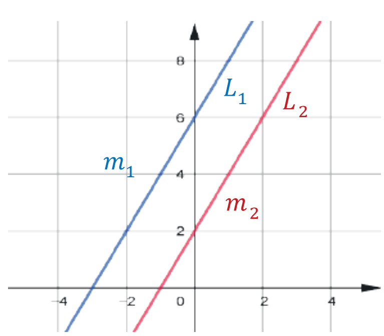


b) Rectas paralelas

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas, si sus pendientes son iguales, vale decir:

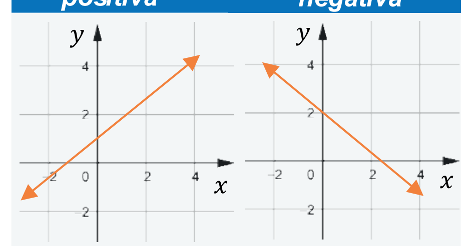
$$L_1 \parallel L_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2$$

(ver gráfica a la derecha)

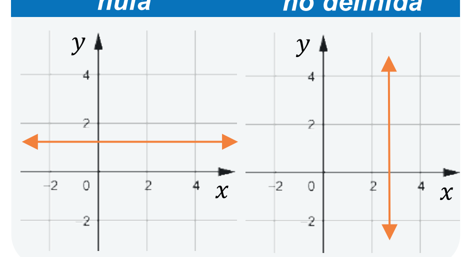


Pendiente de una recta

Pendiente positiva / *Pendiente negativa*



Pendiente nula / *Pendiente no definida*



Rectas paralelas

Para encontrar la recta L_2 que pase por el punto $P_0(x_0, y_0)$ paralela a L_1: $Ax + By + C = 0$:

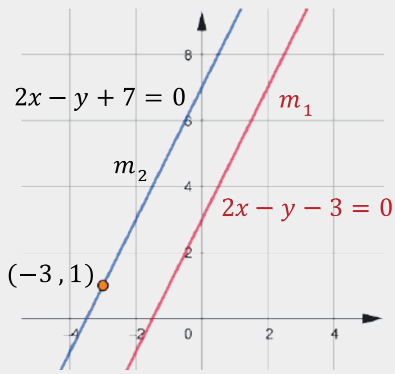
- *Hallamos la pendiente m_1 de L_1 y aplicamos la condición de paralelismo:*

$$m_1 = -\frac{A}{B} \qquad m_2 = m_1$$

- *Reemplazamos la pendiente y el punto en la ecuación:*

$$y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

Gráfica



Rectas perpendiculares

Para encontrar la recta L_2 que pase por el punto $P_0\ (x_0\ ,\ y_0)$ perpendicular a L_1:

$$Ax+By+C=0:$$

- *Hallamos la pendiente m_1 de L_1 y aplicamos la condición de perpendicular:*
  $$m_1=-\frac{A}{B} \qquad m_2=-\frac{1}{m_1}$$
- *Reemplazamos la pendiente y el punto en la ecuación:*
  $$y-y_0=m_2(x-x_0)$$

Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la recta que pase por el punto $P(-3\ ,\ 1)$ y sea paralela a $L_1: 2x-y-3=0$

$$\underset{A}{2x}-\underset{B}{1y}\underset{C}{-3}=0 \ \Rightarrow\ m=-\frac{A}{B}\ \Rightarrow\ m_1=-\frac{2}{-1}=2$$

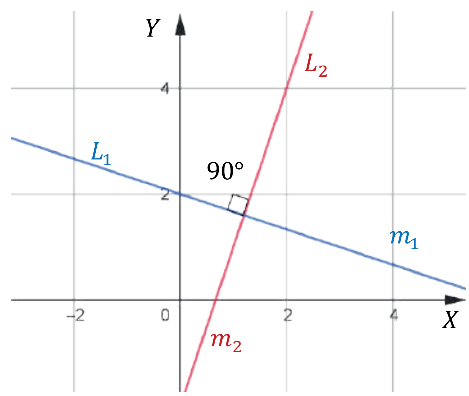
Condición de paralelismo: $\quad m_1=m_2 \Rightarrow m_2=2$

$$P_o(\underset{x_0}{-3}\ ,\ \underset{y_0}{1})\ \Rightarrow\ y-y_o=m_2(x-x_o)\ \Rightarrow\ y-1=2\big(x-(-3)\big)$$
$$\Rightarrow y-1=2x+6$$
$$\Rightarrow 0=2x+6-y+1$$
$$\Rightarrow L_2:\ 2x-y+7=0$$

c) Rectas perpendiculares

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si sus pendientes son inversamente proporcionales.

$$L_1\perp L_2 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{m_2=-\frac{1}{m_1}}$$



Ejemplo:

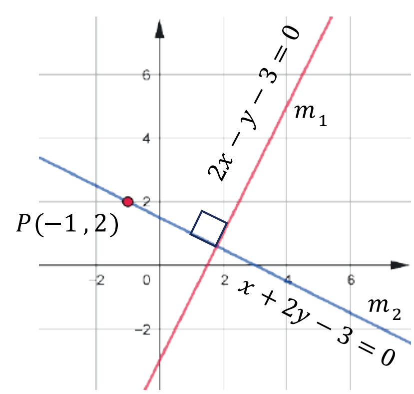
Hallamos la ecuación de la recta que pase por el punto $P(-1\ ,\ 2)$ y sea perpendicular a L_1: $2x-y-3=0$.

$$\underset{A}{2x}-\underset{B}{1y}\underset{C}{-3}=0\ \Rightarrow\ m=-\frac{A}{B}\ \ \Rightarrow\ m_1=-\frac{2}{-1}=2$$

Condición de perpendicularidad:

$$m_2=-\frac{1}{m_1} \quad\Rightarrow\quad m_2=-\frac{1}{2}$$

$$P_o(\underset{x_0}{-1}\ ,\ \underset{y_0}{2})\ \Rightarrow\ y-y_o=m_2(x-x_o)\ \Rightarrow\ y-2=-\frac{1}{2}\big(x-(-1)\big)$$
$$2y-4=-x-1$$
$$2y-4+x+1=0$$
$$\Rightarrow L_2: x+2y-3=0$$



Actividad

Determinamos el punto de intersección de las siguientes rectas:

1) $x-2y-4=0;\ 2x+3y-1=0$

2) $x+5y-15=0;\ 2x-y+3=0$

3) $x-2y-1=0;\ 3x+y-3=0$

4) $2x+y-6=0;\ 3x-y-4=0$

Encontramos la recta L_2 que pasa por el punto dado y sea paralela a la recta L_1:

5) $P(-1\ ,1)$ y $L_1:\ x-y+5=0$

6) $P(0\ ,-2)$ y $L_1:\ x+y+1=0$

7) $P(3\ ,0)$ y $L_1:\ x-2y+6=0$

8) $P(-2\ ,2)$ y $L_1:\ x+y-3=0$

Hallamos la recta L_2 que pasa por el punto dado y sea perpendicular a la recta L_1:

1) $P(3,2)\ ;L_1:\ 3x-y+1=0$

2) $P(3,0)\ ;L_1:\ 2x-2y+5=0$

3) $P(-1,1)\ ;L_1:\ x-y+5=0$

4) $P(-2,2)\ ;L_1:\ x+3y-3=0$

5) $P(0,2)\ ;L_1:\ x+y+1=0$

6) $P(2,-1)\ ;L_1:\ x+2y-4=0$

2. Aplicaciones de la recta en su forma normal

Una recta escrita en su forma:
General es: $Ax + By + C = 0$
Normal es: $x\cos\omega + y \operatorname{sen}\omega - p = 0$
Sus coeficientes proporcionales, vale decir:

$$\left.\begin{array}{r}\cos\omega = kA\\ \operatorname{sen}\omega = kB\\ -p = kC\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\cos\omega}{A} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{B} = -\frac{p}{C} = k$$

$$cos^2\,\omega + sen^2\omega = k^2(A^2+B^2) \Rightarrow 1 = k^2(A^2+B^2)$$

$$\Rightarrow \ k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Signo del radical

El signo que precede al radical se coloca de la siguiente manera:

$$\begin{cases} Contrario\ \ a\ \ C \\ Igual\ \ a\ \ \begin{cases} B \\ C \end{cases} \end{cases}$$

$$si: \ \begin{cases} C = 0 \\ B = 0; \quad C = 0 \\ A \neq 0; \quad C = B = 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

Encontramos la ecuación de la recta cuya distancia al origen es nueve medios y el ángulo de inclinación de la normal es $30°$:

$$p = \frac{9}{2}, \qquad \omega = 30° \ \ \Rightarrow \ \ x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$$

$$\Rightarrow x\cos 3\,0° + y\operatorname{sen}30° - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\cos 30° + 2y\operatorname{sen}30° - 9 = 0$$

Tomar nota

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos como separadores de los números decimales:
la coma "," y el punto "."

Por otro lado, la ASALE en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal "."

Tomando en cuenta estos aspectos, se utilizará el ***punto decimal*** *como separador.*

Ejemplo

3.14 ; 0.71 ; -0.5 ; -0.11 ...

Fuente: Sistema Internacional de unidades

Ejemplo:

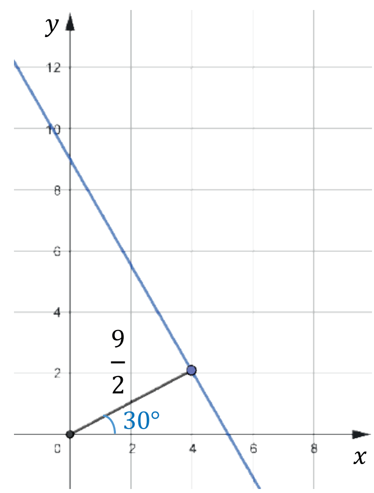
Reducimos la ecuación de la recta a su forma normal: $L: x + 2y - 7 = 0$

$$\left.\begin{array}{r}A = 1\\ B = 2\\ C = -7\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}x + \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}y - \frac{7}{\sqrt{1^2+2^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{7}{\sqrt{5}} = 0 \qquad // \cdot \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \ \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}; \ \ \operatorname{sen}\omega = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad -p = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\omega = 63°26'6"; x\,cos(63°26'6") + y sen(63°26'6") + \frac{7}{\sqrt{5}} = 0$$



Actividad

Reducimos las siguientes ecuaciones a su forma normal:

1) $4x + 2y - 3 = 0$

2) $x + 3y - 2 = 0$

3) $7x + 12y + 8 = 0$

4) $2x + 2y - 3 = 0$

5) $3x - 4y - 5 = 0$

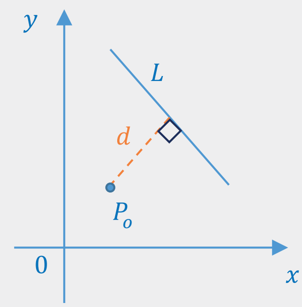
6) $x + 3y - \sqrt{3} = 0$

7) Determinamos la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es 5 y tiene un ángulo de inclinación de la normal de 60º.

8) Encontramos la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es -2 y tiene un ángulo de inclinación de la normal de 53º.

9) Hallamos la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es 1 y tiene un ángulo de inclinación de la normal de 37º.

Distancia de un punto a una recta



3. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0)$ a una recta dada por la ecuación $Ax + By + C = 0$ se puede calcular sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la recta en su forma normal.

$$d = \left|\frac{Ax_o \pm By_o \pm C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

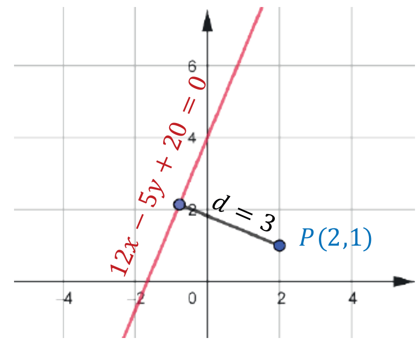
Ejemplo:

Encontramos la distancia del $P(2, 1)$ a la recta $12x - 5y + 20 = 0$ (Ver gráfica a la derecha).

$$P_0(\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{1});\ \underset{A}{12}x \underset{B}{-5}y + \underset{C}{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \left|\frac{12(2) - 5(1) + 20}{-\sqrt{12^2 + (-5)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{24 - 5 + 20}{-\sqrt{169}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad d = \left|\frac{39}{-13}\right| = 3$$



Ejemplo:

La distancia del punto P a la recta $4x + 3y + 1 = 0$ es 4. Si la ordenada de P es 3, determinamos la abscisa (Ver gráfica a la derecha).

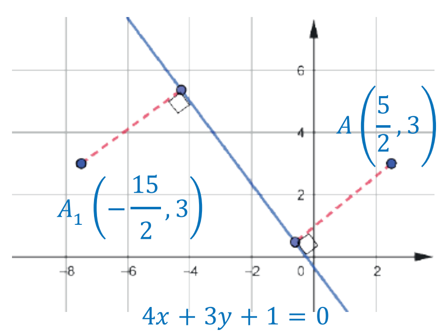
$$P_0(\underset{x_0}{x}, \underset{y_0}{3});\quad d = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \left|\frac{4(x) + 3(3) + 1}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}}\right|$$

$$\underset{A}{4}x \underset{B}{+3}y + \underset{C}{1} = 0$$

$$= \left|\frac{4x + 9 + 1}{\pm\sqrt{25}}\right| = \frac{4x + 10}{\pm 5}$$

De donde:

$$\pm 20 = 4x + 10 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{+20 - 10}{4} = \dfrac{5}{2} & \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{5}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-20 - 10}{4} = -\dfrac{30}{4} & \Rightarrow \quad x_2 = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$



Por tanto:

$$P_o\left(\frac{5}{2}, 3\right) \text{ y } P_o\left(-\frac{15}{2}, 3\right)$$

Actividad

Calculamos la distancia de los puntos a las rectas:

1) $P_o(2, 3)$ y L: $3x - 4y + 5 = 0$

2) $P_o(1, 1)$ y L: $x - y - 5 = 0$

3) $P_o(0, 2)$ y L: $x - y + 1 = 0$

4) $P_o(3, 2)$ y L: $x + y - 10 = 0$

5) $P_o(-4, 0)$ y L: $2x - y + 3 = 0$

6) $P_o(-2, -2)$ y L: $12x + 5y - 5 = 0$

7) La distancia del punto P a la recta $3x - 4y - 3 = 0$ es 4. Si la ordenada de P es 5, halla la abscisa.

8) La distancia del punto P a la recta $4x + 3y - 1 = 0$ es 4. Si la abscisa de P es -3, halla la ordenada.

9) La distancia del punto P a la recta $5x + 12y - 1 = 0$ es 4. Si la ordenada de P es 2, halla la abscisa.

4. Distancia entre rectas paralelas

Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, se determina las constantes de las dos rectas, a los cuales llamaremos C_1 y C_2. La fórmula que nos ayuda a encontrar el valor de la distancia es:

$$d = \left| \frac{C_2 - C_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Ejemplo:

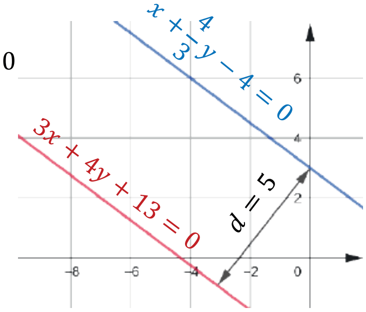
Determinamos la distancia entre las rectas:

$L_1: 3x + 4y + 13 = 0 \qquad L_2: 3x + 4y - 12 = 0$

$\Rightarrow \; C_1 = 13; \quad C_2 = -12$

$$d = \left| \frac{-12 - 13}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-25}{\sqrt{25}} \right| = \frac{25}{5} = 5$$

$\Rightarrow \; d = 5 \text{ u}$



Ejemplo:

Hallamos la distancia entre las rectas:

$L_1: \; x+4y-24=0$ y $L_2: \; x+4y-8=0$

$\Rightarrow \quad C_1 = -24; \quad C_2 = -8$

$$d = \left| \frac{-8 - (-24)}{\sqrt{1^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-8 + 24}{\sqrt{17}} \right| = \frac{16}{\sqrt{17}} = 3.88 \Rightarrow d = 3.88 \text{ u}$$

Ejemplo:

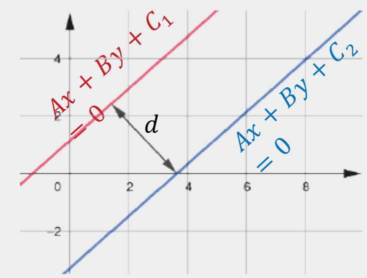
Encontramos la distancia entre las rectas:

$L_1: \; x-2y+1=0$ y $L_2: \; x-2y-3=0$

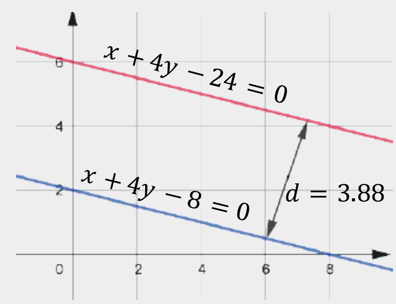
$\Rightarrow \; C_1 = 1; \qquad C_2 = -3$

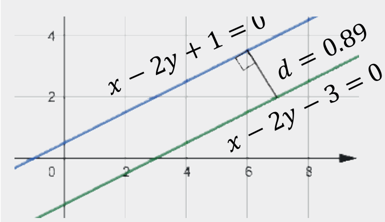
$$d = \left| \frac{-3 - (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{-3 + 1}{\sqrt{5}} \right| = \frac{-2}{\sqrt{5}} = 0.89 \Rightarrow d = 0.89 \text{ u}$$

Distancia entre dos rectas paralelas



Gráficos





Ejemplo:

Hallamos el valor de k para que la distancia entre las rectas $3x + 4y - 3 = 0$ y $3x + 4y + k = 0$ sea igual a 3 unidades.

$C_1 = -3$

$C_2 = k$

$d = 3$

$$3 = \left| \frac{k - (-3)}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{k + 3}{\pm\sqrt{25}} \right| = \frac{k + 3}{\pm 5}$$

$\Rightarrow \pm 15 = \; k + 3 \;\; \Rightarrow k = -3 \pm 15$

$\Rightarrow k = -3 + 15 = 12; \quad k = -3 - 15 = -18$

$\Rightarrow k = 12; \qquad k = -18$

Actividad

Determinamos la distancia entre las siguientes rectas:

1) $3x + 4y - 2 = 0$ y $3x + 4y + 4 = 0$

2) $5x + 12y - 10 = 0$ y $5x + 12y + 2 = 0$

3) $x + y - 5 = 0$ y $x + y - 1 = 0$

4) $3x - 4y - 3 = 0$ y $3x - 4y + 4 = 0$

5) $2x - y + 4 = 0$ y $2x - y - 4 = 0$

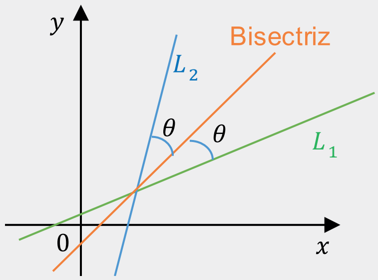
6) $6x + 8y - 15 = 0$ y $6x + 8y + 5 = 0$

7) $3x - y - 6 = 0$ y $3x - y + 3 = 0$

8) $x - y + 4 = 0$ y $x - y - 5 = 0$

9) Hallamos el valor de k para que la distancia entre las rectas $4x - 3y - k = 0$ y $4x - 3y + 6 = 0$ sea igual a 4 unidades.

Bisectriz de ángulos



Fuente: OpenAI, 2024

5. Ecuación de las bisectrices de los ángulos suplementarios de dos rectas que se cortan

Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cortan, donde:

$$L_1\!: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad L_2\!: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Sus bisectrices son L_3 y L_4 cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene la siguiente expresión:

$$\left|\frac{A_1x \pm B_1y \pm C_1}{\pm\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}}\right| = \left|\frac{A_2x \pm B_2y \pm C_2}{\pm\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}\right|$$

Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x\,,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x\,,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

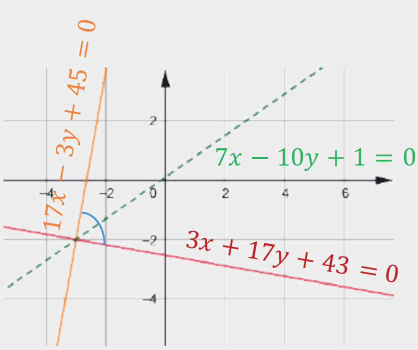
Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

- Si $C \neq 0$, el radical tendrá signo opuesto al de "C"
- Si $C = 0$, el signo del radical es igual al de "B"
- Si $C = B = 0$, el signo del radical es igual signo al de "A"

Ejemplo:

Encontramos las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas:

Gráfica



$$L_1\!: \underset{A_1}{17}x - \underset{B_1}{3}y + \underset{C_1}{45} = 0$$

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{17x - 3y + 45}{\sqrt{17^2 + (-3)^2}} = \frac{3x + 17y + 43}{\sqrt{3^2 + 17^2}}$$

$$\frac{17x - 3y + 45}{\sqrt{298}} = \frac{3x + 17y + 43}{\sqrt{298}}$$

$$17x - 3y + 45 = 3x + 17y + 43$$

$$14x - 20y + 2 = 0 \qquad // \div 2$$

$$L_3\!: 7x - 10y + 1 = 0$$

$$L_2\!: \underset{A_2}{3}x + \underset{B_2}{17}y + \underset{C_2}{43} = 0$$

$$d_1 = -d_2$$

$$\frac{17x - 3y + 45}{\sqrt{17^2 + (-3)^2}} = -\frac{3x + 17y + 43}{\sqrt{3^2 + 17^2}}$$

$$\frac{17x - 3y + 45}{\sqrt{298}} = -\frac{3x + 17y + 43}{\sqrt{298}}$$

$$17x - 3y + 45 = -3x - 17y - 43$$

$$20x + 14y + 88 = 0 \qquad // \div 2$$

$$L_4\!: 10x + 7y + 44 = 0$$

Así L_3 y L_4 son las bisectrices de los ángulos suplementarios.

Actividad

Encontramos las ecuaciones de las bisectrices si tenemos las siguientes rectas:

1) $L_1\!: 3x - 4y + 5 = 0$ y $L_2\!: 6x + 8y + 1 = 0$
2) $L_1\!: 3x + 4y - 8 = 0$ y $L_2\!: 12x - 5y - 15 = 0$
3) $L_1\!: 4x - 3y + 9 = 0$ y $L_2\!: 12x + 5y - 7 = 0$
4) $L_1\!: 3x + 2y - 2 = 0$ y $L_2\!: 2x - 3y + 1 = 0$
5) $L_1\!: 5x + y - 6 = 0$ y $L_2\!: x + 5y + 10 = 0$

6. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema:

Julio compró una laptop (computadora personal) al precio de Bs 4200, se estima que el valor de depreciación es de Bs 450 al cabo de 5 años. Si se considera una depreciación lineal.

Encuentre una ecuación que exprese el valor de la laptop en función del tiempo.

$$(T_1, V_1) = (0, 4200) \text{ y } (T_2, V_2) = (5, 450)$$

Fuente: OpenAI, 2024

Aplicamos la ecuación que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{y - 4200} = \frac{5 - 0}{450 - 4200} = \frac{5}{-3750} = -\frac{1}{750}$$

$$750x = -(y - 4200)$$

$$750x = -y + 4200$$

$$y = 4200 - 750x$$

Problema:

Si la temperatura en la ciudad de Cochabamba es de $24\ °\mathrm{C}$ y la temperatura a una altitud de $1\ \mathrm{km}$ es de $18\ °\mathrm{C}$, exprese la temperatura $\mathrm{T}(°\mathrm{C})$ en términos de la altitud “h” (km). Suponga que su relación es lineal. ¿Cuál es la temperatura a $12\ \mathrm{km}$?

$$(T_1, h_1) = (0, 24) \text{ y } (T_2, h_2) = (1, 18)$$

Fuente: OpenAI, 2024

Aplicamos la ecuación que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{y - 24} = \frac{1 - 0}{18 - 24} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$$6x = -(y - 24)$$

$$6x = -y + 24$$

$$y = 24 - 6x$$

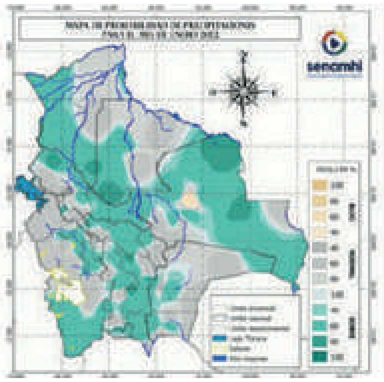
Así la temperatura será: $T = 24 - 6(12) = 24 - 72 = -48\ °C$

VALORACIÓN

En la vida cotidiana, cuando se identifican relaciones entre dos variables que pueden representarse como una línea recta, es posible usar modelos algebraicos y gráficos para entender situaciones donde una variable cambia en relación con la otra. Estos modelos son útiles para analizar la razón de cambio entre las variables.

Según los pronósticos del Servicio Meteorológico (Senamhi), la información proporcionada acerca de la temperatura indica que la misma irá en aumento con el trascurrir de los días, haciendo que la temperatura incremente en $0.30\ °\mathrm{C}$.

- ¿Cómo se emplea el concepto de pendiente en la vida diaria?
- ¿Puedes determinar la ecuación pendiente – ordenada al origen que modela esta situación?



Fuente: https://observatorioagro.gob.bo/wp-content/uploads/2021/11/1-boletin_agroclimatico_ENERO.pdf

PRODUCCIÓN

- Indagamos en qué áreas se utiliza el modelo lineal como integración de contenido con el área de matemática.
- Investigamos y construimos un modelo lineal matemático, que nos permita conocer la depreciación de los aparatos electrónicos que tenemos en casa.
- Construimos un papelógrafo para nuestra exposición referido a la depreciación de los aparatos electrónicos.
- Para modelizar la investigación, utilizaremos la aplicación matemática GeoGebra.

LA CIRCUNFERENCIA

PRÁCTICA

En nuestra comunidad, como en el barrio, calle o avenida, podemos observar objetos y figuras que se representan con circunferencias. La circunferencia es uno de los elementos geométricos más importantes en nuestro entorno.

Así tenemos varios ejemplos que pueden ilustrar como la circunferencia está inmerso en nuestro contexto, el aro del tablero de baloncesto, el centro de la cancha de fútbol o del centro de la cancha de futsal, la forma que tienen algunos relojes.

Del mismo modo, se puede citar como un objeto importante a la rueda, cuyo invento revolucionó el desarrollo tecnológico.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Tomando en cuenta la lectura anterior, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cita algunos objetos tecnológicos que toman la forma de circunferencia en la actualidad?
- Cita y enumera los objetos circunferenciales que existe en tu casa
- ¿Qué elementos tiene la circunferencia?

TEORÍA

Pata pata

Fuente: OpenAI, 2024

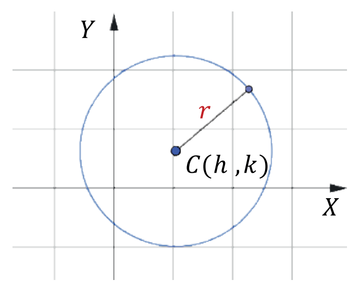
Juego tradicional

Si te diste cuenta, en el juego de la pata pata, la pelota que está en el extremo describe una circunferencia en su trayectoria, mientras que la cuerda que lo sostiene cumple el papel de radio.

Pero el juego consiste en atarse el pata pata a uno de los tobillos y saltar haciéndola pasar por debajo de la otra pierna. Este juego permite a niños, niñas, jóvenes y señoritas a fortalecer las piernas, pero también beneficia al desarrollo físico y motriz.

1. Definición

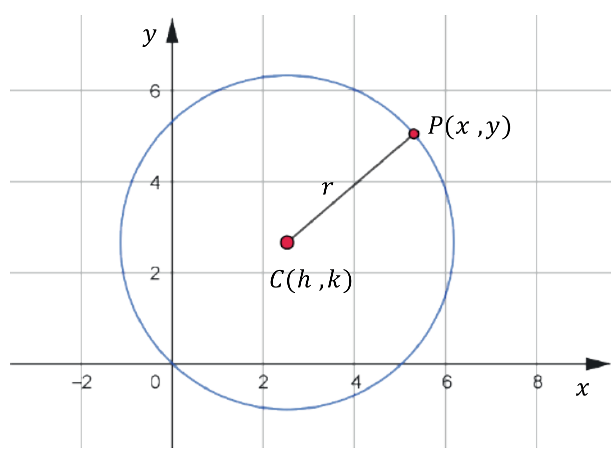
La circunferencia es un conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Esa distancia constante es el radio.



2. Elementos

Los elementos de la circunferencia son: el centro, cuyas coordenadas son $C(h,k)$, el radio r y el conjunto de puntos que es representado por $P(x,y)$

.



3. Ecuaciones de la circunferencia

Ecuación canónica

Si el centro de la circunferencia se ubica sobre el origen de coordenadas rectangulares, la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

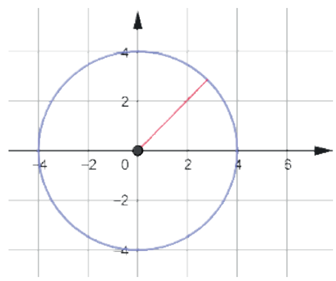
Si el radio es positivo, la circunferencia es real.

Si el radio es negativo, la circunferencia es imaginaria.

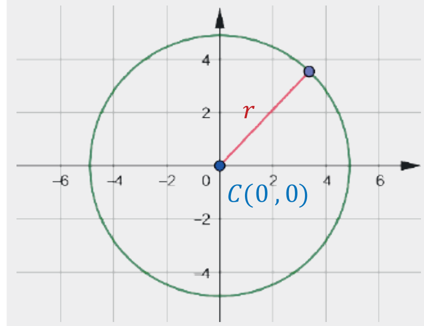
Si el radio es nulo, igual a cero, la circunferencia se reduce a un punto en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Graficamos la siguiente circunferencia:



Circunferencia con centro en el origen

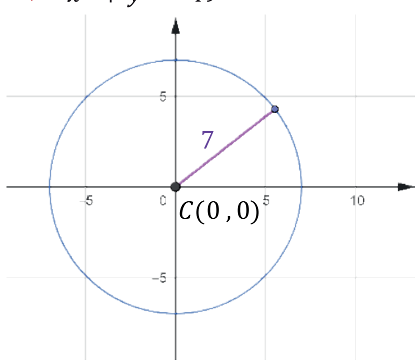


$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo:

Determinamos gráfica y analíticamente la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen y radio 7 unidades.

$$C(0,0);\quad r = 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 7^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 49$$

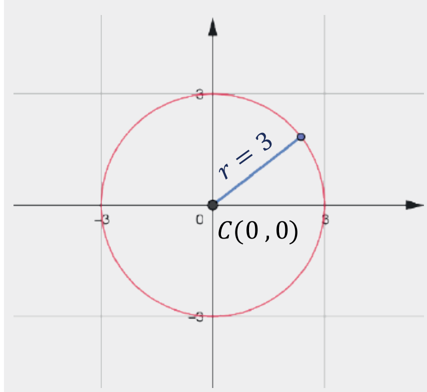


Ejemplo:

Determinamos, tanto gráficamente como de forma analítica, la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y un radio de 3 unidades.

$$C(0,0);\quad r = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9$$

Gráficamente



Actividad

Graficamos las siguientes circunferencias:

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $x^2 + y^2 = 1$

3) $x^2 + y^2 = 8$

4) $x^2 + y^2 = 36$

5) $x^2 + y^2 = 7$

6) $x^2 + y^2 - 10 = 0$

7) $x^2 + y^2 = 25$

8) $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$

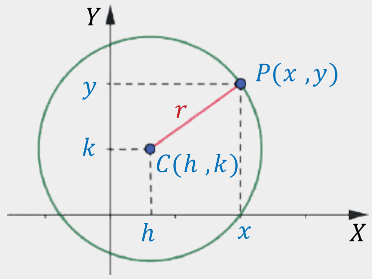
9) $x^2 + y^2 - \sqrt{5} = 0$

Determinamos la ecuación canónica de la circunferencia si el radio es:

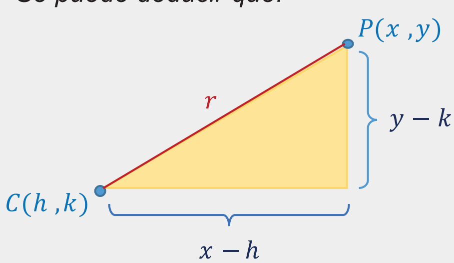
10) $r = 1$ 11) $r = 11$ 12) $r = 1{,}5$ 13) $r = \sqrt{15}$

Construcción

Siendo C el centro y P un punto del plano cartesiano y r es la distancia entre ambos puntos.



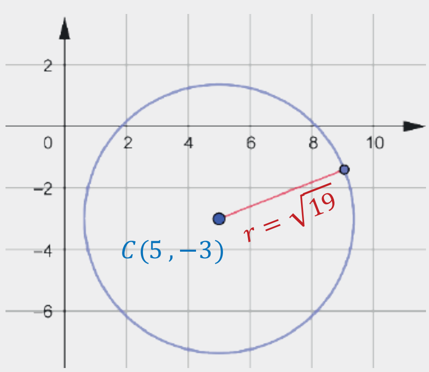
Se puede deducir que:



Al que se aplica el Teorema de Pitágoras:

$$(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$$

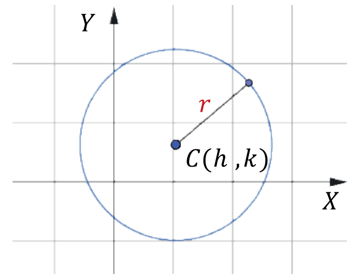
Gráfico



a) Ecuación ordinaria o ecuación principal

La ecuación ordinaria de la circunferencia es aquella donde el centro cambia de posición $C(h,k)$ y tiene la forma:

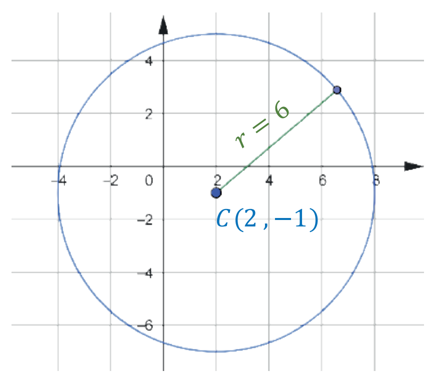
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



Ejemplo:

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación de la circunferencia de centro en $C\,(2,-1)$ y radio 6.

$$C\left(\underset{h}{2},\underset{k}{-1}\right);\ r=6 \quad \Rightarrow \quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+[y-(-1)]^2=6^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=36$$



Ejemplo:

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación de la circunferencia de centro en $C(5,-3)$ y radio $r=\sqrt{19}$.

$$C\left(\underset{h}{5},\underset{k}{-3}\right);\ r=\sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$\Rightarrow (x-5)^2+[y-(-3)]^2=\left(\sqrt{19}\right)^2$$
$$\Rightarrow (x-5)^2+(y+3)^2=19$$

Actividad

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación de las siguientes circunferencias:

1) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

2) $(x+2)^2+(y-2)^2=9$

3) $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

4) $x^2+(y-3)^2=10$

5) $(x+2)^2+y^2=9$

6) $(x+5)^2+(y+2)^2=12$

Representamos gráficamente las siguientes circunferencias:

7) $C(2\,,2)$ y $r=2$

8) $C(-3\,,4)$ y $r=4$

9) $C(3\,,-4)$ y $r=3$

10) $C(0\,,-3)$ y $r=5$

11) $C(2\,,0)$ y $r=6$

12) $C(-1\,,-2)$ y $r=\sqrt{7}$

b) Ecuación general de la circunferencia

Dada la ecuación principal u ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, al ser desarrollada encontramos su ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo:

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia de centro en $C(2,6)$ y radio $r=4$

$$C(\underset{h}{2},\underset{k}{6});\ r=4 \Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-6)^2=4^2$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-12y+36=16$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-4x-12y+24=0$$

Ejemplo:

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia de centro en $C(3,-5)$ y radio $r=4$

$$C(\underset{h}{3},\underset{k}{-5});\ r=4 \Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+5)^2=4^2$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2+10y+25=16$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-6x+10y+18=0$$

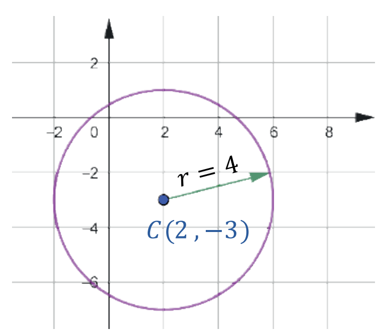
Ejemplo:

Determinamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0$$

$C=?$ $r=?$	$x^2-4x+y^2+6y=3$ $x^2-4x+4+y^2+6y+9=3+4+9$ $(x-2)^2+(y+3)^2=16=4^2$ $(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$

De donde: $C(2,-3)$ y $r=4$



Relación entre la ecuación ordinaria y la general

$$h=-\frac{D}{2} \ \wedge\ k=-\frac{E}{2}$$

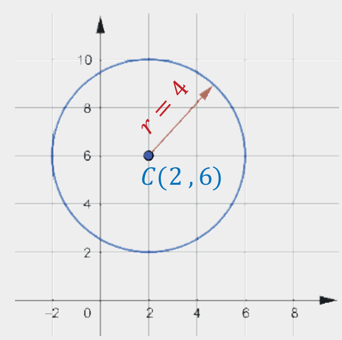
$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

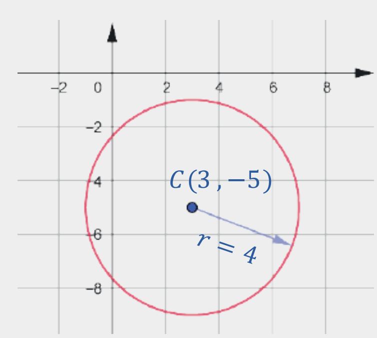
$r>0,\ C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

Si $r=0$, la circunferencia es un punto.

Si $r<0$, la circunferencia no existe.

Trazado de la circunferencia





Actividad

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia:

1) $C(4,3)$ y $r=3$
2) $C(0,-2)$ y $r=3$
3) $C(3,0)$ y $r=6$
4) $C(1,-1)$ y $r=5$
5) $C(3,-1)$ y $r=1$
6) $C(3,-3)$ y $r=\sqrt{7}$
7) $C(5,4)$ y $r=4$
8) $C(-5,-2)$ y $r=4$
9) $C(-4,-2)$ y $r=\sqrt{5}$

Determinamos el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

1) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$
2) $x^2+y^2-6x-8y-12=0$
3) $x^2+y^2+2x+6y-15=0$
4) $x^2+y^2+10x-4y+4=0$

Centro y punto conocido

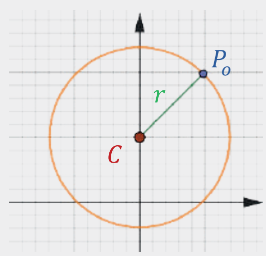
Debemos seguir los siguientes pasos:

- *Hallamos el radio de la circunferencia con el centro y el punto.*

$$r^2=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2$$

- *Con el radio y el centro sustituimos en la ecuación ordinaria.*

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



Circunferencia con diámetro conociendo sus extremos

Debemos seguir los siguientes pasos:
Encontramos el centro con el punto medio de un segmento.

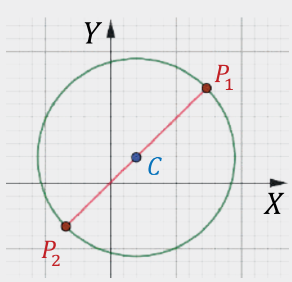
$$C\,(h\,,k)\;=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Seguidamente hallamos el radio de la circunferencia con el centro y uno de los puntos.

$$r^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2$$

Con el radio y el centro sustituimos en la ecuación ordinaria.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



4. Circunferencia con centro conocido y pasa por un punto

Conocido el centro y un punto sobre la circunferencia, se puede hallar la ecuación ordinaria y general de la misma es decir:

$$C\,(h\,,k);\;\; P_0\,(x_0\,,y_0\,)\;\Rightarrow\; r^2=(x_o-h)^2+(y_o-k)^2$$

Ejemplo:

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia de centro en $C(3\,,3)$ y que pasa por el punto $P(7\,,7)$.

$$\left.\begin{array}{l} C\left(\underset{h}{3},\underset{k}{3}\right);\;\; P_0\left(\underset{x_0}{7},\underset{y_0}{7}\right) \\ r^2=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} r^2=(7-3)^2+(7-3)^2 \\ \quad=4^2+4^2=16+16=32 \end{array}$$

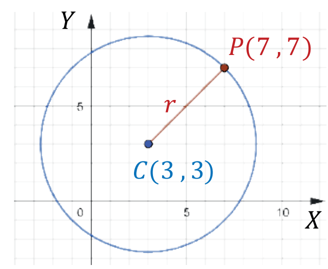
De donde:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=32$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-6y+9-32=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-6x-6y-14=0$$



5. Circunferencia con diámetro conocido sus extremos

Conocidas las coordenadas del diámetro de la circunferencia, podemos determinar la ecuación ordinaria y general de la circunferencia con las siguientes ecuaciones:

Diámetro entre los puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

Centro: $C\,(h\,,k)\;=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Radio: $r^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2$

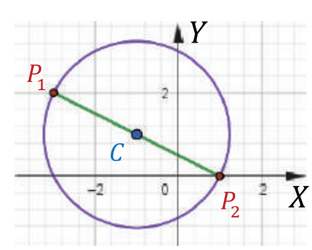
Ejemplo:

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia, si los puntos extremos de su diámetro son:

$$P_1\left(\underset{x_1}{-3},\underset{y_1}{2}\right)\text{ y }P_2\left(\underset{x_2}{1},\underset{y_2}{0}\right)\Rightarrow C=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{2+0}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{2}{2}\right)=\left(\underset{h}{-1},\underset{k}{1}\right)$$

En la ecuación principal:

$$r^2=(-3+1)^2+(2-1)^2=4+1=5$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=5$$
$$x^2+2x+1+y^2-2y+1-5=0$$
$$x^2+y^2+2x-2y-3=0$$



Actividad

Hallamos la ecuación de la circunferencia, si se dan los extremos de su diámetro.

1) $C(3\,,2)$ y $P_o(1\,,-1)$

2) $C(0\,,-2)$ y $P_o(1\,,2)$

3) $C(3\,,0)$ y $P_o(3\,,-1)$

4) $C(4\,,-2)$ y $P_o(2\,,2)$

5) $C(-2\,,3)$ y $P_o(3\,,-3)$

6) $C(-1\,,2)$ y $P_o(-3\,,3)$

Determinamos la ecuación de la circunferencia, si se da el centro un punto de la misma.

7) $P(3\,,4)$ y $Q(-1\,,-2)$

8) $P(-2\,,2)$ y $Q(4\,,-2)$

9) $P(1\,,1)$ y $Q(-3\,,-5)$

10) $A(3\,,0)$ y $B(1\,,2)$

11) $A(1\,,-2)$ y $B(5\,,6)$

12) $A(0\,,0)$ y $B(-2\,,4)$

Ejemplo:

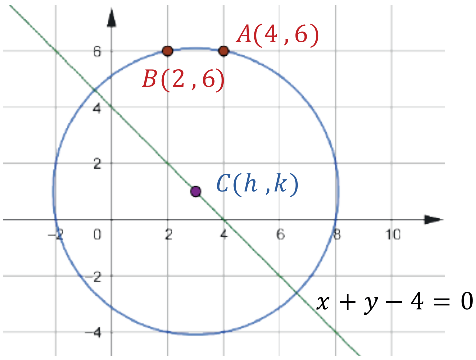
Encontramos la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $L: x + y - 4 = 0$ y que pasa por los puntos $A(4\,,6)$; $B(2\,,6)$.

El centro está en la recta:

$$x + y - 4 = 0 \Rightarrow h + k = 4$$

$$A(\underset{x}{4}\,,\underset{y}{6}) \;\Rightarrow\; (4-h)^2 + (6-k)^2 = r^2$$

$$B(\underset{x}{2}\,,\underset{y}{6}) \;\Rightarrow\; (2-h)^2 + (6-k)^2 = r^2$$



Igualando los radios:

$$r^2 = r^2 \Longrightarrow (4-h)^2 + (6-k)^2 = (2-h)^2 + (6-k)^2$$
$$\Longrightarrow 16 - 8h + h^2 = 4 - 4h + h^2$$
$$\Longrightarrow 16 - 4 = -4h + 8h$$

$4h = 12$	$h + k = 4$
$h = \frac{12}{4} = 3$	$3 + k = 4$
$h = 3$	$k = 1$

de donde, el centro es: $C(3\,,1)$

$$r^2 = (2-3)^2 + (6-1)^2 = (-1)^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26 \;\Rightarrow\; r^2 = 26$$

Centro y radio en la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad\Rightarrow\quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 26$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

1) Escribimos la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $x - 3y - 11 = 0$ y que pasa por los puntos $A(2\,,3)$; $B(-1\,,1)$.

2) Halla la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $x - 2y + 9 = 0$ y que pasa por los puntos $P(1\,,-4)$; $Q(5\,,2)$.

3) Determinamos la ecuación general de aquella circunferencia cuyo centro está sobre el eje vertical y que pasa por los puntos $A(3\,,3)$; $B(5\,,-5)$.

VALORACIÓN

En clase, establece un diálogo y debate con tus compañeras y compañeros sobre la importancia del uso de la circunferencia en los ámbitos de la producción, tecnología y científico, respondiendo a las siguientes preguntas:

- ¿Qué problemas de nuestro contexto se pueden resolver con las ecuaciones de la circunferencia?
- ¿Por qué es importante la circunferencia en el avance productivo, tecnológico y científico?
- Sobre la imagen de la derecha, investiga un poco más acerca de los círculos en los cultivos, será misterio, realidad o fantasía.

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

Organizamos una jornada para pintar algunos lugares de nuestro patio y campos deportivos de nuestra unidad educativa, debemos ser creativos a la hora de pintar las áreas circulares, con solo una cuerda, brocha y pintura.

APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

PRÁCTICA

El invento de la rueda ha sido fundamental para la modernidad, debido a su impacto en el transporte y la mecánica. La rueda facilitó el movimiento de cargas pesadas y la movilidad humana, transformando las formas de comercio, exploración y conquista. La invención de la rueda dio inicio e impulso al desarrollo tecnológico y la industrialización, este invento revolucionó la historia del ser humano.

Resulta que la rueda tiene la forma de una circunferencia, una forma común en muchos objetos, como los CD, DVD, relojes de pared, llantas de automóviles y motos y en la fabricación de monedas. En estos objetos, se requiere una gran precisión para su correcto funcionamiento y tratamiento de datos.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Analizamos la lectura para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los elementos básicos de una circunferencia?
- ¿La circunferencia es representada por alguna ecuación algebraica en particular?
- En Uyuni se encuentra el "Cementerio de trenes", ¿sabías que fueron construidos utilizando circunferencias proporcionales?. Investigamos para corroborar esta afirmación.

TEORÍA

Apolonio de Pérgamo

Fuente: OpenAI, 2024

(262 – 190 a. C)
Matemático estudioso de las secciones cónicas, resolvió la ecuación general de segundo grado utilizando geometría cónica. Demostró que, a partir de un único cono, pueden obtenerse los tres tipos de secciones variando la inclinación del plano que corta el cono.

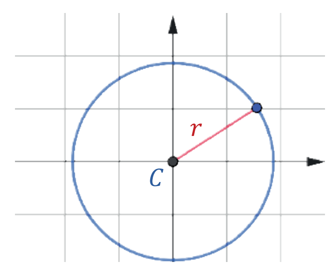
1. Memoria de ecuaciones y relaciones

La circunferencia se define como el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado centro.

Existen dos situaciones en la que la circunferencia puede estar ubicado en el plano cartesiano:

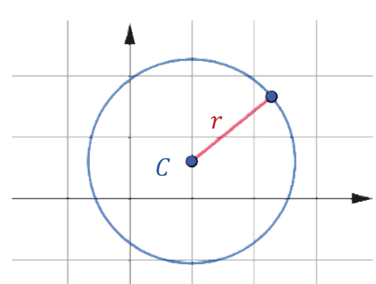
Cuando el centro es ubicado en el origen.

Centro: $C(0\,,0)$
Radio: r
Ecuación principal: $x^2+y^2=r^2$
Ecuación general: $x^2+y^2+F=0$



Cuando su centro está ubicado en cualquier punto del plano.

Centro: $C(h\,,k)$
Radio: r
Ecuación principal: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
Ecuación general: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$



2. Circunferencia que pasa por tres puntos

Si conocemos tres puntos de la circunferencia, podemos encontrar su ecuación ordinaria y general. Para ello debemos reemplazar los tres puntos en la ecuación general para así formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al resolverla, se encuentran los coeficientes de la ecuación general.

Ejemplo:

Encontramos la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: $A(1\,,1)$; $B(1\,,5)$ y $C(7\,,5)$

Paso 1: Reemplazamos las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la circunferencia:

$$A(\underset{x}{1}\,,\underset{y}{1}) \Rightarrow 1^2+1^2+D(1)+E(1)+F=0$$

$$1+1+D+E+F=0 \Rightarrow D+E+F=-2 \qquad (1)$$

$$B(\underset{x}{1}\,,\underset{y}{5}) \Rightarrow 1^2+5^2+D(1)+E(5)+F=0$$

$$1+25+D+5E+F=0 \Rightarrow D+5E+F=-26 \qquad (2)$$

$$C(\underset{x}{7}\,,\underset{y}{5}) \Rightarrow 7^2+5^2+D(7)+E(5)+F=0$$

$$49+25+7D+5E+F=0 \Rightarrow 7D+5E+F=-74 \qquad (3)$$

Paso 2: Escribimos el sistema de tres ecuaciones con tres variables y lo resolvemos por el método que más nos convenga:

$$\begin{cases} D+E+F=-2 & (1)\\ D+5E+F=-26 & (2)\\ 7D+5E+F=-74 & (3)\end{cases}$$

$(1)-(2)$:

$$\begin{cases} D+E+F=-2\\ -D-5E-F=26\end{cases}$$

$$-4E=24$$

$$E=\frac{24}{-4}=-6$$

$$E=-6$$

$(2)-(3)$:

$$\begin{cases} D+5E+F=-26\\ -7D-5E-F=74\end{cases}$$

$$-6D=48$$

$$D=\frac{48}{-6}=-8$$

$$D=-8$$

Paso 3: Así, la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-8x-6y+12=0$$

Paso 4: Para trazar la circunferencia, utilizamos el método de completar cuadrados:

$$x^2+y^2-8x-6y+12=0 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2-6y+9=-12+16+9$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=13$$

Centro y la radio de la circunferencia:

$$C(4\,,3); \quad r=\sqrt{13}$$

Resolviendo el sistema con calculadora

En la calculadora apretamos:

MODE, EQN, 5

Opción 2

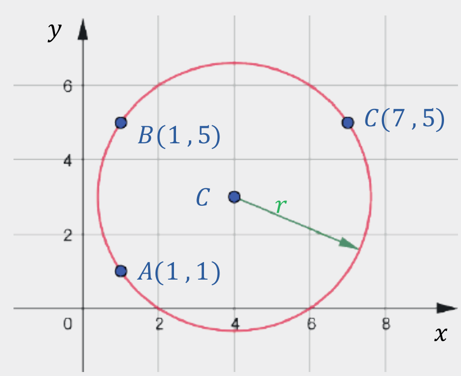
Introducimos los coeficientes de las incógnitas:

Ec1: 1 EXE(=); 1 EXE; 1 EXE; -2 EXE
Ec2: 1 EXE(=); 5 EXE; 1 EXE; -26 EXE
Ec3: 7 EXE(=); 5 EXE; 1 EXE; -74 EXE

Los resultados nos saldrán de la siguiente manera:

$$x=-8 \Rightarrow D=-8$$
$$y=-6 \Rightarrow E=-6$$
$$z=12 \Rightarrow F=12$$

Gráficamente



Actividad

Determinamos la ecuación de la circunferencia, si nos dan los siguientes puntos:

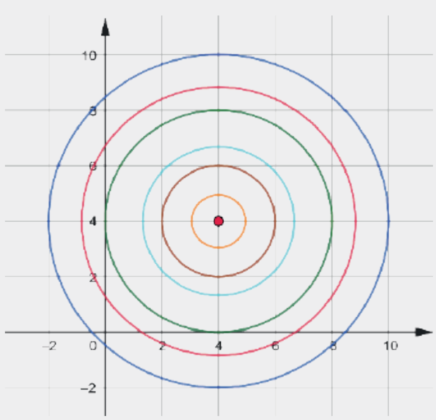
1) $A(-1\,,1)$; $B(4\,,6)$; $C(7\,,3)$
2) $A(-3\,,-1)$; $B(1\,,-4)$; $C(7\,,4)$
3) $A(1\,,1)$; $B(1\,,5)$; $C(7\,,5)$
4) $P(-3\,,3)$; $Q(6\,,0)$; $R(5\,,7)$
5) $A(2\,,2)$; $B(6\,,0)$; $C(8\,,4)$
6) $P(2\,,0)$; $Q(4\,,0)$; $R(2\,,4)$
7) $A(1\,,4)$; $B(1\,,-2)$; $C(4\,,1)$
8) $P(6\,,2)$; $Q(8\,,-2)$; $R(3\,,-7)$

Monedas del Estado Plurinacional de Bolivia

Observa la moneda de Bs 5.

Podemos ver varias circunferencias, pero todas tienen el mismo centro:

Resulta que las circunferencias describen una familia de circunferencias concéntricas.



3. Familia de circunferencias

Una familia de circunferencias es el conjunto de circunferencias que cumplen la condición, de tener el mismo centro pero distinto radio:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

Donde p es el parámetro y siempre será positivo.

Ejemplo:

Representamos gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto $(3,-2)$ y radio $p=1,2,3$

La familia de circunferencias es el conjunto de circunferencias concéntricas, sus ecuaciones principales serán:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

$$C_1:(x-3)^2+(y+2)^2=1^2$$

$$C_2:(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$$

$$C_3:(x-3)^2+(y+2)^2=3^2$$

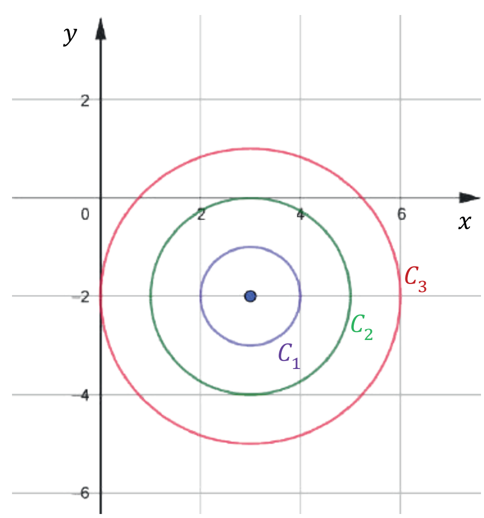
Además, sus ecuaciones generales serán:

$$C_1:x^2+y^2-6x+4y+12=0$$

$$C_2:x^2+y^2-6x+4y+9=0$$

$$C_3:x^2+y^2-6x+4y+4=0$$

Trazando las gráficas correspondientes:



Actividad

Determinamos gráfica y analíticamente la familia de circunferencias de los siguientes datos:

1) $C(3,-2);\ p=2,3$

2) $C(0,2);\ p=2,3,4$

3) $C(1,3);\ p=1,2,3$

4) $C(-2,0);\ p=2,3,4$

5) $C(-1,-1);\ p=1,2,3$

6) $C(4,-2);\ p=5,6$

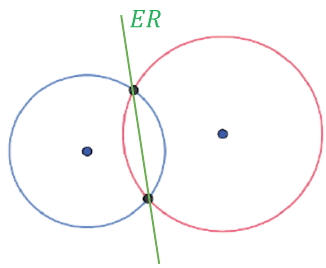
7) Centro en la intersección de las rectas: $x-4y+3=0;\ 2x+3y-5=0$

8) Centro en el punto medio del segmento: $A(-3,3);\ B(3,-5)$

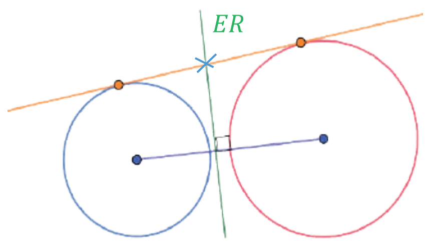
9) Centro en el punto medio del segmento: $P(2,4);\ Q(-4,-2)$

4. Eje radical entre circunferencias

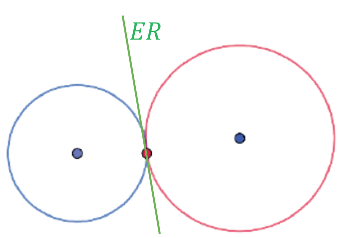
Se refiere a determinar la posición relativa entre dos circunferencias, si las circunferencias son secantes, el eje radical pasa por los puntos de intersección de dos circunferencias y la distancia entre los centros es menor a la suma de los radios.

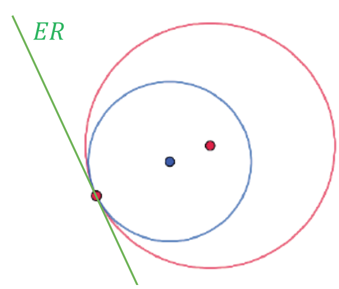


Si las circunferencias son exteriores, el eje radical se obtiene uniendo los puntos medios de los segmentos formados por los puntos de contacto de las tangentes a las circunferencias.



Si las circunferencias son tangentes exteriores o interiores, el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y es perpendicular al segmento que forman los centros.





Ejemplo

Encontremos la posición relativa entre las circunferencias:

$$C_1: \; x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0$$

$$C_2: \; x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

Para saber la posición debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 & \cdot 1 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 & \cdot -1 \end{cases}$$

$$4x + 20y = 0$$
$$x = -5y$$

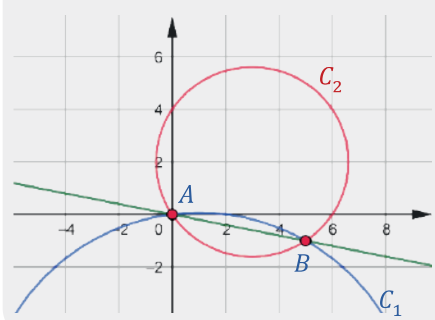
Sustituyendo en la primera ecuación:

$$(-5y)^2 + y^2 - 2(-5y) + 16y = 0$$
$$25y^2 + y^2 + 10y + 16y = 0$$
$$26y^2 + 26y = 0$$
$$26y(y + 1) = 0$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = -1$$

Reemplazando para el valor de x:

$$x_1 = -5(0) = 0 \qquad x_2 = -5(-1) = 5$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$$

Las dos circunferencias se intersectan en dos puntos:
$A(0, 0); B(5, -1)$



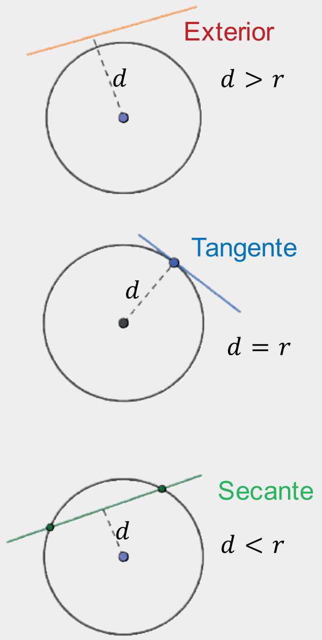
Actividad

Determinamos graficando la posición relativa de las circunferencias:

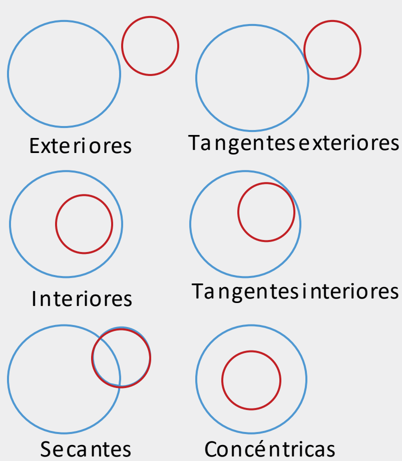
1) $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 25$
2) $x^2 + y^2 - 2y = 4; x^2 + y^2 - 2x = 17$
3) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 10 = 0; x^2 + y^2 + 2x - 2y - 12 = 0$
4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0; x^2 + y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$
5) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$
6) $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 - 10x + 25 = 0$
7) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 15; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$
8) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Fuente: https://www.dreamstime.com/stock-photography-concentric-rings-image14650452

Posición relativa de la circunferencia respecto a una recta

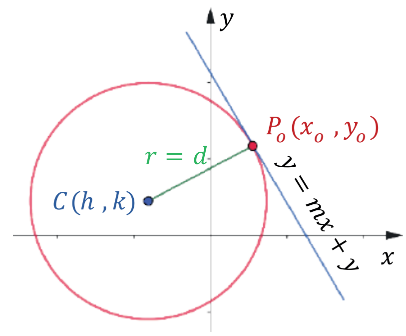


Posición relativa de la circunferencia con otra circunferencia



5. Tangente a una circunferencia

Una tangente a un círculo es una línea recta que toca el círculo en un solo punto, llamado punto de tangencia. Esta línea es siempre perpendicular al radio que pasa por ese punto.



Ejemplo:

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es el punto $(5\,,2)$ y es tangente a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Encontramos primeramente la distancia del centro a la recta:

$$C\,(\underset{h}{5}\,,\underset{k}{2}) \qquad \underset{A}{3}x + \underset{B}{2}y \underset{C}{-6} = 0$$

$$r = d = \left|\frac{Ah + Bk + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$r = \left|\frac{3(5) + 2(2) - 6}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{15 + 4 - 6}{\sqrt{13}}\right|$$

$$= \left|\frac{13}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}\right| = \left|\frac{13\sqrt{13}}{13}\right| = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{13}$$

En la ecuación ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{13}^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Desarrollamos la ecuación ordinaria para encontrar la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 13$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$$

Actividad

Encontramos la ecuación de la circunferencia con centro “C” y que es tangente a la recta dada:

1) $C(2\,,2)$ y $L: 3x + 4y - 4 = 0$

2) $C(-2\,,4)$ y $L: 12x - 5y + 5 = 0$

3) $C(0\,,3)$ y $L: x + y - 2 = 0$

4) $C(3\,,3)$ y $L: x + 5y - 10 = 0$

5) $C(4\,,0)$ y $L: x - y + 3 = 0$

6) $C(-4\,,-5)$ y $L: 2x + 2y - 5 = 0$

7) $C(-1\,,-1)$ y $L: 4x - 3y - 6 = 0$

8) $C(-3\,,5)$ y $L: y = 3x - 3$

9) $C(3\,,-2)$ y $L: 5x + 12y - 4 = 0$

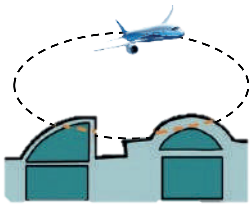
10) $C(0\,,0)$ y $L: 3x - 2y + 6 = 0$

6. Aplicaciones

Problema:

Resolvamos la siguiente pregunta, ¿cuál es el lugar geométrico que describe la trayectoria de un avión que sobrevuela una ciudad en una distancia constante de 4 km de la torre de control del aeropuerto local, esperando instrucciones para aterrizar?

Vista frontal



Solución:

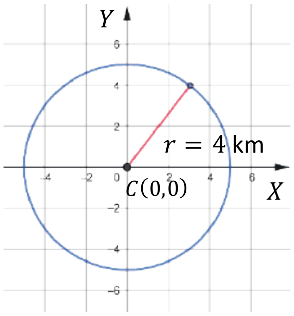
Para resolver el problema, debemos tener una vista superior del avión que describe una trayectoria en el plano cartesiano, haciendo que la torre de control se sitúe en el origen del plano y tomando como radio a los 4 km.
De este modo tenemos los siguientes datos:

$C(0\,,0)$

$r = 4$

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

Es la ecuación de la trayectoria del avión.



Vista superior

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) El servicio sismológico nacional, detectó un sismo con origen en una localidad del país a 8 km hacia al Norte y 10 km hacia el Oeste de la localidad, con un radio de afectación de 12 km. ¿Cuál es la ecuación del área afectada?

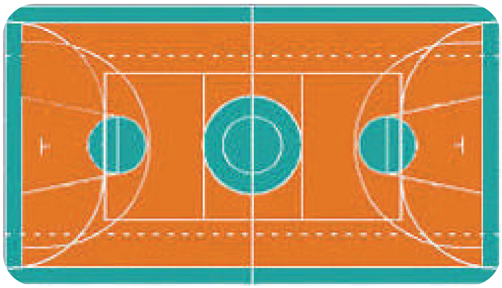
2) Una fuga de agua se produce en una zona de la ciudad, que está a 3 km al Este y 5 km al Norte del centro de la ciudad. La fuga produjo una inundación de la zona de un radio de 9 km a la redonda. ¿Cuál es la ecuación del área inundada?

3) En la pregunta 2), si la casa de Aneth se encuentra a 7 km al Este y 8 km al Sur del centro ¿afectó la fuga de agua a la casa de Aneth?

VALORACIÓN

Un área en especial que utiliza algunos principios geométricos es el deporte, diferentes disciplinas deportivas para su efecto a la circunferencia como elemento principal en el desarrollo del juego.
Las formas circulares que se utilizan siempre se pueden expresar algebraicamente.

- Describimos y enumeramos, ¿en qué disciplinas deportivas utilizan o aplican la circunferencia?
- Desde tu punto de vista, ¿por qué es importante el uso de la circunferencia en diferentes ámbitos, rubros, profesiones, etc.?



Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

El Hombre de Vitruvio, es una famosa obra de Leonardo da Vinci, elaborada alrededor del año 1490. En la imagen se observa una figura masculina en dos posiciones de brazos y piernas e inscrita en una circunferencia y un cuadrado. Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, las proporciones descritas:

- El rostro desde la barbilla hasta la parte más alta de la frente, donde comienzan las raíces del cabello, mide una décima parte de la altura total.
- El pie equivale a una sexta parte de la altura del cuerpo.
- La frente mide la tercera parte del rostro.

Verificamos estos datos midiendo tu propio cuerpo. Descubrimos las proporciones del Hombre de Vitruvio.

Fuente: OpenAI, 2024

LA PARÁBOLA

PRÁCTICA

Las comunidades rurales en el Estado Plurinacional de Bolivia tenían escaso acceso a vías y medios de comunicación como el Internet, hasta que se instalaron antenas parabólicas satelitales para aumentar la cobertura de Internet y de este modo reducir el costo de este tipo de servicios.
Rider es uno de los ingenieros en telecomunicaciones que propiciaron este hecho, instalando las antenas, ubicando eficientemente los aparatos de recepción LNB (Low Noise Block) para que la antena reciba señal satelital, la señal proviene del Satélite Túpac Katari, en cierta ubicación.
Para este tipo de instalaciones se requiere de saberes y conocimientos de geometría analítica para establecer sus cálculos.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Analizamos la lectura anterior y respondemos las siguientes preguntas:

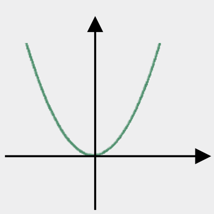
- En tu opinión, para este tipo de señales o emisiones satelitales, ¿por qué crees que se utiliza la parábola?, por ejemplo, ¿por qué no se utiliza la circunferencia?
- ¿Cómo funcionan las antenas parabólicas que se instalaron en las comunidades?
- ¿Qué tipo de cálculos tuvo que hacer Rider para establecer el lugar en que debe ubicarse el LNB?
- ¿Hacia dónde y por qué están direccionadas las antenas parabólicas?

TEORÍA

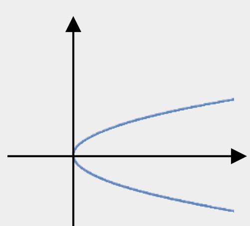
Posición de la parábola

Parábolas positivas

Las parábolas pueden ser verticales u horizontales, se abren hacia arriba o hacia la derecha, estas posiciones dependen del foco y de la directriz.



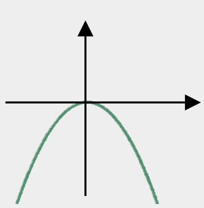
Arriba



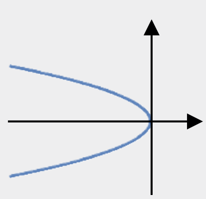
Derecha

Parábolas negativas

Las parábolas pueden ser verticales u horizontales, se abren hacia abajo o hacia la izquierda, estas posiciones dependen del foco y de la directriz.



Abajo



Izquierda

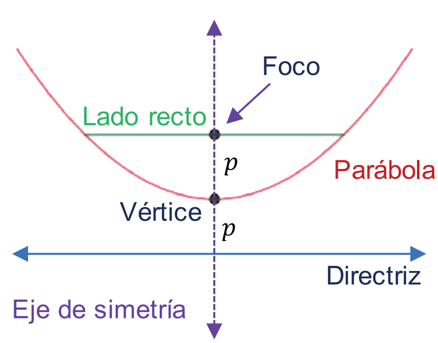
1. Definición de la parábola

Es el lugar geométrico donde se encuentran los puntos del plano, que equidistan de un punto fijo, denominado foco y de una recta de nombre directriz.

2. Elementos

Los elementos de la parábola son:

- **El eje de simetría o eje focal**, es la recta que contiene al foco y al vértice, las dos ramas de la parábola son simétricas respecto a este eje.
- El vértice V, es el punto donde la parábola se cruza con el eje de simetría. Además, el vértice está situado a la misma distancia entre el foco y la directriz.
- El foco F es un punto que se encuentra en el eje de simetría. La distancia entre el foco y el vértice es igual a la distancia entre el vértice y la directriz.
- La directriz D, es una recta perpendicular al eje de simetría, su distancia al vértice es igual a la distancia entre el foco y el vértice.
- El lado recto LR, es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría. Su longitud es 4 veces la distancia del vértice al foco.



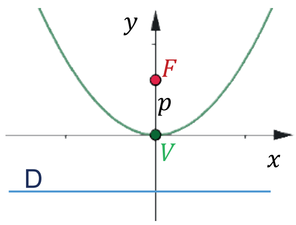
3. Ecuaciones de la parábola

a) Parábolas verticales

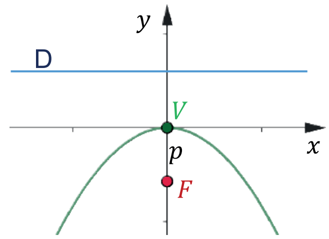
Las parábolas verticales se caracterizan por tener el eje focal paralelo al eje vertical. Cuando el vértice está en el origen $V(0\,,0)$, la ecuación ordinaria o principal es:

$$V(0\,,0) \quad x^2 = \pm 4py$$

Una parábola es vertical y positiva si sus ramas se abren hacia arriba y será vertical y negativa si sus ramas se abren hacia abajo, sus ecuaciones correspondientes son:



$x^2 = 4py$



$x^2 = -4py$

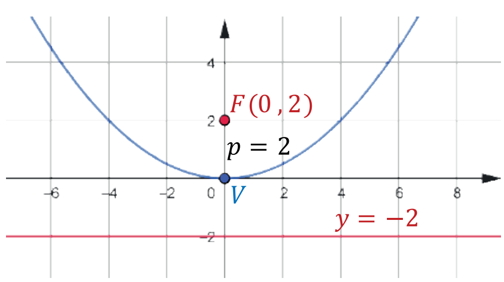
Ejemplo:

Encontramos la ecuación de la parábola de foco en el punto $(0{,}2)$ además hallaremos su directriz y el lado recto.
Graficando los datos, nos damos cuenta que la parábola se abre hacia arriba, el valor de $p = 2$.

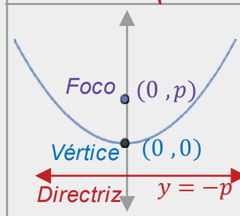
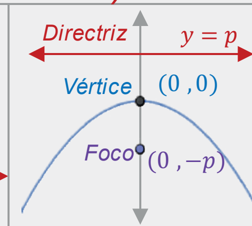
$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(2)\,y$$
$$x^2 = 8y$$

Directriz: $D{:}y = -p$ $\quad D{:}y = -2$

Lado recto: $LR = 4p$ $\quad LR = 8$

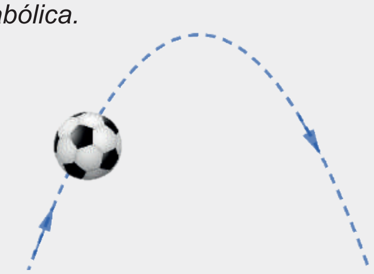


Formulario

EJE FOCAL PARALELO AL EJE "Y" (EJE VERTICAL)	
	
Vértice: $V(0\,,0)$	Vértice: $V(0\,,0)$
Ecuación: $x^2 = 4py$	Ecuación: $x^2 = -4py$
Ecuación general: $x^2 + Ey = 0$	Ecuación general: $x^2 + Ey = 0$
Foco: $F(0\,,p)$	Foco: $F(0\,,-p)$
Directriz: $y = -p$	Directriz: $y = p$
Lado recto: $LR = 4p$	Lado recto: $LR = 4p$
Parámetro: $p = -\dfrac{E}{4}$	Parámetro: $p = -\dfrac{E}{4}$

Deporte parábolico

En el baloncesto, golf, fútbol y otros deportes, la trayectoria que describe la pelota cuando es lanzada con un determinado ángulo tiene una trayectoria parabólica.



Actividad

Graficamos las siguientes parábolas:

1) $x^2 = 4y$ **3)** $x^2 + 8y = 0$ **5)** $x^2 + 2y = 0$

2) $x^2 = -12y$ **4)** $x^2 = -y$ **6)** $x^2 - 10y = 0$

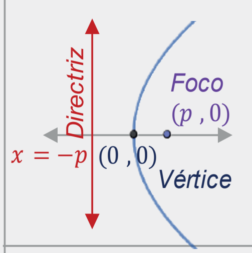
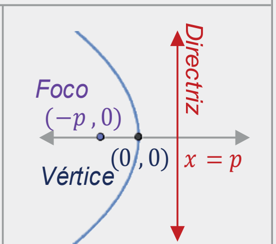
Encontramos gráfica y analíticamente las ecuaciones de las siguientes parábolas:

7) $V(0,0);\ F(0,3)$ **10)** $V(0,0);\ D{:}y = 4$ **13)** $V(0,0); F(0,-4)$

8) $V(0,0);\ F(0,2)$ **11)** $V(0,0);\ D{:}y = -2$ **14)** $V(0,0);\ F(0,-5)$

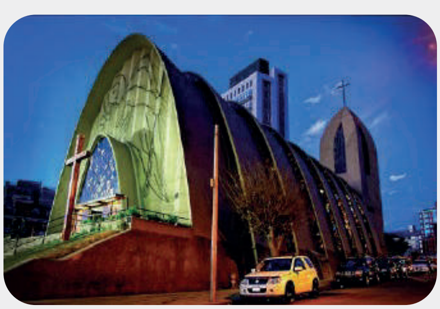
9) $V(0,0); F(0,-2)$ **12)** $V(0,0);\ D{:}y = -1$ **15)** $V(0,0);\ D{:}y - 5 = 0$

Formulario

EJE FOCAL PARALELO AL EJE "X" (EJE HORIZONTAL)	
	
Vértice: $V(0,0)$	Vértice: $V(0,0)$
Ecuación: $y^2=4px$	Ecuación: $y^2=-4px$
Ecuación general: $y^2+Dx=0$	Ecuación general: $y^2+Dx=0$
Foco: $F(p,0)$	Foco: $F(-p,-0)$
Directriz: $x=-p$	Directriz: $x=p$
Lado recto: $LR=4p$	Lado recto: $LR=4p$
Parámetro: $p=-\frac{D}{4}$	Parámetro: $p=-\frac{D}{4}$

Parroquia San Miguel

Ubicada en la ciudad de La Paz, esta construcción tiene su estructura en forma de arco parabólico.



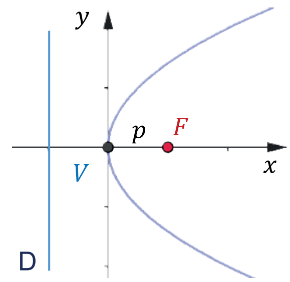
Fuente: https://www.bolivia.com/vida-sana/noticias/oracion-para-alejar-el-mal-san-miguel-arcangel-374289

b) Parábolas horizontales

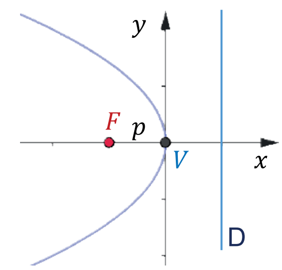
Las parábolas verticales se caracterizan por tener el eje focal paralelo al eje horizontal. Cuando el vértice está en el origen $V(0,0)$, la ecuación ordinaria o principal es:

$$y^2=\pm 4px$$

Una parábola es horizontal y positiva si sus ramas se abren hacia la derecha y será vertical y negativa si sus ramas se abren hacia la izquierda, sus ecuaciones correspondientes son:



$y^2=4px$



$y^2=-4px$

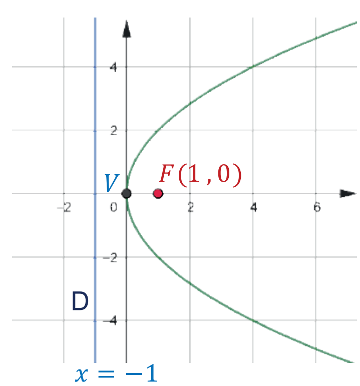
Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la parábola de foco en el punto $(1\ ,\ 0)$ además encontraremos su directriz y el lado recto.

Graficando los datos, nos damos cuenta que la parábola se abre hacia la derecha, el valor de $p=1$:

$$y^2=4px$$
$$y^2=4(1)x$$
$$y^2=4x$$

Directriz:	$D: x=-p$	$D: x=-1$
Lado recto:	$LR=4p$	$LR=4$



Actividad

Graficamos las siguientes parábolas:

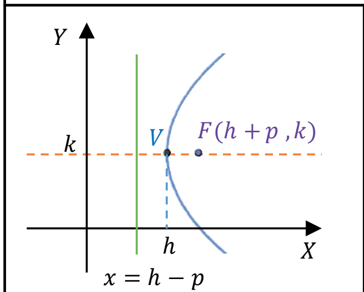
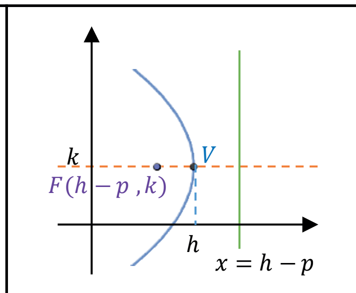
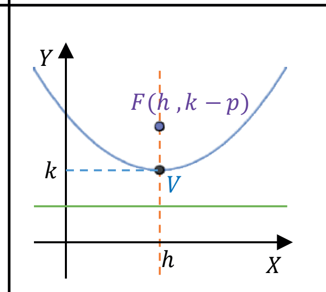
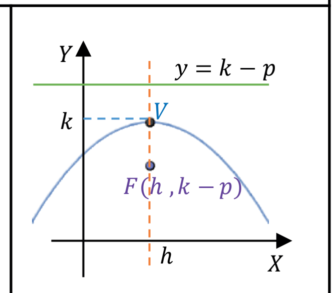
1) $y^2=4x$
2) $y^2=12x$
3) $y^2-8x=0$
4) $y^2=x$
5) $y^2-2x=0$
6) $y^2+10x=0$

Encontramos gráfica y analíticamente las ecuaciones de las siguientes parábolas:

7) $V(0,0);\ F(2,0)$
8) $V(0,0);\ F(-3,0)$
9) $V(0,0);\ F(-2,0)$
10) $V(0,0);\ D: x=-4$
11) $V(0,0);\ D: x=2$
12) $V(0,0);\ D: x=1$
13) $V(0,0);\ F(4,0)$
14) $V(0,0);\ F(5,0)$
15) $V(0,0);\ D: x-5=0$

c) Parábolas con vértice fuera del origen

Son parábolas que tienen el vértice en un punto distinto del origen, vale decir que su vértice está en: $V(h, k)$
Sus ecuaciones, sus elementos y su grafica serían:

<table>
<tr><th colspan="3">EJE FOCAL “X”</th><th colspan="3">EJE FOCAL “Y”</th></tr>
<tr><th colspan="3">EJE FOCAL PARALELO AL EJE “X”</th><th colspan="3">EJE FOCAL PARALELO AL EJE “Y”</th></tr>
<tr><th colspan="3">EJE HORIZONTAL</th><th colspan="3">EJE VERTICAL</th></tr>
<tr><th colspan="3">PARÁBOLA HORIZONTAL</th><th colspan="3">PARÁBOLA VERTICAL</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vértice:
$V(h, k)$</td><td>Vértice:
$V(h, k)$</td><td colspan="2">Vértice:
$V(h, k)$</td><td>Vértice:
$V(h, k)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ecuación:
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$</td><td>Ecuación:
$(y-k)^2 = -4p(x-h)$</td><td colspan="2">Ecuación:
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$</td><td>Ecuación:
$(x-h)^2 = -4p(y-k)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ecuación general:
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$</td><td>Ecuación general:
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$</td><td colspan="2">Ecuación general:
$x^2 + Dx + Ey + F = 0$</td><td>Ecuación general:
$x^2 + Dx + Ey + F = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Foco:
$F(h+p, k)$</td><td>Foco:
$F(h-p, k)$</td><td colspan="2">Foco:
$F(h, k+p)$</td><td>Foco:
$F(h, k-p)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Directriz:
$x = h - p$</td><td>Directriz:
$x = h + p$</td><td colspan="2">Directriz:
$y = k - p$</td><td>Directriz:
$y = k + p$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lado recto:
$LR = 4p$</td><td>Lado recto:
$LR = 4p$</td><td colspan="2">Lado recto:
$LR = 4p$</td><td>Lado recto:
$LR = 4p$</td></tr>
<tr><td>$p = -\frac{D}{4}$</td><td>$k = -\frac{E}{2}$</td><td>$h = -\frac{F - k^2}{4p}$</td><td>$p = -\frac{E}{4}$</td><td>$h = -\frac{D}{2}$</td><td>$k = -\frac{F - h^2}{4p}$</td></tr>
</table>

Para resolver cualquier ejercicio relacionado a la parábola, debemos tomar en cuenta la posición de la misma en el plano cartesiano, hay ciertas palabras o enunciados que nos pueden guiar para poder identificar su posición, por ejemplo:

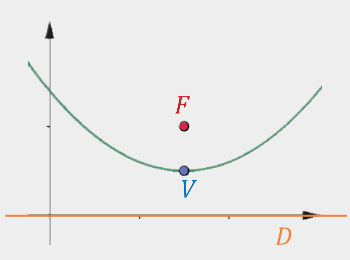
- Parábola horizontal, eje horizontal, eje focal paralelo al eje “X”, o eje focal “Y”, estos enunciados nos permiten identificar que la parábola se abre hacia la derecha si es positiva o hacia la izquierda si es negativa.

- Parábola vertical, eje vertical, eje focal paralelo al eje “Y”, o simplemente eje focal “Y”, estos enunciados nos permiten identificar que la parábola se abre hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa.

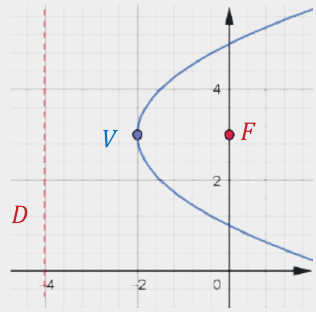
Actividad

En las siguientes parábolas, identificamos el vértice, el foco, el parámetro, la directriz y el LR (Lado recto):

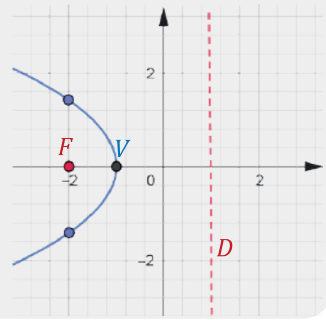
1)



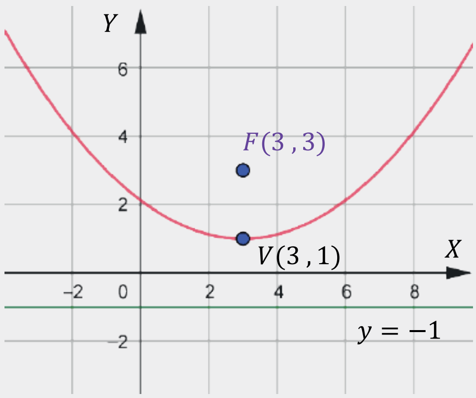
2)

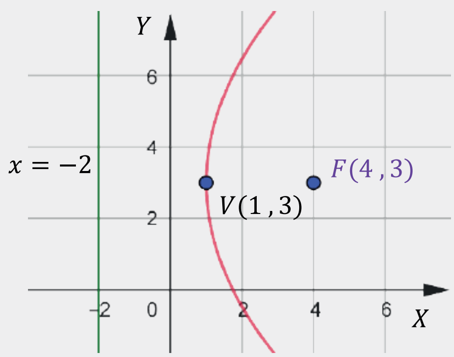


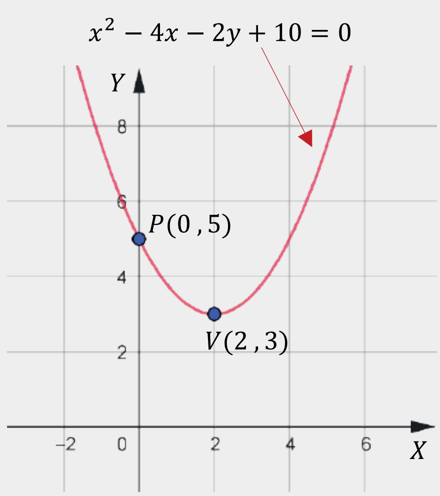
3)



Gráficas







Ejemplo:

Determinamos gráfica y analíticamente la ecuación de la parábola de vértice en el punto $V(3\,,1)$ y cuyo foco está en el punto $F(3\,,3)$

Lo primero que haremos es graficar los datos del ejercicio, se ve que la parábola se abre hacia arriba, entonces la ecuación será:

$V\left(\underset{h}{3},\underset{k}{1}\right)$ $\qquad (x-h)^2=4p(y-k)$

$F(3\,,3)$ $\qquad (x-3)^2=4(2)(y-1)$

$p=3-1=2$ $\qquad x^2-6x+9=8y-8$

$p=2$ $\qquad x^2-6x+9-8y+8=0$

Ecuación de la parábola: $x^2-6x-8y+17=0$

Ejemplo:

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación de la parábola de vértice en el punto $V(1,3)$ y cuya directriz es la recta $x+2=0$.

Graficamos los datos del ejercicio, se nota que la parábola se abre hacia la derecha, entonces la ecuación será:

$V\left(\underset{h}{1},\underset{k}{3}\right)$ $\qquad (y-k)^2=4p(x-h)$

$D\colon x=-2$ $\qquad (y-3)^2=4(3)(x-1)$

$p=1-(-2)=1+2=3$ $\qquad y^2-6y+9=12x-12$

$p=3$ $\qquad y^2-6y+9-12x+12=0$

Ecuación de la parábola: $y^2-6y-12x+21=0$

Ejemplo:

Encontramos gráfica y analíticamente la ecuación de la parábola de vértice en el punto $V(2,3)$ y que pasa por el punto $P(0,5)$

$(x-h)^2=4p(y-k)$ $\qquad (x-h)^2=4p(y-k)$

$V\left(\underset{h}{2},\underset{k}{3}\right)$ $\quad (0-2)^2=4p(5-3)$ $\qquad (x-2)^2=4\left(\frac{1}{2}\right)(y-3)$

$P\left(\underset{x}{0},\underset{y}{5}\right)$ $\quad (-2)^2=4p(2)$ $\qquad x^2-4x+4=2y-6$

$4=8p$ $\qquad x^2-4x+4-2y+6=0$

$p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\qquad x^2-4x-2y+10=0$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios tomando en cuenta los datos que se dan:

1) $V(2\,,2);\,F(4\,,2)$
2) $V(3\,,1);\,F(3\,,3)$
3) $V(4\,,0);\,F(1\,,0)$
4) $V(3\,,2);\,F(3\,,-2)$
5) Eje horizontal: $V(2\,,0);\,P(-2\,,3)$
6) Eje vertical: $V(1\,,1);\,P(-1\,,4)$
7) $V(-1\,,-1);\,D\colon y-2=0$
8) $V(3\,,2);\,D\colon x-4=0$
9) $V(-3\,,-3);\,D\colon x+1=0$
10) $V(0\,,-3);\,D\colon y+3=0$
11) Eje vertical: $V(-1\,,2);\,P(-2\,,4)$
12) Eje horizontal: $V(-2\,,2);\,P(2\,,-4)$

4. Ecuación general de la parábola

Las ecuaciones de la parábola se identifican de acuerdo al eje de simetría.

Eje de simetría vertical o paralelo al eje "Y"	Eje de simetría horizontal o paralelo al eje "X"
$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo:

Encontramos la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$.
Encontramos la ecuación canónica:

$$y^2 - 6y = 4x - 17$$
$$y^2 - 6y + 9 = 4x - 17 + 9$$
$$(y-3)^2 = 4x - 8$$
$$(y-3)^2 = 4(x-2)$$

Parámetro: $4p = 4 \implies p = 1$

Vértice: $V(2\,,3)$ Foco: $F(h+p\,,k) = (2+1\,,3) = (3\,,3)$

Directriz: $D: x = h - p \implies D: x = 2 - 1 \implies D: x = 1$

Lado Recto: $LR = 4p \implies LR = 4(1) \implies LR = 4$

Ejemplo:

Encontramos la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$.

Encontramos la ecuación canónica:

$$x^2 - 4x = 8y + 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 8y + 4 + 4$$
$$(x-2)^2 = 8y + 8$$
$$(x-2)^2 = 8(y+1)$$

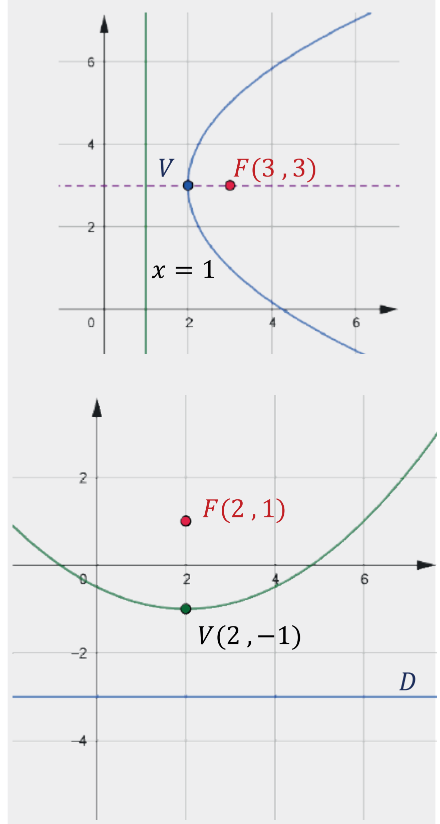
Parámetro: $4p = 8 \implies p = 2$

Vértice: $V(2\,,-1)$ Foco: $F(h\,,k+p) = (2\,,-1+2) = (2\,,1)$

Directriz: $D: y = k - p \implies D: y = -1 - 2 \implies D: y = -3$

Lado Recto: $LR = 4p \implies LR = 4(2) \implies LR = 8$

Gráficas



Deporte parábolico

En el deporte de baloncesto, se puede evidenciar más claramente y con mucha frecuencia la trayectoria parabólica.

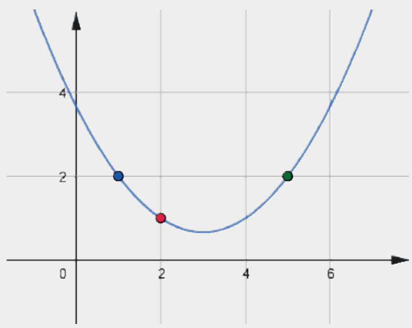
Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

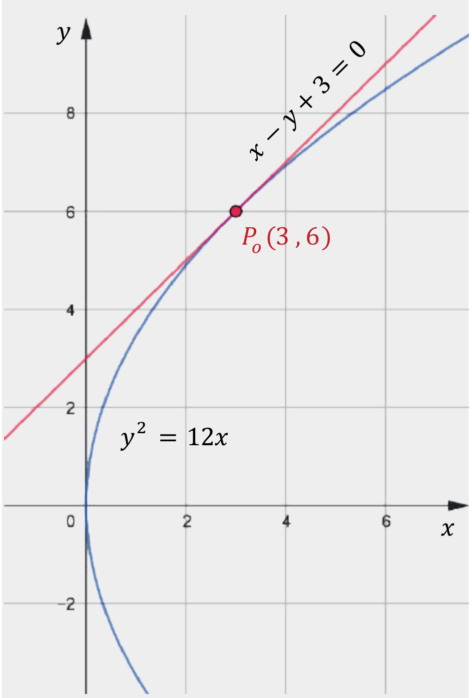
Determinamos la gráfica, la ecuación canónica y los elementos de las siguientes parábolas:

1) $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$
2) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
3) $x^2 - 4x - 4y = 0$
4) $x^2 - 6x + 16y - 23 = 0$
5) $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$
6) $x^2 - 4x - 18y + 40 = 0$
7) $y^2 - 12x - 4y + 88 = 0$
8) $y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$
9) $y^2 - 12x - 6y - 21 = 0$
10) $y^2 - 8x - 6y + 33 = 0$
11) $y^2 - 20x - 6y + 9 = 0$
12) $y^2 + 12x - 12y = 0$

Parábola que pasa por tres puntos



Gráfica



5. Parábola que pasa por tres puntos

Si se conocen tres puntos de la parábola, sea vertical u horizontal, es posible encontrar su ecuación resolviendo un sistema de ecuaciones de 3×3.

Ejemplo:

Hallamos la ecuación general de la parábola de eje focal paralelo al eje "Y", si pasa por los puntos: $A(1,2)$; $B(2,1)$; $C(5,2)$
Eje focal paralelo a "Y": $x^2+Dx+Ey+F=0$

$$A(\underset{x}{1},\underset{y}{2}) \Rightarrow 1^2+D(1)+E(2)+F=0 \Rightarrow D+2E+F=-1$$

$$B(\underset{x}{2},\underset{y}{1}) \Rightarrow 2^2+D(2)+E(1)+F=0 \Rightarrow 2D+E+F=-4$$

$$C(\underset{x}{5},\underset{y}{2}) \Rightarrow 5^2+D(5)+E(2)+F=0 \Rightarrow 5D+2E+F=-25$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos los siguientes valores:
$D=-6$; $E=-3$; $F=11$

La ecuación buscada es:

$$x^2-6x-3y+11=0$$

6. Tangente a una parábola

La recta tangente a una parábola en el punto (x_0, y_0) se determina según la posición de la parábola, esta puede ser:

Horizontal: $$y-y_0=\frac{y_0-k}{2(x_0-h)}(x-x_0)$$

Vertical: $$y-y_0=\frac{2(y_0-k)}{x_0-h}(x-x_0)$$

Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=12x$ en el punto $(3,6)$.

La parábola es horizontal y positiva.
Utilizando la ecuación de la recta tangente a una parábola:

$P_0(\underset{x_0}{3},\underset{y_0}{6})$

$V(\underset{h}{0},\underset{k}{0})$

$p=3$

$$y-y_0=\frac{y_0-k}{2(x_0-h)}(x-x_0)$$

$$y-6=\frac{6-0}{2(3-0)}(x-3)$$

$$y-6=\frac{6}{6}(x-3)$$

$$y-6=x-3$$

Es la recta tangente pedida es: $x-y+3=0$

Actividad

Escribimos la ecuación de la parábola que pasa por los puntos y cuyo eje de simetría es:

1) $\boldsymbol{A(0,0)}$; $\boldsymbol{B(8,-4)}$; $\boldsymbol{C(3,1)}$ y eje focal "$\boldsymbol{X}$".
2) $\boldsymbol{A(-2,1)}$; $\boldsymbol{B(1,2)}$; $\boldsymbol{C(-1,3)}$ y eje focal "$\boldsymbol{X}$".
3) $\boldsymbol{P(3,3)}$; $\boldsymbol{Q(6,5)}$; $\boldsymbol{R(6,-3)}$ y eje focal "$\boldsymbol{X}$".
4) $\boldsymbol{P(4,5)}$; $\boldsymbol{Q(-2,11)}$; $\boldsymbol{R(-4,21)}$ y eje focal "$\boldsymbol{Y}$".

Determinamos la ecuación de la recta que es tangente a la parábola en el punto dado:

5) $x^2=\boldsymbol{8y}$ en el punto $\boldsymbol{P(4,2)}$
6) $x^2-4x-2y+10=0$ en el punto $P(4,5)$
7) $y^2-4x-6y+17=0$ en el punto $P(3,5)$
8) $x^2\boldsymbol{-8x-8y+24=0}$ en el punto $\boldsymbol{P(8,-3)}$

7. Aplicaciones

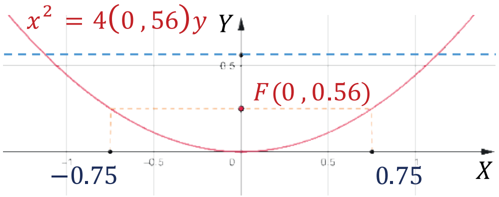
Problema:

Una antena parabólica satelital tiene un diámetro de 1.5 m, su profundidad es de 25 cm, ¿a qué altura se debe colocar el receptor? (habitualmente el receptor de señal lleva las siglas LNB).

Fuente: OpenAI, 2024

Cuando una onda emana del LNB (foco) y choca con la superficie de la antena parabólica, esta se refleja en paralelo con un eje vertical. Así es como emiten señal las antenas parabólicas.

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje de simetría vertical. El diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo es de 25 centímetros. Como la parábola es simétrica, pasará por los puntos $(-0.75\,,0.25)$ y $(0.75\,,0.25)$.
Utilizando la ecuación de parábola vertical con vértice en el origen y reemplazando uno de los puntos en la misma, determinamos el parámetro fijo que representa el lugar en que se debe colocar el LBN.



$$x^2 = 4py \quad \Rightarrow \quad (-0.75)^2 = 4p(0.25)$$
$$\Rightarrow \quad p = 0.56$$

Así, las coordenadas del foco se dan por $(0\,,0.56)$

De este modo, la altura a que se debe colocar el receptor o LNB es de 56 centímetros del vértice de la antena parabólica.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Dos torres sostienen un puente colgante, cuya altura es de 24 metros. Si las torres se separan por 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro del puente?

2) Una antena parabólica tiene 3 m de ancho, en la parte donde está situado su aparato receptor, ¿a qué distancia del fondo de la antena estará colocado el receptor de señal?

VALORACIÓN

Las zonas rurales y muy alejadas de nuestro país, para tener acceso al servicio de internet y de telefonía, recurren a la señal satelital para poderse comunicar con el resto del país y el mundo. Para ello, el gobierno instaló antenas parabólicas satelitales cuyo funcionamiento parte de la forma parabólica que tiene esta y que identificando el foco de la forma parabólica de la antena se provee de señal satelital a toda una comunidad.

Fuente: OpenAI, 2024

- ¿Conoces estas antenas parabólicas y su funcionamiento?
- Conversamos con compañeros de clase sobre la importancia del servicio que nos brindan las antenas parabólicas, ya que mediante estas señales se puede establecer comunicación entre distintas regiones del país y el mundo.

PRODUCCIÓN

- En equipos o grupos, analiza críticamente porque es importante el uso de la parábola para emitir diversos tipos de señales, ¿qué pasaría si utilizamos una circunferencia?
- Tomando en cuenta el análisis anterior, deben indagar por grupos de trabajo comunitario sobre los beneficios de las propiedades de la parábola, su importancia y su aplicabilidad.
- Recortamos del periódico o revistas, objetos productivos, culturales, económicos o tecnológicos donde se utiliza o se ha utilizado la parábola. Por ejemplo, las aguas danzantes del parque de la familia de la ciudad de Cochabamba.
- Investiga de forma individual, ¿por qué el diseño de puentes debe tener forma parabólica, ya sea en la parte superior o inferior? Debate con las investigaciones de tus otros compañeros, compara y analiza.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

LA LÍNEA RECTA

Ecuación punto pendiente

1) Determina gráfica y analíticamente la ecuación de la recta, si pasa por el punto y de pendiente conocidos:

a) $P(2,3);\ m=-1$
b) $Q(-3,0);\ m=2$
c) $R(2,-2);\ m=\frac{3}{4}$
d) $P(-6,-2);\ m=-\frac{2}{5}$
e) $P(-2,-3);\ m=0.25$
f) $P(0,4);\ m=5$

Recta que pasa por dos puntos

2) Encuentra gráfica y analíticamente la ecuación de la recta, si pasa por los puntos dados:

a) $A(3,-3);\ B(0,-2)$
b) $A(5,3);\ B(-2,-4)$
c) $A(4,2);\ B(0,-5)$
d) $A(2,-5);\ B(-4,\ 3)$
e) $A(-3,3);\ B(2,-1)$
f) $M(4,-1);\ N(-2,3)$
g) $P(0,1)$ y $Q(-3,0)$
h) $P(3,-4)$ y $Q(-2,-5)$
i) $R(0,-2)$ y $S(-5,5)$

Recta abscisa y ordenada en el origen

3) Halla gráfica y analíticamente la ecuación de la recta, si tiene abscisa y ordenada en el origen:

a) $a=4;\quad b=2$
b) $a=-2;\quad b=3$
c) $a=3;\quad b=1$
d) $a=5;\quad b=-4$

4) Encuentra gráfica y analíticamente la ecuación de la recta, si tiene ordenada en el origen y su pendiente:

a) $b=2;\quad m=-3$
b) $b=3;\quad m=4$
c) $b=3;\quad m=-\frac{1}{2}$
d) $b=\frac{1}{2};\quad m=\frac{3}{4}$

Ecuación general de la recta

5) Traza la gráfica y encuentra la pendiente y la ordenada de las siguientes rectas:

a) $2x+y-6=0$
b) $x+3y-4=0$
c) $2x+2y-7=0$
d) $x+2y-4=0$
e) $x+y-5=0$
f) $3x-4y-8=0$

APLICACIONES DE LA LÍNEA RECTA

Distancia de un punto a una recta

1) Determina gráfica y analíticamente la distancia del punto a la recta:

a) $P(3,5);\ x+2y-1=0$
b) $P(-2,3);\ 3x-y+5=0$
c) $P(0,4);\ 12x-5y-6=0$
d) $P(3,-2);\ x+3y-3=0$
e) $P(1,1);\ 4x-y-4=0$
f) $P(3,0);\ 3x-4y-4=0$

Distancia entre rectas paralelas

2) Encuentra gráfica y analíticamente la distancia entre las siguientes rectas:

a) $12x+5y-10=0$ y $12x+5y+6=0$
b) $6x+8y-15=0$ y $6x+8y+5=0$
c) $x-2y-4=0$ y $x-2y-7=0$
d) $3x+4y-8=0$ y $3x+4y+9=0$

3) Determina la ecuación de una recta que diste 4 unidades respecto a la recta:

a) $3x-4y+3=0$
b) $6x-8y+9=0$
c) $12x+5y-10=0$

4) En los siguientes ejercicios, encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y la recta.

a) $P(5,4);\ y-2x=0$
b) $P(3,3);\ y-2x+6=0$
c) $P(-3,5);\ x-y=0$
d) $P(-1,-1);\ 2y-x-1=0$
e) $P(0,1);\ x+y-10=0$
f) $P(4,-3);\ x+2y-4=0$
g) $P(-3,2);\ 3x-2y-5=0$
h) $P(8,0);\ x-3y+3=0$

i) Halla la ecuación perpendicular a la recta $4x+y-1=0$ que pase por el punto de intersección de las rectas:

$$2x-5y+3=0;\ x-3y-7=0.$$

LA CIRCUNFERENCIA

Elementos de la circunferencia

1) Halla gráfica y analíticamente el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2+y^2-4=0$
b) $x^2+y^2-16=0$
c) $x^2+y^2-25=0$
d) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$
e) $(x-3)^2+(y+4)^2=16$
f) $(x+1)^2+(y+4)^2=9$
g) $x^2+y^2-4x+2y-1=0$
h) $x^2+y^2+6x+4y-7=0$
i) $x^2+y^2+2x+2y-6=0$

Ecuación canónica

2) Encuentra gráfica y analíticamente la ecuación de la circunferencia, de centro en el origen y radio:

a) $r=2$
b) $r=4$
c) $r=\sqrt{5}$
d) $r=\sqrt{12}$
e) $r=1.5$
f) $r=0.75$
g) $r=\sqrt{17}$
h) $r=\sqrt{21}$

Ecuación ordinaria

3) Determina gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia, si se dan los siguientes datos:

a) $C(3,-2)$ y $r=3$
b) $C(-1,2)$ y $r=5$
c) $C(0,-3)$ y $r=2$
d) $C(-4,-3)$ y $r=4$
e) $C(4,0)$ y $r=\sqrt{3}$
f) $C(2,2)$ y $r=\sqrt{7}$
g) $C(2,3)$ y su diámetro mide 6 unidades.
h) $C(-1,-3)$ y su diámetro mide 8 unidades.

4) Encuentra gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia, si se dan los siguientes datos:

a) $C(2,-2)$ y pasa por el punto $(4,-2)$
b) $C(1,-3)$ y pasa por el punto $(2,3)$
c) $C(0,2)$ y pasa por el punto $(3,-1)$
d) $C(3,0)$ y pasa por el punto $(3,-3)$

5) Halla gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia, si se dan los puntos del diámetro:

a) $A(0,5)$ y $B(1,-1)$
b) $A(3,-2)$ y $B(-3,4)$
c) $P(2,4)$ y $Q(-4,-2)$

6) Determina gráfica y analíticamente la ecuación general de la circunferencia, si se dan los siguientes datos:

a) Centro en $(1,5)$ y tangente al eje "Y".
b) Centro en $(-3,3)$ y tangente al eje "X".

7) Encontramos la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por el punto $P(3\ ,\ 3)$ y es concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2-8x+4y+5=0$

8) Determinar la ecuación de la recta tal que es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-8x-54y+215=0$ en el punto $(3,4)$

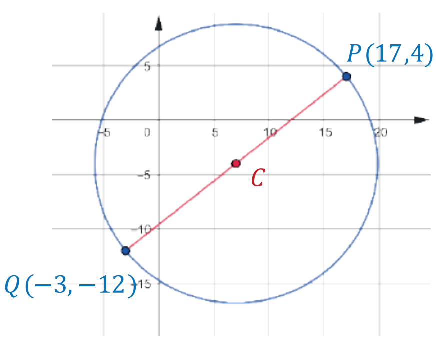
9) Encuentra la distancia entre los centros de las siguientes circunferencias: $x^2+y^2+2x-6y-12=0$ y $(x-3)^2+y^2-11=0$

10) Intersecta gráfica y analíticamente los siguientes lugares geométricos:

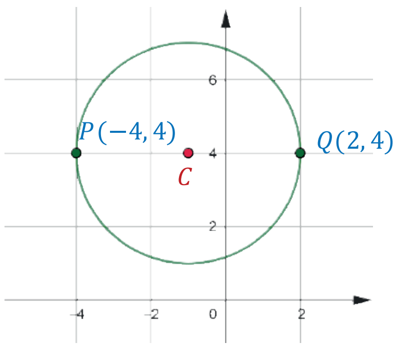
a) $x^2+y^2-8x-2y+8=0;\ x+y-2=0$
b) $x^2+y^2+4x-6y=3;\ x^2+y^2-8x-6y=-21$

11) Encuentra la ecuación general de la circunferencia tomando de referencia las siguientes gráficas:

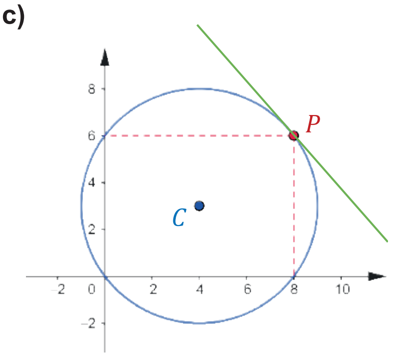
a)



b)



c)



APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

Circunferencia que pasa por tres puntos

1) Encuentra gráfica y analíticamente la ecuación general de las circunferencias que pasa por los puntos:

a) $A(5\,,3)$; $B(6\,,2)$; $C(3\,,-1)$
b) $P(6\,,2)$; $Q(7\,,1)$; $R(8\,,-2)$
c) $A(1\,,-4)$; $B(3\,,-2)$; $C(4\,,\ 5)$
d) $P(-4\,,-3)$; $Q(0\,,0)$; $R(-1\,,-7)$
e) $A(-3\,,2)$; $B(1\,,-4)$; $C(9\,,6)$
f) $P(4\,,0)$; $Q(0\,,3)$; $R(-2\,,-2$
g) $A(3\,,0)$; $B(1\,,4)$; $C(-6\,,-3)$
h) $P(-3\,,3)$; $Q(0\,,0)$; $R(3\,,3)$

Familia de circunferencias

1) Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

a) $C(2\,,2)$; $p = 1, 2, 3$ **b)** $C(0\,,3)$; $p = 1, 2, 3$ **c)** $C(0\,,0)$; $p = 1, 2, 3$

d) Centro en la intersección de las siguientes rectas: $x - 4y + 3 = 0$; $2x + 3y - 5 = 0$ y $p = 1, 2, 3$

e) Concéntricas con la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ y $p = 1, 2, 3$

Tangente a una circunferencia

1) Halla gráfica y analíticamente la ecuación de las siguientes circunferencias:

a) $C(1\,,2)$ y tangente a la recta $2x - 3y + 4 = 0$
b) $C(-1\,,3)$ y tangente a la recta $x - y + 5 = 0$
c) $C(-2\,,3)$ y tangente a la recta $4x + 3y + 4 = 0$
d) $C(2\,,4)$ y tangente a la recta $3x - 4y - 5 = 0$
e) $C(2\,,1)$ y tangente a la recta $x - 2y + 5 = 0$
f) $C(0\,,2)$ y tangente a la recta $x + y - 2 = 0$

2) Calculemos la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2\,,3)$ y $Q(-1\,,1)$, además su centro está situado en la recta $x - 3y - 1 = 0$

3) Encontremos la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1\,,-4)$ y $Q(5\,,\ 2)$ tal que su centro está situado en la recta $x - 2y + 9 = 0$

4) Determinemos la ecuación general de la circunferencia de radio 5 que sea concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

5) Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado $\square ABCD$ donde $A(5\,,0)$ y $B(5\,,12)$ estando C a la derecha de B.

Problemas de aplicación

Resuelve gráfica y analíticamente los siguientes problemas:

1) Halla el valor de k para que la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 10y - k = 0$ tenga un radio igual a 5.

2) Encuentra el valor de k para que la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ tenga un radio igual a 7.

3) Determina la ecuación general de la circunferencia cuyo centro se encuentra en la intersección de las rectas $x + 2y - 4 = 0$ y $3x + y - 7 = 0$, además pasa por el punto donde se cruzan las rectas $3x + 2y + 8 = 0$ y $x + y + 3 = 0$

4) El centro de investigaciones sismológicas detectó un sismo con un epicentro ubicado a 4 km al este y 3 km al sur del centro. El área afectada tiene un radio de 5 km. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que delimita esta área y que afectó al centro de investigación?

5) Los pobladores y las autoridades acordaron construir un Centro de Salud pero que tengan la misma distancia a sus comunidades. La comunidad P está a 4 km al este y 5 km al sur del centro de salud, la comunidad Q está a 6 km al norte y la comunidad R a 7 km al este y 2 km al norte. ¿En qué lugar se construye el centro de salud?, ¿qué distancia recorrerán los comunarios, en línea recta, para llegar al centro de salud?

6) Un avión sobrevuela la torre de control esperando respuesta para poder aterrizar. Determina el radio entre la torre y el avión, obtener el perímetro del movimiento del avión si vuela con una trayectoria $x^2+y^2-6x-8y-11=0$ y determina las coordenadas de la torre.

7) Se notificó una fuga de agua con origen en una zona a 10 km al este y 12 km al sur del centro de la estación central de una ciudad. El agua inundó la zona en un radio de 4 km a la redonda. ¿Cuál es la ecuación del área inundada? ¿Fue afectada la zona que está a 6 km al este y 8 km al sur de la estación?

LA PARÁBOLA

Elementos de la parábola

1) Graficar y hallar los elementos de las siguientes parábolas:

a) $x^2 = 8y$
b) $y^2 = 4x$
c) $x^2 - 2y = 0$
d) $(x-2)^2 = 8(y+3)$
e) $(x+3)^2 = -4(y-4)$
f) $(x-1)^2 = 12(y-2)$
g) $(y+2)^2=4(x-2)$
h) $(y-3)^2 = -8(x+3)$
i) $(y-5)^2 = 12(x+1)$

Ecuación principal u ordinaria de la parábola

2) Encuentra la ecuación general de la parábola si se conocen los siguientes datos:

a) $V(0,0); F(4,0)$
b) $V(0,0); D: x+3=0$
c) $F(-1,0); D: y+4=0$
d) $V(5,2); F(5,6)$
e) $V(3,2); D: y-5=0$
f) $F(-2,4); D: x-2=0$
g) $V(2,3); F(2,0)$
h) $V(-1,-1); D: y-3=0$
i) $F(1,2); D: x+3=0$
j) Vértice en $(2,3)$ y que pasa por el punto $(4,5)$ de eje paralelo a "Y".
k) Vértice en $(1,2)$ y que pasa por el punto $(-3,4)$ de eje paralelo a "X".

3) Transforma las siguientes ecuaciones generales a su forma principal:

a) $x^2 + 2x + y - 8 = 0$
b) $x^2 - 6x + 12y - 15 = 0$
c) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
d) $y^2 + 16x - 8y + 48 = 0$
e) $y^2 + 12x - 4y - 44 = 0$
f) $y^2 - 12x - 2y + 1 = 0$
g) Encuentra la ecuación general de la parábola cuyo lado recto une los puntos: $(3,3)$ y $(3,-5)$
h) Halla la ecuación general de la parábola si el foco se encuentra en la intersección de las rectas: $2x+3y-5=0$ y $4x-y+11=0$, si su vértice se halla a tres unidades a la izquierda del foco.
i) Determina la ecuación general de la parábola de vértice en el punto $V(4,2)$ y lado recto de 8 unidades, su eje es horizontal.
j) Halla la ecuación de la parábola de vértice en $(2,7)$ y foco en el centro de la circunferencia $9x^2 + 9y^2 - 72x - 126y + 36 = 0$
k) Encuentra los puntos de intersección de la parábola $x^2 - 6x - y + 11 = 0$ y la recta $x - y + 1 = 0$

Parábola que pasa por tres puntos

4) Determina la ecuación general si la parábola pasa por los siguientes puntos:

a) $A(3,3); B(6,5); C(6,-3)$
b) $P(3,-4); Q(-3,-4); R(0,0)$
c) $A(10,9); B(-2,3); C(6,3)$
d) $P(0,5); Q(-2,2); R(2,10)$
e) $A(6,1); B(16,6); C(-2,3)$
f) $P(1,0); Q(3,0); R(2,-1)$

Recta tangente a una parábola

5) Encuentra la recta tangente a la parábola en el punto dado:

a) $y^2 + 5x + 5 = 0; P(-6,5)$
b) $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0; P(4,1)$
c) $y^2 + 4x - 6y + 1 = 0; P(-2,-1)$
d) $x^2 - 10x - 16y - 23 = 0; P(1,-2)$

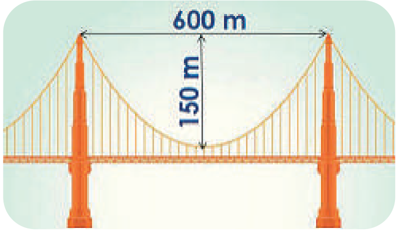
Problemas de aplicación

Analiza y resuelve los siguientes problemas:

6) Un arco parabólico tiene una altura de 9 metros, su base 12 metros. Hallar la ecuación y la altura de los puntos del arco situados a 4 metros del centro.

7) Dos niños están separados por 5 metros uno del otro, sujetan una cuerda a un metro de altura. Obtener la altura de la cuerda a 1,5 metros del centro de la parábola que forma la cuerda.

8) La distancia entre dos soportes verticales de un puente colgante es de 600 m y la altura de un pilar es de 150 m, como se muestra en la figura de la derecha. Si el cable tiene forma parabólica, obtener su ecuación y la altura del cable a 50 m del centro. (El vértice es el origen de coordenadas)



LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

PRÁCTICA

Mario es físico de profesión y trabaja en el planetario Max Schreier de la Universidad Mayor de San Andrés.

Su pasión son las ciencias y el estudio de los planetas lo condujo a obtener el diploma de Física y especializarse en Astronomía, pues uno de sus sueños es trabajar en la NASA.

En estos últimos meses, por las noches accede al telescopio del planetario, para observar el movimiento de los planetas, asteroides, cometas y otros cuerpos celestes, ha verificado que su desplazamiento alrededor de una órbita sigue una trayectoria elíptica con respecto a otros cuerpos mayores.

Fuente: https://www.culture.ru/events/4410794/kosmicheskoe-puteshestvie?institute=49094

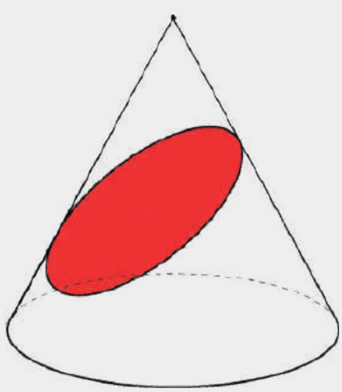
Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la ley que determina la trayectoria elíptica de los planetas?
- ¿Cómo se expresa el movimiento elíptico en la mecánica y la electricidad?
- ¿Será que el Sol también presenta una trayectoria elíptica alrededor de otra estrella?

TEORÍA

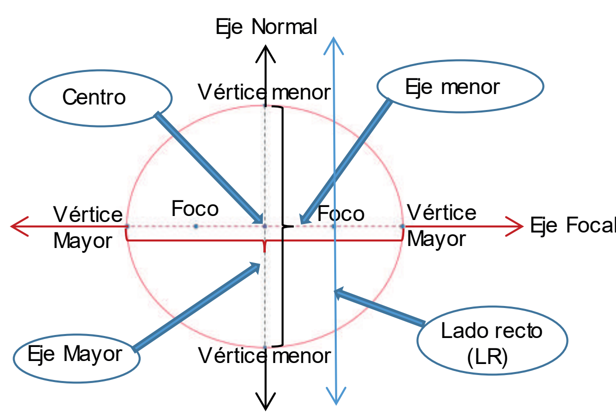
Representación cónica



Es fácil apreciar visualmente a las secciones cónicas. Estas resultan de los diferentes cortes que se realizan a un cono. En este ejemplo vemos un corte transversal, cuya región sombreada aparece una región conocida para nosotros: la elipse.

1. Elipse

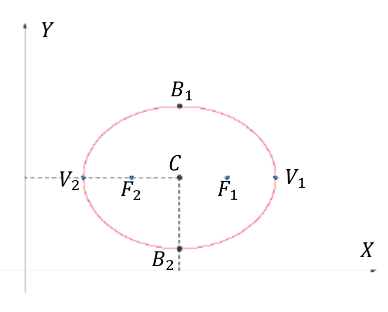
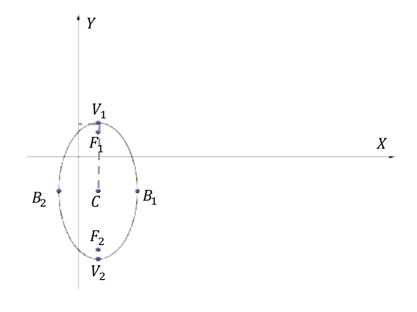
Es el lugar geométrico que describe a los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos distintos del plano (focos) es constante.



- Los ejes de simetría son el eje focal o principal y el eje normal o secundario.
- Los vértices mayores V y V' en los que el eje focal y la elipse se intersectan.
- Los vértices menores B y B' en los que el eje normal y la elipse se intersectan.
- Los focos son los puntos fijos F y F' ubicados en el eje mayor. La distancia entre los focos es 2c.
- El centro C, es el punto medio del segmento que une a los focos. La distancia c del centro a cualquiera de los focos se denomina **distancia focal**.
- El eje mayor es el segmento sobre el eje focal, comprendido entre los vértices mayores. Su longitud es igual a $2a$. El semieje mayor es el segmento que une el centro con uno de los vértices mayores.
- El eje **menor** es el segmento sobre el eje normal comprendido entre los vértices menores. Su longitud es igual a 2b. El semieje menor es el segmento que une el centro con uno de los vértices menores.
- La **excentricidad** "e" es el cociente entre la distancia focal y la longitud del semieje mayor.

a) Ecuaciones

Dependiendo de la posición del eje focal en el plano, presentamos las ecuaciones en la siguiente tabla:

EJE HORIZONTAL O EJE DE LAS ABSCISAS	EJE VERTICAL O EJE DE LAS ORDENADAS
EJE FOCAL PARALELO AL EJE X	EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y
	
Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Centro: $C(h,k)$	Centro: $C(h,k)$
Focos: $F_1\,(h+c,k)$ $F_2\,(h-k,k)$	Focos: $F_1\,(h, k+c)$ $F_2\,(h, k-c)$
Vértices Mayores: $V_1\,(h+a,k)$ $V_2\,(h-a,k)$	Vértices Mayores: $V_1\,(h,k+a)$ $V_2\,(h,k-a)$
Vértices Menores: $B_1\,(h\ ,k+b)$ $B_2\,(h,k-b)$	Vértices Menores: $B_1\,(h+b,k)$ $B_2\,(h-b,k)$
Directrices: $x=h\pm\frac{a^2}{c}$	Directrices: $x=k\pm\frac{a^2}{c}$
Relación de distancias: $c^2=a^2-b^2$	$a^2=b^2+c^2$ $b^2=a^2-c^2$
Ecuación General:	$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$
Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $e<1$
Lado Recto:	$LR=\frac{2b^2}{a}$
Eje mayor: $2a$	Eje menor: 2b
Semieje mayor: a	Semieje menor: b

Ejemplo:

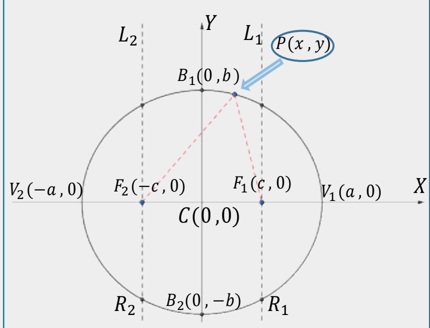
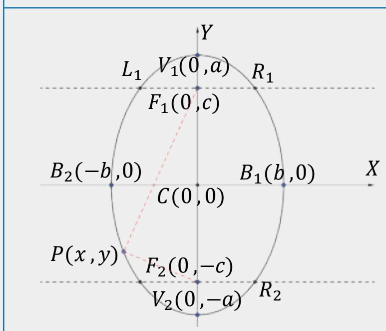
Hallamos la ecuación de la elipse de eje focal paralelo al eje X, cuyos vértices mayores están en $V_1\,(8,3)$ y $V_2\,(-8,3)$, focos en $F_1\,(4,3)$ y $F_2(4,3)$. La gráfica tiene eje focal paralelo al eje X.
El centro viene dado por

$$C(h,k)=\left(\frac{-8+8}{2},\frac{3+3}{2}\right)=(0,3);h=0 \text{ y } k=3$$

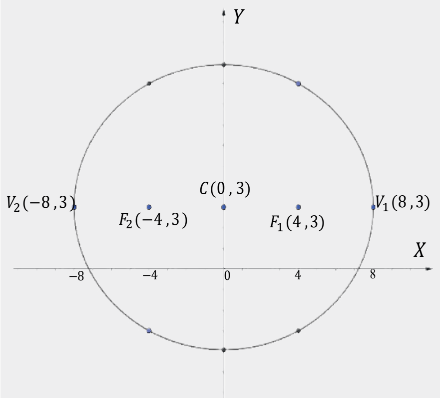
El semieje mayor: $h+a=0+a=8\Longrightarrow a=8$
Valor de c: $h+c=0+c=4\Longrightarrow c=4$
Relación de distancias:
$b^2=a^2-c^2=64-16=48$
Ecuación:

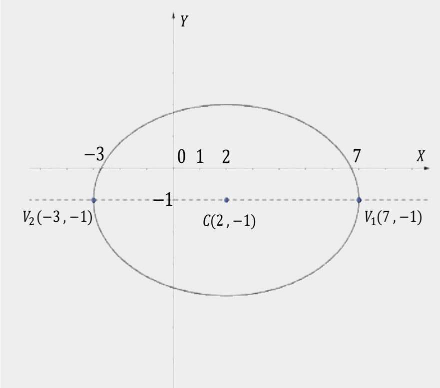
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=\frac{x^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{48}$$

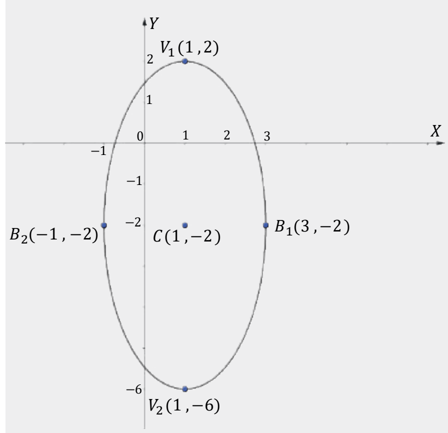
Elipse con centro en el origen

EJE HORIZONTAL O EJE DE LAS ABSCISAS	
EJE FOCAL PARALELO AL EJE X	
	
Ecuación:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Centro:	$C(0,0)$
Focos:	$F_1\,(c,0)$ $F_2\,(c,0)$
Vértices Mayores:	$V_1(a,0)$ $V_2(a,0)$
Vértices Menores:	$B_1(a,0)$ $B_2(a,0)$
Directrices:	$x=\pm\frac{a^2}{c}$
EJE HORIZONTAL O EJE DE LAS ABSCISAS	
EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y	
	
Ecuación:	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Centro:	$C(0,0)$
Focos:	$F_1\,(0,c)$ $F_2\,(0,-c)$
Vértices Mayores:	$V_1(0,a)$ $V_2(0,-a)$
Vértices Menores:	$B_1(b,0)$ $B_2(-b,0)$
Directrices:	$x=\pm\frac{a^2}{c}$

Gráficas de los ejemplos







Ejemplo:

Para encontrar la ecuación general, multiplicacmos a la suma de las fracciones por el M.C.M :

$$\frac{x^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{48}=1 \quad // \cdot 192 \Longrightarrow 3x^2+4(y-3)^2=192$$

$$3x^2+4(y^2-6y+9)-192=0$$

$$3x^2+4y^2-24y-156=0$$

Excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow e=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Lado Recto:

$$LR=\frac{2b^2}{a}\Longrightarrow LR=12$$

Directrices:

$$x=h\pm\frac{a^2}{c}\Longrightarrow x=0\pm\frac{64}{4}=\pm 16$$

Ejemplo:

Encontramos la ecuación de la elipse de centro en $(2,-1)$, de eje focal paralelo al eje X, vértices mayores en $V_1(7,-1)$ y $V_2(-3,-1)$ con excentricidad $e=\frac{4}{5}$.

Semieje mayor:

$$h+a=2+a\Longrightarrow a=5$$

Valor de c:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{5}=\frac{4}{5}\Longrightarrow c=4$$

Relación de distancias:

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9\Longrightarrow b^2=9$$

Ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Ejemplo:

Dada la ecuación de la siguiente elipse:

$$4x^2+y^2-8x+4y-8=0$$

Empleamos propiedades de productos notables, asociando los términos semejantes para x e y, sumando tambien 16 a ambos lados de la igualdad para obtener la ecuación de la elipse:

$$4x^2+y^2-8x+4y-8=0$$

$$4x^2+y^2-8x+4y+8=16$$

$$(4x^2-8x+4)+(y^2+4y+4)=16$$

$$4(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=16/\ \div 16$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

El centro es $C(h,k)=C(1,-2)$, $a=4$ y $b=-2$. Luego los puntos de la elipse V_1, V_2, B_1, B_2 (vértices mayores y menores) son:

$V_1\ (h,k+a)=(1,-2+4)=(1,2)$

$V_2\ (h,k-a)=(1,-2-4)=(1,-6)$

$B_1(h+b,k)=(3,-2)$ y $B_2(h-b,k)=(-1,-2)$.

Actividad

Encontramos las ecuaciones de las siguientes elipses y mostremos sus gráficas:

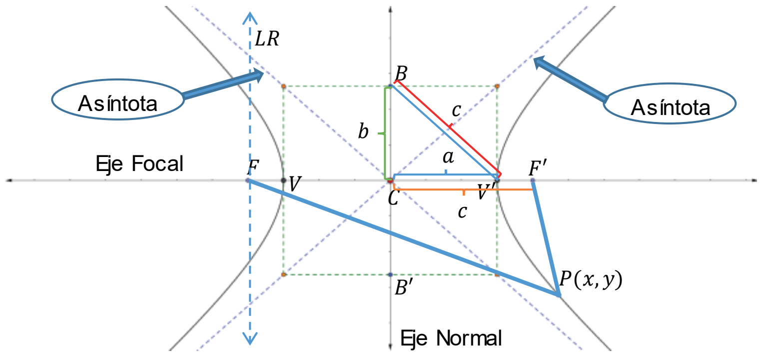
1) Vértices en $V_1(9,6), V_2(-1,6)$ y Focos en $F_1(7,6), F_2(7,6)$
2) Vértices en $V_1(6,1), V_2\ (-2,1)$ y Focos en $F_1(7,6), F_2(7,6)$
3) Focos en $F_1(5,2), F_2(3,2)$ y excentricidad de un tercio.
4) Centro en $(4,-1)$ y uno de sus focos es $(1,-1)$ y pasa por el punto $(8,0)$.
5) Centro en $(4,2)$ y uno de sus focos es $(1,-1)$.
6) Dada la elipse $4x^2+y^2-16x+6y-75=0$, encontrar el centro, vértices, focos, excentricidad y el Lado Recto de la elipse.

2. Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos en el plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos F y F' es constante.

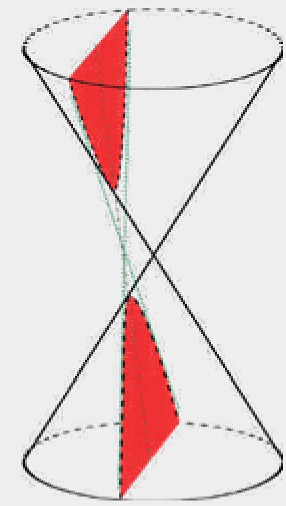
a) Elementos

Los elementos de la hipérbola son los siguientes:



- Los focos, son los puntos fijos F y F' de la hipérbola.
- El centro $\boldsymbol{C}$, es el punto medio del segmento que une a los focos. La distancia del centro a cada uno se denomina distancia focal y mide "c".
- El eje focal es la recta que contiene a los focos. La distancia entre los focos mide $2c$. El segmento VV' es el eje real o transversal y mide $2a$. El segmento CV es el semieje real y mide a.
- El eje normal es la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. El segmento BB' se llama eje imaginario o conjugado y mide $2b$. El segmento CB es el semieje imaginario y mide b.
- Los vértices reales $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V'}$ son los puntos de intersección de la hipérbola y el eje focal. Los puntos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ se denominan vértices imaginarios.
- Las asíntotas son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo determinado por los segmentos $\boldsymbol{VV'}$ y $\boldsymbol{BB'}$.
- El lado recto LR es la cuerda perpendicular al eje focal, que pasa por cualquiera de los focos.
- La excentricidad $\boldsymbol{e}$ es el cociente entre la distancia focal y la longitud del semieje real.

Representación cónica



En este caso si efectuamos un corte transversal vertical a la figura, la región sombreada resultante es una hipérbola.

Ejemplo:

Hallamos y listamos los elementos de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

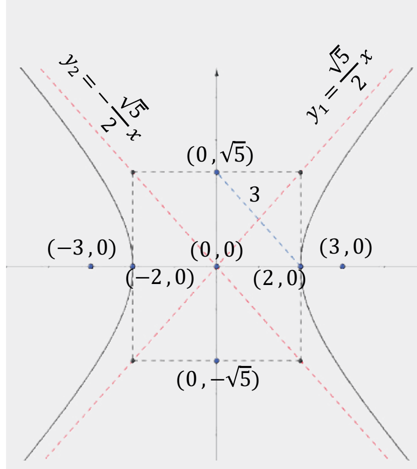
a partir de su gráfica en la derecha.

Solución:

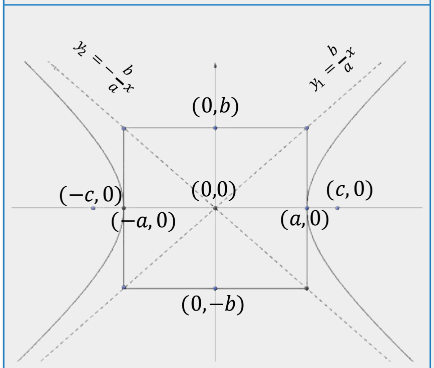
- Los focos están en $F(-3\,,0)$ y $F'(3\,,0)$.
- Su centro está en $C(0\,,0)$.
- Los valores de a, b y c son 2, $\sqrt{5}$ y 3, respectivamente. Por tanto el eje real mide $2\cdot 2=4$ y el eje imaginario mide $2\sqrt{5}$.
- Los vértices reales están en $V(-2\,,0)$ y $V'(2\,,0)$.
- Los vértices imaginarios están en $B(0\,,\sqrt{5})$ y $B(0\,,-\sqrt{5})$.
- Las rectas $y_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$; $y_2=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ son las asíntotas.
- El valor de la excentricidad es

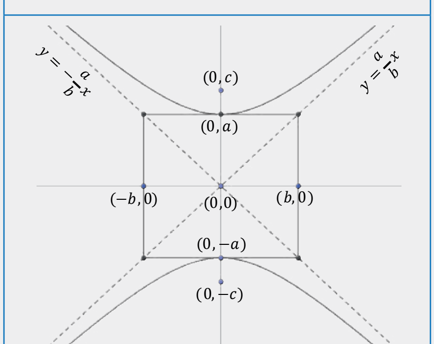
$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

Gráfica del ejemplo



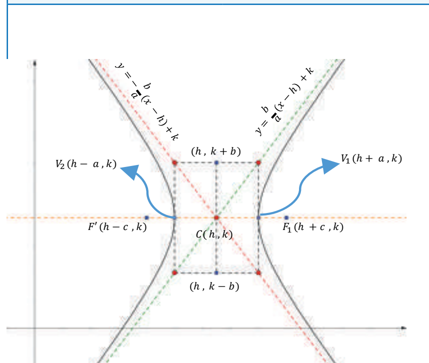
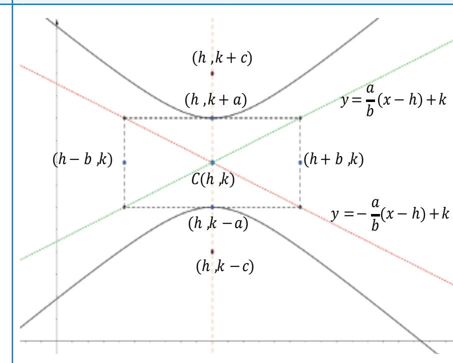
Gráfica del ejemplo

EJE FOCAL PARALELO AL EJE X
EJE REAL HORIZONTAL

Ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Centro: $C(0,0)$
Focos: $F_1\,(c,0)$ $F_2\,(c,0)$
Vértices Mayores: $V_1(a,0)$ $V_2(a,0)$
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$
Directrices: $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$

EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y
EJE REAL VERTICAL

Ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
Centro: $C(0\,,0)$
Focos: $F_1\,(0\,,c)$ $F_2\,(0\,,-c)$
Vértices Mayores: $V_1(0\,,a)$ $V_2(0\,,-a)$
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{a}{b}x$
Directrices: $y=\pm\dfrac{a^2}{c}$

Ejemplo:

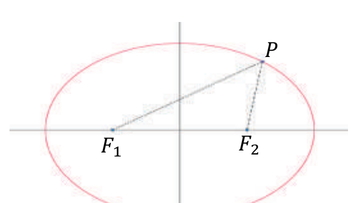
Dependen de la posición en el plano cartesiano:

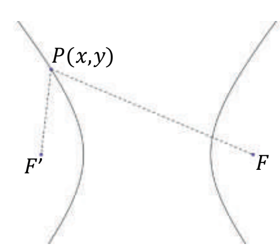
<table>
<tr><th colspan="2">EJE FOCAL PARALELO AL EJE X</th><th colspan="2">EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y</th></tr>
<tr><td colspan="2">EJE REAL HORIZONTAL</td><td colspan="2">EJE REAL VERTICAL</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$</td><td colspan="2">Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}-\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Centro: $C(h\,,k)$</td><td colspan="2">Centro: $C(h\,,k)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Focos: $F_1(h+c,k)$ $F_2(h-c,k)$</td><td colspan="2">Focos: $F_1(h,k+c)$ $F_2(h,k-c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vértices Mayores: $V_1\,(h+a\,,k)$ $V_2\,(h-a\,,k)$</td><td colspan="2">Vértices Mayores: $V_1\,(h\,,k+a)$ $V_2\,(h\,,k-a)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asíntotas: $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$</td><td colspan="2">Asíntotas: $y-k=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Directrices: $x=h\pm\dfrac{a^2}{c}$</td><td colspan="2">Directrices: $x=k\pm\dfrac{a^2}{c}$</td></tr>
<tr><td>Relación de distancias:</td><td>$c^2=a^2+b^2$</td><td>$b^2=c^2-a^2$</td><td>$a^2=c^2-b^2$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ecuación General: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$ $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $e<1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Lado Recto: $LR=\dfrac{2b^2}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eje mayor: $2a$</td><td colspan="2">Eje menor: 2b</td></tr>
<tr><td colspan="2">Semieje mayor: a</td><td colspan="2">Semieje menor: b</td></tr>
</table>

b) Propiedades

La hipérbola tiene una propiedad focal definitoria que es tan simple como el de la elipse. Sabiendo que una elipse tiene dos focos y la forma que se puede definir como el conjunto de puntos en un plano cuyas distancias a estos dos focos es constante, para el caso de la hipérbola, también tenemos dos focos y cada punto P de la hipérbola es tal que la diferencia de las distancias de P a cada uno de los focos es constante, es decir:

$$|d_1-d_2|=C$$





Ejemplo:

Encontramos la ecuación de la hipérbola con focos en (-1 , 3), (5 , 3) con excentricidad de 1.5 calculando el valor de c:
$F_1(-1\,,3)$; $F(5\,,3)$ donde:

$$c=\frac{5-(-1)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Luego las coordenadas del centro $C(h\,,k)$ es:

$$C\left(\frac{-1+5}{2},\frac{3+3}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)=(2{,}3)$$

Cuyos valores son $h=2$ y $k=3$.
Utilizando el valor de la excentricidad:

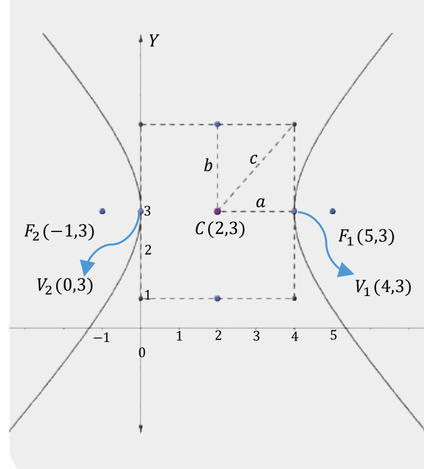
$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$$

Así, $b^2=c^2-a^2=9-4=5\therefore b^2=5$
Reemplazando los valores:

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$$

Gráfica

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$$



c) Recta tangente

Para encontrar la recta tangente a la hipérbola, debemos tomar en cuenta la posición de la hipérbola en el plano cartesiano:
La ecuación de la recta tangente a la hipérbola con eje focal paralelo al eje Y, en cualquier punto $P_0(x_0\,,y_0)$ de la curva es:

$$b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$$

La ecuación de la recta tangente a la hipérbola con eje focal paralelo al eje X, en cualquier punto $P_0\,(x_0, y_0)$ de la curva es:

$$b^2y_0y-a^2x_0x=a^2b^2$$

Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2-y^2=5$ en el punto $P(3\,,2)$.
Se procede a llevar la ecuación de la hipérbola a su forma conocida:

$$x^2-y^2=5 \qquad /\div 5$$

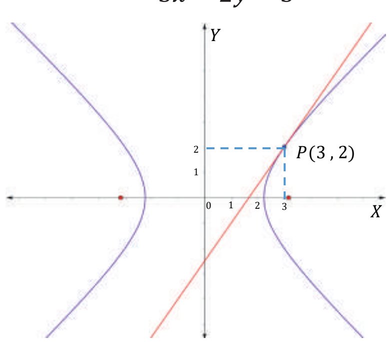
$$\therefore\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$$

De donde obtenemos los valores de $a^2=3$ y $b^2=5$. La hipérbola tiene su eje focal paralelo al eje X, luego:

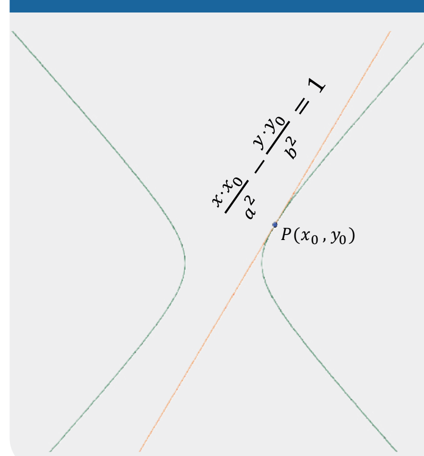
$$b^2x_0x-a^2y^0y=a^2b^2 \quad\Longrightarrow\quad 5\cdot3\cdot x-5\cdot(2)\cdot y=5\cdot5$$

$$15x-10y=25$$

$$\therefore\quad 3x-2y=5$$



Recta tangente

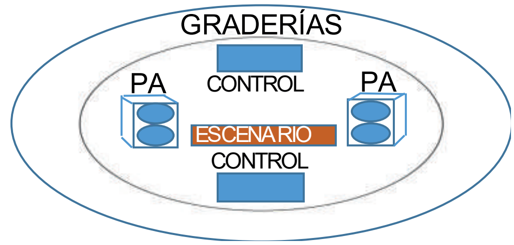


Actividad

Mostramos gráfica y analíticamente la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

1) Vértices en $V_1(9\,,6)$, $V_2(1\,,6)$ y Focos en $F_1(10\,,6)$, $F_2(0\,,6)$
2) Vértices en $V_1(4\,,2)$; $V_2(2\,,2)$ y excentricidad 2.
3) Focos en $F_1(5\,,2)$; $F_2(3\,,2)$ y excentricidad 1.5.
4) Vértices en $V_1(4\,,-1)$; $V_2(4\,,3)$ y pasa por el punto $(3\,,4)$
5) La hipérbola $36x^2-64y^2-36x-448y-1351$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología



Ejemplo:

Un ingeniero de sonido trabaja en una sala de conciertos y necesita calcular la posición óptima de los altavoces para que el sonido se distribuya uniformemente en todo el espacio. La sala tiene forma de elipse, con las dimensiones principales dadas por los semiejes mayores y menores.

El semieje mayor de la elipse mide 40 metros y el semieje menor mide 30 metros. Los dos focos de la elipse son los puntos donde se colocarán los altavoces. Los asistentes estarán ubicados en cualquier punto de la elipse y el sonido debe llegar a todos los puntos con la misma intensidad.

- ¿Cuáles son las coordenadas de los focos de la elipse?
- ¿Cuál es la distancia total que el sonido recorrerá desde un altavoz, pasando por cualquier punto de la elipse, hasta el otro altavoz?
- Describe cómo el diseño elíptico de la sala garantiza que el sonido se refleje y distribuya adecuadamente en todo el espacio.

Solución:

1). **Coordenadas de los focos,** aquí, $a = 20$ metros (semieje mayor) y $b = 15$ metros (semieje menor).Se calcula c: $c^{20} = 20^2 - 15^2 = 400 - 225 = 175 \Longrightarrow c = \sqrt{175} \approx 13.23$. Por tanto, los focos se encuentran en $(13.23\,,0)$ y $(-13.23\,,0)$.

2). **Distancia total del sonido,** para cualquier punto $P(x,y)$ en la elipse, la suma de las distancias desde P hasta cada uno de los focos es constante igual a $2a$; es decir $2{\cdot}20 = 40$ metros.

3). **Distribución del sonido,** el diseño elíptico asegura que cualquier sonido emitido desde uno de los focos se refleje en las paredes y llegue al otro foco, lo que significa que el sonido se distribuye uniformemente a lo largo de toda la elipse. Esto garantiza que todos los asistentes, independientemente de su ubicación, experimenten una calidad de sonido similar.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) La entrada y el techo de un túnel de forma semi elíptica tiene 20 metros de altura en su punto más alto y 12 metros de ancho. Si las paredes laterales tienen una altura de 10 metros, encontramos la altura del techo a 5 metros de cualquier pared.

2) Un arco en forma de media elipse tiene 60 metros de ancho y 25 metros de altura en el centro. Determina la altura del arco a 15 metros del extremo derecho.

VALORACIÓN

Las elipses e hipérbolas tienen aplicaciones en el mundo real en muchos campos, como la astronomía, la física, la ingeniería y la arquitectura. La eficacia del diseño de torres de refrigeración hiperbólicas es especialmente interesante. Las torres de refrigeración se utilizan para transferir el calor residual a la atmósfera y, a menudo, se destacan por su capacidad para generar energía de forma eficiente. Debido a su forma hiperbólica, estas estructuras son capaces de resistir vientos extremos y requieren menos material que otras estructuras de su tamaño y resistencia. Las primeras torres hiperbólicas se diseñaron en 1914 y tenían 35 metros de altura. En la actualidad, las torres de refrigeración más altas se encuentran en Francia, con una altura notable de 170 metros.

- Investiga el funcionamiento de estas torres hiperbólicas.
- ¿En qué otras situaciones de la vida cotidiana se observan inmersa la elipse o hipérbola?

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

Sabemos que algunos movimientos como la de los planetas alrededor del sol, los átomos alrededor de su núcleo son elípticos, o como en el caso de los barcos de forma hiperbólica en el sistema de navegación LORAN, etc.

Leemos y realizamos las actividades planteadas:

- Cada planeta gira a una velocidad que depende de la distancia al Sol, ¿Cuál es la velocidad de cada planeta? ¿Por qué se dice que cuando están más lejos del Sol, más despacio gira o al revés?
- ¿Qué determina el movimiento de los electrones alrededor del núcleo?
- Buscamos mas ejemplos de objetos o seres vivos que poseen movimientos elípticos o hiperbólicos.

TEORÍA DE CONJUNTOS

PRÁCTICA

Carla es maestra de primaria. Para fomentar la integración entre sus estudiantes, decide realizar un juego llamado La *matemática nos rodea*. Su objetivo es despertar la curiosidad de sus alumnos, convertir las tareas cotidianas en juegos entretenidos y mostrarles que la matemática está en todas partes y nos ayuda de muchas formas a lo largo del día.

Ella les pide a sus estudiantes que traigan diferentes tipos de frutas para el recreo saludable.

Al día siguiente, todos colocaron sus frutas sobre sus pupitres. Inmediatamente, Carla les pidió que realizaran las siguientes actividades:

- Agruparse según el color de la fruta, el tamaño, la semejanza y la forma.

Fuente: https://www.bing.com/images/blob?bcid=Ts.UAG0MneUHHp8PFJ48J9h0RgqE.....30

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué tienen en común todas las frutas que trajeron los estudiantes?
- ¿Qué semejanzas y diferencias podemos identificar en la agrupación de las frutas?
- ¿Este tipo de actividades ayuda al desarrollo de conocimientos en el área de matemáticas?
- ¿Qué tipo de valores se pueden desarrollar al jugar con la matemática que nos rodea?

TEORÍA

1. Concepto, elementos y relación de pertenencia

Es una reunión o colección de objetos con características comunes, ya sean números, personas, letras, etc. Los objetos pertenecientes al conjunto reciben el nombre de elementos o miembros del conjunto.

Notación

Los conjuntos se representan con el propio lenguaje de la matemática con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas, encerrados entre llaves. También se utilizan otros símbolos que restringen a los elementos que puedan o no pertenecer a un conjunto, como ser:

$/$: Para expresar "tal que".

$\in$: Expresa que un elemento pertenece a un conjunto.

$<$: Para expresar "menor que".

$>$: Para expresar "mayor que".

$\leq$: Para expresar "menor o igual que".

$\geq$: Para expresar "mayor o igual que".

$\subset$: Expresa que un conjunto "está incluido en otro conjunto".

$\exists$: Para expresar que "existe algún elemento del conjunto".

$\forall$: Expresa que "para todos los elementos del conjunto".

2. Notación de conjuntos numéricos

Las notaciones de los conjuntos numéricos más conocidos son:

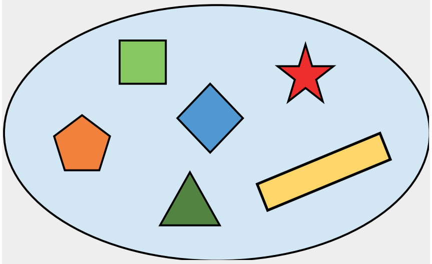
Números Naturales: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$

Números Enteros $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

Números Racionales $\mathbb{Q} = \{\dots,-\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{4},\frac{2}{3},1,\frac{5}{4},\dots\}$

Números Irracionales $\mathbb{I} = \overline{\mathbb{Q}} = \{\dots,-\pi,-\sqrt{3},\sqrt{5},e,\dots\}$

Conjunto



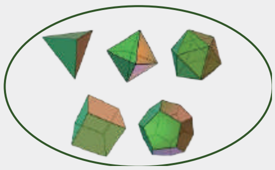
La idea de agrupar objetos de la misma naturaleza para clasificarlos en "colecciones" o "conjuntos" es parte de la vida diaria de los seres humanos.

Por ejemplo, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de árboles en un terreno, el conjunto de ropa en un negocio de venta al público, el conjunto de electrodomésticos en una cocina, etc. En todos estos ejemplos, se utiliza la palabra conjunto como una colección de objetos.

Por tanto, el concepto de conjunto, está referido a reunir o agrupar personas, animales, plantas o cosas, para estudiar o analizar las relaciones que se pueden dar con dichos grupos.

Conjuntos por comprensión y por extensión

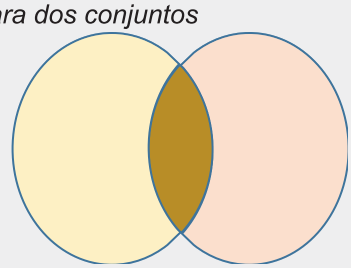
Por comprensión:
$A = \{x/x \text{ es un sólido platónico}\}$



Por extensión:
$A =$ 

Diagramas de Venn

Para dos conjuntos



Para tres conjuntos

Para cuatro conjuntos

2. Representación de un conjunto

Los conjuntos son comúnmente escritos por extensión y por comprensión.

a) Por extensión

Si se exponen cada uno de los elementos que constituyen el conjunto:

Ejemplo:

Los siguientes conjuntos están escritos por extensión:

Números:	$A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
Letras:	$B=\{a,e,i,o,u\}$
Objetos:	$C=\{lápiz, cuaderno, regla, compás\}$
Animales:	$D=\{gato, león, tigre, puma, pantera\}$

b) Por comprensión

Se dice que un conjunto está determinado por comprensión si y solo si se menciona la propiedad que caracteriza a todos sus elementos.

Ejemplo:

Los siguientes conjuntos están escritos por comprensión:

Números:	$A = \{m \in \mathbb{Z} / -2 \leq m \leq 5\}$
Letras:	$B = \{x/ \ x \text{ es una vocal}\}$
Objetos:	$C = \{x/ \ x \text{ es material escolar}\}$
Animales:	$D = \{x/ \ x \text{ es un felino}\}$

Ejemplo:

Mostramos cada uno de los elementos de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x/ \ x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\}$$

La propiedad del conjunto A, dice que están en el mismo los números enteros entre −1 y 3. Por tanto $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

$$B = \{x/ \ x \in \mathbb{Z}, 3(x-4) + 2 = x + 4\}$$

La propiedad del conjunto B describe a sus elementos como los números enteros que son solución de la ecuación lineal:

$$3(x-4) + 2 = x + 4$$

Resolviendo:

$$3x - 12 + 2 = x + 4$$
$$3x - 10 = x + 4$$
$$3x - x = 10 + 4$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Despejando obtenemos $x = 7$, es decir el conjunto $B = \{7\}$ tiene un solo elemento.

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - x - 6 = 0\}$$

De nuevo, la propiedad del conjunto C, dice que pertenecen a C los números naturales que son solución de la ecuación cuadrática:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Cuyas soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$ (se deja la verificación al lector), pero −2 no es un número natural, por tanto $C = \{3\}$.

3. Diagramas de Venn

Es una relación gráfica que utiliza círculos solapados para mostrar en forma gráfica la relación lógica entre dos o más conjuntos que contienen elementos, resaltando la igualdad o diferencia con sus elementos. Los diagramas de Venn, también denominados "diagramas de conjunto" o "diagramas lógicos", se usan ampliamente en las áreas de matemática, estadística, lógica, lingüística, informática y negocios. Los beneficios de utilizar los diagramas de Venn en situaciones o problemáticas de toda índole, es que nos permite organizar la información visualmente, comparar conjuntos de datos, nos ayuda a razonar lógicamente en la planificación de la resolución de problemas.

4. Conjuntos Especiales

Son aquellos conjuntos que se caracterizan por el número de elementos, entre ellos podemos mencionar: conjunto unitario, vacío y universo.

a) Conjunto Vacío

Es aquel conjunto que carece de elementos y se denota por ∅.

Ejemplo:

Los siguientes conjuntos no tienen elementos

- $A = \{x/x\, es\ impar\ y\ múltiplo\ de\ 2\} = \emptyset$
- $B = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\} = \emptyset$

b) Conjunto Unitario

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplo:

Los siguientes conjuntos son unitarios

- $C = \{x/x\ es\ múltiplo\ de\ 7\ menor\ que\ 10\} = \{7\}$
- $D = \{x \in \mathbb{R}/3x + 6 = 0\} = \{-2\}$

c) Conjunto Universo (Universo de Discurso o Conjunto Universal)

Es el conjunto que contiene a todos los elementos del espacio muestral o contiene a todos los objetos matemáticos en estudio, se denota por U.

Ejemplo:

Sea el conjunto universal $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, determinamos los elementos de $A=\{x \in U/-2 \leq x \leq 3\}$ y $B = \{x \in U/\ 0 \leq x \leq 7\}$:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

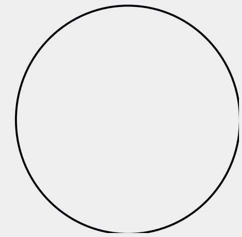
Ejemplo:

Sea $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunto universo, dados los subconjuntos por comprensión, escribimos los mismos por extensión:

$C = \{x/x^2 \in U\}$	$C = \{-3, -2, -1,0,1,2,3\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z}/-2 \leq x \leq 4\}$	$D = \{-1,0,1,2,3,4\}$
$E = \{x \in \mathbb{N}/x^2 - 2x - 48 = 0\}$	$E = \{8\}$
$F = \{x \in U/2x \in U\}$	$F = \{-2,0,2,4,6,8\}$
$G = \{x \in U/2x - 1 \in U\}$	$G = \{-3, -1,1,3,5,7,9\}$
$H = \{x \in U/12^n\ ; n \in \mathbb{N}\}$	$H = \emptyset$
$I = \{x \in U/7x \in U\}$	$I = \{0,7\}$
$J = \{x \in U/9x \in U\}$	$J = \{0,9\}$
$K = \{3^x\ /\ x \in U\}$	$K = \left\{\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 9, 27, 3^2, 3^3, \ldots, 3^9\right\}$

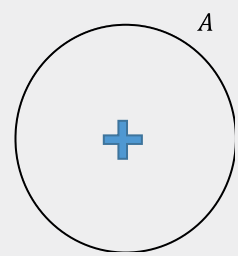
Vacío, unitario y universo

Conjunto Vacío



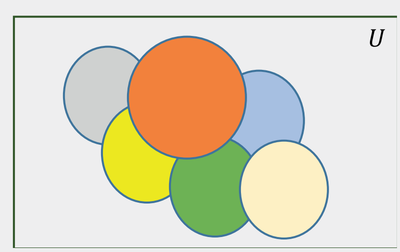
$A = \emptyset$

Conjunto Unitario



$A = \{ + \}$

Conjunto Universo "U"



Actividad

Hallamos y mostramos los elementos de los siguientes conjuntos:

1) $A=\{x/x\ es\ un\ mes\ del\ año\ que\ solo\ tenga\ 31\ días\}$

2) $B=\{x/x\ es\ un\ jugador\ de\ fútbol\ que\ fué\ convocado\ al\ menos\ 4\ veces\ en\ su\ selección\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{R}/x^2 = x\}$

4) $D = \{x \in \mathbb{Z}/(x+1)^2 = 4\}$

Sea el conjunto universo $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Encontremos por extensión:

5) $E = \{x \in U/ -1 \leq x \leq 5\}$

6) $F = \{x \in U/(x+1)^2 = 4\}$

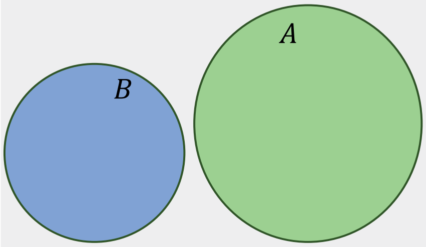
Ahora para el conjunto universal $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

7) $I = \{x \in U/\ 0 < x < 6\}$

8) $J = \{x \in U/x^2 + 2x - 80 = 0\}$

9) $L=\{x \in U/3x + 56 = 77\}$

No inclusión de conjuntos

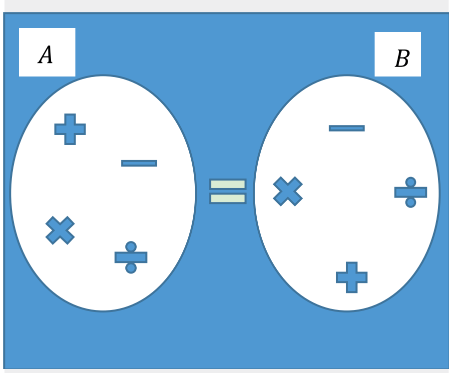


$A \not\subset B$ (A no está incluido en B y viceversa)

Bandera de Bolivia

Si tomamos el conjunto universal siendo los colores de nuestra bandera ($U = \{rojo, amarillo, verde\}$), entonces los conjuntos formados por los colores de las banderas de los departamentos del Beni, La Paz y Oruro están contenidos en U.

Igualdad de conjuntos



Todos los elementos de A son los mismos que los elementos de B.

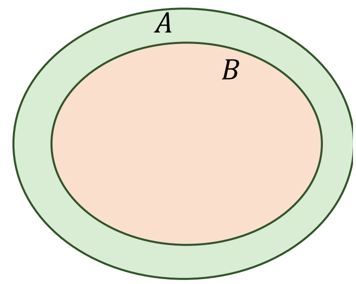
5. Relación entre conjuntos

La relación entre conjuntos y los elementos que lo conforman, decimos que pertenece o no pertenece a dicho conjunto. Se sabe que el símbolo "∈" (pertenencia) se utiliza para relacionar un elemento con un conjunto, pero existe otro símbolo " ⊂ " (subconjunto) que relaciona dos conjuntos definidos, uno incluido dentro el otro en un mismo universo. Entre las relaciones más importantes entre conjuntos tenemos a:

a) Inclusión de conjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B es también elemento de A. Simbólicamente se representa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in B \Longrightarrow x \in A)}$$



Observaciones:

- $\boldsymbol{A \subset A}$ "Todo conjunto está incluido en sí mismo"
- $\emptyset \subset \boldsymbol{A}$ "El conjunto vacío está incluido en A, donde A es cualquier conjunto"
- Si $\boldsymbol{A \subset B}$ y $\boldsymbol{B \subset C}$, entonces $\boldsymbol{A \subset C}$ "Transitividad de la inclusión de conjuntos"

Ejemplo:

Sean los conjuntos:
$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 11\}$; $C=\{4,5,6\}$
Afirmamos que $C \subset B \subset A$, en efecto hagamos las siguientes observaciones:

$4 \in C$ y también $4 \in B$
$5 \in C$ y también $5 \in B$
$6 \in C$ y también $6 \in B$

Como 4,5 y 6 son todos los elementos de C, entonces $C \subset B$.
De manera similar verificamos que $C \subset A$ (ejercicio para el lector).
Ahora los elementos $3,4,5,6,9$ de B, también forman parte de A, pero $11 \in B$ no cumple esta condición. Esto es suficiente para concluir que B "no está contenido en A" (esto se simboliza $B \not\subset A$).
Por tanto:

$C \subset A$
$C \subset B$
$B \not\subset A$

b) Igualdad de Conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si solo si uno está contenido en el otro y viceversa, en símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x/ \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

En lenguaje de inclusiones, también es equivalente (y a la vez más práctico):

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z}/x^2 - 3x + 2 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N}/x < 3\}$, ¿será que A es igual a B?
Respondemos a la pregunta escribiendo ambos conjuntos por extensión:
Para A, resolvemos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ factorizando e igualando a cero:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0 \Longrightarrow (x_1 = 2 \vee x_2 = 1)$$

Los valores 1, 2 son soluciones de la ecuación, es decir elementos de A.
Observamos que $B = \{1, 2\}$ y enseguida vemos que $A = B$.

c) Conjunto de partes

Denominado también conjunto potencia, se entiende por el conjunto de partes de A, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A y se denota por $P(A)$. En símbolos:

$$P(A) = \{X / X \subset A\}$$

O bien:

$$X \in P(A) \Leftrightarrow x \in A$$

El número de elementos del conjunto de partes se puede determinar con la siguiente relación:

$n[P(A)] = 2^n$

donde $n(A)$ simboliza la cantidad de elementos del conjunto A.

Ejemplo:

Determinamos el conjunto de partes de $A = \{2,3\}$.
La cantidad de elementos de A es 2, por tanto $n(P(A)) = 2^2 = 4$
El conjunto de partes de A constará de los siguientes elementos:

$$P(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \emptyset\}$$

(Observemos que $\{2\}, \{3\}, \{2,3\}$ y $\emptyset$ son subconjuntos de A).

Ejemplo:

Hallamos el conjunto de partes del conjunto A, cuyos elementos son aderezos para acompañar: mayonesa, mostaza y kétchup.

$P(A)$ = {∅, {mayonesa}, {mostaza}, {kétchup}, {mayonesa, kétchup}, {mostaza, kétchup}, {mayonesa, mostaza}, {mayonesa, mostaza, kétchup}}

Ejemplo:

Del ejemplo anterior, si una persona desea acompañar su comida (un emparedado por ejemplo) con alguna de las tres salsas, $P(A)$ indica $n(P(A)) = 2^3 = 8$ posibles opciones para hacer esto:

- Sin acompañamiento (representado por el conjunto vacío).
- Sólo con mayonesa (mostaza o kétchup).
- Sólo con mayonesa y kétchup ("mostaza y kétchup" o "mayonesa y mostaza").
- Con los tres (representado por el conjunto A).

Fuente: OpenAI, 2024

Ejemplo:

Para $A=\{a, b, c, d\}$, tenemos que $n(A) = 4$, es decir podemos formar 16 subconjuntos, con los elementos de A (y su cantidad es $n(P(A)) = 2^4 = 16$).

$$P(A) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}; \{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}; \{a, b, c, d\}\}$$

Conjunto de partes

Diagrama de Venn para:
$P(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \emptyset\}$

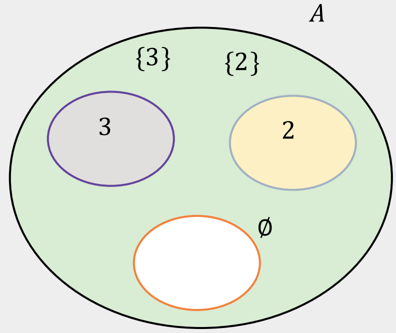


Diagrama de Venn para el *conjunto* $P(A)$ *donde:*

$A = \{$*mayonesa, mostaza, kétchup*$\}$

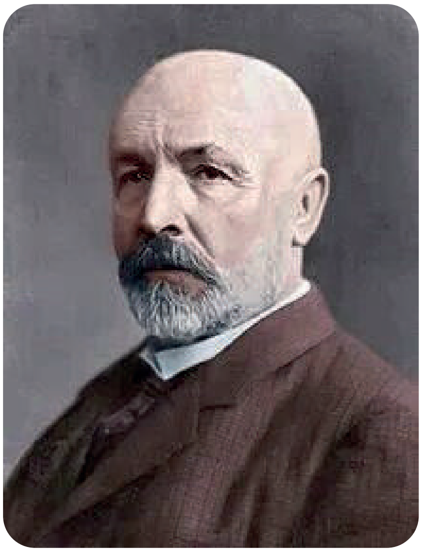
Notemos que, visto de abajo hacia arriba, los elementos de $P(A)$ que son conjuntos, cumplen una relación de contención, hasta alcanzar el conjunto más grande, en este caso A mismo.

Actividad

Buscamos y escribimos el conjunto de partes de los siguientes conjuntos:

1)	$A = \{1,2,3\}$	**4)**	$B = \{a, e, i\}$	**7)**	$C = \{2,4,6,8\}$
2)	$D = \{x \in \mathbb{N} / -2 \leq x \leq 2\}$	**5)**	$E = \{x \in \mathbb{Z} / 1 < x < 3\}$	**8)**	$F = \{x \in \mathbb{Q} / 3x^2 - x = 0\}$
3)	$G = \{a, 1\}$	**6)**	$H = \{1,2,3,4\}$	**9)**	$A = \{a, e, i, o, u\}$

VALORACIÓN



Georg Cantor

Fuente: https://es.wikibrief.org/wiki/Georg_Cantor

La teoría de conjuntos es una de las ramas de la matemática y de la lógica que se dedica a estudiar las características de los conjuntos y de las operaciones que se pueden hacer entre ellos, esta teoría se debe al matemático alemán George Cantor. La idea de infinito había sido de una profunda reflexión desde la época de los griegos (450 a. C). Con el trabajo de Cantor, la teoría de conjuntos se estableció sobre una base matemática adecuada. Los primeros trabajos de Cantor estuvieron relacionados con la teoría de números, de 1867 a 1871. En la actualidad se siguen manteniendo estos conceptos y se los relaciona en distintos campos, con un criterio matemático.

Realizamos las siguientes actividades

- Investigamos en qué consiste el tratado de las 6 partes sobre la teoría de conjuntos.
- Investigamos acerca de las paradojas mostrando ejemplos.
- Investigamos la paradoja de Russell.
- Respondemos a la siguiente pregunta: ¿Cómo influye la teoría de los conjuntos en las ciencias actuales?
- ¿En qué situaciones cotidianas se aplica la teoría de conjuntos?

PRODUCCIÓN

MATEMÁTICA RECREATIVA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

En las dos imágenes de abajo, reemplazamos las letras por los números del 1 al 9 sin repetir, de modo que sumando tres letras nos den las cifras de las intersecciones.

Diagrama de Venn 1

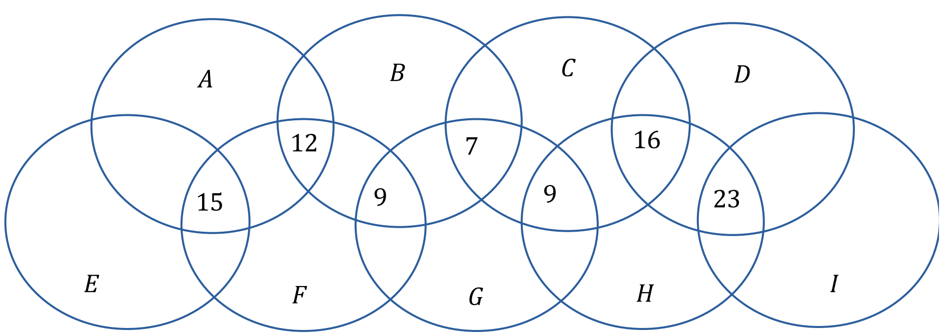
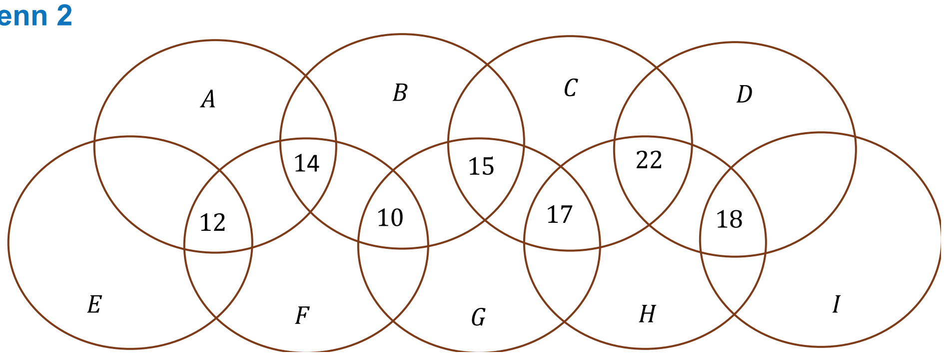


Diagrama de Venn 2



OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

PRÁCTICA

https://www.kyloo.net/dwn-14/resep-es-jeruk-peras-untuk-jualan.html

Estefany, una joven universitaria y emprendedora con la venta de jugos para pagar sus estudios de la universidad. Ella ha innovado la venta de jugos de naranja, mandarina, pomelo, sandía, piña, mango, frutilla, papaya y uva, ya que ella hace combinaciones con ciertas hierbas (menta, hierba buena, boldo y cedrón), también utiliza frutos secos (maní, almendra, nuez y soya) que le dan un toque de más sabor cuando se mezclan con agua o leche (natural o deslactosada). La gente acude al puesto de ventas porque los jugos son muy saludables, que en muchos de los casos no necesitan azúcar. Entre los sabores preferidos que más se consumen: frutilla, mango, sandía y piña. Ella ofrece en vasos de tres tipos de tamaño, grande, mediano y pequeño, acompañado de una bombilla para su consumo. Estas combinaciones para realizar los jugos de sabores le han llevado a que su negocio sea uno de los visitados, pero no solo en la mañana, sino también por la tarde, le han dado utilidades para poder seguir estudiando por la noche.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas

- ¿Qué te parece este tipo de emprendimientos?
- ¿Es beneficioso para la economía de Estefany?
- ¿Qué otro tipo de emprendimiento realizarías para generar ingresos?

TEORÍA

1. Operaciones de conjuntos

Nos permiten realizar operaciones con otros conjuntos para obtener otro conjunto. Entre las operaciones con conjuntos tenemos a la unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento.

a) Unión

Es la operación que nos permite unir dos o más conjuntos para formar otro conjunto que contendrá a todos los elementos de ambos, pero sin que se repitan.

En símbolos, dados A y B conjuntos:

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x/\ x \in A \vee x \in B\}}$$

Su caracterización por elementos es:

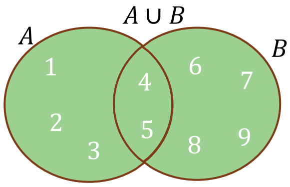
$$\boldsymbol{x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B}$$

Ejemplo:

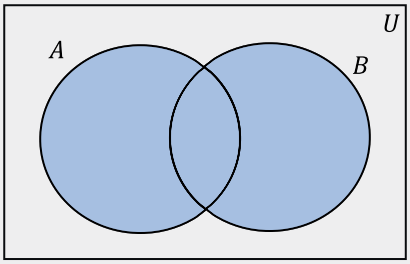
Hallamos la unión de los conjuntos $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ coloreando el diagrama de Venn a la derecha:

En símbolos:

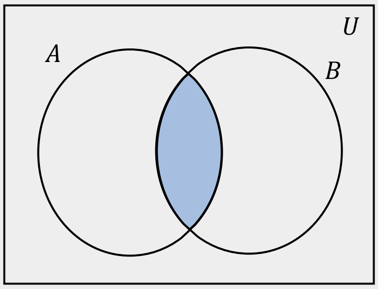
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



Unión



Intersección



b) Intersección

Es la operación que nos permite formar un nuevo conjunto, sólo con aquellos elementos en común de los conjuntos originales involucrados. En símbolos, dados A y B conjuntos:

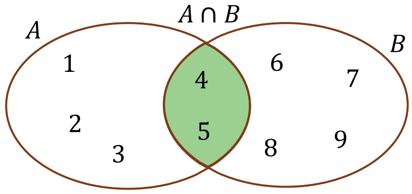
$$\boldsymbol{A \cap B = \{x/\ x \in A \wedge x \in B\}}$$

Su caracterización por elementos es:

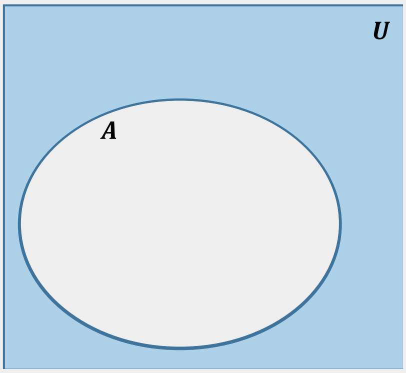
$$\boldsymbol{x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B}$$

Ejemplo:

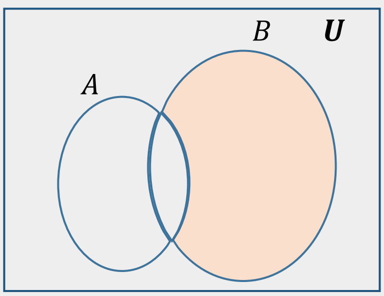
Hallamos la intersección de los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ siendo la parte sombreada del diagrama de Venn. En símbolos: $A \cap B = \{4,5\}$

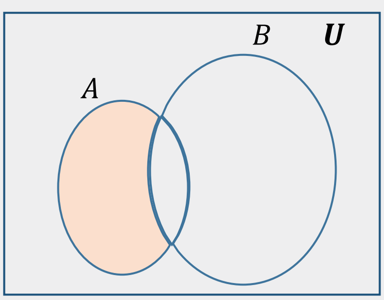


Complemento

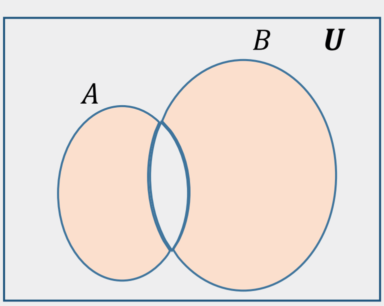


Diferencia





Diferencia simétrica

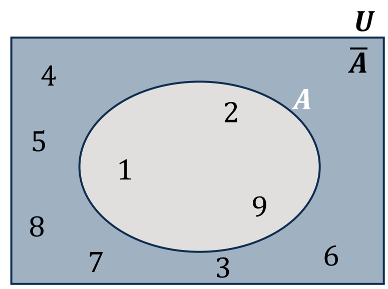


c) Complemento

Para $A \subset U$, el complemento de A es aquel conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen al conjunto A y se denota como $\bar{A}$.
En símbolos: $A \subset U \Longrightarrow \bar{A} = \{x \, / \, x \notin A\}$
Su caracterización por elementos es: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Ejemplo:

Dado el conjunto universal U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y A={1, 2, 9} $\subset U$, el diagrama de Venn correspondiente a $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ es:



d) Diferencia

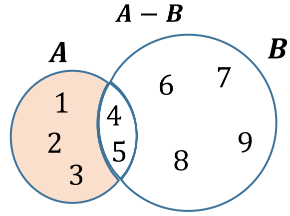
La diferencia del conjunto A respecto del conjunto B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B. En símbolos:

$$A - B = \{x/ \, x \in A \wedge x \notin B\}$$

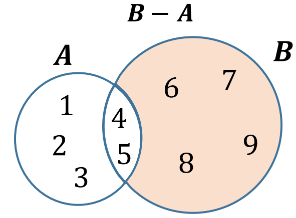
Ejemplo:

Determinamos las diferencias de los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, coloreando los diagramas de Venn como sigue:

$\boldsymbol{A - B}$



$\boldsymbol{B - A}$



e) Diferencia Simétrica

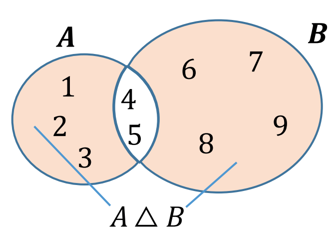
La diferencia simétrica de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B y por los elementos de B que no pertenecen al conjunto A. En símbolos:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Ejemplo:

Dados A, B como en los ejemplos anteriores, el diagrama de Venn que representa a la diferencia simétrica es la unión de las diferencias $A - B$ y $B - A$:

$$A \triangle B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$



Actividad

Escribimos como conjuntos los elementos de los siguientes, para A, B definidos en U:

1) $A \cup B = \{\boldsymbol{x}/ \, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$
2) $B - A = \{\boldsymbol{x}/ \, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$
3) $\bar{B} =$
4) $\overline{A - B} =$
5) $A \cap B =$
6) $A \triangle B =$
7) $\overline{A \cup B} =$
8) $\overline{B - A} =$
9) $A - B =$
10) $\bar{A} =$
11) $\overline{A \cap B} =$
12) $\overline{A \triangle B} =$

2. Álgebra de conjuntos

a) Leyes de operaciones de conjuntos

Las igualdades básicas del álgebra de conjuntos se denominan leyes o propiedades, éstas pueden usarse para demostrar igualdades más complejas.

Ejemplo:

Demostrar que $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

En efecto:

$(A - B) \cup (A \cap B)$	$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$	Complemento
	$= A \cap (B \cup \bar{B})$	Distributiva
	$= A \cap U$	$(B \cup \bar{B}) = U$
	$= A$	Identidad

Ejemplo:

Probar que $A \cup (B - A) = A \cup B$

En efecto:

$A \cup (B - A)$	$= A \cup (B - A)$	Complemento
	$= A \cup (B \cap \bar{A})$	Complemento
	$= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$	Absorción
	$= (A \cup B) \cap U$	Distributiva
	$= A \cup B$	Identidad

Ejemplo:

Simplificamos utilizando igualdades de conjuntos:

$$A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\} &= A \cup \{[B \cap (B \cup A)] \cap [A \cup (A \cap B)]\} \\ &= A \cup (B \cap A) \\ &= A \cup (A \cap B) \\ &= A \end{aligned}$$

Aplicando varias veces la propiedad de absorción.

$\therefore A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\} = A$

3. Cardinalidad de conjuntos

Dado un conjunto finito A, el número de elementos de este conjunto se llama número cardinal de A, se denota por $n(A)$ y se llama cardinal de A o número de elementos de A.

Ejemplos:

Si $n(A) = 50, n(B) = 30$ y $n(A \cap B) = 20$:

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 30 - 20 = 60$
- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 20 = 30$
- $n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 20 = 10$
- $n(A \triangle B) = n(A - B) + n(B - A) = 30 + 10 = 40$

Propiedades

IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
CONMUTATIVA	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
	$A \triangle B = B \triangle A$
LEY DE DE MORGAN	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
IDENTIDAD	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap U = A$
	$A \triangle \emptyset = A$
ABSORCIÓN	$A \cup U = U$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
COMPLEMENTO	$A \cup \bar{A} = U$
	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
	$U - A = \bar{A}$
	$A - B = A \cap \bar{B}$
	$\bar{\bar{A}} = A$
	$\bar{U} = \emptyset$
	$\bar{\emptyset} = U$
ASOCIATIVA	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
DISTRIBUTIVA	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$	

Propiedades

Sean A, B, C *tres conjuntos, entonces*

- $n(A - B) = n(A) + n(A \cap B)$
- $n(A \triangle B) = n(A - B) + n(B - A)$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
- $n(\emptyset) = 0$ y $n(A) \geq 0$.
- Si $A \cap B = \emptyset, n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Actividad

Con las propiedades de los conjuntos, demostramos las siguientes igualdades, para A, B y C definidos en U:

1) $B \cap (A - B) = \emptyset$

2) $(\bar{A} \cup A) \cap B = B$

3) $(B - A) \cap B = B - A$

4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

5) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$

6) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

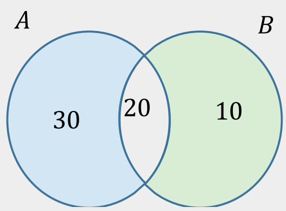
7) $A - (B \cap A) = A - B$

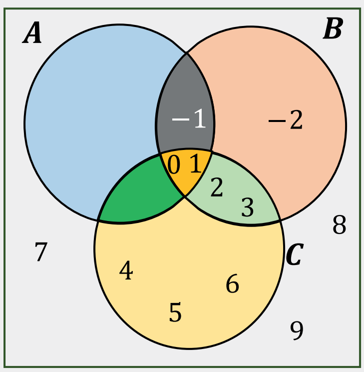
8) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup B) = B$

9) $(\bar{A} - B) \cap (B - A) = \bar{A}$

Para encontrar cardinalidades de conjuntos pequeños, es conveniente escribirlos por extensión.

Diagramas de Venn





Ejemplos:

$A=\{x\in U/\,x^3=x\}$
$B=\{x\in U/\,x^2\in U\}$
$C=\{x\in U/\,0\leq x<7\}$

donde $U=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Escribimos por extensión cada uno de ellos:

$A=\{-1,0,1\}\Longrightarrow n(A)=3$
$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}\ \Longrightarrow\ n(B)=6$
$C=\{0,1,2,3,4,5,6\}\ \Longrightarrow\ n(C)=7$

Ejemplos:

Calculamos las cardinalidades de las diversas operaciones entre A y B:

$\bar{B}\ =\{4,5,6,7,8,9\}\Longrightarrow n(\bar{B})\ =6$

$\bar{C}\ =\{-2,-1,7,8,9\}\Longrightarrow n(\bar{C})=5$

Ahora calculamos

$A\cap B=\{-1,0,1\}\Longrightarrow n(A\cap B)=3$
$A\cap C=\{0,1\}\Longrightarrow n(A\cap C)=2$
$B\cap C=\{0,1,2,3\}\Longrightarrow n(B\cap C)=4$
$\bar{B}\cap\bar{C}\ =\{7,8,9\}\Longrightarrow n(\bar{B}\cap\bar{C})=3$
$A\cap B\cap C=\{0,1\}\Longrightarrow n(A\cap B\cap C)=2$

Con lo anterior, podemos calcular:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=3-3=0$
$n(A\triangle B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-2\cdot n(A\cap B)$
$=3+6-2\cdot 3$
$=3+6-6$
$=3$

4. Aplicación de la teoría de conjuntos en problemas cotidianos

La idea de agrupar objetos de la misma naturaleza para clasificarlos en “colecciones” o “conjuntos” es parte de la vida diaria de los seres humanos. Entre algunas de las aplicaciones, está la organización y el cálculo de elementos cuando se tienen una o más respuestas para una serie de opciones.

Ejemplo:

En una encuesta realizada a una clase se obtuvo el siguiente reporte:
22 estudiantes practican baloncesto, 32 estudiantes practican fútbol y 7 estudiantes practican los dos deportes, ¿cuántos estudiantes fueron encuestados sabiendo que todos optaron por un deporte al menos?

Solución:

Denotemos con B al conjunto de todos los estudiantes que practican baloncesto y con F al conjunto de todos los estudiantes que practican fútbol, entonces se tienen las siguientes interpretaciones:
"$B\cup F$" representa a los estudiantes que practican al menos fútbol o baloncesto.
“$B\cap F$” representa a los estudiantes que practican fútbol y baloncesto.
El problema se resuelve calculando $n(B\cup F)$, sabiendo que $n(B)=22$ y $n(F)=32$

$$n(B\cup F)=n(B)+n(F)-n(B\cap F)=22+32-7=47$$

Respuesta:

Como todos optaron por escoger algún deporte, fueron 47 estudiantes los encuestados.

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

1) Si $n(A\triangle B)=10$ y $n(A\cup B)=25$, ¿cuántos elementos tiene B?

Sean las siguientes cantidades: $n(A)=8, n(B)=12, n(C)=10,\ n(A\cap B)=3, n(A\cap C)=8, n(B\cap C)=4$ y $n(A\cap B\cap C)=1$. Hallamos el valor de :

2) $n(A\cup B\cup C)=$

3) $n(A\triangle B)=$

Ejemplo:

En un hospital, 400 pacientes fueron diagnosticados, de los cuales 220 tienen hipertensión y 160 tienen colesterol alto. Si 100 pacientes tienen ambas condiciones, ¿cuántos pacientes tienen solo hipertensión o solo colesterol alto?

Solución:

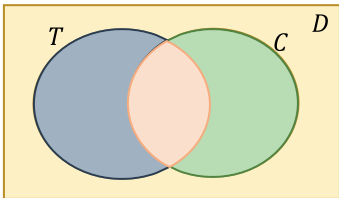
Sean los conjuntos:

D: pacientes diagnosticados

(nuestro universo de discurso).

T: pacientes que tienen hipertensión.

C: pacientes que tienen colesterol alto.



El número de pacientes diagnosticados con ambas condiciones: $n(C \cap T) = 100$
El número de pacientes que tienen sólo hipertensión: $n(T - C) = n(T) - n(T \cap C) = 220 - 100 = 120$
El número de pacientes que tienen sólo el colesterol alto: $n(C - T) = n(C) - n(T \cap C) = 160 - 100 = 60$
Como se quiere encontrar los pacientes que tienen solo hipertensión o sólo colesterol alto, utilizamos la siguiente fórmula:

$$n[(T - C) \cup (C - T)] = n(T - C) + n(C - T) = 120 + 60 = 180$$

sabiendo que $n[(T - C) \cap (C - T)] = 0$, pues $(T - C) \cap (C - T) = \emptyset$.

Respuesta:

Luego hay 180 pacientes diagnosticados sólo con hipertensión o con colesterol alto.

VALORACIÓN

La teoría de conjuntos es una herramienta poderosa que nos permite organizar y analizar información en nuestra vida cotidiana de manera efectiva. Desde la planificación de tareas hasta la toma de decisiones, entender los principios básicos de los conjuntos puede ayudarnos a simplificar y optimizar nuestra vida diaria. Es una rama fundamental de la matemática, ya que se enfoca en el estudio de sus propiedades y las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, en el campo de la informática, la teoría de conjuntos es fundamental para la creación de algoritmos y programas de software. En la industria, se utiliza para la planificación de procesos y la organización de recursos. En el ámbito de las ciencias sociales, se emplea para el análisis de datos y la creación de modelos. La topología, el cálculo y la geometría tienen como base los conjuntos, hasta llegar al álgebra en torno a campos, anillos y grupos. También se utiliza ampliamente en biología, física, química y otras disciplinas.

PRODUCCIÓN

Evaluamos lo que aprendiste aplicando cardinalidad de conjuntos a los siguientes problemas:

- En un grupo de 100 estudiantes, 49 no estudian Sociología y 53 no estudian Filosofía. Si 27 estudiantes no estudian ni Filosofía ni Sociología, ¿cuántos estudiantes estudian exactamente una de las dos áreas?
- Al interrogar a 300 estudiantes preuniversitarios de una facultad sobre su afición a la Matemática, Informática o Física, se encontró que 125 gustan de Matemática, 180 de Informática, 100 de Física, 25 de Física y Matemática, 40 de Informática y de Física y 20 las tres materias, ¿cuántos estudiantes gustan sólo de una materia?, ¿cuántos gustan de dos materias?

Respondemos las siguientes preguntas:

Fuera de las ciencias ¿en qué otros aspectos utilizarías la teoría de conjuntos y sus aplicaciones?

Dialogamos sobre la importancia de un conjunto en cada uno de los aspectos mencionados.

Realizamos la siguiente actividad:

Realizamos una pequeña encuesta a 50 personas entre estudiantes, maestras y maestros, madres y padres de familia, sobre los gustos o preferencias musicales. La encuesta debe preguntar lo siguiente:

1 pregunta con 3 opciones de respuestas.

Nacional (N), Internacional (I), Ambas (A) o Ninguno (NA)

- El encuestado puede responder una y solo una de las tres opciones.
- Si alguna persona encuestada no responde o deja en blanco los recuadros, se toma como respuesta ninguna.

Recopilamos la información de los encuestados, considerando $\boldsymbol{U}$ el universo como la cantidad total de personas encuestadas y respondemos la siguiente pregunta:

- ¿Cuántos elementos tiene la unión e intersección de las personas que sólamente prefieren música internacional?

FUNCIONES Y LÍMITES

PRÁCTICA

Don Mario, es un excelente economista y a la vez emprendedor de una microempresa de alimentos que trabaja con frutos cítricos y verduras de los valles altos. Su precisión en estimaciones de ventas es impresionante. Su prioridad es cumplir metas y los productos de pedidos que tiene durante el mes, además se asegura que no haya sobrantes de frutas y verduras. Su método de estimaciones de ventas se basa principalmente en datos recopilados de ventas y pedidos de anteriores gestiones y estudios de mercado. Todo su trabajo se resume en una función matemática que es capaz de predecir la cantidad de clientes que estarían en las condiciones de comprar y pedir el producto en una determinada fecha.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas y realizamos las actividades:

- ¿Qué relación matemática podemos utilizar para predecir la cantidad de ventas?
- Investiga acerca de la importancia de las funciones matemáticas.
- Investiga la función que proporcionaría el total de cítricos en función del tiempo de cosecha.
- ¿Es bueno predecir la producción en función de ciertas condiciones de mercado?

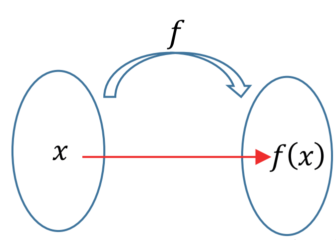
TEORÍA

Función

1. Funciones

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto, denominado dominio, un único valor $f(x)$ en un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores obtenidos se denomina rango de la función.

En una función no existen pares de elementos con el mismo primer componente.



$$f: X \to Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y (x, y) \in f$$

2. Dominio, rango y gráfica de una función

a) Dominio

El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores de la variable independiente "x" para los cuales la función está definida y producirá un valor finito y real en la variable dependiente "y", se simboliza Df.

Para determinar el dominio real de una función, es necesario que la variable x este afectado por estas restricciones, por ejemplo:

$\frac{n}{0}$	División entre cero, no está definido
$\sqrt[2n]{a}$	Raíz par de números negativos
$\log(-a)$	Logaritmo de un número negativo

Ejemplo:

Determinamos el dominio de la función:

$$y = 7x + 5$$

En este caso la variable x no está afectada por ninguna de las restricciones anteriores, por lo tanto:

$$Df: x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

Hallamos el dominio de la función:

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

La función tiene denominador $x - 2 \neq 0$, entonces:

$$Df: x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Ejemplo:

Encontramos el dominio de la función:

$$y = \sqrt{x+4}$$

La función tiene raíz cuadrada, luego:

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$
$$\Rightarrow Df: x \geq 4$$

Ejemplo:

Determinamos el dominio de la función:

$$y = \ln(x-3)$$

La función tiene logaritmo, entonces:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$
$$\Rightarrow Df: x > 3$$

b) Codominio

El codominio o imagen o recorrido o rango de una función, es el conjunto de los segundos componentes de los pares ordenados que forman la función. El rango de una función es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente (y) que resultan de los valores del dominio. En este caso se debe despejar la variable independiente para luego realizar el análisis correspondiente según sea el caso.

Ejemplo:

Determinamos el codominio de la siguiente función:

$$f(x) = y = x - 5 \Rightarrow x = y + 5$$

La variable y no tiene restricciones anteriores, por lo tanto:

$$Rf: y \geq 0$$

Ejemplo:

Encontramos el codominio de la siguiente función:

$$f(x) = y = \log(1 + x^2) \Rightarrow x = \sqrt{10^y - 1}$$

La función tiene raíz cuadrada, entonces:

$$10^y - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; y \geq 0$$
$$\Rightarrow\; Rf: y \geq 0$$

c) Gráfica de funciones

Para graficar funciones algebraicas, es necesario considerar algunos conceptos de: dominio, codominio, intersecciones, simetría, asíntotas y finalmente una tabla de valores.

Tipos de funciones

Función que no tiene denominador, ni raíz cuadrada, ni logaritmo:

$$y = P(x) \Rightarrow Dy: x \in \mathbb{R}$$

Cociente de funciones:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow Dy: Q(x) \neq 0$$

Función que tiene raíz cuadrada:

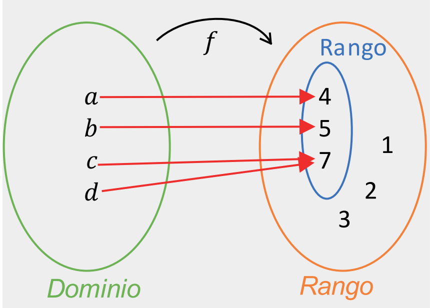
$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow Dy: f(x) > 0$$

Función que depende de un logaritmo:

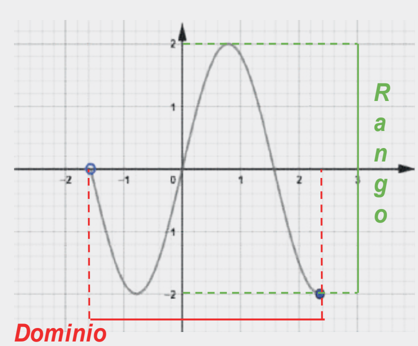
$$y = \log(f(x)) \Rightarrow Dy: f(x) > 0$$

$$y = \ln(f(x)) \Rightarrow Dy: f(x) > 0$$

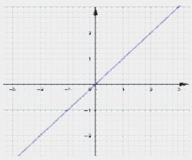
Dominio y rango de una función



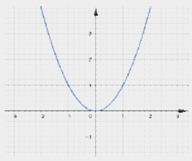
Gráfica de una función



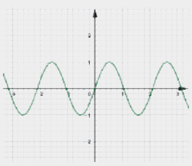
Funciones



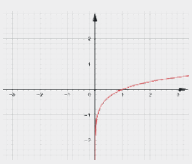
Función Lineal



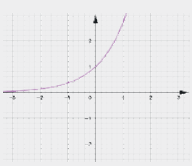
Función Cuadrática



Función Senoidal



Función Logarítmica



Función Irracional

Tabla de valores

x	$y=\dfrac{1}{x-2}$
-1	$y=\dfrac{1}{-1-2}=-\dfrac{1}{3}=-0.3$
0	$y=\dfrac{1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}=0.5$
1	$y=\dfrac{1}{1-2}=-\dfrac{1}{1}=-1$
3	$y=\dfrac{1}{3-2}=\dfrac{1}{1}=1$
4	$y=\dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2}=0,5$
5	$y=\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{1}{3}=0.3$

Ejemplo:

Graficamos la siguiente función: $y=\dfrac{1}{x-2}$

DOMINIO: $x-2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2 \Longrightarrow Df: x\in\mathbb{R}-\{2\}$

RANGO: $y=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow x=\frac{2y+1}{y}; y\neq 0 \Longrightarrow Rf: y\in\mathbb{R}-\{0\}$

INTERSECCIONES

Intersección con eje "X": $(y=0)$

$$y=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow 0=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow 0=1?$$

Intersección con eje "Y": $(x=0)$

$$y=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow y=\frac{1}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

SIMETRÍA

Simetría con el eje "X"

$$f(x,y)=f(x,-y)$$
$$y-\frac{1}{x-2}\neq -y-\frac{1}{x-2}$$

Simetría con el eje "Y"

$$f(x,y)=f(-x,y)$$
$$y-\frac{1}{x-2}\neq y-\frac{1}{-x-2}$$

Simetría con el origen

$$f(x,y)=f(-x,-y)$$
$$y-\frac{1}{x-2}\neq -y-\frac{1}{-x-2}$$

ASÍNTOTAS

Verticales: Se toma en cuenta solo el denominador de la función:

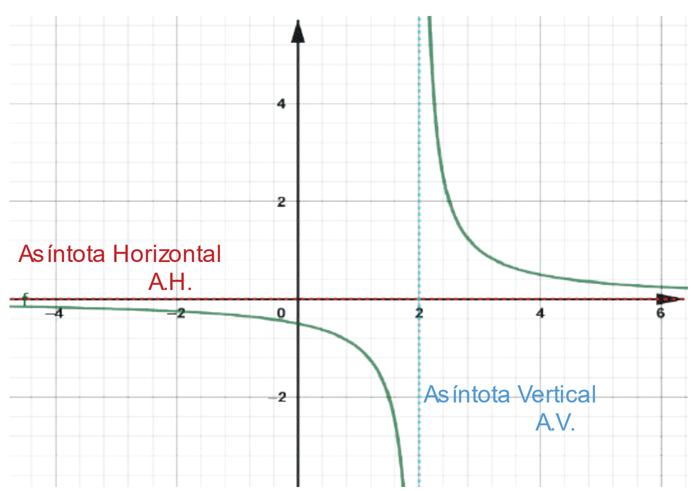
$$x-2=0\Longrightarrow x=2$$

Horizontales: Se toma en cuenta solo el denominador de la función:

$$y=0$$

TABLA DE VALORES

Finalmente elaboramos una tabla de valores con algunos pares ordenados o puntos, tomando un valor cualquiera en "x" para calcular su correspondiente valor en "y", que nos permita identificar el comportamiento de la gráfica:



Actividad

Hallamos el dominio y rango de las siguientes funciones:

1) $y=4x-7$ **2)** $y=\sqrt{2x-1}$ **3)** $y=\log(x+10)$

Graficamos las siguientes funciones, hallando su dominio, rango, intersecciones y simetría:

4) $f(x)=\frac{x}{x+2}$ **5)** $f(x)=\frac{x-4}{x^2-1}$ **6)** $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

3. Operaciones con funciones

Si tenemos las funciones $f(x)$ y $g(x)$, podemos sumar, restar, multiplicar y dividir ambas funciones para obtener otra función equivalente a las operaciones indicadas.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales cuyos dominios son Df y Dg respectivamente:

- La adición de las funciones f y g es otra función, $f+g$, tal que para cualquier valor de "x"que pertenezca al dominio de Df y Dg.
- La multiplicación de las funciones f y g es otra función, tal que para cualquier valor de "x" que pertenezca al dominio de Df y Dg.
- La división de las funciones f y g es otra función $\frac{f}{g}$ tal que para cualquier valor de "x" que pertenezca al dominio de Df y Dg.

Ejemplo:

Hallamos las operaciones entre las siguientes funciones:

$$h(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 1$$

Suma: $h(x) + g(x) = (2x + 1) + (x^2 - 1) = x^2 + 2x$

Resta: $h(x) - g(x) = (2x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 2$

Multiplicación: $h(x)\cdot g(x) = (2x + 1)\cdot(x^2 - 1) = 2x^2 + x^2 - 2x - 1$

División: $\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{x^2-1}$ donde $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

Ejemplo:

Encontramos las funciones $f(x) + g(x)$, $g(x)-h(x)$, $f(x)\cdot h(x)$ y $\frac{f(x)+h(x)}{g(x)}$ sabiendo que: $f(x)=x^3 + x - 1$ $\quad g(x) = 2x^2 - x + 3$ $\quad h(x) = x - 2$

$$f(x) + g(x) = x^3 + x - 1 + 2x^2 - x + 3 = x^3 + 2x^2 + 2$$
$$g(x)-h(x) = 2x^2 - x + 3 - (x - 2) = 2x^2 - 2x + 5$$
$$f(x)\cdot h(x) = (x^3 + x - 1)\cdot(x - 2) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2$$
$$\frac{f(x)+h(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + x - 1 + x - 2}{2x^2 - x + 3} = \frac{x^3 + 2x - 3}{2x^2 - x + 3}$$

Ejemplo:

Calculamos las siguientes operaciones:

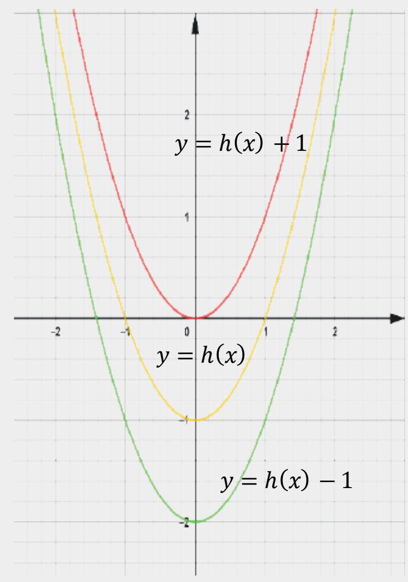
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \,; x > 1 \\ x - 4 \,; x \leq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 5 \,; x > -1 \\ 3x - 1 \,; x \leq -1 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x + 3 + x + 5 \,; x > 1 \\ x - 4 + 3x - 1 \,; x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 8 \,; x > 1 \\ 4x - 5 \,; x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f-g)(x) = \begin{cases} 2x + 3 - (x + 5) \,; x > 1 \\ x - 4 - (3x - 1) \,; x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 \,; x > 1 \\ -2x - 3 \,; x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f\cdot g)(x) = \begin{cases} (2x + 3)\cdot(x + 5) \,; x > 1 \\ (x - 4)\cdot(3x - 1) \,; x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x^2 + 13x + 15 \,; x > 1 \\ 3x^2 - 13x + 4 \,; x \leq 1 \end{cases}$$

Operaciones con funciones



Operaciones con funciones

Suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Resta:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Multiplicación:

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

División:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \quad g(x) \neq 0$$

Actividad

Calculamos los resultados de las cuatro operaciones para las siguientes funciones:

1) $f(x) = x - 2, \quad g(x) = 2x + 1$

2) $f(x) = x^2 + 3x - 2, \quad g(x) = x - 4$

3) $f(x) = 2 - x^3; \quad g(x) = x^2 - 2$

4) $f(x) = x^2 + 3x - 4, \quad g(x) = 2 - x^2$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 \,; x \geq 0 \\ x^2 - x + 2 \,; x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 \,; x > 2 \\ 2x^2 + x + 1 \,; x \leq 2 \end{cases}$

Tabla de valores

De una expresión algebraica

Si $x = 3,\ y = 2$ *hallar* $z = ?$ *en:*

$$x^2 + y = z$$

Reemplazando los valores x, y *se tendrá:*

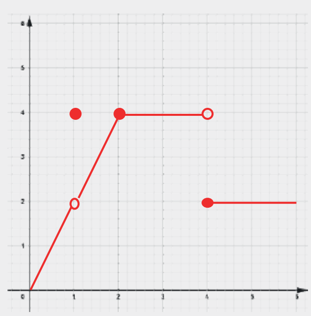
$$3^2 + 2 = 9 + 2 = 11 \Rightarrow z = 11$$

De un polinomio

Hallar $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8$ *cuando* $x = 2$

$$p(2) = 2{\cdot}2^3 + 3{\cdot}2^2 + 5{\cdot}2 + 8$$
$$= 2{\cdot}8 + 3{\cdot}4 + 10 + 8$$
$$= 16 + 12 + 10 + 8$$
$$p(2) = 46$$

De una función



4. Valor numérico

El valor numérico de una función f, se determina reemplazando el valor de la letra por la variable independiente "x".

$$\text{Si } x = a \text{ y } f(x) = p(x) \pm q(x) \quad \Rightarrow \quad f(a) = p(a) \pm q(a)$$

Ejemplo:

Hallamos el valor numérico de la siguiente función:

$$f(x) = x + 4$$

$$f(2) = 2 + 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 6$$
$$f(-2) = -2 + 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(-2) = 2$$
$$f(3) = 3 + 4 = 7 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 7$$
$$f(0) = 0 + 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 4$$

Ejemplo:

Encontramos el valor numérico de la función:

$$f(x) = x^2 + 4x - 6$$
$$f(3) = 3^2 + 4(3) - 6 = 9 + 12 - 6 = 15 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 15$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 6 = 4 - 8 - 6 = -10 \quad \Rightarrow \quad f(-2) = -10$$
$$f(-5) = (-5)^2 + 4(-5) - 6 = 25 - 20 - 6 = -1 \quad \Rightarrow \quad f(-5) = -1$$
$$f(0) = 0^2 + 4(0) - 6 = 0 + 0 - 6 = -6 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -6$$

Ejemplo:

Determinamos el valor numérico de la función:

$$f(x) = \sqrt{x + 4}$$

$$f(-2) = \sqrt{-2 + 4} = \sqrt{2} \Rightarrow f(-2) = \sqrt{2}$$
$$f(12) = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow f(12) = 4$$
$$f(24) = \sqrt{24 + 4} = \sqrt{28} \Rightarrow f(24) = \sqrt{28}$$
$$f(0) = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f(0) = 2$$

Ejemplo:

Calculamos el valor numérico de la función:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$$

$$f(-1) = \frac{2(-1) + 3}{-1 - 2} = \frac{-2 + 3}{-3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{3} \qquad f(3) = \frac{2(3) + 3}{3 - 2} = \frac{6 + 3}{1} = 9 \Rightarrow f(3) = 9$$

$$f(-2) = \frac{2(-2) + 3}{-2 - 2} = \frac{-4 + 3}{-4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{4} \qquad f(0) = \frac{2(0) + 3}{0 - 2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(0) = -\frac{3}{2}$$

Actividad

Calculamos el valor numérico según el caso:

1) $f(x) = 3x - 7$

$f(-2) =?$ $\quad f(0) =?$ $\quad f(3) =?$ $\quad f(10) =?$ $\quad f(13) =?$

2) $f(x) = x^2 - 2x - 7$

$f(-3) =?$ $\quad f(-1) =?$ $\quad f(0) =?$ $\quad f(3) =?$ $\quad f(8) =?$

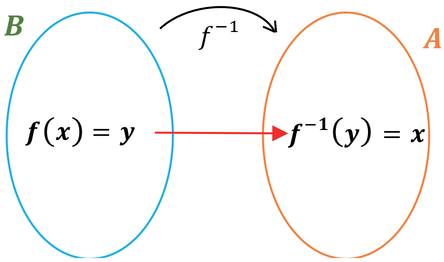
3) $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$g(-5) =?$ $\quad g(-2) =?$ $\quad g(0) =?$ $\quad g(3) =?$ $\quad g(7) =?$

5. Inversa de una función

Dada una función llamamos función inversa de f a la función f^{-1} si:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{f: A \longrightarrow B} & & \boldsymbol{f^{-1}: B \longrightarrow A} \\ \boldsymbol{f(x) = b} & \Longrightarrow & \boldsymbol{f^{-1}(b) = x} \end{matrix}$$



Ejemplo:
Hallamos la inversa de la función:

$$f(x)=x-7$$
$$y = f(x) = x - 7 \Rightarrow x = y - 7$$

Despejamos la variable "y":

$$x = y - 7 \Rightarrow y = x + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7$$

Ejemplo:
Encontramos la función inversa de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$$
$$y = f(x) = \sqrt{x^3 + 2} \Rightarrow x = \sqrt{y^3 + 2}$$

Despejamos la variable "y":

$$x = \sqrt{y^3 + 2} \Rightarrow x^2 = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^2 - 2}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$$

Ejemplo:
Determinar la inversa de la función:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$$
$$y = f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1} \Rightarrow x = \frac{3y + 2}{y - 1}$$

Despejamos la variable "y":

$$(y-1) = 3y + 2 \Rightarrow xy - x = 3y + 2 \Rightarrow xy - 3y = x + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{x + 2}{x - 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

Ejemplo:
Cuál es la inversa de la función: $f(x) = \ln(x + 1)$

$$y = f(x) = \ln(x + 1) \Rightarrow x = \ln(y + 1) \Rightarrow e^x = y + 1 \Rightarrow y = e^x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 1$$

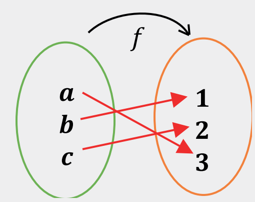
Inversa de una función

Por definición

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \to \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{x} \underset{\boldsymbol{f^{-1}}}{\overset{\boldsymbol{f}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{y = f(x)}$$
$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \to \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$

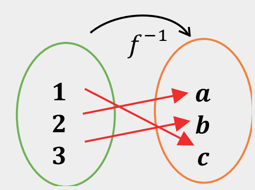
Ejemplo
Sea la función con pares ordenados:

$$f(x) = \{(a, 3); (1, b); (c, 2)\}$$

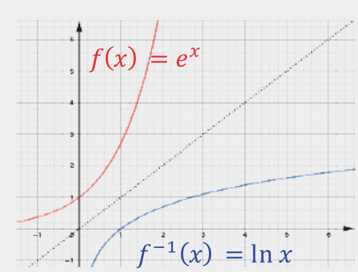


Sea la función con pares ordenados:

$$f^{-1} = \{(1, c); (2, a); (3, b)\}$$



Gráfica una función inversa



Actividad

Hallamos las funciones inversas:

1) $f(x) = 4x - 5$

2) $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

3) $f(x) = 10^{x+1} + 3$

4) $f(x) = x^2 + 1$

5) $f(x) = \dfrac{4 - x}{x + 4}$

6) $f(x) = e^{2x-1}$

7) $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

8) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$

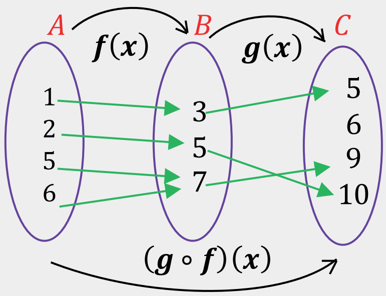
9) $f(x) = \log(x + 2)$

Composición de funciones

Por definición:

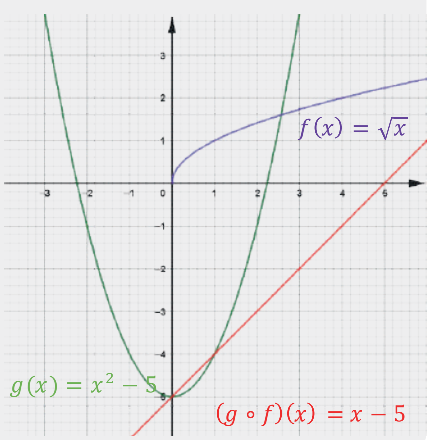
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)(x)"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \arrow[ll, bend right, "(f\circ g)(x)"'] \end{tikzcd}$$

De una función con pares ordenados:



$(g\circ f)(x) = \{(1,5);(2,10);(6,9)\}$

Gráfica de composición de funciones:



6. Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g se llama función compuesta de f con g a la función $f\circ g$ y $g\circ f$ para la cual se cumple que:

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \quad \wedge \quad (g\circ f)(x) = g(f(x))$

Ejemplo:

Hallamos la composición de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2+1 \quad \wedge \quad g(x) = x-1$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x-1) \\ &= (x-1)^2+1 \\ &= x^2-2x+1+1 \\ (f\circ g)(x) &= x^2-2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2+1) \\ &= (x^2+1)-1 \\ &= x^2+1-1 \\ (g\circ f)(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Encontramos la composición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \wedge \quad g(x) = x+3$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+3) \\ &= \frac{(x+3)+1}{(x+3)} \\ &= \frac{x+3+1}{x+3} \\ (f\circ g)(x) &= \frac{x+4}{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{x+1}{x}\right)+3 \\ &= \frac{x+1}{x}+3 \\ &= \frac{x+1+3x}{x} \\ (g\circ f)(x) &= \frac{4x+1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Determinamos $(f\circ g)^{-1}(x)$

$$f(x) = \sqrt{2x+5} \quad \wedge \quad g(x) = 3x-1$$

$$\begin{aligned} y = f(g(x)) &= \sqrt{6x+3} \\ \Rightarrow x &= \sqrt{6y+3} \\ \Rightarrow x^2 &= 6y+3 \\ \Rightarrow x^2-3 &= 6y \\ \Rightarrow y &= \frac{x^2-3}{6} \\ \therefore (f\circ g)^{-1}(x) &= \frac{x^2-3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(3x-1) \\ &= \sqrt{2(3x-1)+5} \\ &= \sqrt{6x-2+5} \\ (f\circ g)(x) &= \sqrt{6x+3} \end{aligned}$$

Actividad

Hallamos la composición de funciones: $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$

1) $f(x) = 3x-2;\quad g(x) = 5+x$

2) $f(x) = \sqrt{x+4};\quad g(1) = 1-3x$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x-1};\quad g(x) = 2x+7$

4) $f(x) = \dfrac{x}{3}+1;\quad g(x) = \dfrac{3}{x-1}$

5) $f(x) = x^2+3x-4;\quad g(x) = 2x-5$

6) $f(x) = \sqrt{x^2+3};\quad g(x) = \sqrt{x+3}$

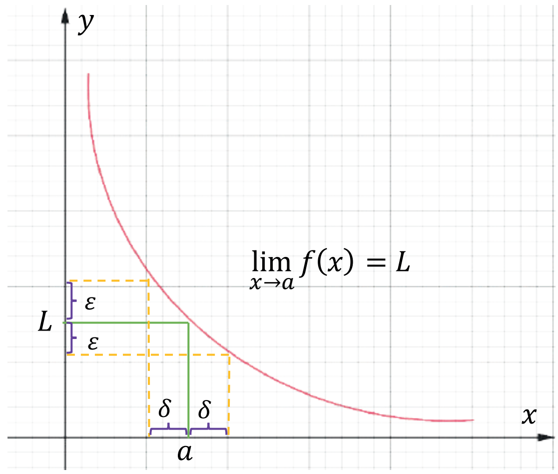
7) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2};\quad g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

8) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3};\quad g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

7. Límites

Una función $y = f(x)$ tiende a un límite L cuando "x" tiende a "a" si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta$$



a) Definición de Límite

Para demostrar la existencia de un límite de una determinada función, utilizaremos las siguientes:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: si } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo:

Mediante la definición de límite, demostrar: $\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - 4| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |2x - 5 - 3| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - 4| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |2x - 8| < \varepsilon$$

El objetivo en demostrar la existencia de un límite por definición es encontrar un δ que esté en función de ε.

Es bueno ver antes a dónde se quiere llegar.

$$|2x - 8| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad 2|x - 4| < \varepsilon$$

Como es cierto que:

$$|x - 4| < \delta \Longrightarrow 2|x - 4| < 2\delta = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad 2\delta = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ejemplo:

Hallamos de forma directa el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x + 2} \right)$$

$$L = \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x + 2} \right) = \frac{3^2 + 3 - 5}{3 + 2} = \frac{9 + 3 - 5}{5} = \frac{7}{5}$$

Ejemplo:

Encontramos de forma directa el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{5^x - x^5}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x}{5^x - x^5} = \frac{0}{5^0 - 0^5} = \frac{0}{1} = 0$$

Teorema sobre límites

a) $\lim_{x \to a} k = k$

b) $\lim_{x \to a} x = a$

c) $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$

d) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

e) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$

f) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

g) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

h) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

i) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Indeterminaciones

a) $\frac{0}{0} = ?$

b) $0 \cdot \infty = ?$

c) $1^\infty = ?$

d) $0^0 = ?$

e) $\frac{\infty}{\infty} = ?$

f) $\infty - \infty = ?$

g) $\infty^0 = ?$

Operaciones conocidas

a) $0 + 0 = 0$

b) $0 \cdot 0 = 0$

c) $0^a = 0$

d) $\frac{0}{a} = 0$

e) $\frac{\infty}{0} = 0$

f) $\frac{\infty}{a} = \infty$

g) $a^0 = 1$

h) $0^\infty = 0$

i) $a^{-\infty} = 0$

j) $\infty + \infty = \infty$

k) $\infty + 0 = \infty$

l) $\infty + a = \infty$

m) $\infty^a = \infty$

n) $\frac{a}{0} = \infty$

o) $\frac{0}{\infty} = 0$

p) $\frac{a}{\infty} = 0$

q) $a^\infty = \infty$

r) $\infty^a = \infty$

s) $\infty \cdot \infty = \infty$

t) $\infty^\infty = \infty$

u) $\infty \cdot a = \infty$

v) $\log \infty = \infty$

w) $\ln \infty = \infty$

8. Tipos de resolución de límites

a) Límites algebraicos

Son límites cuyas funciones son algebraicas, sus indeterminaciones se resuelven aplicando técnicas algebraicas como ser, factorización, racionalización y otros.

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\nexists \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{R(x)}=\exists;\quad R(x)\neq 0\quad \vee \lim_{x\to a}\frac{P'(x)\cdot G(x)}{Q'(x)\cdot G(x)}=\exists;\ P(x)=P'(x)\cdot G(x),Q(x)=Q'(x)\cdot G(x)$$

Ejemplo:

Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-4}=\frac{4-2-2}{4-4}=\frac{0}{0}\quad \text{(Hay que levantar la indeterminación)}$$

$$L=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-2-1}{-2-2}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Ejemplo:

Encontramos el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-x}=\frac{(0-1)^2-(0+1)^2}{0^2-0}=\frac{(-1)^2-(1)^2}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{(Se debe levantar la indeterminación)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\big((x-1)-(x+1)\big)\cdot\big((x-1)+(x+1)\big)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1-x-1)\cdot(x-1+x+1)}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)\cdot(2x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{x-1}=\frac{-4}{0-1}=\frac{-4}{-1}=4$$

b) Límites irracionales

Para resolver este tipo de límites, primeramente, debemos racionalizar el denominador o el numerador de la expresión dada, debemos tomar en cuenta la conjugada.

Ejemplo:

Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{2^2-4}{\sqrt{2+2}-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}\quad \text{(Hay que levantar la indeterminación)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$$

$$=(2+2)\left(\sqrt{2+2}+2\right)=4\cdot 4=16$$

Ejemplo:

Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}=\frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt{3\cdot 1+1}-2}=\frac{1-1}{2-2}=\frac{0}{0}\quad \text{(Se debe levantar la indeterminación)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left((\sqrt{x})^2-1^2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{3+1}+2}{3(1+1)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

c) Límites que tienden al infinito

Este tipo de límites se resuelve buscando la variable de mayor grado tanto del numerador como del denominador, para luego dividir todos los términos por esta expresión encontrada y tomar en cuenta que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0\,;a\neq 0$$

Ejemplo:

Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^2-4x+5}{3+2x^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-4x+5}{3+2x^2}=\frac{\infty^2-4\cdot\infty+5}{3+2\cdot\infty^2}=\frac{\infty}{\infty}\quad\text{(Hay que levantar la indeterminación)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-4x+5}{3+2x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+2}=\frac{1-0+0}{0+2}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo:

Encontramos el valor del siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+1}{5x^4+7x-11}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4x^3+3x^2+1}{5x^4+7x-11}=\frac{\infty+\infty+1}{\infty+\infty-11}=\frac{\infty}{\infty}\quad\text{(Se debe levantar la indeterminación)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4x^3+3x^2+1}{5x^4+7x-11}\cdot\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{7x}{x^4}-\frac{11}{x^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{5+\frac{7x}{x^3}-\frac{11}{x^4}}=\frac{0+0+0}{5+0+0}=\frac{0}{5}=0$$

d) Límites trigonométricos

Son límites de funciones trigonométricas, cuya resolución. Se basa en las siguientes identidades:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\qquad\lim_{x\to\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,(kx)}{kx}=1\qquad\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Ejemplo:

Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(10x)}{\operatorname{sen}(5x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(10x)}{\operatorname{sen}(5x)}=\frac{\operatorname{sen}(10\cdot 0)}{\operatorname{sen}(5\cdot 0)}=\frac{\operatorname{sen}0}{\operatorname{sen}0}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(10x)\cdot\frac{10}{10}}{\operatorname{sen}(5x)\cdot\frac{5}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(10x)}{10x}\cdot 10}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\cdot 5}=\frac{1\cdot 10}{1\cdot 5}=\frac{10}{5}=2$$

Ejemplo:

Encontramos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(4x)-\operatorname{sen}(2x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(4x)-\operatorname{sen}(2x)}=\frac{\operatorname{sen}0-\operatorname{sen}0}{\operatorname{sen}0-\operatorname{sen}0}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{3}{3}-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}\cdot\frac{4}{4}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\cdot\frac{2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\cdot 3-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\cdot 4-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot 2}=\frac{2}{2}=1$$

Actividad

Calculamos levantando la indeterminación, el valor de los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-4)(x-2)+1}{x^2-2x-3}$

2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

3) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$

4) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-(x-2)^2+4}{x^2-2x}$

5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2-4}{x^3-2x+3}$

6) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{2x^2+x-1}$

7) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

8) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen}x}$

9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

e) Límites exponenciales

Son límites de funciones exponenciales, donde la variable se encuentra en el exponente, su resolución se basa en las siguientes identidades:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Límites exponenciales

Método alternativo:

1) $\lim_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$

donde $f(x) \neq 0$

2) *Sea* $L = \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$,

si $\sigma = \lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)$

entonces $L = e^{\sigma}$

Ejemplo:
Encontramos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x\cdot\frac{4}{4}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{4} = e^{4}$$

Ejemplo:
Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Sea $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, se tendrá:

$$\sigma = \lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x) \Rightarrow \sigma = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2-x}{2+x}-1\right]\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2-x-2-x}{2+x}\right]\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2x}{2+x}\right]\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2}{2+x}\right] = \frac{-2}{2+0} = -\frac{2}{2} = -1$$

Así: $L = e^{\sigma} \Rightarrow L = e^{-1}$

f) Límites logarítmicos

También este tipo de límites se resuelven tomando en cuenta los siguientes límites de referencia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \ln e = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Ejemplo:
Hallamos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}\cdot\frac{2}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Ejemplo:
Encontramos el valor del siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-e^{2x}+1}{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-(e^{2x}-1)}{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{x}\cdot\frac{4}{4}-\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{2}{2}}{\frac{\operatorname{sen}3x}{x}\cdot\frac{3}{3}-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4-\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2}{\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot 3-\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = \frac{1\cdot 4-1\cdot 2}{1\cdot 3-1} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

Actividad

Calculamos el valor de los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 1}[2x-1]^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+1}{x-3}\right]^{\frac{1}{x-1}}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{10}$

4) $\lim_{x\to 1}[5x-14]^{\frac{5}{x-3}}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-3}{2x-6}\right]^{3x+1}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\ 6x-3x}{e^{5x}-e^{2x}}$

7) $\lim_{x\to 1}[1-x]^{\frac{3}{x}}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+2}\right]^{x-2}$

9) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^{x}}{\operatorname{sen}\ x}$

9. Continuidad de funciones

Intuitivamente, podemos decir que una función es continua si puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Decimos que una función es continua en un punto a se cumple que:

$$\exists f(a),\ \exists \lim_{x\to a} f(x) \text{ tal que } \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Así por la definición de continuidad, $f(x)$ es continua en $a = 4$.

Ejemplo:

Hallamos el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; x \geq 2 \\ kx + 2 & ; x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (kx+2) = 2k+2$$

Así: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Longrightarrow 4 = 2k+2 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$

Ejemplo:

Usando la definición de continuidad, determinamos si la siguiente función es continua en $a = 4$:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}\,; a = 4$$

Evaluamos $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 4}\left(x^2+\sqrt{7-x}\right) = 4^2 + \sqrt{7-4} = 16 + \sqrt{3} \qquad (\mathbf{1})$$

Evaluamos $f(x)$ en $a = 4$:

$$f(4) = 4 + \sqrt{7-4} = 16 + \sqrt{3} \qquad (2)$$

Deducimos que los valores $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$ son iguales, por tanto la función es continua en $a = 4$, pues:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^2+\sqrt{7-x}\right) = f(4)$$

Actividad

Calculamos el valor de k, para que las siguientes funciones sean continuas:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; x > 3 \\ k-6 & ; x \leq 3 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} kx-1 & ; x < 2 \\ kx^2 & ; x \geq 2 \end{cases}$

Verificamos si las siguientes funciones son continuas en los puntos dados:

3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}; a = 2$

4) $g(x) = \sqrt{x-1}; a = 1$

5) $h(x) = \frac{3x+6}{x+2}; a = -2$

6) $s(x) = e^{2x}; a = 0$

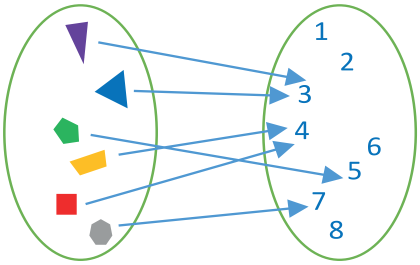
VALORACIÓN

En la matemática babilónica, encontramos tablas con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. En la Grecia clásica también se manejaron funciones particulares (lineales, cuadráticas), incluso en un sentido moderno de relación entre los elementos de dos conjuntos y no sólo de fórmula.
En la actualidad las funciones son de uso frecuente, en nuestra aula, la cantidad de sillas es correspondiente con la cantidad de estudiantes que hay.

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

Elaboramos en nuestro cuaderno relaciones de funciones de objetos entre objetos, personas con personas, objetos con personas, para ver la utilidad de las funciones en nuestro diario vivir, de cómo se puede establecer el agrupamiento, el orden y la relación que se utiliza en nuestro diario vivir.
Toma de referencia la imagen de la derecha para establecer las funciones que vayamos a conformar.
Comparte tu trabajo con tus compañeras y compañeros para poder establecer las coincidencias y similitudes de las funciones.

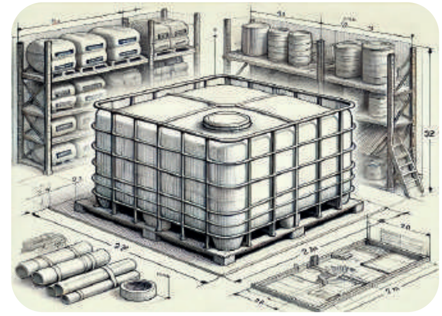


DERIVADAS

PRÁCTICA

Existe una gran demanda en los pedidos de depósitos de plástico en las ciudades para el acumulo de materiales líquidos y sólidos, para ello la microempresa de don Adolfo debe cubrir la alta demanda que existe por las distribuidoras, ferreterías y tiendas de venta de materiales de construcción en casi todas las ciudades de nuestro país.

Los primeros pedidos para la ciudad X contemplan depósitos con tapa reforzada y de fondo cuadrado, todos los depósitos deben tener una máxima capacidad de 32 metros cúbicos, ¿qué dimensiones deben tener los depósitos para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de plástico?



Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

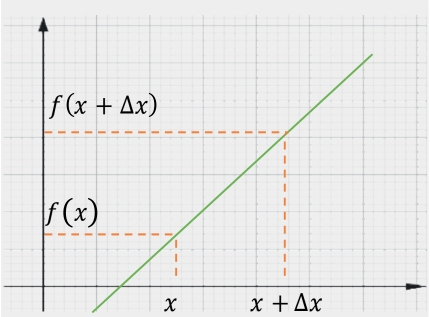
- ¿Cómo se puede realizar el análisis y el procedimiento para construir los depósitos?
- ¿Qué procedimientos numéricos se pueden emplear para aminorar los gastos en la construcción de los depósitos?
- ¿Qué variables se pueden identificar para optimizar la construcción de los depósitos?

TEORÍA

Pendiente de la recta

Si la variable independiente "x" recibe un incremento Δx, entonces la función $f(x)$ también recibe un incremento de valor que es igual Δy, que es igual a $f(x+\Delta x)$, siendo "x" su valor inicial.

Gráficamente:



1. Origen e importancia

Su origen es algo oscuro ya que se descubrió en el siglo XVIII, siendo los inventores Isaac Newton y Leibniz más o menos en los mismos años en Inglaterra y Alemania respectivamente. Inicialmente se centró su aplicación en la geometría y la mecánica, pero luego en otras ciencias como la física y química.

La derivada considerada como el eje principal del cálculo diferencial, tiene su origen en la antigua Grecia y surge como resultado de cuatro problemas fundamentales; el de la velocidad, el del área bajo la curva, el de la recta tangente y el de máximos y mínimos.

Su importancia es fundamental para el cálculo diferencial e integral. Algunos conceptos que nos ayudarán a comprender el significado de derivada son:

El estudio de la variación de la función $f(x)$

También está el cálculo diferencial mediante técnicas para encontrar una medida de variación de una función $f(x)$ desde la variación de "x".

Esta medida de variación de "x" esta expresado como:

$\Delta x = x_2 - x_1$ donde puede ser positivo o negativo.

2. Definición

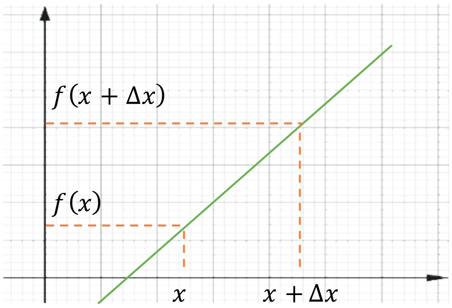
La derivada de una función con respecto a una variable independiente es la razón de cambio instantánea de la función con respecto a la variable independiente cuando esta tiende a cero. Su definición es consta del siguiente límite:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O bien reemplazando $\Delta x = h$ se tiene:

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Gráficamente:



Notación

$$\boldsymbol{f' = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x y}$$

Estas representan a la derivada, pero con distintas notaciones.

Ejemplo:

Hallamos mediante definición la derivada de la siguiente función: $f(x) = 3x+2$

$$f(x) = 3x + 2 \wedge f(x+h) = 3(x+h) + 2 \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)+2-(3x+2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+2-3x-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Ejemplo:

Encontramos aplicando la definición, la derivada de la función: $f(x) = x^2 - 2x + 4$

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \wedge f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 4 \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 4 - (x^2-2x+4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h+4-x^2+2x-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-2)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h-2 = 2x+0-2 = 2x-2$$

Ejemplo:

Calculamos aplicando la definición, la derivada de la función: $f(x)=e^{2x+1} - x + 1$

$$f(x) = e^{2x+1} - x + 1 \wedge f(x+h) = e^{2(x+h)+1} - (x+h) + 1 \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2(x+h)+1} - (x+h) + 1 - (e^{2x+1} - x + 1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h+1} - x - h + 1 - e^{2x+1} + x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h+1} - h - e^{2x+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+1}\left(e^{2h}-1\right) - h}{h}\lim_{h\to 0}\left(e^{2x+1}\cdot\frac{\left(e^{2h}-1\right)}{h} - \frac{h}{h}\right) = e^{2x+1} - 1$$

Actividad

Buscamos las derivadas de las siguientes funciones por definición:

1) $f(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = x^2 + 1$

3) $f(x) = x^2 + x - 7$

4) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x$

5) $f(x) = \ln(2x+1)$

6) $f(x) = \ln\left(x^2 - x\right)$

7) $f(x) = e^x - x$

8) $f(x) = \operatorname{sen}(x+3)$

9) $f(x) = \sqrt{x+2}$

10) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 1}$

11) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

12) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Tabla de valores

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, tenemos las siguientes propiedades:

Derivada de una o resta:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

Derivada de un producto:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivada de una potencia:

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$$

Regla de la cadena:

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$(x^x)'=x^x\cdot(\ln x+1)$$

3. Derivadas de algunas funciones especiales

Aplicando tablas o propiedades de las derivadas se puede calcular la derivada de una función, estas propiedades nos permiten sintetizar y simplificar los procedimientos de la derivación de funciones:

$y=f(x)$ "n" es constante

$n'=0$ $(n\cdot f(x))'=n\cdot f'(x)$ $x'=1$ $(n\cdot x)=n\cdot x'$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$\left(\frac{a}{x^n}\right)'=-\frac{an}{x^{n+1}}$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f^2(x)}}$
$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$(e^x)'=e^x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$
$(\operatorname{sen} x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\operatorname{cotan} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$	$(\operatorname{cosec} x)'=-\operatorname{cosec} x\cdot\operatorname{cotan} x$
$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arcsec} x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

Ejemplo:

Hallamos la derivada de la siguiente función: $y=10x^2-3x+2$

$$y'=2\cdot 10x^{2-1}-3\cdot 1x^{1-1}+0\ \Rightarrow\ y'=20x-3$$

Ejemplo:

Encontramos la derivada de: $y=(4x+3)^2$

$$y'=2\cdot(4x+3)^{2-1}\cdot(4x+3)'=2\cdot(4x+3)\cdot(4+0)=(8x+6)\cdot 4=32x+24$$

Ejemplo:

Determinamos la derivada de: $y=(x^2-x+1)(2x-3)$

$$y'=(x^2-x+1)'\,(2x-3)+(x^2-x+1)\,(2x-3)'=(2x-1+0)(2x-3)+(x^2-x+1)(2-0)$$
$$=4x^2-6x-2x+3+2x^2-2x+2=6x^2-10x+5$$

Ejemplo:

Calculamos la derivada de: $y=\frac{4x+1}{x-5}$

$$y'=\frac{(4x+1)'(x-5)-(4x+1)(x-5)'}{(x-5)^2}=\frac{(4+0)(x-5)-(4x+1)(1-0)'}{(x-5)^2}=\frac{4\cdot(x-5)-(4x+1)\cdot 1}{(x-5)^2}$$
$$=\frac{4x-20-(4x+1)}{(x-5)^2}=\frac{4x-20-4x-1}{(x-5)^2}=-\frac{21}{(x-5)^2}$$

Ejemplo:

Hallamos la derivada de: $y=e^x+2\operatorname{sen} x-x^3$

$$y'=e^x+2\cos x-3x^2$$

Ejemplo:

Encontramos la derivada de: $y = \sqrt{x^2 + x - 3}$

$$y = \left(\sqrt{x^2 + x - 3}\right)' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 3}}$$

Ejemplo:

Determinamos la derivada de: $y=\ln(e^x+\text{sen } x)$

$$y' = [\ln(e^x + \text{sen } x)]' = \frac{1}{e^x + \text{sen } x} \cdot (e^x + \text{sen } x)'$$

$$= \frac{1}{e^x + \text{sen } x} \cdot (e^x + \cos x) = \frac{e^x + \cos x}{e^x + \text{sen } x}$$

Ejemplo:

Calculamos la derivada de: $y = \dfrac{\text{sen } x + x}{\text{sen } x - x}$

$$y' = \frac{(\text{sen } x + x)'(\text{sen } x - x) - (\text{sen } x + x)(\text{sen } x - x)'}{(\text{sen } x - x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x + 1)(\text{sen } x - x) - (\text{sen } x + x)(\cos x - 1)}{(\text{sen } x - x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \text{sen } x + x\cos x + \text{sen } x - x - \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x - x\cos x + x}{(\text{sen } x - x)^2}$$

$$= \frac{2\,\text{sen } x - 2x\cos x}{(\text{sen } x - x)^2}$$

¡Padres del cálculo!

Sucedió una situación sobre la notación utilizada en el análisis matemático y su nacimiento. Sir Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Wilhelm con Leibniz (1646 – 1716) inventaron el Cálculo, pero de forma independiente en diferentes lugares y sin conocerse. Newton llamó ***fluxión*** *a las derivadas y Leibniz las llamó diferencias infinitesimales o cociente diferencial. Se sabe que Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz, aunque Leibniz fue quien publicó primero sus resultados. Aunque hayan tenido sus diferencias, sin duda ambos fueron los precursores de la nueva forma de asimilar el Análisis Matemático.*

4. Derivada en un punto

En este tipo de derivaciones, se reemplaza el punto dado en la función derivada.

Ejemplo:

Derivamos la siguiente función en el punto dado: $y = x^2+3x-10\,;\ x_0 = 2$

$$y' = 2x+3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x+3 \;\Rightarrow\; f'(2) = 2(2)+3 = 4+3 = 7 \;\Rightarrow\; f'(2) = 7$$

Ejemplo:

Derivamos la siguiente función en el punto dado: $y = (4x+7)(x^2-2)\,;\ x_0 = 1$

$$y' = 4(x^2-2)+(4x+7)2x = 4x^2-8+8x^2+14x = 12x^2+14x-8$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2+14x-8 \;\Rightarrow\; f'(1) = 12(1)^2+14(1)-8 = 12+14-8 = 18 \;\Rightarrow f'(1) = 18$$

Ejemplo:

Derivamos la siguiente función en el punto dado: $y = \frac{x^2-x}{x-4}$; $x_0 = 0$

$$y' = \frac{(2x-1)(x-4)-(x^2-x)(1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-x+4-x^2+x}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+4}{(x-4)^2}$$

$$\Rightarrow\; y' = f'(x) = \frac{x^2-8x+4}{(x-4)^2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{0^2-8(0)+4}{(0-4)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Actividad

Encontramos la derivada en los puntos dados:

1) $y = x + 5;\ x_0 = 5$
2) $y = (x^2 - 3x + 1)\ ;\ x_0 = 2$
3) $y = \text{sen } x - \cos x\ ;\ x_0 = \pi$
4) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 1}\ ;\ x_0 = 3$
5) $y = x^2 - 3x + 9;\ x_0 = -1$
6) $y = (x + 3)(x^2 - x);\ x_0 = 0$
7) $y = e^{2x} - x^2 + 2;\ x_0 = 2$
8) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}\ ;\ x_0 = -2$

Conclusiones

Pendiente de la recta:

$$m = y'$$

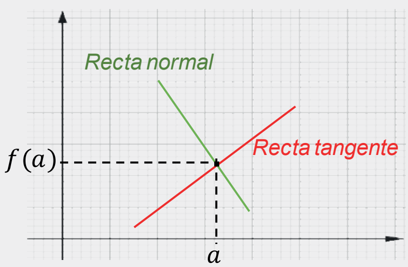
Recta tangente:

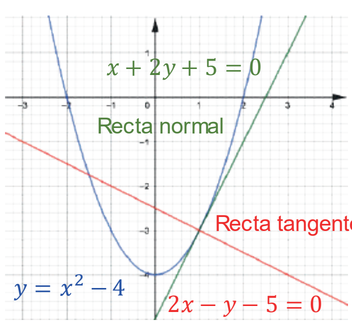
$$L_T:\ y - y_0 = y'(x - x_0)$$

Recta normal:

$$L_N:\ y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0)$$

Representación gráfica





5. Aplicación de las derivadas

Desde la invención de la derivada, sus aplicaciones son diversas en todos los campos de la ciencia, pero también de la tecnología, partiendo de la misma definición de la derivada que es hallar la pendiente de una función en un punto cualquiera, hasta aquellas referidas a la geometría, ingenierías, economía, mecánica, etc.

a) Recta tangente

Es una línea que corta a la gráfica de una función en un solo punto. Para hallar esta recta se precisa conocer el punto donde intersecta y la pendiente del mismo.

Ejemplo:

Hallamos la ecuación de la recta tangente y normal que intersecta a la función en el punto dado.

$$y = x^2 - 4\ ;\quad P(1, -3)$$

$$y = x^2 - 4 \ \Rightarrow\ y' = 2x$$

$f'(x) = y' = m$	$L_T:\ y - y_0 = m(x - x_0)$	$L_N: y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$
$y' = m = 2x$	$y - (-3) = 2(x - 1)$	$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 1)$
$m = f'(1) = 2 \cdot 1$	$y + 3 = 2x - 2$	$2y + 6 = -x + 1$
$m = 2$	$L_T:\ 2x - y - 5 = 0$	$L_N:\ x + 2y + 5 = 0$

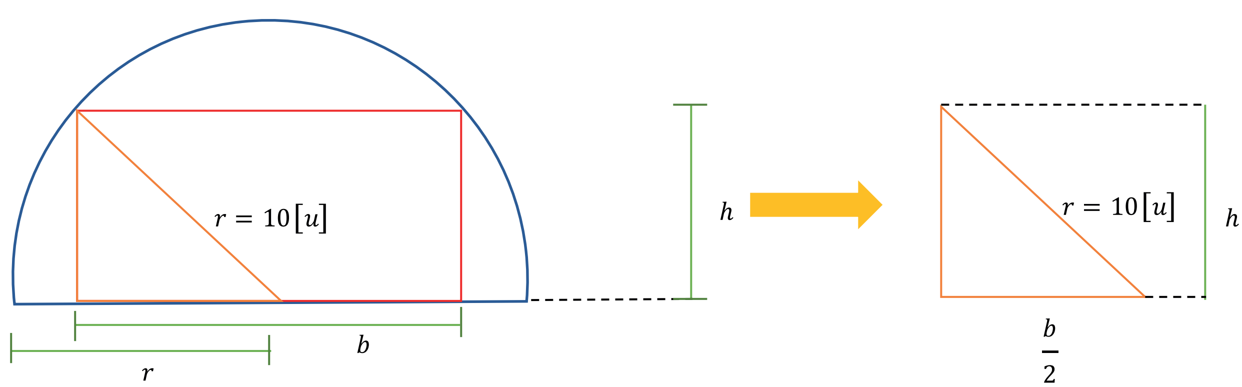
b) Geometría

Otra de las aplicaciones de la derivada, es la maximización y minimización de áreas, perímetros y volúmenes donde involucran figuras geométricas.

Ejemplo:

Hallamos el área máxima de un rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio $r = 10[u]$.

Gráficamente:



Paso 1: La función a maximizar es el área: $A = b \cdot h$

Paso 2: Según el triángulo rectángulo:

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2}$$

Paso 3: Reemplazando h en el área se tendrá:

$$A = b \cdot h \quad \Rightarrow \quad A = b \cdot \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2}$$

Paso 4: Derivamos la función respecto a "b", para maximizar e igualamos a cero:

$$A' = 1 \cdot \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} + \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{-2b}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} \right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} = \frac{b^2}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} \;\Rightarrow\; 4r^2 - b^2 = b^2 \;\Rightarrow\; 4r^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow 2r^2 = b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = 2r^2 \;\Rightarrow\; b = \sqrt{2r^2} \;\Rightarrow\; b = r\sqrt{2} \;\Rightarrow\; b = 10\sqrt{2}$$

Como:

$$b \cdot h = b \cdot \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{\sqrt{4r^2 - 2r^2}}{2} = \frac{\sqrt{2r^2}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Paso 5: Reemplazamos en el área:

$$a = b \cdot h \quad \Rightarrow \quad A = 10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50 \cdot 2 = 100 \quad \Rightarrow \quad A_{max} = 100 \text{ u}^2$$

Actividad

Encontremos la recta tangente y normal de las siguientes funciones en el punto dado:

1) $y = 2x - x^2$; $x_0 = 2$

2) $y = (x+4)^2$; $x_0 = -3$

3) $y = x^3 - x + 1$; $x_0 = 1$

4) $y = \dfrac{x+4}{x-1}$; $x_0 = 0$

Resolvemos los siguientes problemas:

5) La plaza rectangular de la localidad X tiene un área de 36 metros cuadrados, las personas desean colocar valla alrededor de la plaza, encuentra las dimensiones para que la valla sea mínima.

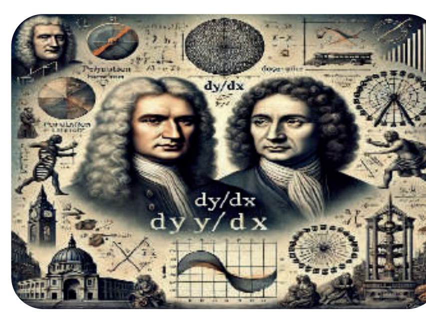
6) En un semicírculo de radio 4 cm, inscribir un rectángulo de área máxima.

7) Un rectángulo de 10 m de diagonal, halla sus medidas para que el área sea máxima.

8) Una caja de forma de paralelepípedo de forma que sus tres aristas sumen 42 cm y la altura sea doble de la base y el volumen máximo.

VALORACIÓN

Isaac Newton y Gottfried Leibniz crearon el cálculo diferencial e integral de manera simultánea. Desarrollaron reglas para manipular las derivadas (reglas de derivación) e Isaac Barrow demostró que la derivación y la integración son operaciones inversas. Newton en 1665 derivaba funciones algebraicas y Leibniz en 1975 le da el carácter geométrico, además de dar el característico $\frac{dy}{dx}$



Fuente: OpenAI, 2024

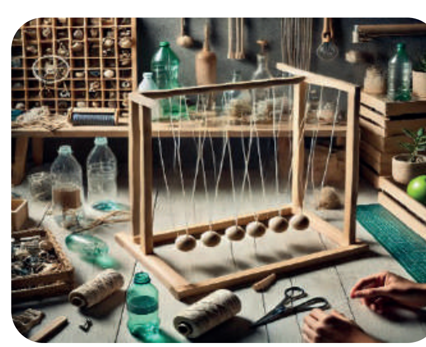
Desde entonces, su aplicación se extiende bastante en la física, matemática, biología, medicina, arquitectura, economía e ingenierías.

- ¿En qué aspectos influye la derivada en las ciencias mencionadas?

PRODUCCIÓN

Averiguamos y construimos con materiales reciclables el Péndulo o cuna de Newton.

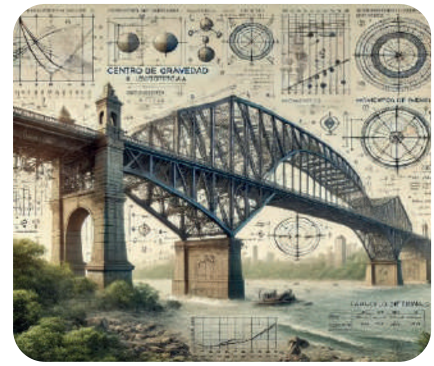
- ¿Qué sucede con el péndulo?
- ¿Qué tipos de movimiento se puede describir?
- Empieza por realizar las colisiones entre dos bolitas, observa el tipo de movimiento que sucede con el choque, luego con tres y así sucesivamente.
- Inicia desplazando inicialmente dos bolas y observa si se desplazan las dos bolas finales.
- A continuación, desplaza las dos bolas de los dos extremos. Al soltar, observa cómo tras la colisión, las otras tres bolas centrales permanecen en reposo y las bolas de los extremos regresan a su posición inicial.


Fuente: OpenAI, 2024

INTEGRALES

PRÁCTICA

Delma es una excelente ingeniera civil. Su especialidad en puentes la hace responsable de una obra muy grande.
Ella debe realizar los cálculos del puente que debe soportar todo el peso posible de los peatones y vehículos, para ello debe tener conocimientos suficientes en estructuras estáticas e isostáticas.
Para este tipo de estructuras, una herramienta básica es el cálculo diferencial e integral, pues mediante ello se puede calcular el centro de gravedad, centro de masa, momentos de inercia, flector e incluso los esfuerzos que ejercerán sobre la estructura, todo ello utilizando la integral de funciones. Con esta base, las estructuras tienden a ser más resistentes y no colapsar ante cualquier contingencia.



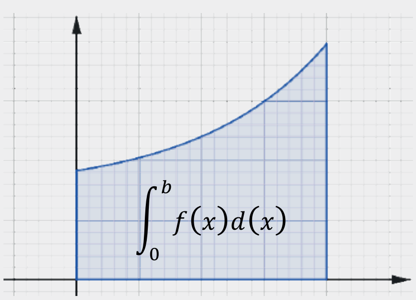
Fuente: OpenAI, 2024

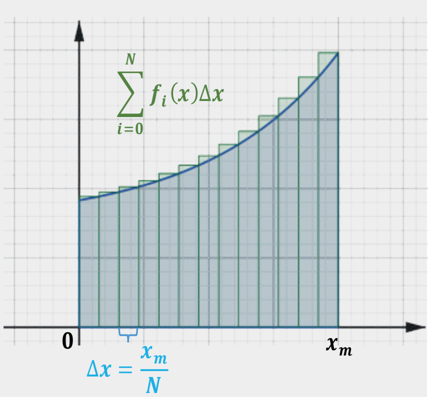
Actividad

Investigamos qué fórmulas se utilizan para calcular los elementos mencionados en el diseño de un puente.

- ¿Cuáles son los puentes más importantes de tu departamento?
- ¿Qué tipo de puentes conoces?

Área bajo la curva





El área bajo la curva es la suma de los pequeños rectángulos que forman el área a calcular (mientras más pequeños, mayor aproximación al área real).

1. Definición

El proceso por el cual se encuentra una función a partir de su derivada se llama integración y el resultado del proceso se llama integral de la derivada.

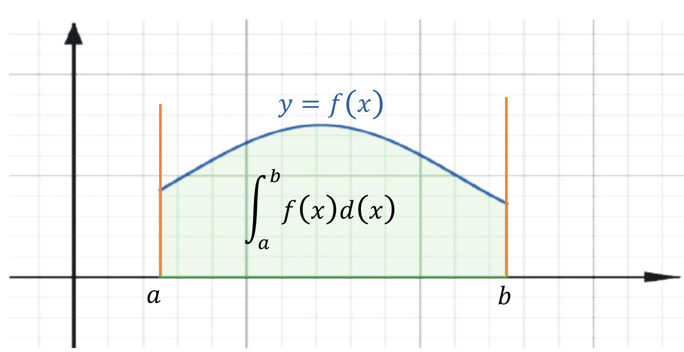
Integrar es el proceso reciproco del de derivar, es decir dada una función $f(x)$, se trata de buscar aquellas funciones $F(x)$ que al ser derivadas conducen a $f(x)$. Geométricamente es el área bajo la curva de una función.

Si la función $f(x)$ es la derivada de la función, es decir, $F(x)=f(x)$ entonces $F(x)$ se llama la función primitiva de $f(x)$, lo cual se simboliza por la expresión:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Por ser la integración una operación inversa de la derivación, el proceso de hallar la integral en los casos más simples, puede hallarse invirtiendo las reglas de derivación.

Interpretación geométrica



Integral definida

Es la representación del área limitada por la gráfica de la función, en un sistema de coordenadas cartesianas con signo positivo cuando la función toma valores positivos y signo negativo cuando toma valores negativos.

2. Integrales Indefinidas

Para representar la integral se emplea el símbolo $\int f(x)d(x)$, que tiene su origen en la inicial de la palabra suma y se representa como $F(x)=\int f(x)dx$, donde $F(x)$ es la primitiva o antiderivada de $f(x)$. De modo que la integral indefinida se escribe como $\int f(x)dx=F(x)+C$, donde C se denomina constante de integración, es una cantidad independiente de la variable de integración.

a) Funciones Primitivas

Es el proceso para hallar la función original, es decir, la función que precedió a una función que ha sido derivada.

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$y=x^2$	$\frac{dy}{dx}=2x$	$dy=2x\,dx$	$\int 2x\,dx=x^2$
$y=x^2+1$	$\frac{dy}{dx}=2x$	$dy=2x\,dx$	$\int 2x\,dx=x^2+1$
$y=5x$	$\frac{dy}{dx}=5$	$dy=5\,dx$	$\int 5\,dx=5x$

Integral indefinida

$$\int f\,(x)dx = F(x) + C$$

Signo integral

Función

Variable de integración

Primitiva f

Constante de integración

Generalizando de acuerdo con la tabla anterior se obtiene:
$\int 2xdx = x^2+C$, donde C es la constante de integración cuyo valor no es definido, salvo que se proporcione algún punto que pertenezca a la función.

b) Propiedades de las Integrales

- La integral de la derivada de una función es la misma función: $\int f(x)´d(x) = f(x)+C$
- La integral de una constante por la función, es la constante por la integral de la función:

$$\int a\cdot f(x)d(x) = a\cdot\int f(x)d(x)$$

- La integral de una suma es la suma de integrales: $\int[f(x)+g(x)]d(x)=\int f(x)d(x)+\int f(x)d(x)$

c) Integrales de algunas funciones especiales

Podemos calcular la integral de una función mediante la tabla proporcionada a continuación que simplifica este proceso de cálculo de integrales, tanto simples, como complejas:

$\int dx = x + C$	$\int \tan(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos(ax))\cdot x$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{x\pm a}dx = \ln(x\pm a) + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$	$\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a}\cdot x + C$
$\int \operatorname{sen} x\;dx = -\cos x + C$	$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a}\cdot x + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\int \tan x\,dx = -\ln(\cos x) + C$	

Tabla de valores

La integral es la inversa de la derivada:

$$\int f'(x)d(x) = f(x)$$

La derivada es la inversa de la integral:

$$[\int f(x)d(x)]' = f(x)$$

La integral de una variable se define:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo:

Calculamos la siguiente integral indefinida:

$$\int 7x^6\, dx = 7\int x^6\, dx = 7\cdot\frac{x^{6+1}}{6+1} + C = 7\cdot\frac{x^7}{7} + C = x^7 + C$$

Ejemplo:

Encontramos la siguiente integral indefinida:

$$\int \sqrt[4]{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{4}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$$

Ejemplo:

Hallamos la siguiente integral indefinida:

$$\int x^2(x^3 - 2x + 1)\, dx = \int (x^5 - 2x^3 + x^2)\, dx = \int x^5\, dx - 2\int x^3\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} - 2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$$

$$= \frac{x^6}{6} - 2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

Ejemplo:

Encontramos la siguiente integral indefinida:

$$\int [\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)]dx = \int \operatorname{sen}(2x)dx - \int \cos(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

3. Métodos de Integración

a) Integración por sustitución o cambio de variable

Sea $u = g(x)$, donde $g'(x)$ es continua en un intervalo, además sea $f(x)$ es continua sobre el rango correspondiente de g y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ entonces:

$$\int f[g(x)]\, g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

Notación

Cuando tenemos varias integrales indefinidas, podemos asumir que:

$$C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n=C$$

La suma de varias constantes de integración dará siempre una constante.

Ejemplo:

Utilizando el método de sustitución, integramos: $\int(x-3)dx$:
Realizamos el cambio de variable: $u = x-3 \implies du = dx$

$$\int (x-3)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(x-3)^2}{2} + C$$

Ejemplo:

Hallamos la integral de: $\int \operatorname{sen}(x-1)dx$

Realizamos el cambio de variable: $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \operatorname{sen}(x-1)dx = \int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C = -\cos(x-1)+C$$

Actividad

Encontramos el valor de las siguientes integrales:

1) $\int 3x^5 dx$

2) $\int (x^3 + 2x^2 - x + 5)\, dx$

3) $\int 3x(x^5 - x^3 + 1)\, dx$

4) $\int e^{3x} dx$

5) $\int \operatorname{sen}(3x)dx$

6) $\int 2\cos(2x)\, dx$

7) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

8) $\int 5\sqrt{x^5} dx$

9) $\int 6x^2(x + \sqrt{x})\, dx$

10) $\int (\operatorname{sen}(3x) - \cos(4x))dx$

11) $\int (x^{-3} + 2x^{-2})dx$

12) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) dx$

b) Integración por partes

La siguiente fórmula nos permite realizar la integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplo:

Encontramos la integral por el método por partes:

$$\int xe^{2x}\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Leftarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\int xe^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Ejemplo:

Hallamos la integral por el método por partes:

$$\int x^6 \ln x\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^6 dx \Leftarrow v = \dfrac{x^7}{7} \end{cases}$$

$$\int x^6 \ln x\,dx = \ln x\cdot\frac{x^7}{7} - \int \frac{x^7}{7}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1}{7}\int x^6\,dx$$

$$= \ln x\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{7} + C = \frac{x^7}{7}\left(\ln x - \frac{1}{7}\right)$$

c) Integrales cuadráticas

Este tipo de integrales, se resuelven aplicando las siguientes integrales de referencia:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\big(f(x)\big) + C \qquad \int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ejemplo:

Hallamos la integral de:

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 1}dx \Rightarrow \{u = x^4 + 1 \Rightarrow du = 4x^3 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4x^3}du$$

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 1}dx = \int \frac{4x^3}{u}\cdot\frac{1}{4x^3}du = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) + C = \ln(x^4 + 1) + C$$

Ejemplo:

Hallamos la integral de:

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}dx \Rightarrow \{u = 1 + \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\,dx \Rightarrow \frac{1}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}dx = \int \frac{\cos x}{u}\cdot\frac{1}{\cos x}du = \int \frac{1}{u}du = \ln u + C = \ln(1 + \operatorname{sen} x) + C$$

Por partes

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

"Una vaca menos la vaca de una" Este es un truco mnemotécnico para recordar la fórmula de la integración por partes.

A tomar en cuenta

Debemos tomar en cuenta, para integrar por partes, generalmente para "u" debe ser las funciones:

$x^n,\ \ln x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \operatorname{sen}^{-1}x, \ldots$

Para "dv" se nombrar a los siguientes términos:

$e^x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x,\ dx$

Ejemplo:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{x\,dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(2x)\,dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{2x\,dx}_{du}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes integrales:

1) $\int x \operatorname{sen} x\,dx =$

2) $\int (x+1)e^x\,dx =$

3) $\int \frac{2}{x^2+4}dx =$

4) $\int 2xe^{4x}\,dx =$

5) $\int (x-1)\ln x\,dx =$

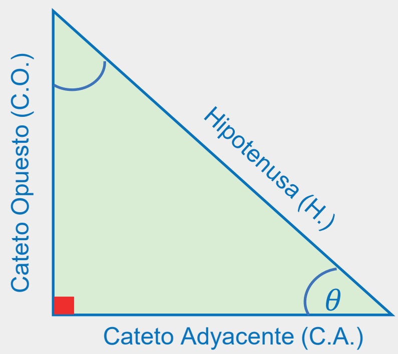
6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x}dx =$

7) $\int x^3 \ln x\,dx =$

8) $\int \frac{3x^2}{x^3+2}dx =$

9) $\int \frac{5}{x^2+36}dx =$

Triángulo rectángulo



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{C.O.}{H.}, \qquad \cos\theta = \frac{C.A.}{H.},$$

$$\tan\theta = \frac{C.O.}{C.A.}$$

d) Integración por sustitución trigonométrica

Debemos tomar en cuenta los siguientes cambios de variables:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \cdot \tan\theta$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \cdot \sec\theta$$

También debemos analizar el triángulo rectángulo que se forma.

Ejemplo:

Calculamos la integral de la siguiente función:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \Rightarrow \{x = 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{2^2-(2\operatorname{sen}\theta)^2}}d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$

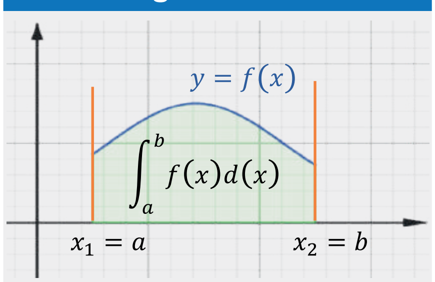
$$= \int d\theta = \theta + C = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4. Integrales definidas

La integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas, la cual da como resultado un valor numérico, se aplicará a partir del Teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Integral definida



a: límite inferior
b: límite superior
F: primitiva de f
$F(a)$: valor numérico de F en a
$F(b)$: valor numérico de F en b
La integral definida ya no lleva la constante de integración

Ejemplo:

Calculamos el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^3 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{243-1}{5} = \frac{242}{5}$$

Ejemplo:

Hallamos el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx \Rightarrow \left\{u = 1+7x \Rightarrow du = 7dx \Rightarrow \frac{1}{7}du = dx\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ en } u = 1+7x \Rightarrow u = 1+7(1) = 8 \\ x = 0 \text{ en } u = 1+7x \Rightarrow u = 1+7(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx = \int_1^8 u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{7}du = \frac{1}{7}\left(\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_1^8 = \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_1^8 = \frac{3}{28}\left(u^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^8 = \frac{3}{28}\left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{28}(16-1) = \frac{3}{28}(15) = \frac{45}{28}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes integrales:

1) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

2) $\int_0^1 (x+3)dx$

3) $\int_0^1 xe^x\,dx$

4) $\int \sqrt{x^2-25}\,dx$

5) $\int_0^1 (2e^x + x^2)dx$

6) $\int_{-1}^2 (x^2 - x + 3)dx$

7) $\int \sqrt{x^2+16}\,dx$

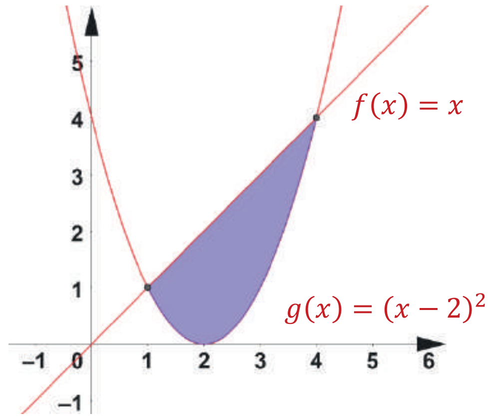
8) $\int_\pi^{2\pi} (\cos(2x) - \operatorname{sen} x)dx$

9) $\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}$

5. Aplicaciones de las Integrales

En esencia, una de las aplicaciones más importantes de la integral, es el cálculo del área bajo la curva de una o más funciones.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$



Ejemplo:

Hallamos el área comprendida entre las curvas:

$$f(x)=x\,;\;\; g(x)=(x-2)^2$$

Se debe calcular el área de la región sombreada en la imagen, pero antes se necesita hallar los ejes de intersección con el eje x, igualando ambas funciones, para determinar los parámetros de la integral que serían: $x=1$; $x=4$.

Por tanto, se debe calcular en la integral de 1 hasta 4, es decir:

$$\int_1^4 (x-(x-2)^2)\,dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+40-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=\frac{8}{3}+\frac{11}{6}=\frac{9}{2}$$

Actividad

Encontramos el área comprendida entre las siguientes funciones:

1) $f(x)=x+2\,,\; g(x)=x^2$
2) $f(x)=9+x^2,\; g(x)=x+3$
3) $f(x)=x^2-4,\; g(x)=4-x^2$
4) $f(x)=x^2-2x,\; g(x)=x+4$
5) $f(x)=8-2x^2,\; g(x)=x^2-4$
6) $f(x)=4x-x^2,\; g(x)=x^2$
7) $f(x)=x+3,\; g(x)=3-x^2$
8) $f(x)=12-x^2,\; g(x)=x^2-6$

VALORACIÓN

Un grupo de empresarios jóvenes decididos a realizar un emprendimiento con el lanzamiento de productos alimenticios para su distribución por raleo, deciden llevar a cabo una campaña promocional con banners, pero sobre todo en redes sociales para la difusión de sus productos, los gastos que genera serán a razón de Bs 280 por día. Los microempresarios estiman que los ingresos están dados a razón de la función $f(x)=40x^2-3x+2400$ y que disminuyen con la duración de la campaña.


Fuente: OpenAI, 2024

- ¿Cómo elaboran el modelo matemático los jóvenes, para realizar el estudio de mercado para generar ganancias?
- ¿Este tipo de mercados nos ayudan aminorar los gastos?
- ¿Cuánto crees que son las utilidades de los microempresarios?

PRODUCCIÓN

Elaboramos la ruleta de la figura con los siguientes materiales:

- 1 hoja de cartulina
- 1 hoja de cartón
- Caja de colores
- Lápices
- Tijera


Fuente: OpenAI, 2024

El juego consiste en que 4 participantes, cada uno de forma sucesiva, giran la ruleta dos veces y donde marque la flecha anota las funciones correspondientes (si repite la función, vuelve a girar) y para el intervalo $0<x<5$ debe de hallar el área correspondiente entre las dos funciones seleccionadas. El primer participante que completa 4 áreas solicitadas gana el juego.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ELIPSE E HIPÉRBOLA

La elipse

1) Con los siguientes datos, encontramos gráficamente y analíticamente la ecuación de la elipse:

a) $V(\pm 4\,,0);\;\; F(\pm 2\,,0)$ **c)** $V(0\,,\pm 5);\;\; F(0\,,\pm 1)$ **e)** $V(\pm 7,0);\;\; F(\pm 3\,,0)$

b) $V(\pm 4\,,0);\;\; e=0.75$ **d)** $F(0\,,3);\;\; D\!:\; y{=}\pm 4$ **f)** $B(0\,,\pm 2);\;\; LR=1.6$

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación de la elipse, si tenemos los siguientes datos:

2) Vértices en los puntos $(-1\,,6)$ y $(9\,,6)$ y de focos los puntos $(1\,,6)$ y $(7\,,6)$

3) Centro en $(1,3)$ uno de sus vértices es $(-2,3)$ y excentricidad un tercio.

4) De centro en $(4\,,-1)$ uno de sus focos es $(1\,,-1)$ y pasa por el punto $(8\,,0)$

5) Vértices en los puntos $(-2\,,1)$ y $(6\,,1)$ y de excentricidad un medio.

6) Focos en los puntos $(3\,,2)$ y $(5\,,2)$ y de excentricidad un tercio.

7) Directriz en la recta $x+1=0$ uno de los focos es $(4\,,-3)$ y excentricidad dos tercios.

8) Centro en $(4\,,2)$ uno de sus vértices es $(9\,,2)$ y foco en el punto $(7\,,2)$

9) Vértices menores en los planos $(-1\,,6)$ y $(-1\,,-2)$ y de lado recto treinta y dos quintos.

10) Foco en el punto $(4\,,1)$ directriz en la recta $3x-28=0$ y de excentricidad tres quintos.

11) Encontramos los elementos y la gráfica de las siguientes elipses:

a) $9x^2+4y^2-36x-40y+100=0$ **b)** $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$

12) Hallamos la distancia entre el centro de la elipse $4x^2+9y^2-48x-72y+144=0$ y la recta $x+2y+2=0$

La hipérbola

1) Con los siguientes datos, encuentra gráficamente y analíticamente la ecuación de la hipérbola:

a) $V(\pm 2\,,0);\;\; F(\pm 4\,,0)$ **b)** $V(0\,,\pm 1);\;\; F(0\,,\pm 4)$ **c)** $F(\pm 5\,,0);\;\;\; e=\frac{5}{3}$

Hallamos gráfica y analíticamente la ecuación de la hipérbola, si tenemos los siguientes datos:

2) Vértices en los puntos $(2\,,5)$ y $(8\,,5)$ y lado recto igual a ocho tercios.

3) Focos en los $(1\,,-1)$ y $(1\,,3)$ y de excentricidad igual a dos.

4) Centro en $(-1\,,2)$ uno de sus vértices es el punto $(-1\,,5)$ y de foco en el punto $(-1\,,-3)$

5) Centro en $(1\,,2)$ de eje real vertical, excentricidad $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$ y de lado recto igual a nueve.

6) Centro en $(-3\,,1)$ uno de sus vértices es el punto $(-6\,,1)$ y foco en el punto $\left(-3+\sqrt{13},1\right)$

7) Vértices en $(3\,,3)$ y $(3\,,5)$ y cuyos focos están en los vértices de la elipse $9x^2+y^2+54x-8y+88=0$

8) Pasa por el punto $(2\,,1)$ si las ecuaciones de sus asíntotas son $y=\pm\frac{3x}{4}$

9) Vértices en $(-1\,,\,-1)$ y $(3\,,-1)$ y una de sus asíntotas es la recta $3(x-1)=2(y+\;1)$

10) Encuentra los elementos y la gráfica de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0$ **b)** $4x^2-y^2-40x-8y+68=0$

11) Encuentra los puntos de intersección entre la hipérbola $2x^2-y^2-4=0$ y la circunferencia $x^2+y^2-8=0$

12) Determina los puntos de intersección entre $x^2-2y^2+x+8y-8=0$ y $3x^2-4y^2+3x+16y-18=0$

TEORÍA DE CONJUNTOS

1) Dados los conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \quad A = \{x \in U \ / \ 3 < x < 7\}; \quad B = \{x \in U \ / \ 2 \leq x \leq 6\}; \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Encuentra los siguientes conjuntos:

a) $A \cap B \cap C =$ **d)** $(B \cup C)^c =$ **g)** $A \Delta (B \cup C) =$ **j)** $(A \Delta C)^c =$

b) $A - B =$ **e)** $(A - B) \cap B =$ **h)** $(A - B) \cup B =$ **k)** $(A \cap B)^c =$

c) $B \cap C =$ **f)** $(B - C) \Delta (A - C) =$ **i)** $(A \cup C) \cap B =$ **l)** $A^c \cup B^c =$

Resolvemos los siguientes problemas:

2) En un grupo de estudiantes del curso preuniversitario, 60 estudian Ingeniería Civil; 40 Ingeniería Química y 15 ambas carreras. ¿Cuántos estudian sólo Ingeniería Civil y cuántos sólo Ingeniería Química?

3) En un curso 11 estudiantes practican fútbol y básquet, 15 fútbol pero no básquet y 14 básquet pero no fútbol. Si todos los estudiantes practican por lo menos uno de los dos deportes. **a)** ¿Cuántos estudiantes hay en el curso? **b)** ¿Cuántos practican fútbol?

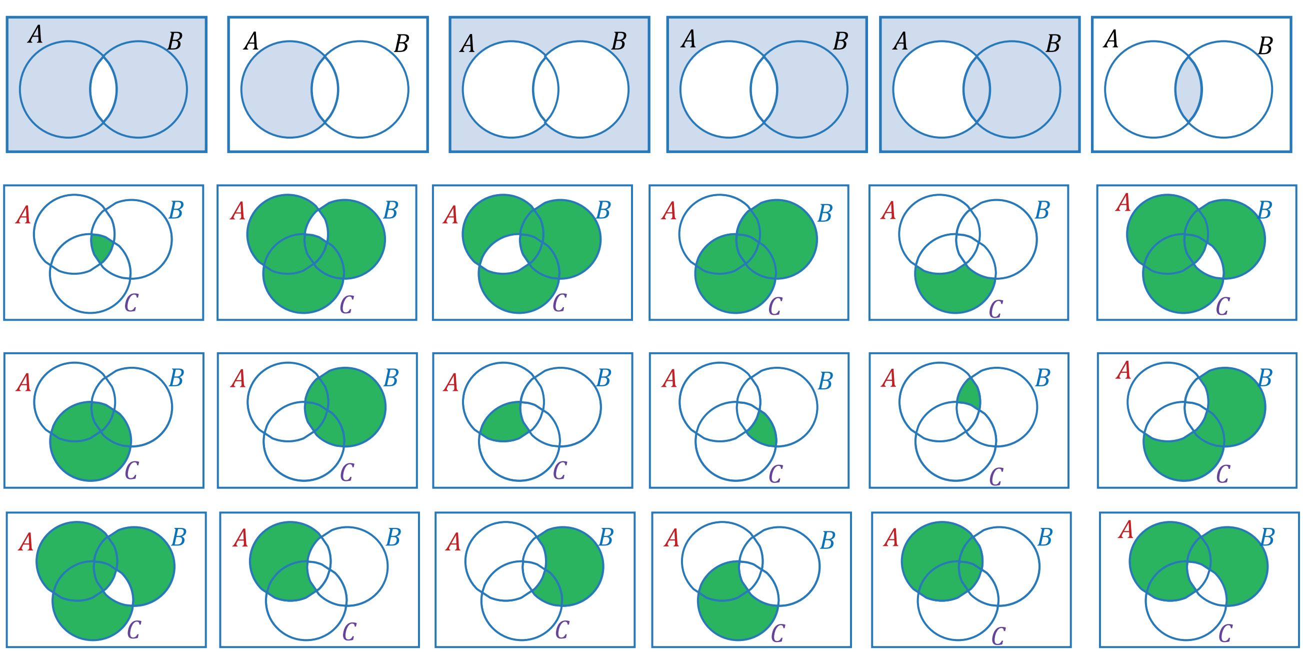
4) De 33 personas que viajaron a Europa, 15 visitaron Francia, 16 España, 16 Suiza, 5 visitaron Francia y Suiza, 5 visitaron España y Suiza y 2 los tres países. ¿Cuántos visitaron únicamente Francia? ¿Cuántos visitaron España o Suiza pero no Francia? ¿Cuántos visitaron Francia y Suiza pero no España.

5) En una encuesta a 115 personas sobre sus preferencias en bebidas gaseosas se determinó que a 41 personas le gusta salvietti; a 48 fanta; a 62 coca cola; a 16 personas salvietti y fanta; a 20 salvietti y coca cola; a 17 fanta y coca cola y sólo a 5 personas les gusta las tres bebidas. ¿A cuántas personas no le gusta ninguna de estas gaseosas?, ¿a cuántas les gusta sólo una?, ¿a cuántas les gusta dos gaseosas?

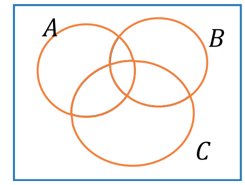
6) Una encuesta a 140 mujeres acerca de la flor que más les gusta arrojo los siguientes resultados: a 88 les gusta las rosas, a 61 los claveles, a 60 les gustaba o las rosas o los claveles pero no las margaritas, a 8 les gustaba los tres tipos de flores, a 21 les gustaba las margaritas y los claveles y a 40 preferían únicamente a las rosas o únicamente a los claveles y a 20 les gusta sólo las rosas. ¿Cuántas preferían las margaritas? ¿Cuántas preferían las rosas o las margaritas pero no los claveles? ¿A cuántas les gustaba solamente un tipo de flor? ¿A cuántas les gustaba solamente dos tipos de flor a la vez?

7) Sobre 480 estudiantes de Ingeniería que se habían cursado las materias de cálculo, álgebra y física, se encontró que aprobaron, 47 álgebra, 26 cálculo, 35 física, 12 álgebra y cálculo, 14 álgebra y física, 8 cálculo y física, solo 5 aprobaron las tres materias. ¿Cuántos aprobaron únicamente álgebra? ¿Cuántos aprobaron únicamente física? ¿Cuántos no aprobaron ninguna materia?

8) Indica las operaciones que representa a los siguientes diagramas de Venn:



9) En el siguiente diagrama de Venn, representa con colores cada expresión dada:



a) $A \cap (B \cup C) =$ **d)** $A^c \cup (B - C) =$ **g)** $A^c \cup B =$

b) $A \cap (B \cap C) =$ **e)** $(A - B) \cap (B - C) =$ **h)** $(A - C)^c =$

c) $A \cup (B \cap C) =$ **f)** $A^c \cup B =$ **i)** $(A \Delta B)^c =$

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Limites

1) Por simple inspección, calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x+2} =$ c) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{3x+5} =$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x} =$ g) $\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-3} =$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x+3}{x+1} =$ d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+x-30} =$ f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3}{2-x^2} =$ h) $\lim_{x\to 2} \frac{3-x}{x+2} =$

2) Resolvemos los límites algebraicos:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2-x} =$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^3-(1-x)^2} =$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+9}-3} =$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2-18x-10} =$ e) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-2x} - \frac{x}{x-2}\right) =$ h) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}}{x-2} =$

c) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} =$ f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} =$ i) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{3x-\sqrt{x^2+8}} =$

3) Resolvemos los límites trigonométricos, exponenciales y logarítmicos:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(10x)-x}{\operatorname{sen}(4x)-x} =$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$ i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{8x}-e^{2x}}{\operatorname{sen}(8x)-\tan(2x)} =$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)-\tan(3x)}{\tan(2x)-\operatorname{sen} x} =$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-e^{2x}}{\operatorname{sen}(5x)-\tan(2x)-x} =$ j) $\lim_{x\to \infty} \left[\frac{x^2+1}{x^2-2}\right]^{x^2} =$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}} =$ g) $\lim_{x\to 2} [5x-9]^{\frac{5}{x-2}} =$ k) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1} =$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(15x)-3x}{\operatorname{sen}(7x)-x} =$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{6x}-e^{3x}}{x} =$ l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2-5x}{x+4}\right)^{x+1} =$

4) Encontramos el valor de a y b para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos dados:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3ax-4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2a-3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x+a & si \quad x < -1 \\ x^2-ax+b & si \quad -1 \leq x \leq 4 \\ 2b-x & si \quad x > 4 \end{cases}$

Derivadas

1) Encontramos por definición las siguientes derivadas:

a) $f(x) = 3x-7$ **c)** $f(x) = x^2+2x-3$ **e)** $f(x) = \sqrt{x+2}$

b) $f(x) = x-10$ **d)** $f(x) = x-x^2$ **f)** $f(x) = x^3-x^2-2x-1$

2) Determinamos la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2-3x+7$ **g)** $y = 5x^3+12x-100$

b) $y = \operatorname{sen} x-2\cos x+3\tan x-4\sec x$ **h)** $y = \operatorname{sen} x+2\tan x+5x^2-6x+50$

c) $y = 10x+\operatorname{sen} x+x^2+2$ **i)** $y = 5x^3+12x-100$

d) $y = (x^2+x-1)^2$ **j)** $y = (2x^2-5x-3)^3$

e) $y = \ln(x^2-3x-2)$ **k)** $y = \ln(x^3-\operatorname{sen} x+\cos x)$

f) $y = e^{2x}+x^2-3x-10+\operatorname{sen} x$ **l)** $y = 5e^x+\tan x-\ln(3x-1)$

3) Encontramos la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (x + \operatorname{sen} x)(2x^3 + x^2 - 3x + 1)$

b) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\tan x - \operatorname{cotan} x)$

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}$

e) $y = \dfrac{3 - x}{x - 1}$

f) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + e^x}$

g) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}\right)$

h) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right)$

i) $y = (x^3 + 2x^2 - 3x + 4)(x^2 - 4)$

j) $y = (x^2 + x - 1)(x + 3)$

k) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

l) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2}{\operatorname{sen} x - 2}$

m) $y = \dfrac{x - 1}{\operatorname{sen}(2x) + 1}$

n) $y = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

o) $y = \dfrac{a}{2}\ln(x^2 - a^2) + \dfrac{2}{a}\ln\left(\dfrac{x - a}{x + a}\right)$

p) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Integrales

1) Hallamos la integral de las siguientes funciones, aplicando el método que corresponde:

a) $\int x\sqrt{x + 1}dx =$

b) $\int x^2(2x^3 - 5)^4 dx =$

c) $\int \dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 3}dx =$

d) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}dx =$

e) $\int (x - 1)\ln x dx =$

f) $\int x^2 \ln x dx =$

g) $\int x(5x^2 + 4)^3 dx =$

h) $\int 3x^2\sqrt{x^3 + 5}dx =$

i) $\int \dfrac{e^x}{1 + e^x}dx =$

j) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}} =$

k) $\int (x + 1)e^x dx =$

l) $\int x \arctan x dx =$

m) $\int x\sqrt{2x^2 - 4}dx =$

n) $\int x e^{x^2} dx =$

o) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx =$

p) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}}dx =$

q) $\int \operatorname{sen}(2x)e^{3x}dx =$

r) $\int \cos(2x)e^{2x}dx =$

2) Aplicando el teorema fundamental del cálculo, encuentra el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{2}(x + 3)(2x - 1)dx =$

b) $\int_{0}^{\pi}(\operatorname{sen} 3x + \cos 2x)dx =$

c) $\int_{0}^{1}\dfrac{x}{2 - x^2}dx =$

d) $\int_{-1}^{1}x(x^3 - 2x + 3)dx =$

e) $\int_{0}^{1}\left(2e^{2x} + \dfrac{2}{x^2}\right)dx =$

f) $\int_{0}^{1}\dfrac{10x}{\sqrt{5x^2 + 4}}dx =$

g) $\int_{1}^{4}(x^2 - x + 1)^2 dx =$

h) $\int_{0}^{3}2x\sqrt{x^2 + 4}dx =$

i) $\int_{2}^{5}\dfrac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 2}dx =$

3) Determinamos el área de las siguientes funciones:

a) $f = 2 - x$; $g = x^2$

b) $f = x - 4$; $g = x^2 + 2x - 2$

c) $f = x^2 - 4x + 5$; $g = x + 1$

d) $f = x^2 - 5x + 6$; $g = 2x$

e) $f = x(x - 2)$; $g = 3x - x^2$

f) $f = x^2 - 2x$; $g = 4x - x^2$

g) $f = 2x - x^2$; $g = x^2$

h) $f = (1 - x)(x + 3)$; $g = (x + 1)(x - 3)$

(Ejercicios y problemas recopilados)

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA

PRÁCTICA

Construyendo un operador binario

Los operadores matemáticos definen las operaciones básicas que actúan sobre los números y otras construcciones matemáticas. Normalmente, los operadores toman entre uno y dos números como entrada y devuelven un número como salida.

Los operadores siempre deben estar acompañados de una ley de formación para que tengan un sentido lógico, puesto que al resolver se emplea procedimientos que deben seguir la secuencia lógica de las operaciones aritméticas, que se transforman sujeto a ciertas reglas en una o varias cantidades; basándonos en el principio de valor numérico; es decir, cambiando letras por números. Mediante el razonamiento debemos proceder a analizar nuevas operaciones, definiciones y aplicarlos bajo ciertas condiciones o restricciones.

Los criterios para resolver cualquier operador matemático son:

- Identificamos el operador y la regla para operar.
- Aplicamos la regla dada para encontrar el resultado.

Operador

$$\underbrace{a * b}_{\text{Operación binaria}} = \underbrace{a + b + ab}_{\text{Ley de formación}}$$

Ejemplo:

- $a * b = a^2 + 2b + 5$ si $a = 2$, $b = 3$

  $2 * 3 = 2^2 + 2(3) + 5 = 15$

- $a\blacklozenge b = 2a + 3b$; si $a = 3$, $b = 4$

  $\Rightarrow 3\blacklozenge 4 = 2(3) + 3(4)$

  $= 6 + 12 = 18$

  $\Rightarrow 3\blacklozenge 4 = 18$

- $A^{\theta} = 2A^2 - 5A + 3$; si $A = -2$

  $\Rightarrow (-2)^{\theta} = 2(-2)^2 - 5(-2) + 3$

  $= 8 + 10 + 3 = 21$

  $\Rightarrow (-2)^{\theta} = 21$

Actividad

Resolvemos los siguientes operadores:

1) $x * y = x \cdot y + 1$

   Halla: $(1 * 2) * 3 =$

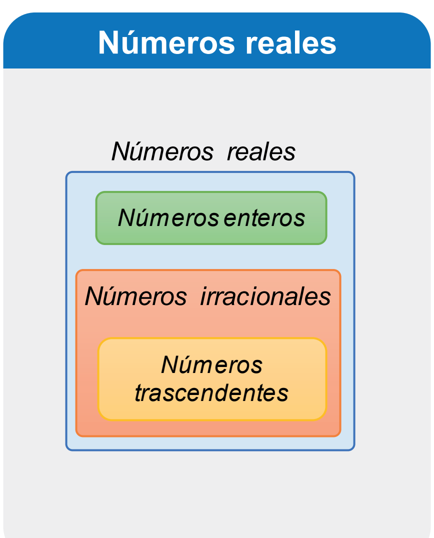
2) $a \otimes b = 2a + 4b + 3$

   Calcula: $(8 \otimes 5) + (9 \otimes 7) =$

TEORÍA

1. Operaciones con números reales

Para realizar operaciones con números reales es necesario recurrir a los axiomas que sustentan las operaciones en dicho conjunto. Los axiomas de adición, multiplicación y distribución sobre el conjunto de los números reales serán expuestos paulatinamente.



Axiomas para la adición

A.1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a + b \in \mathbb{R}$ (Clausura)

A.2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$ (Conmutatividad)

A.3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad)

A.4. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = 0 + a = a$ (Neutro aditivo)

A.5. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, -a \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (Inverso aditivo)

Ejemplo:

Si a y b pertenecen a los números reales, demostramos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,; \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Si $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b^2} \geq 0$

$$\Rightarrow\; a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow\; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ejemplo:

Hallamos el valor de:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\left[\left(\sqrt{\left(\frac{3}{5}+0.2\right)\cdot 0.\hat{5}}\right)\cdot 0.1\hat{6}\right]^{-2}}$$

Operamos la raíz y el decimal

$$\sqrt[6]{\frac{1}{64}}+\left[\left(\sqrt{\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{10}\right)\cdot\frac{5-0}{9}}\right)\cdot\frac{16-1}{90}\right]^{-2}=\frac{1}{2}+\left[\left(\sqrt{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{9}}\right)\cdot\frac{15}{90}\right]^{-2}$$

Operaciones en los paréntesis

$$=\frac{1}{2}+\left[\left(\sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{9}}\right)\cdot\frac{1}{6}\right]^{-2}=\frac{1}{2}+\left[\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\frac{1}{6}\right]^{-2}=\frac{1}{2}+\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right]^{-2}=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{9}\right]^{-2}$$

Simplificamos en la raíz y operación en exponente

$$=\frac{1}{2}+9^2=\frac{1}{2}+81=\frac{163}{2}$$

Ejemplo:

Hallamos el valor de:

$$\sqrt[3]{3+\frac{3}{8}}+4.5\div\frac{3}{2}-\frac{2}{9}-1.\hat{2}$$

Operamos la raíz y el número decimal

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+\frac{45}{10}\div\frac{3}{2}-\frac{2}{9}-\frac{12-1}{9}=$$ Operamos la raíz y en las fracciones

$$=\frac{3}{2}+\frac{90}{30}-\frac{2}{9}-\frac{11}{9}$$ Simplificamos la fracción

$$=\frac{3}{2}+3-\frac{2}{9}-\frac{11}{9}$$ Sacamos el común denominador

$$=\frac{27+54-4-22}{18}=\frac{55}{18}$$ Resultado

2. Exponentes y radicales

Las transformaciones que se pueden realizar con los exponentes son denominadas leyes de los exponentes, ellos junto al grupo axiomático de los números reales permiten realizar simplificaciones y operaciones aritméticas o algebraicas.

Ejemplo:

Simplificamos la siguiente expresión:

$$E=\frac{3^{x+3}+3^{x+2}-3^{x+1}}{3^{x+2}+2\cdot 3^x}$$

Separamos los exponentes de las bases y luego se factoriza

$$E=\frac{3^x\cdot 3^3+3^x\cdot 3^2-3^x\cdot 3^1}{3^x\cdot 3^2+2\cdot 3^x}=\frac{3^x\cdot(27+9-3)}{3^x\cdot(9+2)}$$

Simplificamos, sumamos y restamos

$$=\frac{33}{11}=3 \quad\Rightarrow\quad E=3$$

Axiomas

Axiomas de la multiplicación

Clausura:

$\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ a\cdot b\in\mathbb{R}$

Conmutatividad:

$\forall\ a,b\in\mathbb{R}:\quad a\cdot b=b\cdot a$

Asociatividad:

$\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}:\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Neutro multiplicativo:

$\forall\ a\in\mathbb{R},\ \exists\ 1\in\mathbb{R}:\ a\cdot 1=1\cdot a=a$

Inverso multiplicativo:

$\forall\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ \exists\ a^{-1}\in\mathbb{R}:$

$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$

Axiomas de distributividad

$\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}:$

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

También

$(b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a$

Leyes de exponentes

Leyes de exponentes

$\forall\ x,y,p\in\mathbb{N};\ \forall\ a,b\in\mathbb{R}:$

$(a^y)^x=(a^x)^y=a^{x\cdot y}$

$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^y$

$(a^x\cdot b^y)^p=a^{x\cdot p}\cdot b^{y\cdot p}$

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x};\quad b\neq 0$

$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};\quad a\neq 0$

$a^{m^{n^p}}=a^{m^x}=a^z$

Propiedades

Exponentes cero

Si $a\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$: $a^0=1$

Exponente negativo

Si $n\in\mathbb{N}$ y $a\neq 0$: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

consecuencia:

$\frac{1}{a^{-n}}=a^n$

Exponente fraccionario

Si $m,n\in\mathbb{N}$: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Nota: $(a^x)^y\neq a^{x^y}$

Propiedades

Leyes de radicales

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b};\quad n\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad b\neq 0$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot q]{a^{m\cdot q}}$

$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$

$\sqrt[n]{a^n}=|a|$; *si* n *es par*

$\sqrt[n]{a^n}=a$; *si* n *es impar*

Racionalizacion

Racionalizaciones

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^q}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-q}}}{\sqrt[n]{b^{n-q}}},\qquad n>q$$

Por su conjugada

$$\frac{z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$$

Para $\pm$ de raíces cubicas

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

Axiomas de igualdad

Si: $a,b,c\in\mathbb{R}$

Reflexiva:

$a=a$

Simetría:

$a=b\ \Rightarrow\ b=a$

Transitividad:

$a=b\ \wedge\ b=c\Rightarrow a=c$

Ejemplo:

Simplificamos la siguiente expresión:

$$E=\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}=\frac{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}=\frac{\frac{\sqrt{(1+a)^2}+\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1+a}}}{\frac{\sqrt{(1+a)^2}-\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1+a}}}$$

$$=\frac{1+a+1-a}{1+a-1+a}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}\qquad\Rightarrow\qquad E=\frac{1}{a}$$

Ejemplo:

Simplificamos:

$$P=\left[\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{3}}\right]\cdot 2^{-1}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{27}$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right]\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9\cdot 3}=\left[\frac{2(2+\sqrt{3})}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}$$

$$=\left[\frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3}\right]\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}=[2(2+\sqrt{3})]\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

$$=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\qquad\Rightarrow\qquad P=2$$

Ejemplo:

Racionalizamos:

$$Q=\frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{x+2-x+2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\qquad\Rightarrow\qquad Q=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$$

Ejemplo:

Simplificamos:

$$E=\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}\right)\left(\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}}\right)\left(\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)\qquad \text{si}\quad abc=u^8$$

$$E=\left(\sqrt{a\sqrt{\sqrt{b^2c}}}\right)\left(\sqrt{b\sqrt{\sqrt{c^2a}}}\right)\left(\sqrt{c\sqrt{\sqrt{a^2b}}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^4b^2c}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{b^4c^2a}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{c^4a^2b}}}\right)=\sqrt[8]{a^7b^7c^7}=\sqrt[8]{(u^8)^7}=u^7$$

Actividad

Simplificamos al máximo las siguientes expresiones algebraicas:

1) $3^{2-6x}\cdot 9^{4x-5}\cdot 9^{6-4x}=$

2) $\left(\frac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}\right)^{\frac{1}{2}}=$

3) $(2^{-n}+3^{-n}+4^{-n})^{\frac{1}{n}}\cdot(6^n+8^n+12^n)^{-\frac{1}{n}}=$

4) $\left(\frac{9^{x+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3^{x-2}}}{\sqrt{3^{-1}}\cdot\sqrt{3^x}}\right)^{\frac{1}{x}}=$

5) $\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}=$

3. Operaciones con expresiones algebraicas

Son operaciones que involucran la suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas. En su forma combinada, son de uso común en las aulas universitarias.

Ejemplo:

Hallamos el valor de "k" para que la siguiente división sea exacta:

$$5x^6 - 4x^4 + kx^3 - (k+3)x^2 + 4 \text{ entre } x - 2$$

Aplicamos el Teorema de residuo: $R = 0$, $x = 2$, entonces

$$R = 5(2)^6 - 4(2)^4 + k(2)^3 - (k+3)\cdot(2)^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow 5\cdot 64 - 4\cdot 16 + k\cdot 8 - (k+3)\cdot 4 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow 320 - 64 + 8k - 4k - 12 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow 4k = -248 \Rightarrow k = -62$$

Ejemplo:

Determinar los dos números consecutivos: $a>b$, que cumplen la siguiente relación:

$$\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right]\left[\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right] = 5$$

Desarrollando:

$$\left[\frac{a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2}{(a+b)(a-b)}\right]\left[\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right] = 5$$

$$\left[\frac{2a^2 + 2b^2}{(a+b)(a-b)}\right]\left[\frac{(a+b)(a+b)}{2ab}\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right] = 5$$

$$\left[\frac{2(a^2 + b^2)}{(a+b)(a-b)}\right]\left[\frac{(a+b)(a+b)}{2ab}\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right] = 5$$

Simplificando:

$$\frac{a+b}{a-b} = 5 \Rightarrow a+b = 5a - 5b \Rightarrow 4a = 6b \Rightarrow 2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

Comparando: $a = 3,\ b = 2 \Rightarrow 3 > 2$

Teoremas de igualdad

Si: $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a = b \Rightarrow a+c = b+c$

$a = b \Rightarrow a\cdot c = b\cdot c$

$a = b \wedge c = d \Rightarrow a+c = b+d$

$a = b \wedge c = d \Rightarrow a-c = b-d$

$a = b \wedge c = d \Rightarrow a\cdot c = b\cdot d$

$a = b \wedge c = d \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Teorema del residuo

Teorema del Resto:

Si

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + R(x)$$

División exacta: $R(x) = 0$

$D(x) = C(x)\cdot d(x)$

$d(x)$: $x = \pm a$

$R(a) = D(a) = 0$

VALORACIÓN

Realizamos un debate en clase para conversar sobre:

- ¿Cómo influyen los conocimientos del manejo algebraico en un examen de admisión a una institución de educación superior? ¿Crees que es importante saber álgebra para tu vida universitaria y profesional?
- Citamos por lo menos 5 instancias en tu vida donde aplicaste el álgebra. Tomamos nota sobre las opiniones de las y los compañeros.

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

Producción práctica: Resolvemos y simplificamos las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(a+n)^2 + 2(a^2+n^2) + (a-n)^2}{(a+n)^2 - (a-n)^2} =$

b) $\dfrac{a+\sqrt{a-n}}{a-\sqrt{a-b}} + \dfrac{a-\sqrt{a-n}}{a+\sqrt{a-b}} =$

c) $\sqrt{\dfrac{2^{2n+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2^{n-2}}}{\sqrt{2^{-1}}\cdot\sqrt{2^n}}} =$

- Halla el valor de k para que la división sea exacta: $[x^4 + kx^3 + 2(k+1)x^2 - (k+8)x - k + 1] \div (x-1)$
- Si $a+b+c = 0$ encuentre el valor de:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} + \frac{b-c}{a}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{b}{c-a} + \frac{a}{b-c}\right)$$

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA: ECUACIONES

PRÁCTICA

Construimos una función lineal en base a una ecuación lineal.

La construcción de modelos lineales a través de una función lineal requiere de: (1) identificar las cantidades que cambian, luego, definir las variables (letras) que describan dichas cantidades, (2) identificar la variable dependiente e independiente; las que serán variables de salida y entrada en el modelo, (3) se identifica el valor inicial y la tasa de cambio del modelo lineal, (4) escribir, en lo posible, una expresión (ecuación) para la función lineal, también se puede realizar por tabla de valores.

Aneth, es una estudiante universitaria que planea pasar el verano en Cochabamba. Ahorró Bs 5500 para su viaje y prevé gastar Bs 300 cada semana en comida y en algunas actividades. Escriba un modelo lineal que represente la situación. Escriba la función como ecuación, resuelve e interprete el resultado. Con la función lineal, ¿en cuántas semanas se acaba el dinero de Aneth?

Cantidades que cambian: (1) dinero restante del ahorro luego de algún gasto.; (2) tiempo en semanas

Variables de entrada y salida: M: dinero restante (variable de salida o dependiente), luego, denotamos con $f(x)$, una función. t: tiempo en semanas (variable de entrada o independiente)

Variables de inicio: Bs 5500
Tasa de cambio: Bs/semana.
Modelo lineal: $f(t)=5500-300t$

Actividad

En nuestro diario vivir, tenemos situaciones para modelizar algunas problemáticas:

- Comenta con tus compañeras y compañeros algunas de estas situaciones para trabajar en grupos.
- Construimos un modelo lineal e interpretamos algunos resultados proyectivos.
- Escribimos como ecuación la función modelizada, resolvemos e interpretamos el resultado.

TEORÍA

Datos

Ecuaciones equivalentes

Sea: $A(x)=B(x)$ *una ecuación, entonces*

$$A(x)\pm m = B(x)\pm m$$
$$A(x)\cdot m = B(x)\cdot m$$
$$\frac{A(x)}{m}=\frac{B(x)}{m}\;;\quad m\neq 0$$
$$[A(x)]^m = [B(x)]^m$$
$$\sqrt[m]{A(x)}=\sqrt[m]{B(x)}$$

son ecuaciones equivalentes para m una cantidad o expresión independiente de x, pero:

$$A(x)\cdot m = B(x)\cdot m$$
$$\frac{A(x)}{m}=\frac{B(x)}{m}\;;\quad m\neq 0$$
$$[A(x)]^m = [B(x)]^m$$
$$\sqrt[m]{A(x)}=\sqrt[m]{B(x)}$$

habrá soluciones extrañas si m depende de x.

1. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Recordemos que una ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas que se cumple para ciertos valores de las variables. Los axiomas y teoremas de la igualdad permiten realizar operaciones sobre dichas igualdades.

Ejemplo:

Hallamos el valor de x en la siguiente ecuación:

$$(x+a)^2+(x-a)^2-2=x(2x+a^2)-x$$

Desarrollando:

$$x^2+2ax+a^2+x^2-2ax+a^2-2=2x^2+a^2x-x$$
$$x-xa^2=2-2a^2 \quad\Rightarrow\quad x(1-a^2)=2(1-a^2) \quad\Rightarrow\quad x=2$$

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+a}+\frac{1}{\sqrt{x}+b}=\frac{1}{\sqrt{x}-a}+\frac{1}{\sqrt{x}-b}$$

Reordenando y desarrollando:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+a}-\frac{1}{\sqrt{x}-a}=\frac{1}{\sqrt{x}-b}+\frac{1}{\sqrt{x}+b}$$

$$\frac{\sqrt{x}-a-\sqrt{x}-a}{(\sqrt{x})^2-a^2}=\frac{\sqrt{x}+b-\sqrt{x}+b}{(\sqrt{x})^2-b^2}$$

$$\frac{-2a}{x-a^2}=\frac{2b}{x-b^2} \quad\Rightarrow\quad -ax+ab^2=bx-a^2b$$
$$\Rightarrow\quad ax+bx=ab^2+a^2b$$
$$\Rightarrow\quad x(a+b)=ab(a+b) \quad\Rightarrow\quad x=ab$$

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$(x-1)^2+11x+199=3x^2-(x-2)^2$$

Desarrollando:

$$x^2-2x+1+11x+199=3x^2-x^2+4x-4$$
$$\Rightarrow\ 3x^2-x^2+4x-4-x^2+2x-1-11x-199=0$$
$$\Rightarrow\ x^2-5x-204=0\ \Rightarrow\ (x-17)(x+12)=0$$
$$\Rightarrow\ x_1=17,\ \ x_2=-12$$

Ejemplo:

Dadas las ecuaciones cuadráticas $x^2-2ax+a^2=0$ y $x^2-akx+(k+3)a^2=0$. ¿Para qué valores de k, la segunda ecuación tiene raíces iguales a los triples de las raíces de la primera ecuación?

Partimos de la ecuación:

$$x^2-2ax+a^2=0\ \Rightarrow\ (x-a)^2=0\ \Rightarrow\ x=a$$

Condición: $x=3a$

$$x^2-akx+(k+3)a^2=0\ \Rightarrow\ (3a)^2-ak(3a)+(k+3)a^2=0$$
$$\Rightarrow\ 9a^2-3a^2k+a^2k+3a^2=0$$
$$\Rightarrow\ 12a^2=2a^2k$$
$$\Rightarrow\ k=6$$

Ejemplo:

Resolvemos: $\begin{cases} x^2-3y^2+10y=19 & (1)\\ x^2-3y^2+5x=9 & (2)\end{cases}$

Restando (1) y (2):

$$\begin{array}{r} x^2-3y^2+10y=19\\ -\quad x^2-3y^2+5x=9\\ \hline 10y-5x=10\quad //\div 5\end{array}$$

$$\Rightarrow\ 2y-x=2$$
$$\Rightarrow\ x=2y-2\qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en la (2):

$$(2y-2)^2-3y^2+5(2y-2)=9\ \Rightarrow\ 4y^2-8y+4-3y\text{^}2+10y-10=9$$
$$\Rightarrow\ y^2+2y-15=0\ \Rightarrow\ (y+5)(y-3)=0$$
$$\Rightarrow\ y_1=-5,\ \ y_2=3$$

Si $y_1=-5\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x_1=2(-5)-2=-10-2=-12\ \Rightarrow\ x_1=-12$

Si $y_2=3\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x_2=2(3)-2=6-2=4\ \Rightarrow\ x_2=4$

Las soluciones del sistema son: $x_1=-12,\ y_1=-5$ y $x_2=4,\ y_2=3$

Ejemplo:

Resolvemos: $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) & (1)\\ x+y=6 & (2)\end{cases}$

De la (2) se obtiene: $x=6-y$ (3)

luego en la ecuación (1):

$$(6-y)^2+y^2=2[(6-y)y+2]\ \Rightarrow\ 36-12y+y^2+y^2=12y-2y^2+4$$
$$4y^2-24y+32=0\quad //\div 4$$
$$y^2-6y+8=0\ \Rightarrow\ (y-4)(y-2)=0$$
$$\Rightarrow\ y_1=4,\ \ y_2=2$$

Si $y_1=4\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x_1=6-4=2\ \Rightarrow\ x_1=2$

Si $y_2=2\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x_2=6-2=4\ \Rightarrow\ x_2=4$

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones

Método de sustitución

$$\begin{cases} 2x+9y=8 & (1)\\ 3x+10y=5 & (2)\end{cases}$$

Despejar x *en* (1):

$$2x=8-9y\ \Rightarrow\ x=\frac{8-9y}{2}$$

Sustituir x *en* (2):

$$3\left(\frac{8-9y}{2}\right)+10y=5\quad //\cdot 2$$
$$\Rightarrow\ 24-27y+20y=10$$
$$\Rightarrow\ -7y=-14\quad //\div(-7)$$
$$\Rightarrow\ y=2$$

Solución:

$$x=-5;\ y=2$$

Método de igualación

$$\begin{cases} 4x+3y=11 & (1)\\ 5x-2y=8 & (2)\end{cases}$$

Despejamos x *en las dos ecuaciones* (1) *y* (2):

$$4x=11-3y \qquad 5x=8+2y$$
$$x=\frac{11-3y}{4} \qquad x=\frac{8+2y}{4}$$

Igualamos los valores de x:

$$\frac{11-3y}{4}=\frac{8+2y}{5}$$
$$5(11-3y)=4(8+2y)$$
$$55-15y=32+8y$$
$$-23y=-23\quad //\div(-23)$$
$$\Rightarrow\ y=1$$

Luego en la segunda ecuación:

$$x=\frac{8+2\cdot 1}{5}=\frac{10}{5}=2\ \Rightarrow\ x=2$$

Solución:

$$x=2;\ y=1$$

Método de reducción

$$\begin{cases} 2x-3y=7 & (1)\\ 3x+2y=4 & (2)\end{cases}$$

Multiplicando $+3$ y 2 en (2) y (1):

$$\begin{array}{r} 4x-6y=14\\ +\quad 9x+6y=12\\ \hline 13x=26\ \Rightarrow\ x=2\end{array}$$

$$13(2)+2y=4$$
$$2y=4-6=-2\Longrightarrow y=-1$$

Solución:

$$x=2;\ y=-1$$

Método alternativo

Consiste en aplicar ciertas propiedades que nos llevan a resolver la ecuación cuadrática.

Ecuaciones de Segundo grado Método Po-Shen Lo

$p^2 - u^2 = c; \; p = -\frac{b}{2}; \; x = p \pm u$

Ejemplo:

$x^2 - \underset{b}{8}x + \underset{c}{12} = 0 \Rightarrow p = -\frac{(-8)}{2} = 4$

$4^2 - u^2 = 12 \;\Rightarrow u^2 = 4$

$\Rightarrow u = \pm 2$

$x = 4 \pm 2$

Soluciones:

$\boxed{x = 6; \;\; x = 2}$

Ejemplo:

Repartir 284 manzanas entre tres personas, de modo que la primera reciba 18 manzanas más que la segunda y la tercera tanto como las otras dos.

Se forma un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 284 & (1) \\ x = y + 18 & (2) \\ z = x + y & (3) \end{cases}$$

Sustituimos (2) y (3) en (1):

$y+18+y+y+18+y=284$

$\Rightarrow 4y=284-36=248 \quad //\div 4$

$\Rightarrow y=62$

El valor de "y" en (2):

$x = 62+18 = 80 \;\Rightarrow\; x = 80$

Luego, los valores de "x" e "y" en (3):

$z = 80+62=142 \;\Rightarrow\; z = 142$

La primera recibe 80, la segunda 62 y la tercera 142 manzanas.

Ejemplo:

La suma de la quinta parte de un número con las tres octavas partes excede en 49 al doble de la diferencia entre un sexto y una doceava parte del número, encuentra el número.

$$\frac{x}{5} + \frac{3x}{8} = 2\left(\frac{x}{6} - \frac{x}{12}\right) + 49 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{5} + \frac{3x}{8} = \frac{x}{3} - \frac{x}{6} + 49 \quad // \cdot 120$$

$24x+45x = 40x-20x+5880$

$24x+45x-40x+20x = 5880 \Rightarrow 49x = 5880 \;\Rightarrow\; x = 120$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

1) $\frac{x+3}{x+4} - \frac{x+4}{x+5} = \frac{x+6}{x+7} - \frac{x+7}{x+8}$

2) $\sqrt{2\sqrt{7} + \sqrt{x}} - \sqrt{2\sqrt{7} - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{28}$

3) $\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{6} = 2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2y-1}{2} = 1 \end{cases}$

4) $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-a-c}{b} = 3$

5) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 3$

6) $\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} = \frac{y-7}{y-5} \\ \frac{x+1}{x-1} = \frac{y-3}{y-5} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$

Propiedades

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

$a > b \;\Rightarrow\; a \pm c > b \pm c$

$a < b \;\Rightarrow\; a \pm c < b \pm c$

También en: $a \leq x \leq b$

$a \pm c \leq x \pm c \leq b \pm c$

$\therefore$ *la desigualdad no cambia*

$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\wedge\; c \in \mathbb{R}^+$ se cumple:

$a > b \;\Rightarrow\; a \cdot c > b \cdot c$

$a < b \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c$

También en: $a \leq x \leq b$

$a \cdot c \leq x \cdot c \leq b \cdot c$

$\therefore$ *la desigualdad no cambia*

$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\wedge\; c \in \mathbb{R}^-$ *se cumple:*

$a > b \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c$

$a < b \;\Rightarrow\; a \cdot c > b \cdot c$

También en: $a < x < b$

$a \cdot c > x \cdot c > b \cdot c$

$\therefore$ *la desigualdad cambia*

2. Desigualdades e inecuaciones

Al igual que las ecuaciones algebraicas, las inecuaciones utilizan diversas propiedades, teoremas y leyes para encontrar el conjunto de solución que satisfaga la desigualdad.

Ejemplo:

Encontramos el *Conjunto Solución* de la desigualdad.

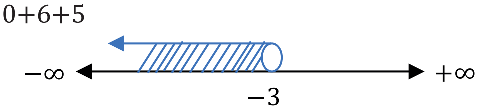
$2(x-3)+4x-5<3(1-2x)-(4x+7)+5(3x-2)$

$2x-6+4x-5<3-6x-4x-7+15x-10$

$2x+4x+6x+4x-15x<3-7-10+6+5$

$x<-3$

$C_S\!: \; x \in (-\infty, -3)$



Ejemplo:

Hallamos el *Conjunto Solución* de la desigualdad: $2x-4 < 3x+1 \leq x+14$

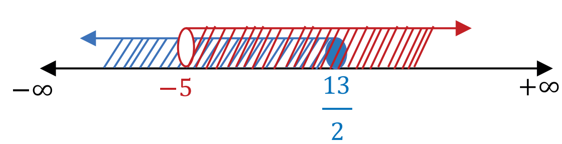
$2x - 4 < 3x + 1 \quad \wedge \quad 3x + 1 \leq x + 14$

$2x - 3x < 1 + 4 \qquad 3x - x \leq 14 - 1$

$-x < 5 \quad //\cdot(-1) \qquad 2x \leq 13 \;\rightarrow\; x \leq \frac{13}{2}$

$x > -5$

$C_S\!: \; x \in \left(-5, \frac{13}{2}\right]$



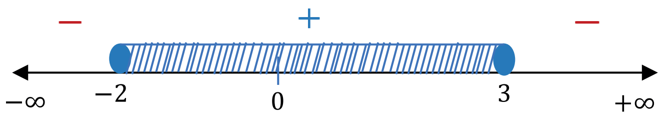
En desigualdades cuadráticas es posible aplicar el método de los puntos críticos (PC) para hallar el conjunto solución (Cs).

Ejemplo:

Encontramos el *Conjunto Solución* de la desigualdad.

$$x^2-x-6 \leq 0$$
$$(x-3)(x+2) \leq 0$$

Puntos críticos: $(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -2$



Si $x = 0$ evaluando en la inecuación original $0^2-0-6 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq 0 \quad (V)=+$
Por tanto, conjunto solución son intervalos que dieron verdad, es decir:

$$C_S: \quad x \in [-2, 3]$$

Ejemplo:

Hallamos el *Conjunto Solución* de la desigualdad:

$$x^4+x^3-2x^2 > 0$$

Desarrollando:

$$x^2(x^2+x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x+2)(x-1) > 0$$

Puntos críticos: $x^2(x+2)(x-1) = 0$ entonces

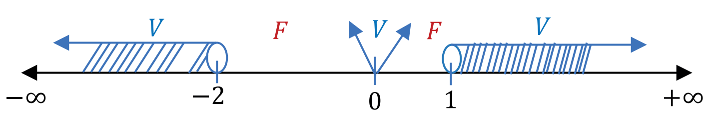
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (Multiplicidad 2 par)

$x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Si $x = -1$ evaluando en la inecuación original

$(-1)^4+(-1)^3-2(-1)^2>0 \Rightarrow 1-3-2>0 \Rightarrow -4>0 \qquad (F)=-$



Por tanto, el conjunto solución es:

$$C_S: \quad x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Ejemplo:

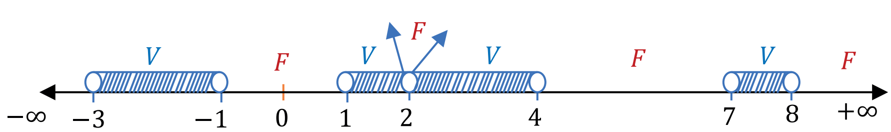
Determinamos el Conjunto Solución de la desigualdad:

$$\frac{(x^2-15x+56)(x^2-x-12)}{(x^2-4x+4)(x^2-1)} < 0$$

Desarrollando

$$\frac{(x-8)(x-7)(x-4)(x+3)}{(x-2)(x-2)(x+1)(x-1)} < 0$$

Puntos críticos: Numerador $x = 8;\ x = 7;\ x = 4;\ x = -3$
Denominador $x = 2$ (Mul.2 par); $x = -1;\ x = 1$



Si $x = 0$ en la inecuación original:

$$\frac{(0^2-15\cdot 0+56)(0^2-0-12)}{(0^2-4\cdot 0+4)(0^2-1)} < 0 \Rightarrow \frac{56\cdot(-12)}{4\cdot(-1)} < 0 \Rightarrow 168 < 0 \quad (F)$$

Se alterna de acuerdo a la multiplicidad, por tanto, el Conjunto Solución es:

$$C_S: \quad x \in (-3, -1) \cup (1, 2) \cup (2, 4) \cup (7, 8)$$

Importante

Inecuaciones de 2do grado o de mayor grado (por puntos críticos) Una vez factorizado y referido a cero la inecuación, los factores no susceptibles a exclusión se resuelve como una ecuación cuyas raíces son los puntos críticos, éstos generan intervalos consecutivos que son señalados por (+), (-) o con valores de verdad (V) o (F) alternativamente de derecha a izquierda. Los intervalos de solución se tomarán dependiendo a la desigualdad.

Si $P(x) > 0$ y $a_0 > 0$ *las soluciones son intervalos marcados* $(+)$ o (V) *para coeficiente* > 0.

Si $P(x) < 0$ y $a_0 > 0$ las soluciones *son intervalos marcados* $(-)$ o (F) *para coeficiente* > 0.

Alternativamente: *se evaluará un valor cualquiera de un intervalo para verificar si cumple la desigualdad, luego el* C_S *serán los intervalos que dieron* (V)

Propiedades adicionales

La desigualdad no cambia
$\forall\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 > 0$ para $a \neq 0$
Si $x \neq 0$ y $a \neq x$, entonces
$(x-a)^2 > 0$
$\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$: $a,\ b$ son del mismo signo, se tiene:

$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < x < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

Teoremas del valor absoluto

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a\ ;\ a > 0$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a$

$|x| \leq |a| \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$|a-b| \leq |a|+|b|$

$|a|-|b| \leq |a-b|$

Ejemplo:

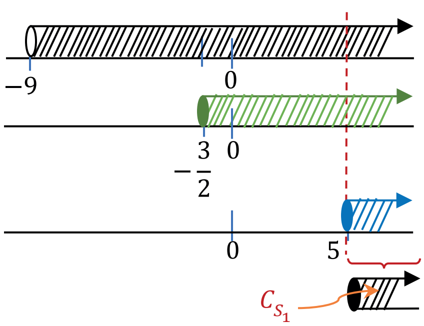
Resolvemos: $|2x+3|+1>|x-5|$

Para eliminar los signos de valor absoluto, analizamos los posibles cambios de signos en ellas, así tenemos $(+)\,(+)$, $(+)\,(-)$, $(-)\,(-)$, $(-)\,(+)$

$$|2x+3|=\begin{cases}2x+3, & \text{si } 2x+3\geq 0 \ \Rightarrow\ x\geq -\frac{3}{2}\\ -(2x+3), & \text{si } 2x+3<0 \ \Rightarrow\ x<-\frac{3}{2}\end{cases} \qquad |x-5|=\begin{cases}x-5, & \text{si } x-5\geq 0 \ \Rightarrow\ x\geq 5\\ -(x-5), & \text{si } x-5<0 \ \Rightarrow\ x<5\end{cases}$$

I) $(2x+3)+1>(x-5)$

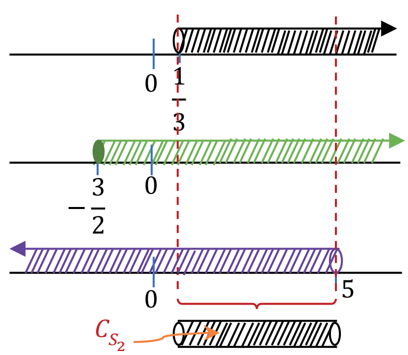
$$\Rightarrow\ x>-9\wedge\left(x\geq-\frac{3}{2}\wedge\ x\geq 5\right)$$



$C_{S_1}:\ x\in[5,+\infty)$

II) $(2x+3)+1>-(x-5)$

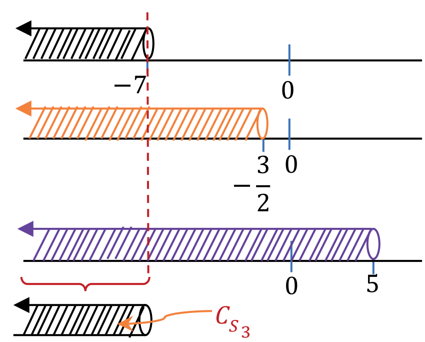
$$\Rightarrow\ x>\frac{1}{3}\wedge\left(x\geq-\frac{3}{2}\wedge\ x<5\right)$$



$C_{S_2}:\ x\in\left(\frac{1}{3},5\right)$

III) $-(2x+3)+1>-(x-5)$

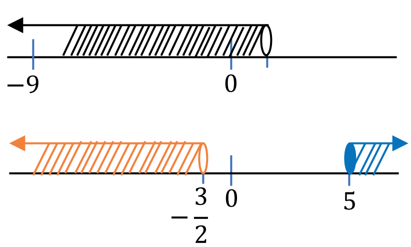
$$\Rightarrow\ x<-7\ \wedge\left(x<-\frac{3}{2}\wedge\ x<5\right)$$



$C_{S_3}:\ x\in(-\infty,-7)$

IV) $-(2x+3)+1>(x-5)$

$$\Rightarrow\ x<1\ \wedge\left(x<-\frac{3}{2}\wedge\ x\geq 5\right)$$



$C_{S_4}=\emptyset$

Finalmente, el Conjunto Solución es:

$$C_S=C_{S_1}\cup C_{S_2}\cup C_{S_3}\cup C_{S_4}=[5,+\infty)\cup\left(\frac{1}{3},5\right)\cup(-\infty,-7)\cup\emptyset$$

$$=(-\infty,-7)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$$

$$\Rightarrow\quad C_S=(-\infty,-7)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$$

Actividad

Resolvemos las siguientes desigualdades:

1) $x^4-x^3+20x^2<0$

2) $\dfrac{2}{x-1}<\dfrac{1}{x+2}$

3) $\dfrac{7x}{2}-\dfrac{5-2x}{3}\geq\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5(7-3x)}{2}+\dfrac{2}{3}$

4) $|3x+2|>x-1$

5) $\frac{x+2}{x+1}\leq\frac{x}{x-2}$

6) $|x+4|\geq|2x-3|$

7) $\frac{x^2+2-x}{3-x}\geq 1$

8) Variación de: $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ si $x\in(2,8)$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Estas ecuaciones se reducirán a su mínima expresión aplicando sus propiedades para finalmente usar los teoremas de igualdad con exponentes y logaritmos.

Ejemplo:

Hallamos el valor de x en:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2}=2^{3x+2}$

$$(2^{x+2})^{\frac{1}{2}}=2^{3x+2}$$
$$2^{\frac{x+2}{2}}=2^{3x+2}$$
$$\frac{x+2}{2}=3x+2$$
$$5x=-2 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{5}$$

b) $8^{2x+1}=5^{x+2}$

$$\log 8^{2x+1}=\log 5^{x+2}$$
$$(2x+1)\log 8=(x+2)\log 5$$
$$2x\log 8-x\log 5=2\log 5-\log 8$$
$$x(2\log 8-\log 5)=2\log 5-\log 8$$
$$x=\frac{2\log 5-\log 8}{2\log 8-\log 5}\approx 0{,}4$$
$$\Rightarrow\quad x=0.45$$

Ejemplo:

Encontramos el valor de x en:

$$\log x-\log(x-2)=\log 2$$

Por las propiedades de logaritmos:

$$\log x-\log(x-2)=\log 2 \quad\Rightarrow\quad \log\frac{x}{(x-2)}=\log 2$$
$$\Rightarrow\quad \frac{x}{(x-2)}=2$$
$$\Rightarrow\ x=2(x-2)$$
$$\Rightarrow\ x=2x-4$$
$$\Rightarrow\ 2x-x=4$$
$$\Rightarrow\ x=4$$

Ejemplo:

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\log x+\log y=1 & (1)\\ 2^{x+y}=128 & (2)\end{cases}$$

De (2): $2^{x+y}=128 \Rightarrow 2^{x+y}=2^7 \Rightarrow x+y=7 \Rightarrow x=7-y$ (3)

Luego (3) en (1):

$$\log x+\log y=1 \quad\Rightarrow\quad \log(xy)=1 \quad\Rightarrow\quad xy=10^1$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\quad (7-y)y=10 \quad\Rightarrow\quad y^2-7y+10=0$$
$$\Rightarrow\quad (y-5)(y-2)=0 \quad\Rightarrow\quad y_1=5,\ \ y_2=2$$

Si $y_1=5 \quad\overset{(3)}{\Rightarrow}\quad x_1=7-5=2 \quad\Rightarrow\quad x_1=2$

Si $y_2=2 \quad\overset{(3)}{\Rightarrow}\quad x_2=7-2=5 \quad\Rightarrow\quad x_2=5$

Las soluciones del sistema son:

$$x_1=2,\ y_1=5 \ \text{ y } \ x_2=5,\ \ y_2=2$$

Teoremas en una igualdad

Para: $x,a,b\in\mathbb{R};\ x>0\ \ y\ \ x\neq 1, a\neq 0$

$$x^a=x^b \ \Rightarrow\ a=b$$
$$x^a=y^a \ \Rightarrow\ x=y$$

Si $a\neq b$ *y* $x\neq 0$, *entonces*

$$a^x=b^x \ \Rightarrow\ x=0$$
$$x^x=a^a \ \Leftrightarrow\ a=x$$
$$log_b x=log_b y \ \Rightarrow\ x=y$$

Propiedades de los logaritmos

Para: $a>0,\ a\neq 0,\ c>0,\ c\neq 0;$ $x,y>0\ \ y\ \ n\in\mathbb{R}$

$$log_a a=1;\quad log_a 1=0$$
$$a^{log_a x}=x;\quad log_a a^n=n$$
$$log_a x+log_a y=log_a(x\cdot y)$$
$$log_a x-log_a y=log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$log_a x^y=y\,log_a x$$
$$log_a x=\frac{log_c x}{log_c a};\quad log_x a=\frac{1}{log_a x}$$

Propiedades

Cologaritmos y antilogaritmos

Cologaritmos

$$colog_a x=log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-log_a x$$

Antilogaritmo: $antilog_a x=a^x$

$$log_a(antilog_a x)=x$$
$$antilog_a(log_a x)=x$$

Desigualdades logarítmicas

Si $a>0;\ log_a x>log_a y \ \Rightarrow\ x>y$

Si $0<a<0$ *entonces*

$$log_a x>log_a y \ \Rightarrow\ x<y$$

Si $x>0$,

$$log_a x>y$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}x>a^y, & \text{si } a>1\\ x<a^y, & \text{si } 0<y<1\end{cases}$$

Ejemplo:

Resolvemos la inecuación: $\log_3(x^2-5x+6) < 0$

Evalúe los valores admitidos según la definición del logaritmo, luego resuelva la inecuación de acuerdo a la base de dicho logaritmo.

$\log_3(x^2-5x+6) < 0$

Por definición y factorizando:

$x^2-5x+6>0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-3)>0$

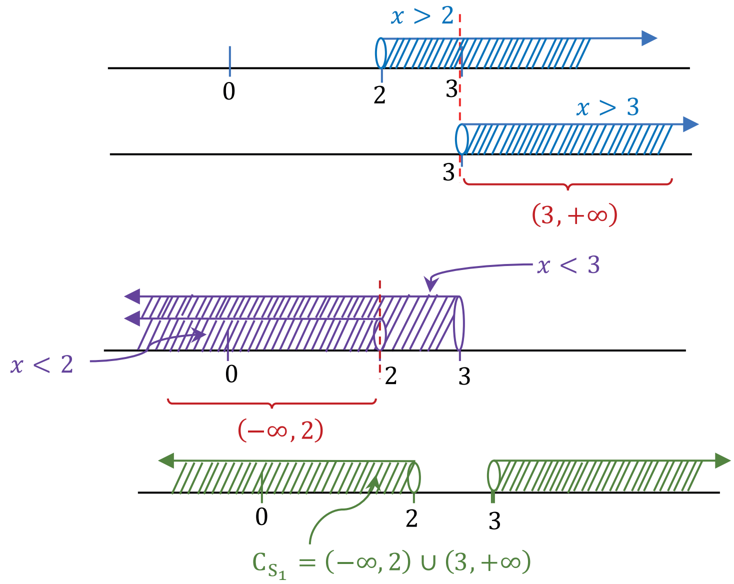
Por la propiedad:

$\{(x-2>0 \;\wedge\; x-3>0)\} \;\vee\; \{(x-2<0 \;\wedge\; x-3<0)\}$

$\Rightarrow \; (x>2 \wedge x>3) \;\vee\; (x<2 \wedge x<3)$

$\Rightarrow \; (2<x<3) \;\vee\; (x<2 \wedge x<3)$

$C_{S_1}: \; x \in (-\infty, 2) \cup (2,3)$



De la ecuación $\log_3(x^2-5x+6) < 0$, significa que el argumento del logaritmo debe ser menor que 1, pues $\log_3(1) = 0$, luego:

$\log 3(x^2-5x+6)<\log_3(1) \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+6<1$

$\Rightarrow \quad x^2-5x+5<0 \qquad (1)$

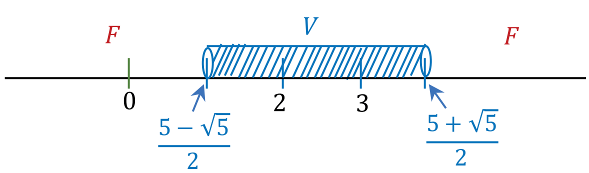
Resolviendo la ecuación cuadrática: $x^2-5x+6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Los puntos críticos son:

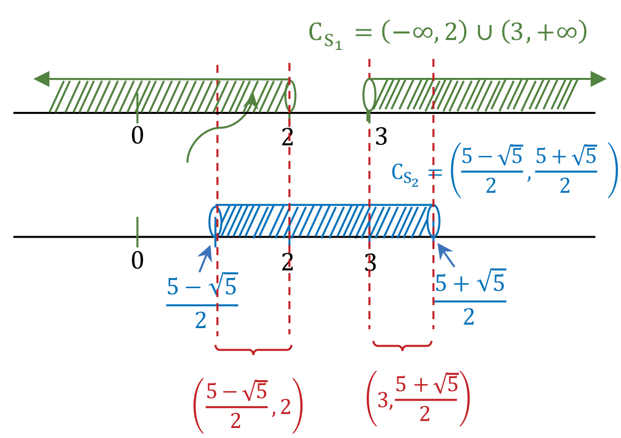
$$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}; \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Si $x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0^2 - 5 \cdot 0 + 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad 5 < 0 \qquad (F)$



$$C_{S_2}: \; x \in \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Finalmente, la solución de la inecuación es la intersección de los intervalos obtenidos anteriores, es decir:



$$\therefore \quad C_S = C_{S_1} \cap C_{S_2} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

1) $\log_4\{\log_3[\log_2(x+5)]\} = 0$

2) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2} = 2^{3x+2}$

3) $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$

4) $\log_{\sqrt{7}}\{\log_5[\log_2(2x-4)] + 1\} = 0$

5) $8^{2x-1} = 32^{6-x}$

6) $\begin{cases} \log y - \log x = -1 \\ x - y = 27 \end{cases}$

7) $(0.5)^{2x} \cdot 2^{x-1} = 0.125$

8) $\begin{cases} \log x = 2 - \log y \\ x^2 + y^2 = 425 \end{cases}$

Ejemplo:

Resolver la ecuación con logaritmos, dado por:

$$\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$$

$$\Longrightarrow \log 2+\log\left(4^{x-2}+9\right)-\log\left(2^{x-2}+1\right)=1$$

$$\Longrightarrow \log\left(2\left(4^{x-2}+9\right)\right)-\log\left(2^{x-2}+1\right)=1$$

$$\Longrightarrow \log\frac{2\left(4^{x-2}+9\right)}{2^{x-2}+1}=1$$

$$\Longrightarrow \frac{2\left(4^{x-2}+9\right)}{2^{x-2}+1}=10$$

$$\Longrightarrow 2\left(4^{x-2}+9\right)=10\left(2^{x-2}+1\right)$$

$$\Longrightarrow \left(4^{x}\cdot 4^{-2}+9\right)=5\left(2^{x}\cdot 2^{-2}+1\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{4^x}{16}+9=\frac{5\cdot 2^x}{4}+5$$

$$\Longrightarrow \frac{4^x}{16}-\frac{5\cdot 2^x}{4}+4=0$$

$$\Longrightarrow \frac{4^x-20\cdot 2^x+64}{16}=0$$

$$\Longrightarrow 4^x-20\cdot 2^x+64=0$$

$$\Longrightarrow \left(2^2\right)^x-20\cdot 2^x+64=0$$

$$\Longrightarrow (2^x)^2-20\cdot 2^x+64=0$$

$$\Longrightarrow (2^x-16)(2^x-4)=0$$

$$\Longrightarrow 2^x-16=0 \text{ o } 2^x-4=0$$

$$\Longrightarrow 2^x=2^4 \text{ o } 2^x=2^2$$

$$\Longrightarrow x=4 \text{ o } x=2$$

VALORACIÓN

La formación técnica permite que las y los estudiantes del último curso de secundaria adquieran habilidades prácticas relacionadas con la demanda de trabajo, lo que influye directamente en el mercado laboral, sobre todo, al desarrollar conocimientos y competencias que se enfocan en cubrir las necesidades que requieren soluciones a problemáticas de nuestro contexto, esto resulta fundamental para impulsar la productividad del país. En este sentido, reflexionamos sobre la formación preuniversitaria y en centros de formación técnica , considerando sus aspectos positivos, limitaciones y la demanda laboral correspondiente.

Fuente: OpenAI, 2024

PRODUCCIÓN

Producción Aplicativa: Realizamos un formulario de modo creativo y funcional de los capítulos tratados en esta unidad.

Producción Teórica: Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $|x+2|<1$

2) $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$

3) $\log_4(x^2-9)-\log_4(x+3)=3$

4) $3+2x\leq 3x-5<6-x$

5) $2e^{4x}+e^{3x}+e^{2x}+11e^{x}-6=0$

6) $\ln(x+1)-\ln(x-2)=\ln 2$

7) $(2x-1)(x+4)\leq(x-2)(x+3)-6$

8) $\log_{(x-1)}(4x-4)=2$

9) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0.25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA: TRIGONOMETRÍA

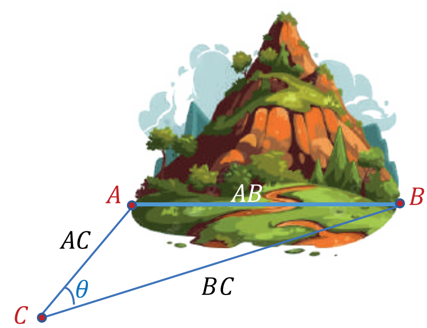
PRÁCTICA

Construyendo triangulaciones

En trigonometría y geometría, la triangulación es el proceso de ubicar un punto determinado mediante la medición de los ángulos desde los extremos de una línea fija hacia dicho punto.

La triangulación se utilizó inicialmente para medir distancias y posteriormente para determinar ubicaciones en mapas cartográficos y realizar levantamientos topográficos. En la actualidad, la triangulación, junto con la trilateración (métodos empleados por el GPS), permite ubicar cualquier punto estático o móvil en la Tierra; este proceso requiere la ayuda de al menos cuatro satélites.

En la unidad educativa, escogemos longitudes horizontales o verticales que deseamos medir. Luego, con datos reales obtenidos mediante instrumentos como la cinta métrica, el clinómetro u otros medidores de ángulos, ensayamos el proceso de triangulación bajo la orientación del profesor.



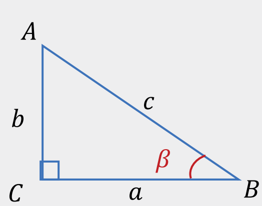
Actividad

Realizamos el proceso de triangulación en dibujo o esquema, luego de escoger una distancia horizontal o vertical que deseamos medir:

- Obtenemos datos necesarios con los instrumentos que disponemos.
- Aplicamos la ley de senos, ley de cosenos en cada caso de triangulación, además de otras definiciones propias de la trigonometría y geometría que son necesarios para el cálculo de la distancia.
- Analizamos cómo mediríamos distancias horizontales como puentes y carreteras. Y cómo mediríamos distancias verticales como los edificios, las pirámides de Egipto, etc.

TEORÍA

Triángulo rectángulo



$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{cosec}\beta = \frac{c}{b}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \sec\beta = \frac{c}{a}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cotan}\beta = \frac{a}{b}$$

Teorema de Pitágoras

$$c^2=a^2+b^2$$

Ángulos internos de un triangulo Δ

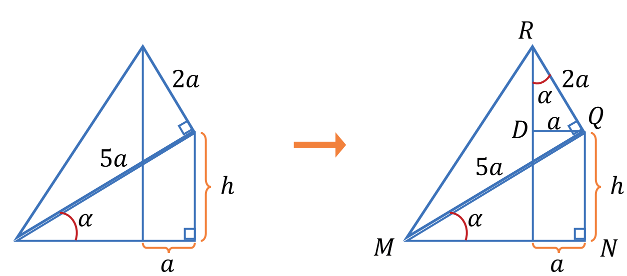
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$$

1. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos

Para resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos recurrimos a los conocimientos trigonométricos, geométricos y operaciones algebraicas.

Ejemplo:

En el gráfico hallamos el valor de h:

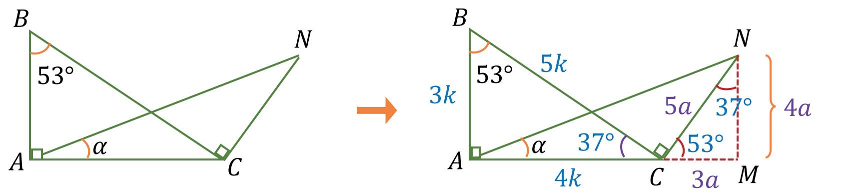


Existen ángulos congruentes debido a dos triángulos semejantes (MNQ y RDQ). Aplicamos razones trigonométricas en ambos triángulos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{5a} = \frac{a}{2a} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{2}a \quad \Rightarrow \quad h = 2.5\,a$$

Ejemplo:

En el gráfico $AB = CN$ calculamos: $\tan\alpha$



De la gráfica y de dato:

$$AB = CN \quad \Rightarrow \quad 3k = 5a \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{a} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad k = 5\,;\ a = 3 \quad \text{(comparando)}$$

Por otro lado:

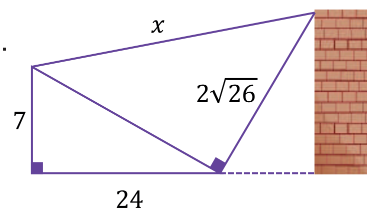
$$NM = 4a = 4 \cdot 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad NM = 12$$
$$AM = 4k + 3a = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 20 + 9 = 29 \quad \Rightarrow \quad AM = 29$$

Finalmente:

$$\tan\alpha = \frac{MN}{AM} = \frac{12}{29} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{12}{29}$$

Ejemplo:

Encontramos el valor de x en la gráfica dada.
Por Teorema de Pitágoras:



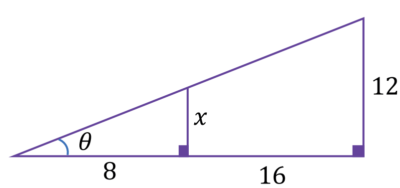
$$y = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576}$$
$$= \sqrt{625} = 25$$
$$\Rightarrow \quad y = 25$$

$$x = \sqrt{25^2 + \left(2\sqrt{26}\right)^2} = \sqrt{625 + 104} = \sqrt{729} = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 27$$

Ejemplo:

Hallamos el valor de x en la gráfica dada.

$$\tan\theta = \frac{x}{8}\,; \qquad \tan\theta = \frac{12}{24}$$



De donde:

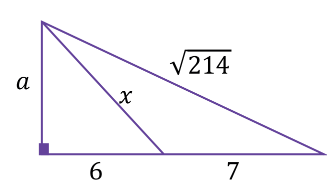
$$\frac{x}{8} = \frac{12}{24} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12 \cdot 8}{24} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Ejemplo:

Determinamos x en el siguiente triángulo:

$$a = \sqrt{\left(\sqrt{214}\right)^2 - 13^2}$$
$$= \sqrt{214 - 169} = \sqrt{45} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{45}$$

$$x = \sqrt{\left(\sqrt{45}\right)^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{45 + 36} = \sqrt{81} = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

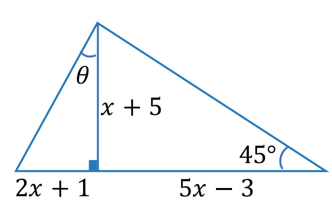


Ejemplo:

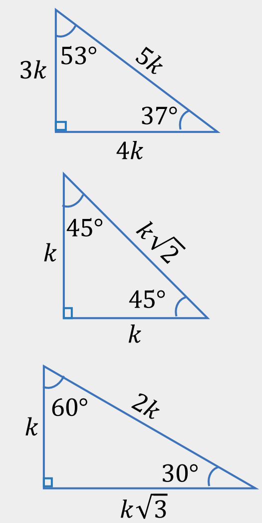
Calculamos $\cot\theta$ en el siguiente triángulo:

$$\tan 45° = \frac{x + 5}{5x - 3} = 1$$
$$x + 5 = 5x - 3$$
$$4x = 8$$
$$\Rightarrow \quad x = 2$$

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{x + 5}{2x + 1} = \frac{2 + 5}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{7}{5}$$
$$\Rightarrow \quad \text{cotan}\,\theta = \frac{7}{5}$$

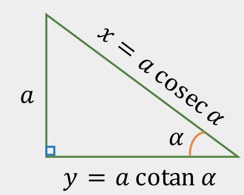


Datos importantes



Importante

Si "a" es dato conocido, entonces



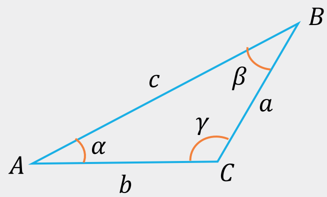
Es así debido a:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad x = a\,\text{cosec}\,\alpha$$

$$\text{cotan}\,\alpha = \frac{y}{a} \quad \Rightarrow \quad y = a\,\text{cotan}\,\alpha$$

Triángulo oblicuángulo

Leyes trigonométricas



Ley de seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Ley de coseno

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Ley de tangente

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Identidades

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1$$
$$\tan^2\beta+1=\sec^2\beta$$
$$\operatorname{cotan}^2\beta+1=\operatorname{cosec}^2\beta$$

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{cosec}\beta=1$$
$$\cos\beta\cdot\sec\beta=1$$
$$\tan\beta\cdot\operatorname{cotan}\beta=1$$

Identidades por cociente

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}=\tan\beta\ ;\ \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\operatorname{cotan}\beta$$

Identidades de suma y resta

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Ejemplo:

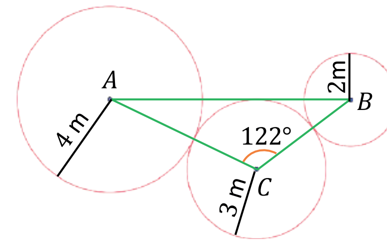
En el gráfico hallamos AB, aplicando ley de cosenos:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cos 122°$$

De la gráfica:

$$AC=4+3=7 \text{ y } BC=3+2=5$$

Luego:



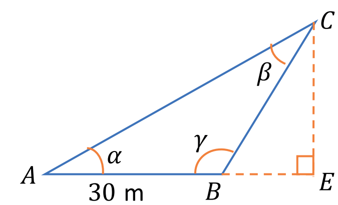
$$AB=\sqrt{7^2+5^2-2\cdot 7\cdot 5\cos(122°)}=\sqrt{49+25-70\cdot(-0{,}53)}$$
$$=\sqrt{111{,}1}\approx 10{,}54 \quad\Rightarrow\quad AB=10{,}54 \text{ u}$$

Ejemplo:

En el gráfico, hallamos CE, siendo $AB=30$ m y $\alpha=30°$; $\gamma=\hat{B}=120°$.

Por propiedad de ángulo interno de un triángulo:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$
$$\Rightarrow 30°+\beta+120°=180° \quad \text{(por dato)}$$
$$\Rightarrow \beta=30°$$



Por ley de senos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{AB}{\operatorname{sen}\beta}\Rightarrow\frac{AC}{\operatorname{sen}120°}=\frac{30}{\operatorname{sen}30°}\Rightarrow AC=30\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=30\sqrt{3} \qquad (1)$$

Finalmente:

$$CE=AC\operatorname{sen}(30°)\overset{(1)}{\Rightarrow} CE=30\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=15\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad CE=15\sqrt{3}$$

2. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Las identidades trigonométricas permiten simplificar y demostrar igualdades con expresiones trigonométricas.

Se recomienda operar uno de los dos miembros para llegar al otro, buscar el más difícil, en lo posible llevar las funciones a senos y cosenos.

Ejemplo:

Simplificamos la siguiente identidad: $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}-\tan x$

Por las identidades trigonométricas:

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}-\tan x=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen}x)}$$
$$=\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen}x)}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$$

Ejemplo:

Demostramos la siguiente identidad: $\cos(x+\pi)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-2\cos x$

Empezando de lado izquierdo de la ecuación y por propiedades:

$$\cos(x+\pi)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\cdot\cos\pi-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}\pi-\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}x\right\}$$

$$= \cos x \cdot (-1) - \operatorname{sen} x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \operatorname{sen} x$$
$$= -\cos x - 0 - \cos x + 0 = -2\cos x$$

Ejemplo:

Demostramos la siguiente identidad

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + \operatorname{sen}(2x) - 1 = 0$$

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + \operatorname{sen}(2x) - 1 = \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x - 1$$
$$= \underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ejemplo:

Demostramos la siguiente identidad

$$\frac{\sec(90° - x)}{\tan x} \cdot \frac{\operatorname{cotan}(90° - x)}{\cos(180° - x)} = -\sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

Por la propiedad de ángulos complementarios:

$$\frac{\sec(90° - x)}{\tan x} \cdot \frac{\operatorname{cotan}(90° - x)}{\cos(180° - x)} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{-\cos x} = -\sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

Ejemplo:

Verificar la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{cotan}^2 \theta}{\cos^2\theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2\theta \operatorname{cotan}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Empezando por el lado izquierdo de la identidad:

$$\frac{\operatorname{cotan}^2 \theta}{\cos^2\theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2\theta \operatorname{cotan}^2 \theta = \operatorname{cotan}^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2\theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2 \theta\right)$$
$$= \operatorname{cotan}^2 \theta (\sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta) = \operatorname{cotan}^2 \theta \operatorname{cosec}^2\theta (\sec^2\theta - 1)$$
$$= \operatorname{cotan}^2 \theta \operatorname{cosec}^2\theta (\tan^2 \theta) = \frac{1}{\tan^2 \theta} \cdot \operatorname{cosec}^2\theta \cdot \tan^2 \theta$$
$$= \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Identidades

Identidades de ángulo medio

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

Identidades de ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

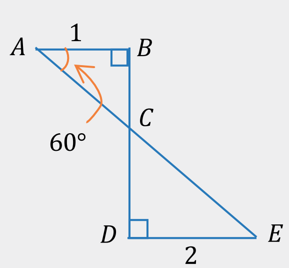
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

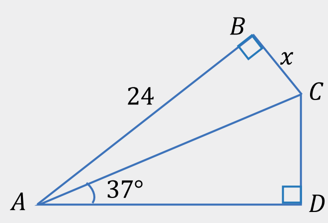
Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

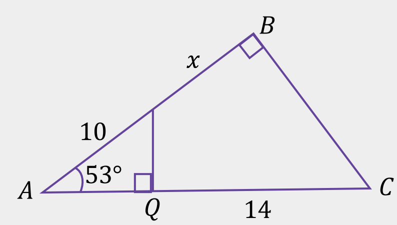
1) Halla la longitud AE



2) Halla la longitud AE



3) Halla la longitud AE



Verificamos las siguientes identidades:

4) $\dfrac{\operatorname{cotan} x \cdot \sec^2 x}{1 + \operatorname{cotan}^2 x} =$

5) $\dfrac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{1 + \tan x} = \operatorname{cosec} x$

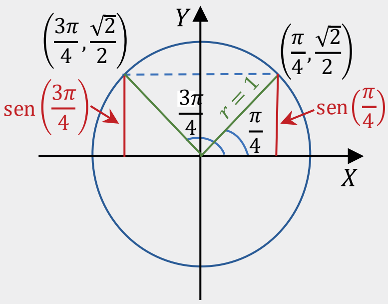
6) $\dfrac{\operatorname{cotan} x \cdot \tan x - \sec^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cotan} x} =$

7) $\dfrac{1 + \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \tan x$

8) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \operatorname{cotan} x =$

9) $\dfrac{1}{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x} - \tan x = 0$

Soluciones básicas



Dada la ecuación:

$$\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solución básica:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Solución general:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Si x_{sp} es solución principal, luego la solución general será:

Para: $\text{sen}\, x = N;\ -\frac{\pi}{2} \leq x_{sp} \leq \frac{\pi}{2},$

$$C_S = \{k\pi + (-1)^k x_{sp}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Para: $\cos x = N;\ 0 \leq x_{sp} \leq \pi,$

$$C_S = \{2k\pi \pm x_{sp}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Para: $\tan x = N;\ -\frac{\pi}{2} \leq x_{sp} \leq \frac{\pi}{2},$

$$C_S = \{k\pi + x_{sp}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Fuente: OpenAI, 2024

3. Ecuaciones trigonométricas

Es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida sólo para determinados valores del ángulo en los que están definidas las funciones y las expresiones trigonométricas involucradas.

Ejemplo:

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{\tan(2x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + 4\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Aplicamos identidades trigonométricas para simplificar y expresar en función de una sola razón trigonométrica o en producto de dos razones la ecuación.

$$\frac{\tan(2x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + 4\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \qquad //\cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\tan(2x) + 4\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Sustituyendo identidades trigonométricas:

$$\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)} + 4 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} + 2\,\text{sen}\, x = 0$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}\, x(\cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}\, x = 0 \quad \vee \quad \cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$$

$i)$ $2\,\text{sen}\, x = 0$, entonces

$$x = \text{sen}^{-1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$ii)$ $\cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

Soluciones principales:

$$\begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x_2 = \cos^{-1}(-1) = \pi & \Rightarrow x_2 = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) & \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Finalmente, conjunto solución general son de la forma:

$$C_S = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi + (-1)^k \cdot 0\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

$$C_S = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi \pm \pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots\}$$

$$C_S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 2k \pm \frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots\right\}$$

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación: $2\cos x - 1 = 0,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

Despejando la incógnita x de la ecuación dada:

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Para determinar los valores en la primera vuelta, si k=0, 1 en la solución general se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3} \\ x_2 = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

De donde

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}, \qquad x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo:

Hallar la solución principal de la siguiente ecuación: $\sqrt{3}\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x - 1 = 0$

Factorizando:

$$(\sqrt{3}\tan x - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\tan x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$i)$ $\tan x = 1$, entonces

$$x_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$ii)$ $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces

$$x_2 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo:

Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\log(\operatorname{sen} x) - \log(\cos x) = 0$$

Aplicando la propiedad de logaritmos:

$$\log A - \log B = \log\left(\frac{A}{B}\right); \qquad \log_b x = y \ \Rightarrow \ x = b^y$$

Luego:

$$\log(\operatorname{sen} x) - \log(\cos x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 10^0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Para $k = 0$ en la solución fundamental se tiene:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuación:

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene:

$$\tan x + \tan y = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = 2\cos x \cos y$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x+y) = 2\cos x \cos y$$

Tomar nota

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado, la ASALE en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal "."

*Tomando en cuenta estos aspectos, se utilizará el **punto decimal** como separador.*

Ejemplo:

3.14 ; 0.71 ; -0.5 ; -0.11 ...

Fuente: Sistema Internacional de Unidades

Luego el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 2\cos x \cos y & (1) \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) en (2):

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x+y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x+y = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - x \qquad (3)$$

Ahora la ecuación (3) en (2):

$$\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x \cdot (0 \cdot \cos x + 1 \cdot \operatorname{sen} x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\cos x \operatorname{sen} x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

Luego, la ecuación (4) en (3):

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{4}$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = \frac{\pi}{4}\ ; \quad y = \frac{\pi}{4}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = 0$
2) $\tan x + \operatorname{sen} x = 0$
3) $\tan x = \tan(90° - 2x)$
4) $\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0$
5) $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2}$
6) $1 + \operatorname{sen}^2 x = 7\cos^2 x$
7) $\arccos(2x + 30°) = \arccos(x + 60°)$
8) $\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$
9) $\arctan(2x^2 - 1) = 45°$

VALORACIÓN

La trigonometría se usa todos los días en la topografía. Las fórmulas de la trigonometría son frecuentemente utilizadas en las profesiones de la construcción, topografía e ingeniería. Los constructores necesitan saber qué altura necesita una grúa para llegar a la cima de un edificio. Los diseñadores de los puentes necesitan saber qué tan alto debe abrir un puente elevadizo para permitir que los buques modernos puedan pasar, cuando vamos por una plaza es más corta la distancia si pasamos por la diagonal que llega ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo y así hay varios ejemplos.

Fuente: Global Mediterránea

Analizamos y reflexionamos sobre la importancia de la trigonometría en nuestro diario vivir, cita otros ejemplos donde se aplica.

PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: Realizamos nuestro formulario trigonométrico de modo creativo y funcional.

Producción teórica: Resolvemos los siguientes problemas:

- El ángulo de elevación de la cima de una montaña es de $55°$, caminando hacia la misma 200 m se encuentra que el ángulo de elevación es de $60°$. ¿Cuál es la altura de la montaña?
- En la orilla de un río se encuentra una torre, observando desde la orilla opuesta, el ángulo de elevación de la torre es de $59°48'$ y desde otro punto a 39.8 m más alejado el ángulo de elevación es de $50°8'$. Halla el ancho del río.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

Operaciones con números reales, exponentes y radicales

1) Dadas las expresiones siguientes

$$\textbf{a)}\ a=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \qquad \textbf{b)}\ b=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

determinar el valor de a^2-b^2.

2) Simplificar:

$$R=\frac{\sqrt{y+\sqrt[6]{y}}+\sqrt{y-\sqrt[6]{y}}}{\sqrt{y+\sqrt{y^2-\sqrt[3]{3}}}}$$

3) Se pide simplificar la siguiente expresión:

$$Z=\sqrt[m]{\frac{x^{-m}+y^{-m}}{x^m+y^m}}$$

4) Determinar el valor de la expresión:

$$E=\frac{\{[(3^2)^3]^4\}^5 3^{6^3}}{3^{11^2}(3^{21})^{10}}$$

Ecuaciones, inecuaciones, exponenciales y logarítmicas

1) Resolver la ecuación exponencial:

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$$

2) Encontrar el valor de x en la ecuación exponencial:

$$\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$$

3) Determinar el conjunto solución en la inecuación dada por:

a) $|3x-4|>|x+4|$ **b)** $|x-3|+|x-4|\geq 5$

4) Determinar el valor de x, en la ecuación logarítmica:

$$\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x}+1)=1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$$

para $x\neq 1$.

5) Determinar los valores de x, y en el sistema logarítmico:

$$\begin{cases} 2y^2+x=75 \\ 2\log y-\log 12=\log x \end{cases}$$

6) Se contabilizaron alrededor de 600 visitantes; entre adultos y niños, a una presentación musical. Las entradas para los adultos costaron Bs 9 y Bs 6 para los niños. Si los recibos de la taquilla totalizaron Bs $12\ 000$, ¿cuántos adultos y cuantos niños asistieron a la presentación?

Trigonometría

1) Calcular el valor de "y" en la siguiente ecuación:

$$\frac{y+\sec 60°}{y-\sec 60°}=\tan 60°$$

2) Determinar el área del triángulo ΔABC si los lados son $a=5$ cm, $b=3$ cm y $\angle A=37°$.

3) Una varilla, inclinada $9°$ respecto a la horizontal y partida en dos, proyecta una sombra de 12 metros de longitud cuando el ángulo de elevación del sol es de $39°$. Calcula la longitud de la varilla.

4) Calcular el valor de la siguiente expresión trigonométrica:

$$E=\frac{2\cos 2\pi-\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\tan\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sec\pi+3\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

5) Calcular por ángulos notables:

$$H=\frac{2\tan 0°+3\operatorname{cotan}270°-3\sec 180°+\operatorname{sen}90°}{\frac{3}{4}\operatorname{cosec}90°+\frac{1}{4}\operatorname{sen}270°}$$

6) Simplificar:

$$g(x)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)$$

7) Simplificar la siguiente expresión:

$$E=\left(\sqrt{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}-\cos\theta\right)^2+2\left[\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sec^2\theta}+\cos^3\theta}\right]$$

8) Verificar la siguiente identidad:

$$(x\operatorname{sen}\beta\cos\theta)^2+(x\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta)^2+(x\cos\beta)^2=x^2$$

9) Hallar la solución principal de la siguiente ecuación:

$$\log(\operatorname{sen}x)-\log(\cos x)=0$$

10) Reducir la expresión:

$$F=\frac{2(\operatorname{sen}2\beta+2\cos^2\beta-1)}{\cos\beta-\operatorname{sen}\beta-\cos 3\beta+\operatorname{sen}3\beta}$$

11) Resolver el sistema de ecuación:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=1 \\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases}\cos x+\cos y=\sqrt{2} \\ \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=\sqrt{2}\end{cases}$$

12) Hallar la solución principal de la ecuación:

$$2\operatorname{sen}^2x-\cos x-1=0$$

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación de México.

Allen, R. A. (1998). *Algebra Elemental*. México: Prentice Hall.

Allen, R. A., & Semmler, R. (2004). *Álgebra intermedia*. México: Pearson Educación.

Editorial Cultural S. A. (2000). *Diccionario de Matemáticas*. Polígono Industrial Arroyomolinos – España.
Facultad de Ciencias Puras y Naturales-UMSA. (s.f.). *Preuniversitario.* Obtenido de https://pre.fcpn.edu.bo/

FCYT-UMSS. (s.f.). *SISTEMA SAGAA*. Obtenido de http://sagaa.fcyt.umss.edu.bo/admision/examenes.php

Gutierrez, P., & Moreno, L. (2018). *La Práctica del Cálculo Diferencial e Integral* (Vol. I). Santa Cruz: Ed. El Jisunú.

Lexus. (2008). *Álgebra, Manual de preparación Pre-universitaria.* Lima-Perú: Lexus Editores S.A.

Londoño, N., & Bedoya, H. (2003). *Matemática Progresiva 6to.* Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

Ministerio de Educación (2024). *Texto de aprendizaje: Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular*, 6to. Año. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación, (2023). *Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz – Bolivia.

Ministerio de Educación. (s.f.) *Prontuario de mis aprendizajes Matemática.*

Olmos, A. & Martínez, L. (2003). *Matemática Práctica 6to*. Editorial Voluntad S.A. – Colombia.
Siccha, M., & Ramírez, N. (2017). *Trigonometría plana y Esférica e Introducción al Cálculo*. Lima: Ed. Lumbreras.

Spiegel, M. (2007). *Álgebra Superior.* México: McGraw-Hill.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **6 TO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Juan Carlos Huanca Fernández

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

Química
Jonathan Vino Varias

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernandez Huanca

Biología - Geografía
Jose Luis Chambi Barrientos

SEGUNDO TRIMESTRE

Lengua Castellana
Luz Marina Mollo Yupanqui

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

Química
Paola Carmiña Siles Llanos

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernandez Huanca

TERCER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Beatriz Astoraique Coro

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

Química
Paola Carmiña Siles Llanos

Ciencias Sociales
Ildefonso Fernandez Huanca

Biología - Geografía
David Sinko Yapu

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol