ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

TERCER AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA
COMUNITARIA PRODUCTIVA

3ER
AÑO DE
ESCOLARIDAD

"2025 BICE TENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 3er año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Daniela Lopez Victoria

DIAGRAMACIÓN:
Marco Antonio Mena Chambi

Depósito legal:
4-1-577-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 3er año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los *"Textos de aprendizaje 2025"*, para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los *"Textos de aprendizaje 2025"* tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

PRÁCTICA

Teresa está de compras en el mercado porque va a organizar una fiesta de cumpleaños.
Si desea comprar pasteles y refrescos, deberá considerar lo siguiente:
Asignando variables:
t: Representa el precio del pastel.
r: Representa el precio de cada refresco.
n: Representa el número de pasteles que comprará.
m: Representa el número de refrescos que comprará.
Todo esto, escrito en lenguaje algebraico:
El costo total de los pasteles sería: $n \cdot t$
El costo total de los refrescos sería: $m \cdot r$
El costo total de la compra sería: $n \cdot t + m \cdot r$
Las operaciones con expresiones algebraicas están presentes en muchas situaciones de nuestra vida diaria, aunque a veces no las identificamos como tales.

Fuente: OpenAi, 2024

Actividad

Realizamos las actividades en el aula

- En base al ejemplo diseñamos un modelo matemático de una actividad para realizar en clases.
- Mencionamos otros ejemplos en los que se apliquen las operaciones con expresiones algebraicas.

Respondemos a la pregunta

- ¿Cómo beneficia el uso de operaciones algebraicas en nuestro diario vivir?

TEORÍA

Recordemos que...

El Álgebra es un conjunto de conceptos y definiciones que se relacionan mutuamente. Para su mejor comprensión es necesario recordar los conceptos básicos como constante, variable y término algebraico.

Las constantes y variables se multiplican para formar términos algebraicos.

Constantes	Variables	Término Algebraico
2	x	$2x$
-13	xy	$-13xy$
-4	$x^2 y$	$-4x^2y$
21	x^2y^3	$21x^2\ y^3$
7	$x^5\ y^2z^3$	$7x^5y^2z^3$

Variable
Todo aquello que cambia de valor o que no es constante, como la edad de una persona en el transcurso de su vida.

1. Términos semejantes y su relación con la producción

a) Definición de términos semejantes

Tienen la misma parte literal y pueden ser de signos iguales o distintos.

$$4ab + 8ab - 2ab$$

b) Reducción de términos semejantes

Cuando los términos semejantes tienen igual signo se suma la parte numérica y se copia el mismo signo, también se copia la parte literal.

Ejemplo:

Reducimos la expresión $22xy + 13xy + 7xy$

$\Longrightarrow 22 + 13 + 7 = 42$ y luego $22xy + 13xy + 7xy = 42xy$

Ejemplo:

Simplificamos la expresión $4x^2 + 11x^2 + 3x^2$
$\Longrightarrow 4 + 11 + 3 = 18$ así $4x^2 + 11x^2 + 3x^2 = 18x^2$

Ejemplo:

Reducimos la expresión $-x^2yz - 9x^2yz - 6x^2yz - 7x^2yz$
$\Longrightarrow -1-9-6-7 = -23$, luego $-x^2yz - 9\,x^2yz - 6x^2yz - 7x^2yz = -23x^2yz$
Cuando los términos semejantes son de signos diferentes se restan los coeficientes y se anota el signo del mayor.

Ejemplo:

Simplificamos las siguientes expresiones: $22a^2 - 15a^2$ y $17b^3 - 5b^3$
$\Longrightarrow$ $22a^2 - 15a^2 = 7x^2$ y también $17b^3 - 5b^3 = 12b^3$

Una expresión algebraica tiene términos con diferente parte literal, primero se deben agrupar aquellos semejantes, luego se realiza la operación que corresponda; en caso de tener exponente también estos deben ser iguales.

Ejemplo:

Reducimos la expresión, $4x + 8y - 5z - 2x + 7y - 7z - 11y + 5z$

$\Rightarrow$ $= 4x - 2x + 8y + 7y - 11y - 7z - 5z + 5z$

$= (4 - 2)x + (8 + 7 - 11)y + (-7 - 5 + 5)z$

$= 2x + 4y - 7z$

Para reducir varios términos semejantes con distintos signos, se deben agrupar aquellos que tienen signos positivos, seguidamente los de signos negativos, posteriormente se reducen a una sola expresión. Una vez reducidos, los resultados se restan colocando el signo del mayor número.

Ejemplo:

Simplificamos la expresión: $8ab + 6ab - 12ab + 45ab - 17ab$

$\Rightarrow$ $= 8ab + 6ab + 45ab - 12ab - 17ab$

$= 59ab - 29ab$

$= 30ab$

c) Reducción de términos semejantes con signos de agrupación

Se recomienda suprimir los signos de agrupación de adentro hacia afuera, tomando en cuenta lo siguiente:

Si el signo es positivo y está delante de un signo de agrupación, los términos mantienen el mismo signo: $+(-a + 2) = -a + 2$

Si el signo es negativo y está delante de un signo de agrupación, los términos cambian de signo: $-(2a - 3) = -2a + 3$

Ejemplo:

Reducimos la expresión: $3x - \{-4x + [2 - (x - 1)]\}$

$\Rightarrow$ $= 3x - \{-4x + [2 - x + 1]\}$

$= 3x - \{-4x + 2 - x + 1\}$

$= 3x + 4x - 2 + x - 1$

$= 8x - 3$

Ejemplo:

Simplificamos la expresión: $-\{-(x^2 + a^2) + [2x^2 - (4x^2 + 2a^2)]\}$

$\Rightarrow$ $= -\{-x^2 - a^2 + [2x^2 - 4x^2 - 2a^2]\}$

$= -\{-x^2 - a^2 + 2x^2 - 4x^2 - 2a^2\}$

$= +x^2 + a^2 - 2x^2 + 4x^2 + 2a^2$

$= 3x^2 + 3a^2$

Polinomio: *Es la agrupación por adición de monomios no semejantes.*

Ejercicio

Relacionemos los términos que son semejantes:

a) $4x^2y^5$ ( ) x^7ay^4
b) $5x^7y^4a$ ( ) $2za^3b^4$
c) $-3a^3b^4z$ ( ) $5abzx$
d) $15xabz$ ( ) $3y^5x^2$

Los signos de agrupación

Son símbolos que se utilizan para agrupar expresiones separándolas de otras. Las principales son

( ) ....*Paréntesis*
[ ] ....*Corchetes*
{ }...............................*Llaves*

Si eliminamos un signo de agrupación que lleva delante un (+) entonces la expresión interna no cambia.

Propiedad asociativa

¿Cuál es la importancia de los paréntesis, corchetes y llaves?

Estos símbolos son fundamentales en la matemática moderna por las siguientes razones:

Claridad

Permiten evitar ambigüedades en las expresiones matemáticas.

Jerarquía de operaciones

Indican el orden en que deben realizarse las operaciones.

Agrupación de términos

Facilitan la organización de expresiones complejas.

Existe otro signo de agrupación llamado Barra que actualmente no se utiliza. Se escribe: $\overline{a}$

Actividad

Reducimos los siguientes términos semejantes:

1) $3a - 2b - 5b + 9a$
2) $15a + 13a - 12b - 11a - 4b - b$
3) $1 + x + xy - 2 + 2x - 3xy - 3 + 2xy - 3x$
4) $m + n - p - n - p + 2p - x$
5) $2y^3 - 3y^2 + 4y - 5 - y^3 + 2y^2 - 2y + 4 + y^3$
6) $y^2 - 6y + 2 - 5y^2 + 13y^2 - 2y + 9$
7) $2t^2 - 3t + 4 + 5t^2 - 2t^2 + 4t - 6 - t + 4$
8) $3t^3 - 5t + 8 + 4t^3 - 3t^2 + 2t - 1 - 11t^3 + 8t^2$
9) $15a + 13a - 12b - 11a - 4b - b$
10) $\frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{5} + \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{7}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{5}$
11) $\frac{1}{5}y + \frac{5}{4}y^4 - \frac{3}{7}y^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{2}y^4 + \frac{3}{7}y^3 + \frac{8}{7}y$

Reducimos los términos semejantes, eliminando los signos de agrupación:

1) $-\{-[-(-7x - 2y)]\} + \{-[-(2y + 7x)]\}$
2) $2x + [x - (x + y)]$
3) $3a - [a + b - (2a + b)]$
4) $2x - [(x - y) - (x + y) + 1]$
5) $x^2 - \{-7xy + [-y^2 + (-x^2 + 3xy - 2y^2)]\}$
6) $8x^2 + [-2xy + y^2] - \{-x^2 + xy - 3y^2\} - (-3x^2 + y^2)$
7) $7m^2 - \{-[m^2 - (5 - n) - (-3 + m^2)]\} - (2n + 3)$
8) $2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\}$
9) $4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (-3x^2 + y^2)]$
10) $-\{-[(5a + 2) + (3a - 4) - (-a + 1)\}$

Tomar nota...

Los monomios o sumandos de un polinomio son los términos de un polinomio.

- *Con 1 sólo término recibe el nombre de* **MONOMIO**.
- *Con 2 términos recibe el nombre de* **BINOMIO**.
- *Con 3 términos recibe el nombre de* **TRINOMIO**.

La sustracción o resta

La sustracción es la operación inversa de la adición, por lo tanto, para restar dos expresiones, se suma al minuendo el inverso aditivo del sustraendo

Carácter general de la resta algebraica
En Aritmética, la resta siempre implica disminución, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, pues puede significar disminución o aumento. Hay restas algebraicas, en que la diferencia es mayor que el minuendo.
En algunas restas, una cantidad negativa equivale a sumar la misma cantidad positiva.

Ejemplo:

$6x$ ..... Minuendo
$-\ 2x$ ..... Sustraendo
$4x$ ..... Diferencia

2. Operaciones con expresiones algebraicas

a) Suma y resta de expresiones algebraicas

La suma y resta de expresiones algebraicas consiste en combinar términos semejantes, es decir, aquellos con la misma variable y exponente. Para sumar o restar, se agrupan los términos semejantes y se operan sus coeficientes, manteniendo las variables sin alteración.

Ejemplo:

Sumar los términos: $4x^2$; $7x^2$; $11x^2$

$$\Longrightarrow \quad = 4x^2 + 7x^2 + 11x^2 = 22x^2$$

Ejemplo:

Sumar los términos $5a$; $7a - 2b$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad &= 5a + (7a - 2b)\\ &=5a + 7a - 2b\\ &= 12a - 2b \end{aligned}$$

Ejemplo:

Sumar los términos $3xy + 7yz$; $13xy - 21xz$; $9yz + 11xz$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad &= (3xy + 7yz) + (13xy - 21xz) + (9yz + 11xz)\\ &= 3xy + 7yz + 13xy - 21xz + 9yz + 11xz\\ &=3xy + 13xy + 7yz + 9yz - 21xz + 11xz\\ &= 16xy + 16yz - 10xz \end{aligned}$$

Ejemplo:

Restar $6a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}$ de $3a^3 + 8a^2 - 2$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad &= 3a^3 + 8a^2 - 2 - \left(6a^3 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3a^3 + 8a^2 - 2 - 6a^3 + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{3}\\ &= 3a^3 - 6a^3 + 8a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - 2 - \tfrac{1}{3}\\ &= -3a^3 + \tfrac{17}{2}a^2 - \tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo:

De $x + y + z$, restar el término $-2x - y + 4z$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad &=x + y + z -(-2x - y + 4z)\\ &=x + y + z + 2x + y - 4z\\ &= x + 2x + y + y + z - 4z = 3x + 2y - 3z \end{aligned}$$

Actividad

Realizamos las sumas algebraicas:

1) $6ab - 10ac;\ 4bc - 5ac + 7ab$
2) $5p^3 - 15p^2 + 7p;\ p + 4p^2 - 2p^3$
3) $-8tf + 5ft;\ -4fgt + 10gft$
4) $12ax^2 + 4ax - 5a^2x; -12ax + 4xa^2 + 5ax^2$
5) $5m - 10n - 2;\ 40n - 12m + 9$
6) $-6x^4 + 5x - 2;\ 20x^4 - 6x + 9$

Realizamos las restas algebraicas:

1) Restar$-3y^2 + 4y - 5$ de $-13y^2 - 2y + 9$
2) Restar$-3t^2 + 2t - 1$ de $2t^2 - 3t + 4$
3) Restar $\frac{3}{2}x^5y^4 + \frac{5}{2}y^3 - \frac{2}{3}xy$ de $x^5y^4 - y^3 + xy$
4) Restar $\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x$ de $2x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x$
5) De $-9m^3 + 4m + 11$ restar $12m^3 - 3m + 7$
6) De $-3x^2 - 5xy + 5$ restar $2x^2 + 4xy - 2$
7) De $8a + 5b - 3c$ restar $5a + 7b - c$
8) De $6a^3 - 2a^2 + 3$ restar $3a^3 + 8a^2 - 2$

b) Multiplicación algebraica

Es una operación para la cual, el término multiplicando $N(x)$ y el término multiplicador $M(x)$ deben producir un tercer término llamado producto $P(x)$.

Ley de signos:

$$+\cdot+=+ \qquad -\cdot-=+$$
$$-\cdot+=- \qquad +\cdot-=-$$

Ley de exponentes, el producto de potencias de igual base es igual a la potencia cuyo exponente es la suma de los exponentes de ambas bases, es decir:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

Ley de coeficientes, el coeficiente del producto de dos factores, es igual al producto de los coeficientes de los factores:

$$13x\cdot 2y=(13\cdot 2)xy=26xy$$

Regla para multiplicar expresiones algebraicas, primero se multiplican los coeficientes a continuación de este producto, se escriben las letras de los factores en orden alfabético, aplicando las anteriores leyes mencionadas.

Ejemplo:

Multiplicamos $6x\cdot 3x\cdot 7x=(6\cdot 3\cdot 7)(x\cdot x\cdot x)=126x^3$

Ejemplo:

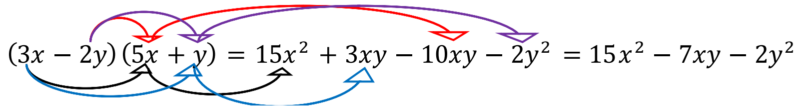
Multiplicamos:

$$7n^3p^2\cdot\frac{8}{5}n^2p=\left(7\cdot\frac{8}{5}\right)(n^3p^2\cdot n^2p)=\frac{56}{5}n^5p^3$$

Ejemplo:

Hacemos el producto de “$3x-2y$” con “$5x+y$”

Multiplicación de manera horizontal



$$(3x-2y)(5x+y)=15x^2+3xy-10xy-2y^2=15x^2-7xy-2y^2$$

Multiplicación de manera vertical:

$$\begin{array}{rr} \cdot & 3x-2y \\ & 5x+y \\ \hline & 15x^2-10xy \qquad\quad \\ + & 3xy-2y^2 \\ \hline & 15x^2-7xy-2y^2 \end{array}$$

Operaciones

*Para realizar **operaciones combinadas** siempre se deben operar siguiendo la jerarquía de operaciones:*

1° Los paréntesis.

2° Potencias.

3° Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.

4° Adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Recuerda

Regla de los signos de la multiplicación:

- *Si los signos son **iguales**: el resultado es **positivo.***
- *Si los signos son **diferentes**, el resultado es **negativo.***

Potencias:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \ veces\ \ a}=a^n$$

$$\boxed{a^n\cdot a^m=a^{n+m}}$$

Por ejemplo:

$$a^3\cdot a^2=a^{3+2}=a^5$$
$$z^8\cdot z^{(-2)}=z^{8+(-2)}=z^6$$

Actividad

Multiplicamos cada expresión:

1) $(13mn)(5mn)$
2) $(-7ab)(25a^4b^3c^2)$
3) $(-6m^3n)(7m^5n^4+13m^4n^3-21m^3n^2-m^2n)$
4) $\left(\frac{9}{7}xy\right)\left(\frac{14}{3}x^{a+1}y^{b+1}z^a\right)$
5) $(35a^3b)\left(\frac{1}{2}a^2b^3c^2\right)$
6) $\left(-\frac{25}{3}opq\right)\left(\frac{6}{5}o^2p-3p^2q-9oq^2\right)$
7) $\left(\frac{13}{2}y^4\right)(5x-\frac{8}{13}x^2y+\frac{2}{13}x^3y^2\Big)$

Calculamos el producto en cada expresión:

1) $(8a^2b^3c^4)(5a^2b^2c^3+16abc^2-12c^3)$
2) $(m^2-2n)\cdot(m^2-3m+n)$
3) $(3x-y)\cdot(x+2y)$
4) $(p-2q)\cdot(p-3q)$
5) $\left(\frac{21}{25}x^4y^6z^5\right)(3x^3y^7z^4+x^2y^8z^3-3xy^9z^2)$
6) $\left(\frac{9}{13}x^2y+xy\right)(\frac{2}{3}xy-\frac{4}{5}x^2+\frac{13}{2}yz^7)$
7) $\left(\frac{23}{5}a^{-2}b-ab^2\right)(\frac{7}{2}a^3-\frac{9}{2}b^3-\frac{12}{5}a^4)$
8) $\left(\frac{6}{11}a^7m^2+\frac{2}{5}a^{11}m\right)(-5am-8a^2m^2+6a^3m^3)$

Propiedades

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3$$

$$\frac{7^{12}}{7^{12}} = 7^{12-12} = 7^0 = 1$$

Regla de los signos de la división

La división de signos iguales da (+).

La división de signos diferentes da (–).

Propiedad distributiva

$$\frac{a+b+c}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}$$

A la identidad fundamental de la división también se le conoce como ***Algoritmo de Euclides*** *quien fue un matemático griego.*

En el esquema:

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Donde:

D *: Dividendo*
d *: Divisor*
q *: Cociente*
r *: Resto o Residuo*

3. División algebraica

Para dos términos, llamados dividendo P(x) y divisor Q(x); la división algebraica es una operación que se denota $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$, en la que encontramos una tercera expresión llamada cociente R(x).

Ley de exponentes, la potencia de la división de bases iguales es igual a la resta de las mismas, es decir:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ley de coeficientes, el coeficiente del cociente resulta de la división entera del dividendo entre el divisor.

$$\frac{36x^4}{2x} = (36 \div 2)x^{4-1} = 18x^3$$

a) División de monomios

Se divide los coeficientes y posteriormente se copia la parte literal aplicando las leyes de potencias mencionadas anteriormente.

Ejemplo:

Dividimos $$\frac{625x^4y^7z^{11}}{25x^2y^3z^4} = 5x^{4-2}y^{7-3}z^{11-4} = 25x^2y^4z^7$$

Ejemplo:

Dividimos

$$\frac{-144x^{n+8}y^{m+4}z^{4+p}}{-6x^{6+n}y^{2-m}z^{3+p}} = 24x^{n+8-(6+n)}y^{m+4-(2-m)}z^{4+p-(3+p)} = 24x^2y^{2m+2}z$$

b) División de polinomios entre monomios

Para dividir polinomios con monomios el divisor se debe de repartir a cada uno de los términos del polinomio y se realiza la división correspondiente siguiendo los pasos anteriores.

Ejemplo:

Dividimos - $12a^5$ - $22a^4$ - $6a^3$ entre $2a^2$

$$\frac{-12a^5 - 22a^2 - 6a^3}{2a^2} = \frac{-12a^5}{2a^2} - \frac{22a^4}{2a^2} - \frac{6a^3}{2a^2}$$

$$= -6a^3 - 11a^2 - 3a$$

Ejemplo:

Dividimos $35a^8 + 14a^{10} + 49a^{13}$ entre $7a^5$

$$\frac{35a^8 + 14a^{10} + 49a^{13}}{7a^5} = \frac{35a^8}{7a^5} + \frac{14a^{10}}{7a^5} + \frac{49a^{13}}{7a^5}$$

$$= 5a^3 + 2a^5 + 7a^8$$

Actividad

Realizamos las siguientes divisiones algebraicas:

1) $49a^7b^{-3}c^4$ entre $7a^5b^{-4}c^2$
2) $-32x^{-4}y^7z^4$ entre $2x^3y^2z^{-2}$
3) $(540x^{-2}y^7z^4) \div (36x^4\,y^2z)$
4) $\frac{7}{8}x^{12}y^{14}z^9$ entre $\frac{5}{2}x^5y^3z^2$
5) $-\frac{3}{8}m^xn^b$ entre $-\frac{5}{2}mn^5p^3$
6) $-\frac{3}{8}x^7y^9$ entre $-\frac{3}{4}x^a$
7) $\left(6\frac{2}{3}a^{5m}b^{3n-1}c^{3m+2n}\right) \div \left(\frac{1}{2}a^{2m}b^{n-1}c^{m+n}\right)$
8) $\left(\frac{5}{3}x^{2a+b}y^{3a-1}z^{3a+2b}\right) \div \left(\frac{15}{7}x^{2b}y^{a+1}z^{a+2b}\right)$
10) $88x^5 + 66x^3 - 52x^2$ entre $-2x^2$
11) $27x^2y - 9xy^2 + 6x^2y^2$ entre $-3xy$
12) $-8m^3 + 12m^2 + 21m - 2$ entre m
13) $108m^3n - 122mn + 48mn^2$ entre $2mn$
14) $\frac{1}{3}y^5 - \frac{2}{3}y^3z + \frac{3}{8}y^2z^2$ entre $\frac{1}{4}y^2$
15) $\frac{1}{3}a^2b - \frac{3}{5}ab^2 + \frac{3}{8}a^2b^2$ entre $-\frac{5}{3}ab$
16) $\frac{2}{3}x^4y^3 - \frac{1}{5}x^3y^2 + \frac{1}{4}x^2y$ entre $-\frac{1}{5}xy^2$
17) $\frac{2}{5}a^9 - \frac{1}{3}a^7b^4 - a^3b^2$ entre $5ab$
18) $-\frac{3}{4}x^{n-1}y^{m+2} + \frac{1}{8}x^{n+1} - \frac{2}{3}x^{n+1}y^m$ entre $-\frac{2}{5}x^3y^2$

Regla para dividir expresiones algebraicas que tengan divisor con más de un término.

En la división de polinomios es necesario ordenar los términos en forma descendente o ascendente, luego se realiza la división para lo que se recomienda los siguientes pasos:

P1. Se ordena el dividendo y el divisor de la misma forma ya sea descendente o ascendente.

P2. Se divide el 1° término del dividendo entre el 1° término del divisor y ese resultado nos dará el cociente.

P3. Se multiplica el cociente con todo el divisor y su resultado se anota debajo del dividendo con signo cambiado.

P4. Luego se reducen los mismos y se baja los siguientes términos así se procede a repetir los pasos hasta que el resto sea cero o quede un residuo cuyo grado sea menor que del divisor.

Ejemplo:

Dividimos empleando el método anterior:

$$
\begin{array}{r|l}
4x^5+4x^4+3x^3+4x^2+4x-1 & 2x^3+3x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & 2x^2-x+2 \\
-2x^4+x^3+6x^2+4x & \\
\underline{2x^4+3x^3+x^2-x} & \\
4x^3+7x^2+3x-1 & \\
\underline{-4x^3-6x^2-2x+2} & \\
x^2+x+1 &
\end{array}
$$

Observaciones

1). El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

2). El grado absoluto del residuo de una división de polinomios homogéneos es igual al grado absoluto del dividendo.

3). El grado relativo de la letra ordenatriz en el residuo es como máximo uno menor que el grado relativo de la letra ordenatriz en el divisor.

División exacta:

El resto de la división es cero $(R(X)=0)$

Como consecuencia de esto:

$D(x)=d(x)\cdot q(x)$

División Inexacta:

El resto de la división es distinto de cero $(R(x)\neq 0)$

Cociente: $Q(x)=2x^2-x+2$

Residuo: $R(x)=x^2+x+1$

El cociente completo (Q_c) es: $Q_c=Q(x)+\dfrac{R(x)}{divisor}=2x^2-x+2+\dfrac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2+x-1}$

Actividad

Determinamos el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:

1) $6x^4-8x^2-x^3+x+2$ entre $2x^2-x-1$

2) $n^6+6n^3-2n^5-7n^2-4n+6$ entre n^4-3n^2+2

3) $a^4+a^3b-8a^2b^2+20ab^3-15b^4$ entre $a^2-3ab-5b^2$

4) $p^5-5p^4q+20p^2q^3-16pq^4$ entre $p^2-2pq-8q^2$

VALORACIÓN

Las expresiones algebraicas nos permiten:

Representar situaciones, modelar fenómenos de nuestro entorno real a través de expresiones matemáticas.

Realizar cálculos, efectuando operaciones de todo tipo para obtener resultados numéricos.

Resolver problemas, como consecuencia principal, además de la precisión en los resultados.

El álgebra constituye un ejercicio, organiza el pensamiento y prepara la mente para poder resolver problemas de cualquier tipo en la vida diaria; no debe ser considerado como algo púramente operacional. Permite analizar minuciosamente cada situación y colabora en desarrollar algoritmos con pasos a seguir, de esta manera nos ayuda a resolver problemas de cualquier tipo en nuestra vida diaria.

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

Construimos el juego de las cartas algebraicas:

El juego consiste en elaborar cartas que tengan diferentes términos algebraicos y formar parejas, combinando las cartas para formar expresiones equivalentes y realizar operaciones con estas.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

PRÁCTICA

La preparación de una pizza es una forma divertida de aprender ecuaciones.
Ingredientes:

- Harina: x gramos
- Agua: $0.6\ x$ gramos (60% del peso de la harina)
- Levadura: $0.02x$ gramos (2% del peso de la harina)
- Sal: $0.015x$ gramos (1.5% del peso de la harina)
- Salsa de tomate: y gramos
- Queso mozzarella: 1.5 gramos (150% del peso de la salsa de tomate)
- Otros ingredientes a elección: Jamón, champiñones, etc. (z gramos en total)

Nosotros decidimos el valor de x cantidad de harina.

Fuente: OpenAi, 2024

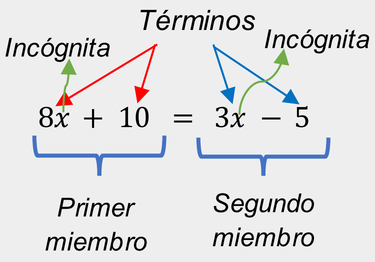
Actividad

Respondemos y realizamos las actividades en el aula

- ¿Por qué utilizar ecuaciones en una receta?
- ¿Cuál es la diferencia entre identidad y ecuación?
- ¿Puedes adaptar esta receta a tu gusto y crear tus propias ecuaciones para otros platos?

TEORÍA

Elementos de una ecuación



Tomar nota

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos como separadores de los números decimales:
la coma “,“ y el punto “.“

Por otro lado, la ASALE en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal “.”

Tomando en cuenta estos aspectos, se utilizará el ***punto decimal*** *como separador.*
Ejemplo:
3.14 ; 0.71 ; -0.5 ; -0.11...
Fuente: Sistema Internacional de unidades

1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a aquella en que la incógnita esta elevada a la primera potencia.

Ejemplo:

$$3x + 5 = 29$$

La letra “x” es la incógnita.
5 y 29 son términos independientes.
Ecuación, es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece una (o más) incógnitas.
Incógnita, que se simboliza con la letra “x”, representa cantidades a determinar, las cuales hacen que tengan un valor verdadero o falso.
Transposición de términos, se refiere a cambiar de posición todos los términos de la derecha a izquierda y de izquierda a derecha respecto al símbolo de igualdad “=“. Para realizar esta transposición de miembros todos los términos mantienen su mismo signo.
Regla de transposición de términos:

1. Si un término suma a otro, éste al cambiarlo de miembro cambia y viceversa si está restando pasará a sumar.
2. Si un término multiplica pasará al otro miembro a dividir y si divide pasará a multiplicar.

Grado de una ecuación, que está determinado por el exponente mayor del factor literal.

Resolución de una ecuación de 1er grado con una incógnita

1. Se tiene que ordenar todos los términos semejantes en el primer miembro.
2. Si estuvieran las incógnitas en el lado derecho se realiza la transposición de miembros.
3. Se reduce los términos semejantes.
4. Si la variable queda acompañada de algún coeficiente distinto de uno este valor pasará al otro miembro a dividir

5. En caso de que existan signos de agrupación paréntesis, corchetes y llaves, estos se eliminan de acuerdo a la operación que contienen.
6. Se despeja la incógnita.
7. Se realiza la prueba.

Nota: En caso de que la incógnita sea negativa, se multiplica toda la ecuación por “menos uno” (-1).

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación:

$5x - 10 - 3x + 3 + 2x = 20 - x - 4 - 3 + 3x$ Transponemos términos.

$5x - 3x + 2x + x - 3x = 20 - 4 - 3 + 10 - 3$ Reduciendo términos semejantes.

$2x = 20$ Despejando la variable.

$x = \frac{20}{2}$ Realizando la división.

$x = 10$

Verificando: $5x - 10 - 3x + 3 + 2x = 20 - x - 4 - 3 + 3x$

$$5(10) - 10 - 3(10) + 3 + 2(10) = 20 - (10) - 4 - 3 + 3(10)$$
$$73 - 40 = 50 - 17$$
$$33 = 33$$

Ejemplo:

Encontramos el valor de “x” en la siguiente ecuación:

$2x - 5 + 1 + x = x - 6$ Transponemos términos.

$2x + x - x = -6 + 5 - 1$ Reduciendo términos semejantes.

$2x = -2$ Despejando la variable.

$x = \frac{-2}{2}$ Realizando la división.

$x = -1$

Verificando: $2x - 5 + 1 + x = x - 6$

$$2(-1) - 5 + 1 + (-1) = (-1) - 6$$
$$-8 + 1 = -7$$
$$-7 = -7$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación:

$3[6x - 5(x - 3)] = 15 - 3(x - 5)$ Suprimiendo paréntesis.

$3[6x - 5x + 15] = 15 - 3x + 15$ Suprimiendo corchetes.

$18x - 15x + 45 = 15 - 3x + 15$ Transponemos términos.

$18x - 15x + 3x = 15 + 15 - 45$ Reduciendo términos semejantes.

$6x = -15$ Despejando la variable.

$x = \frac{-15}{6}$ Realizando la división.

$\therefore x = -\frac{5}{2}$

Verificando: $3[6x - 5(x - 3)] = 15 - 3(x - 5)$

$$3\left[6\left(-\frac{5}{2}\right) - 5\left(-\frac{5}{2} - 3\right)\right] = 15 - 3\left(-\frac{5}{2} - 5\right) \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{25}{2}\right) = \frac{30 + 45}{2} \Rightarrow \frac{75}{2} = \frac{75}{2}$$

Observaciones

AL – KHOWARIZMI fue quien dio el nombre “XAI” a la incógnita, que en árabe significa “cosa”, con el tiempo en lugar de XAI, se usó abreviadamente X (su inicial) por ello al Álgebra se le conoce como “Regla de la cosa”

Balanceo de ecuaciones

Formalmente se escribe:

Propiedad aditiva

Para todo número a, b, c:

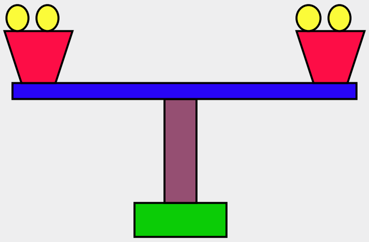
Si $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$

Propiedad multiplicativa

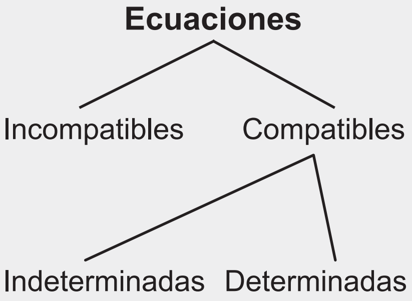
Para todo número a, b, c *con* $c \neq 0$

Si $a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Visualmente



Infograma: tipo de ecuación lineal



Clasificación de ecuaciones

Con respecto a los coeficientes de las incógnitas:

- ***Ecuaciones numéricas***
  Si los coeficientes de las incógnitas son números.
- ***Ecuaciones literales***
  Si los coeficientes de las incógnitas son letras.

Con respecto a su forma:

- ***Ecuaciones racionales***
  Cuando sus incógnitas no están afectadas de radical. Estos a su vez pueden ser: Ecuaciones racionales enteras o ecuaciones racionales fraccionarias.
  Una ecuación es racional fraccionaria cuando presenta letras en su denominador
- ***Ecuaciones Irracionales***
  Cuando la incógnita se encuentra dentro de un radical.

Con respecto al número de incógnitas:
Pueden ser de una, dos, tres o más incógnitas.
$2x + 1 = 3x - 4$; *es una ecuación con una incógnita*: x
$5x - 3y = 3$; *es una ecuación con dos incógnitas*: x e y
$x + 2y - 3z = 8$; *es una ecuación con tres incógnitas*: x, y, z

Con respecto al Grado de la Incógnita:

- ***Ecuaciones de primer grado***
  Cuando el exponente de la incógnita es uno (1).
- ***Ecuación de segundo grado***
  Cuando el mayor exponente de la incógnita es dos (2).
- ***Ecuación de tercer grado***
  Cuando el mayor exponente de la incógnita es tres (3)

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{2} - x - 1$$

Solución

$$12\left(\frac{x+1}{4}\right) - 12\left(\frac{x-2}{3}\right) = 12\left(\frac{x+3}{2}\right) - 12(x) - 12(1)$$

$$3(x+1) - 4(x-2) = 6(x+3) - 12x - 12$$

$$3x + 3 - 4x + 8 = 6x + 18 - 12x - 12$$

$$3x - 4x + 12x - 6x = 18 - 12 - 3 - 8$$

$$5x = -5$$

$$x = -\frac{5}{5}$$

$$x = -1$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{x+5}{3} + \frac{x-2}{2} = -x - 3$$

Solución

$$6\left(\frac{x+5}{3}\right) + 6\left(\frac{x-2}{2}\right) = 6(-x-3)$$

$$2(x+5) + 3(x-2) = -6x - 18$$

$$2x + 10 + 3x - 6 = -6x - 18$$

$$2x + 3x + 6x = -18 - 10 + 6$$

$$11x = -22$$

$$\therefore x = -\frac{22}{11} = -2$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación, para $x \neq 2$; $x = 2$.

Solución

$$(x+2)(x-2)\left(\frac{3-x}{x+2}\right) - (x+2)(x-2)\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -2(x+2)(x-2)$$

$$(x-2)(3-x) - (x+2)(x-1) = -2(x+2)(x-2)$$

$$5x - 6 - x^2 - (x^2 + x - 2) = -2(x^2 - 4)$$

$$5x - 6 - x^2 - x^2 - x + 2 = -2x^2 + 8$$

$$4x - 2x^2 - 4 = -2x^2 + 8$$

$$4x = 12 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{12}{4}$$

$$\therefore x = 3$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones de primer grado:

1) $2x - x + 4 + 2 = 8$
2) $3x + 1 - 2x = 9 - 3$
3) $-6 - 2x = -3x - 6$
4) $2x + x + 5 - 5 = 6$
5) $2x + 2 - 1 - x = 2$
6) $-9x - 6 + 4 = 4 + 2x - 8x$
7) $2(x+1) = 2$
8) $4(-x-1) + 5x - 2 = -2x - x$
9) $3 + 2(4 + 2x) + 1 = 20 - 2(2 - x)$
10) $4(x-3) - 5(x+2) = 7(3x-1) + 29$
11) $3(x+1) = 2(x+3) - 1$
12) $\frac{x+2}{3} = 12$
13) $\frac{-5+x}{-3} = -5$
14) $\frac{x-3}{-2} = 9 + 2x$
15) $4 + \frac{x}{3} - 2 = 6$
16) $\frac{x+2}{3} + \frac{x}{2} = 10$
17) $\frac{x+1}{10} - \frac{x-3}{6} = 0$
18) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = 1$
19) $\frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2} = 2$

2. Resolución de problemas del contexto con ecuaciones de primer grado

Ejemplo:

La compañía de cosméticos “Akaena” produce perfumes que tiene costos variables de Bs 8 por unidad y costos fijos de Bs 95. Cada unidad tiene un precio de venta de Bs 13. Determinar el número de unidades que deben vender para que la compañía obtenga utilidades de Bs 145 y calcular el margen por unidad.

Solución

Se tiene que

$$\boldsymbol{Utilidades = Ingresos\ totales - Costos\ totales}$$

$$Ingresos\ totales = Cantidad\ vendida \cdot precio\ de\ venta$$

$$Costos\ totales = Costos\ variables + Costos\ fijos$$

Sea x: *número de unidades que deben ser vendidas*

Así la ecuación es:

$$\begin{gathered} 13x - (8x + 95) = 145 \\ 13x - 8x - 95 = 145 \\ 13x - 8x = 145 + 95 \\ 5x = 240 \\ \therefore x = \frac{240}{5} = 48 \end{gathered}$$

Respuesta

Es necesario vender 48 unidades para obtener utilidades de Bs 145.

Ejemplo:

Orlando tiene el triple de la edad de su hijo Santiago, pero dentro de 13 años tendrá tan solo el doble de la edad de Santiago, ¿cuántos años tiene Santiago ahora?

Solución

Sea x: la edad actual de Santiago
Edad actual de Orlando :$3x$
Edad de Santiago dentro de 13 años : x + 13
Edad de Orlando dentro de 13 años :$3x$ + 13
Como dentro de 13 años la edad de Orlando será el doble de la edad de Santiago: 2(x + 13)
Así, la ecuación planteada es:

$$\begin{gathered} 3x + 13 = 2(x + 13) \\ 3x + 13 = 2x + 26 \\ 3x - 2x = 26 - 13 \\ \therefore x = 13 \end{gathered}$$

Respuesta

La edad de Santiago es de 13 años.

Ejemplo:

El día miércoles Marcos compró 12 kilos de papa y el jueves algunos kilos más. Si en total compró 54 kilos, ¿cuántos kilos compró el día jueves?

Solución

Sea x: los kilos de papa comprados el jueves
Así: la ecuación es:

$$\begin{gathered} 12 + x = 54 \\ x = 54 - 12 \\ x = 42 \end{gathered}$$

Respuesta

Marcos compró 42 kilos de papa.

Resolver problemas

Secuencia de pasos, que permite en general, enfrentar de manera ordenada la resolución de un problema:

1. *Leer comprensivamente el enunciado.*
2. *Asignar incógnita.*
3. *Establecer relaciones.*
4. *Plantear la ecuación.*
5. *Resolver la ecuación.*
6. *Analizar la solución de la ecuación en el problema y verificar la solución.*
7. *Dar la respuesta.*

Traducción del lenguaje usual al lenguaje matemático

Si x es la edad que tiene Ian en este momento:

Expresión gramatical	Traducción algebraica
Edad actual de Ian.	x
Edad de Ian hace 5 años.	$x - 5$
Edad de Ian dentro de 8 años.	$x + 8$
El doble de la edad de Ian.	$2x$
Un tercio de la edad actual de Ian.	$\frac{x}{3}$
El doble de la edad que tenía Ian hace 5 años.	$2(x - 5)$

Otras traducciones

Un número	a
El doble de un número	$2a$
El triple de un número	$3a$
El cuádruplo de un número	$4a$
El antecesor de un número	$a - 1$
El sucesor de un número	$a + 1$

Lenguaje usual al matemático: conectores verbales

Conector verbal	Símbolo matemático
Aumentado, agregado	$+$
Disminuido, diferencia	$-$
De, del, de los	$\cdot$
Es, como, nos da, tendrá, resulta	$=$

Recuerda...

“Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta traducir dicho problema del inglés, español u otra lengua al idioma algebraico, o sea, a una ecuación”. Isaac Newton

La capacidad de traducir problemas del mundo real al lenguaje algebraico es una habilidad fundamental en matemáticas y en muchas otras disciplinas. Al hacerlo, no solo estamos simplificando el problema, sino también abriendo un mundo de posibilidades para su solución.

Resolvemos...

- *Rolando le dice a Leonardo: Yo tengo el doble de dinero que tú. Si Leonardo le contesta: “Entre los dos tenemos Bs 12 ¿cuántos dinero tiene cada uno?*
- *Ana reta a Iván y le da la siguiente pista: “adivina cuántos años tengo si a mi edad actual le restas “las dos terceras partes” de la misma y te quedan 3*

Ejemplo:

Megan tiene dulces de fresa, de limón y de menta. Inicialmente tiene 5 dulces más de limón que de fresa y 10 dulces más de menta que de limón. Durante la semana se come todos los dulces de fresa, la mitad de los dulces de limón y la tercera parte de los dulces de menta. Si ahora le quedan 30 dulces, ¿cuántos tenía inicialmente?

Solución

Sea x: cantidad de dulces de fresa
El número de dulces de limón es: $x+5$
El número de dulces de menta es: $x+5+10=x+15$
Megan come todos los de fresa, ya no tiene caramelos de fresa.

De limón le quedan la mitad: $\dfrac{x+5}{2}$

De menta la quedan dos terceras partes: $\dfrac{2}{3}(x+15)$

En total le quedan 30 caramelos: $\dfrac{x+5}{2}+\dfrac{2}{3}(x+15)=30$

Conduce a la solución, que es: $\frac{x+5}{2}+\frac{2}{3}(x+15)=30$

Despejando la incógnita x:

$$(6)\left(\frac{x+5}{2}\right)+(6)\,\frac{2}{3}(x+15)=(6)30$$

$$3(x+5)+4(x+15)=180$$
$$3x+15+4x+60=180$$
$$3x+4x=180-15-60$$
$$7x=105$$
$$\therefore x=\frac{105}{7}=15$$

Respuesta

Inicialmente tenía 15 dulces de fresa, 20 dulces de limón y 30 dulces de menta. Por tanto, Megan tenía inicialmente 65 dulces.

Ejemplo:

Cristian se compra unas medias deportivas con la tercera parte de su dinero y con la mitad del dinero que le queda se compra una polera. Si ha gastado un total de Bs 210, ¿cuánto dinero tenía inicialmente?

Solución

Sea x: monto de dinero que Cristian tenía antes
Cristian gasta la tercera parte del dinero en medias deportivas: $\dfrac{x}{3}$

Le quedan las otras dos terceras partes: $\dfrac{2}{3}x$

Con la mitad del dinero que le queda se compra la camiseta: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}x\right)=\dfrac{x}{3}$

El dinero que ha gastado es Bs 210: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}x=210$ que es la ecuación que conduce a la solución del problema.
Despejando x:

$$3\left(\frac{x}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}x\right)=3\cdot 210$$
$$x+x=630$$
$$\therefore x=\frac{630}{2}=315$$

Respuesta

Cristian tenía inicialmente Bs 315

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas

1) Adriana tiene 16 años más que Jasmín y dentro de 4 años tendrá el doble de la edad de Jasmín. ¿Qué edad tiene cada una?

2) Un pastelero gasta Bs 24 000 diarios en ingredientes para hacer galletas y cobra Bs 20 por cada galleta. Si al final de un día vendió todas las galletas que preparó y obtuvo una ganancia total de Bs 880, ¿cuántas galletas vendió?

Ejemplo:

La suma de dos números es 127 y el segundo número es cinco unidades menos que el primer número, ¿cuáles son los números?

Solución

Sea x:el número buscado

El segundo número es: 127 $- x$

El segundo número es cinco unidades menos que el primer número: $x - 5$

La ecuación a despejar es:

$$\begin{gathered} 127 - x = x - 5 \\ 127 + 5 = x + x \\ 2x = 132 \\ \therefore x = \frac{132}{2} = 66 \end{gathered}$$

Respuesta

Los dos números son 66 y $127 - 66 = 61$.

Enunciado	En símbolos
Un número aumentado en 17	$x + 17$
Un número disminuido en 5.	$x - 5$
El triple de un número.	$3x$
El cuádruple de la suma de un número y 8.	$4(x + 8)$
El doble de un número.	$2x$
El doble de un número aumentado en 6.	$2(x+6)$
El triple de un número, disminuido en 7	$3(y-7)$

Ejemplo:

La suma de un número más su doble más su mitad es 42, ¿cuál es ese número?

Solución

Sea x el número buscado.

Su doble viene dado por: $2x$

Su mitad: $\frac{x}{2}$

Así la ecuación, cuya incógnita x debemos despejar es:

$$\begin{gathered} x + 2x + \frac{x}{2} = 42 \\ 2x+4x+x=84 \\ 7x=84 \\ \therefore x = \frac{84}{7} = 12 \end{gathered}$$

Respuesta

El número buscado es 12

VALORACIÓN

Las ecuaciones son el lenguaje fundamental de las matemáticas y están presentes en casi todos los aspectos de nuestra vida. Desde las tareas más simples hasta los descubrimientos científicos más complejos, las ecuaciones nos permiten modelar, analizar y resolver una gran variedad de problemas.

Las ecuaciones son una herramienta poderosa que nos permite:

Comprender el mundo, al modelar fenómenos naturales y sociales.

Resolver problemas, al encontrar soluciones a situaciones complejas.

Innovar, al desarrollar nuevas tecnologías y productos.

En definitiva, las ecuaciones son parte integral de nuestra vida y su dominio nos brinda una ventaja significativa en muchos ámbitos.

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

Resolvemos el cuadrado mágico.

En cada caso existe un valor para la incógnita x, que transformará las expresiones algebraicas en números.

- Realizamos la suma de filas, columnas y diagonales.
- Puesto que se trata de un cuadrado mágico, todas las sumas deberán dar el mismo resultado para un determinado valor de x.
- Comprobamos, una vez obtenido el número de cada cuadro, que efectivamente, es un cuadrado mágico.

$2x-2$	$3x$	$4x-10$
x	$2x-1$	$x+4$
$3x-1$	$3x$	$4x-10$

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES APLICADOS AL DESARROLLO DE LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

Idelfonso debe presentar una maqueta donde utiliza el diseño de una instalación eléctrica por lo que necesita calcular la resistencia total de dos resistencias en paralelo. Las resistencias son (R_1) y (R_2). El desea calcular la diferencia de cuadrados de las resistencias para simplificar el cálculo de la resistencia total en paralelo.

$$R_1^2 - R_2^2 = (R_1 + R_2)(R_1 - R_2)$$

Cuando se combinan diferentes resistencias en un circuito, este cálculo ayuda a los electricistas a calcular rápidamente la diferencia en la resistencia total. Es particularmente útil para diseñar y analizar circuitos eléctricos domésticos que pueden tener múltiples resistencias en paralelo.

Fuente: OpenAi, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas

- ¿Cuál es la diferencia entre productos notables e identidad algebraicas?
- ¿Por qué es útil esta fórmula en electricidad?
- ¿Cuáles son las operaciones algebraicas fundamentales y para qué son útiles?
- ¿En qué otros campos se pueden utilizar los productos notables?

TEORÍA

A continuación, tenemos los productos notables que se obtienen con simple desarrollo

1. Productos notables (identidades algebraicas)

a) Cuadrado de un binomio

El cuadrado de una suma (o diferencia) de dos cantidades, es igual al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Se expresa con las fórmulas:

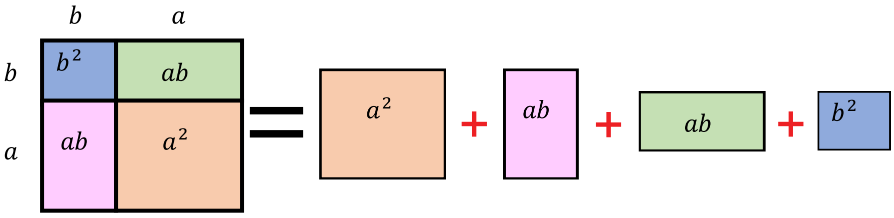
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Verificación analítica:

La expresión $(a+b)^2$ es igual a $(a+b)(a+b)$, al realizar el producto, se tiene:

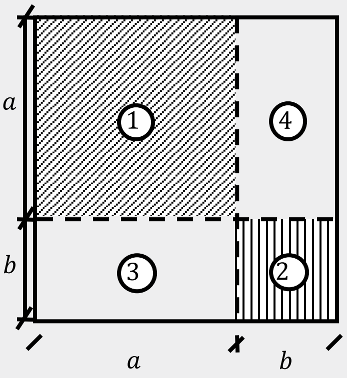
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Verificación gráfica:



$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + \quad ab \quad + \quad ab \quad + \quad b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

El trinomio cuadrado perfecto



Área total : $(a+b)^2$

Ahora sumamos partes:

Cuadrado ① : a^2

Cuadrado ② : b^2

Rectángulo ③ : ab

Rectángulo ④ : ab

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A este resultado también se conoce como:

"el trinomio cuadrado perfecto"

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Ejemplo:

Desarrollamos $(x+7)^2$

Solución

Aplica la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Resultado

El cuadrado del binomio es:

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

Ejemplo:

Desarrollar $(-5x+3y)^2$

Solución

Aplica la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(-5x)^2 = 25x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(-5x)(3y) = -30xy$
- El cuadrado del segundo término: $(3y)^2 = 9y^2$

Resultado

El cuadrado del binomio es:

$$(-5x+3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$$

Ejemplo:

Desarrollar $\left(\frac{7}{4}a + 6b\right)^2$

Solución

Aplica la regla general:

- El cuadrado del primer término: $\left(\frac{7}{4}a\right)^2 = \frac{49}{16}a^2$
- El doble producto del primer término por el segundo:

$$2\left(\frac{7}{4}a\right)(6b) = 21ab$$

- El cuadrado del segundo término: $(6b)^2 = 36b^2$

Resultado

El cuadrado del binomio es:

$$\left(\frac{7}{4}a + 6b\right)^2 = \frac{49}{16}a^2 + 21ab + 36b^2$$

Ejemplo:

Desarrollar $(3x^{3a+5} + y^{4a})^2$

Solución

Aplicamos la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(3x^{3a+5})^2 = 9x^{6x+10}$
- El doble producto del primer término por el segundo:

$$2(3x^{3a+5})y^{4a} = 6x^{3a+5}y^{4a}$$

- El cuadrado del segundo término: $(y^{4a})^2 = y^{8a}$

Resultado

El cuadrado del binomio es:

$$(3x^{3a+5} + y^{4a})^2 = 9x^{6x+10} + 6x^{3a+5}y^{4x} + y^{8a}$$

Cuadrado de un binomio (suma)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$\begin{array}{rl} & a+b \\ \times & a+b \\ \hline & a^2+ab \\ + & \quad +ab+b^2 \\ \hline & a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$\begin{array}{rl} & a-b \\ \times & a-b \\ \hline & a^2-ab \\ + & \quad -ab+b^2 \\ \hline & a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Recuerda que...

$$(2a)^2$$

En este caso el exponente afecta a cada factor, es decir:

$$(2a)^2 = 2^2\,a^2 = 4a^2$$

$$(-5b)^2 = (-1)^2\,5^2\,b^2 = 25b^2$$

Si la potencia es un número racional:

$$(7c)^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}$$

Actividad

Desarrollamos las siguientes expresiones:

1) $(2x + 2)^2$
2) $(3x - 2y)^2$
3) $(a^3 - b)^2$
4) $(6ab + 7cd)^2$
5) $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}y^2\right)^2$
6) $(9x^{a+1} - 11y^{a+3})^2$
7) $\left(\frac{8}{3}a^x + \frac{13}{5}b^y\right)^2$
8) $\left(\frac{13}{7}x^{3a+2} - \frac{15}{6}y^{2a-5}\right)^2$
9) $\left(\frac{8}{7}a^{3x} + \frac{9}{11}b^{2x}\right)^2$

Binomio cojugado

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\begin{array}{rl} & a+b \\ \times & a-b \\ \hline & a^2+ab \\ + & \quad -ab-b^2 \\ \hline & a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

Propiedades de la potencia

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
- $(x \div y)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
- $(x^n)^m = x^{mn}$
- $1^n = 1$
- $n^1 = n$
- $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n = \dfrac{y^n}{x^n}$
- $\sqrt{a^2} = (a)^{\frac{2}{2}} = a$
- $\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt[4]{b^8} = b^2$

Ejemplo:

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) =$$

$$(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}) + 2(\sqrt{x}) - 4$$

$$= x - 4$$

Nota importante

En la propiedad de la raíz cuadrada $\sqrt{a^2}$ *, si a toma valores numéricos:*

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

donde $|a|$ *se lee el* **valor absoluto de** a.

b) Binomio conjugado.

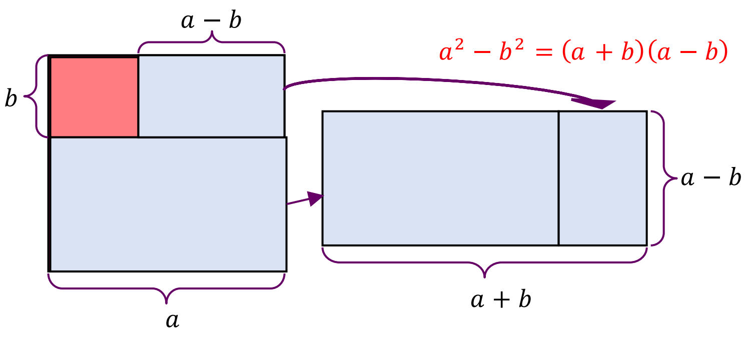
Una suma por una diferencia, o diferencia por una suma, su resultado es la diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Verificación analítica:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Verificación gráfica:



Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(x+7)(x-7)$

Solución

$$(x+7)(x-7)=(x)^2-(7)^2=x^2-49$$

Respuesta

$$(x+7)(x-7)=x^2-49$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(5a^2+3b)(5a^2-3b)$

Solución

$$(5a^2+3b)(5a^2-3b) = (5a^2)^2-(3b)^2 = 25a^2-9b^2$$

Respuesta

$$(5a^2+3b)(5a^2-3b) = 25a^2-9b^2$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(-3x^a+2y^b)(-3x^a-2y^b)$

Solución

$$(-3x^a+2y^b)(-3x^a-2y^b) = (-3x^a)^2-(2y^b)^2 = 9x^{2a}-4y^{2b}$$

Respuesta

$$(-3x^a+2y^b)(-3x^a+2y^b) = 9x^{2a}-4y^{2b}$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $\left(\dfrac{4}{5}x^3+\dfrac{1}{13}y^5\right)\left(\dfrac{4}{5}x^3-\dfrac{1}{13}y^5\right)$

Solución

$$\left(\frac{4}{5}x^3+\frac{1}{13}y^5\right)\left(\frac{4}{5}x^3-\frac{1}{13}y^5\right)=\left(\frac{4}{5}x^3\right)^2-\left(\frac{1}{13}y^5\right)^2$$
$$=\frac{16}{25}x^6-\frac{1}{169}y^{10}$$

Respuesta

$$\left(\frac{4}{5}x^3+\frac{1}{13}y^5\right)\left(\frac{4}{5}x^3-\frac{1}{13}y^5\right)=\frac{16}{25}x^6-\frac{1}{169}y^{10}$$

c) Expresiones donde se aplica el binomio conjugado.

Ejemplo:

Desarrollar la expresión $(a+b+c)(a+b-c)$.

Solución

Los términos se agrupan de la siguiente forma:

$$(a+b+c)(a+b-c)=[(a+b)+c][(a+b)-c]$$

Se aplica la fórmula del binomio conjugado:

$$[(a+b)+c][(a+b)-c]=(a+b)^2-c^2$$

Respuesta

Se desarrolla el binomio y el resultado es:

$$(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(x-2y+3z-5)(x-2y-3z+5)$

Solución

Los términos se agrupan y se aplica la fórmula para binomios conjugados:

$$[(x-2y)+(3z-5)][(x-2y)-(3z-5)]=(x-2y)^2-(3z-5)^2$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado:

$$\begin{aligned}(x-2y)^2-(3z-5)^2&=(x^2-4xy+4y^2)-(9z^2-30z+25)\\&=x^2-4xy+4y^2-9z^2+30z-25\\&=x^2+4y^2-9z^2-4xy+30z-25\end{aligned}$$

Respuesta

$$(x-2y+3z-5)(x-2y-3z+5)=x^2+4y^2-9z^2-4xy+30z-25$$

d) Producto de dos binomios

El producto de dos binomios $(x\pm a)(x\pm b)$ es igual al cuadrado del primer término más la suma algebraica de los dos términos por el primer término, más el producto de los segundos términos.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(a+5)(a-7)$

Solución

Se desarrolla el binomio:

- El cuadrado del término común: $(a)^2=a^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el termino común: $(+5-7)a=-2a$
- El producto de los términos no comunes: $(+5)(-7)=-35$

Respuesta

$$(a+5)(a-7)=a^2-2a-35$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $\left(\frac{4}{3}x^a-\frac{11}{7}\right)\left(\frac{4}{3}x^a-\frac{21}{5}\right)$

Solución

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}x^a-\frac{11}{7}\right)\left(\frac{4}{3}x^a-\frac{21}{5}\right)&=\left(\frac{4}{3}x^a\right)^2+\left(-\frac{11}{7}-\frac{21}{5}\right)\frac{4}{3}x^a+\left(-\frac{11}{7}\right)\left(-\frac{21}{5}\right)\\&=\frac{16}{9}x^{2a}+\left(-\frac{202}{35}\right)\frac{4}{3}x^a+\left(\frac{33}{5}\right)=\frac{16}{9}x^{2a}-\frac{808}{105}x^a+\frac{33}{5}\end{aligned}$$

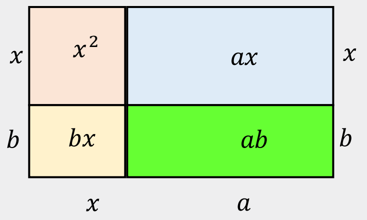
Binomio conjugado

$$(a+b+c)(a+b-c)=a^2+2ab+b^2-c^2$$

$$\begin{array}{rrrr} & a+b+c & & \\ \times & a+b-c & & \\ \hline & a^2+ab+ac & & \\ + & ab & +b^2+bc & \\ & & -ac & -bc-c^2 \\ \hline a^2+2ab & & +b^2 & -c^2 \end{array}$$

Producto de dos binomios: Interpretación gráfica

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$



Producto de dos binomios: Interpretación analítica

$$\begin{array}{rr} & x+a \\ \times & x+b \\ \hline & x^2+ax \\ + & bx+ab \\ \hline & x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

Actividad

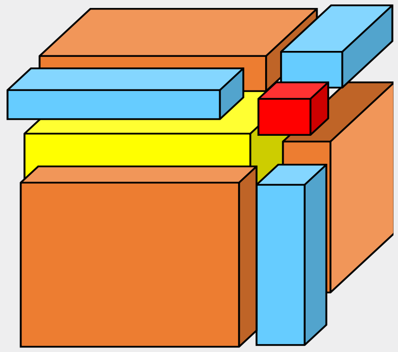
Desarrollamos las siguientes expresiones:

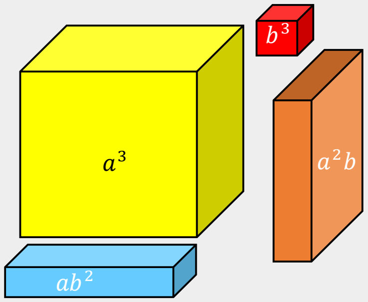
1) $(m+n)(m-n)$
2) $(x+3)(x-3)$
3) $(3x-1)(3x+1)$
4) $\left(\frac{13}{5}x^2+\frac{7}{3}y^3\right)\left(\frac{13}{5}x^2-y^3\right)$
5) $\left(\frac{x^5}{5}+\frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{x^5}{5}-\frac{y^2}{9}\right)$
6) $\left(\frac{7}{11}a^{x-2}+\frac{2}{15}b^{x+2}\right)\left(\frac{7}{11}a^{x-2}-\frac{2}{15}b^{x+2}\right)$
7) $(2x+12)(2x-5)$
8) $(x^2+9)(x^2-11)$
9) $\left(5m-\frac{2}{5}\right)\left(5m+\frac{8}{13}\right)$
10) $\left(\frac{5}{6}x^7+\frac{9}{11}\right)\left(\frac{5}{6}x^7-\frac{21}{5}\right)$
11) $\left(\frac{a^x}{3}-8\right)\left(\frac{a^x}{3}+12\right)$
12) $\left(21m^{2a}+\frac{35}{8}\right)\left(21m^{2a}-\frac{16}{7}\right)$

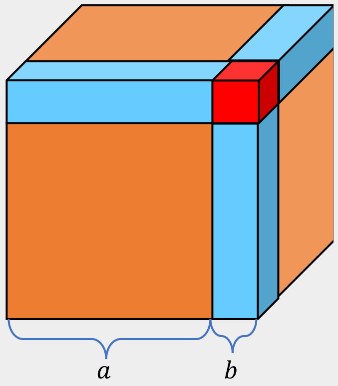
Verificación e interpretación analítica y gráfica del cubo de un binomio

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\,(a+b)\\ &=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

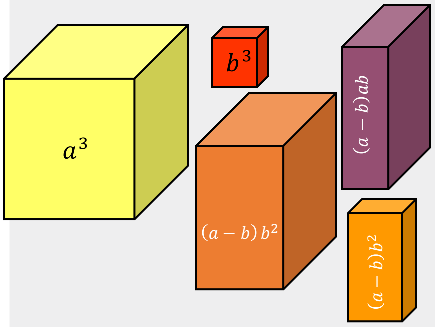
Verificación e interpretación gráfica







$\therefore a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$



$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

e) Cubo de un binomio

Es la suma o diferencia de la forma $(a\pm b)^3$, se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(m+3)^3$

Solución

$$\begin{aligned}(m+3)^3 &= m^3+3(m)^2\,(3)+3(m)(3)^2+(3)^3\\ &= m^3+9m^2+27m+27\end{aligned}$$

Respuesta

$$(m+3)^3=m^3+9m^2+27m+27$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $\left(2x^4+\frac{1}{5}y^7\right)^3$

Solución

$$\left(2x^4+\frac{1}{5}y^7\right)^3 = (2x^4)^3+3(2x^4)^2\left(\frac{1}{5}y^7\right)+3(2x^4)\left(\frac{1}{5}y^7\right)^2+\left(\frac{1}{5}y^7\right)^3$$
$$= 8x^{12}+\frac{12}{5}x^8y^7+\frac{6}{25}x^4y^{14}+\frac{1}{125}y^{21}$$

Respuesta

$$\left(2x^4+\frac{1}{5}y^7\right)^3 = 8x^{12}+\frac{12}{5}x^8y^7+\frac{6}{25}x^4y^{14}+\frac{1}{125}y^{21}$$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $\left(\frac{4}{7}a^7-\frac{9}{8}b^x\right)^3$

Solución

$$\left(\frac{4}{7}a^7-\frac{9}{8}b^x\right)^3 = \left(\frac{4}{7}a^7\right)^3-3\left(\frac{4}{7}a^7\right)^2\left(\frac{9}{8}b^x\right)+3\left(\frac{4}{7}a^7\right)\left(\frac{9}{8}b^x\right)^2-\left(\frac{9}{8}b^x\right)^3$$
$$=\frac{64}{343}a^{21}-\frac{54}{49}a^{14}b^x+\frac{243}{112}a^7b^{2x}+\frac{729}{512}b^{3x}$$

Respuesta

$$\left(\frac{4}{7}a^7-\frac{9}{8}b^x\right)^3=\frac{64}{343}a^{21}-\frac{54}{49}a^{14}b^x+\frac{243}{112}a^7b^{2x}+\frac{729}{512}b^{3x}$$

f) Suma de cubos

Es una expresión algebraica que representa la suma de dos términos elevados al cubo. Su factorización es:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Ejemplo:

Encontrar el producto:

$$(3x^{2+a}+6y^{2+b})(9x^{4+2a}-18x^{2+a}y^{2+b}+36y^{4+2b})$$

Solución

$$\begin{aligned}&(3x^{2+a}+6y^{2+b})(9x^{4+2a}-18x^{2+a}y^{2+b}+36y^{4+2b})\\ &=(3x^{2+a}+6y^{2+b})[(3x^{2+a})^2-(3x^{2+a})(6y^{2+b})+(6y^{2+b})^2]\\ &=(3x^{2+a})^3+(6y^{2+b})^3\\ &=27x^{6+3a}+216y^{6+3b}\end{aligned}$$

g) Diferencia de cubos

Representa la resta de dos términos elevados al cubo, su factorización es:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ejemplo:

Por diferencia de cubos, el producto resultante es:

$$\left(\frac{1}{2}x^3-8y^b\right)\left(\frac{1}{4}x^6+4x^3y^b+64y^{2b}\right)=\frac{1}{8}x^9-512y^{3b}$$

h) Trinomio al cuadrado

El trinomio al cuadrado se expresa de la siguiente:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

o $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

Ejemplo:

Desarrollar la expresión: $(3x+2y-2z)^2$

Se desarrolla el cubo del binomio:

$$(3x+2y-2z)^2 = (3x)^2+(2y)^2+(2z)^2+2(3x)(2y)+2(3x)(-2z)+2(2y)(-2z)$$
$$=9x^2+4y^2+4z^2+12xy-12xz-8yz$$

i) Trinomio al cubo

Se expresa de la siguiente forma:

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

2. Cocientes notables

Al igual que los productos notables, los cocientes notables pueden escribirse tomando casos particulares.

$$\frac{x^n-y^n}{x-y};\ \frac{x^n+y^n}{x+y};\ \frac{x^n-y^n}{x+y};\ \frac{x^n+y^n}{x-y}$$

Cociente	$\frac{x^n-y^n}{x-y}$	$\frac{x^n-y^n}{x+y}$	$\frac{x^n+y^n}{x+y}$	$\frac{x^n+y^n}{x-y}$
Residuo	0	0	0	No nulo
¿Es cociente notable?	Si	Si	Si	No
Condición del exponente n	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ Par o impar	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ Par	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ Impar	$n \in \mathbb{N}$

Para desarrollar las características del cociente.

1). El cociente tendrá n términos.

2). Si en el divisor hay diferencia, todos los términos son positivos. Si en el divisor hay suma, los signos de los términos se intercalan: +, −, +, −, …

3). En cada término del cociente, los exponentes del 1er. monomio x disminuyen desde $n-1$ hasta cero, mientras que los dos del 2do. monomio y aumentan desde cero hasta $n-1$.

Por tanto, tendremos:

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+x^{n-4}y^3+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

$$\frac{x^n-y^n}{x+y} = x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}$$

Ejemplo:

Desarrollar el cociente

$$\frac{64x^6-729y^6}{2x+3y}$$

Solución

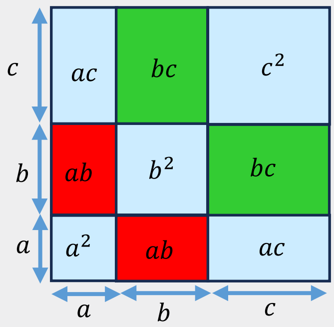
$$\frac{64x^6-729y^6}{2x+3y} = \frac{(2x)^6-(3y)^6}{2x+3y}$$

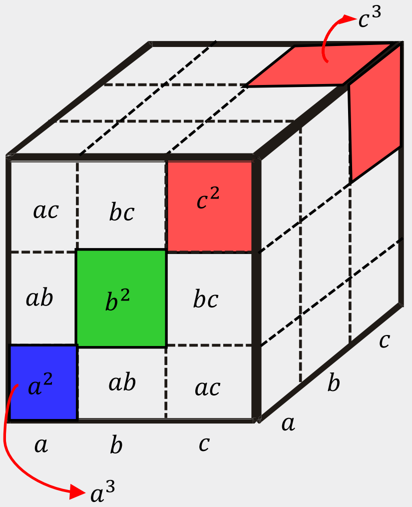
$$= (2x)^5-(2x)^4(3y)+(2x)^3(3y)^2-(2x)^2(3y)^3+(2x)(3y)^4-(3y)^5$$

Respuesta

$$\frac{64x^6-729y^6}{2x+3y} = 32x^5-48x^4y+72x^3y^2-108x^2y^3+162xy^4-243y^5$$

Interpretación geométrica del trinomio al cuadrado



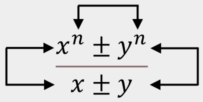


Cocientes notables

Condiciones que deben cumplir:

a) Deben tener las bases iguales.

b) Deben tener los exponentes iguales.



Ejercicios propuestos

Encontramos los valores de los cocientes notables:

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=$$

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=$$

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=$$

$$\frac{x^4+y^4}{x+y}=$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=$$

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=$$

Cocientes no notables

Los cocientes del tipo:

$$\frac{x^n+y^n}{x-y}$$

son no notables, pues x^n+y^n no contiene factores del tipo $x-y$, debido al teorema del factor, en efecto:
El residuo al dividir x^n+y^n entre $x-y$ es $y^n+y^n=2y^n\neq 0$. Por tanto, x^n+y^n no tiene como factor a $x-y$.

Recuerda...

La diferencia de los cuadrados de dos monomios entre la suma de los mismos es igual a la diferencia de ellos.

La diferencia de los cuadrados de dos monomios entre la diferencia de los mismos es igual a la suma de ellos.

Ejemplo:

Desarrollar el cociente $\dfrac{243a^{10}+32b^{10}}{3a^2+2b^2}$

Solución

$$\frac{243a^{10}+32b^{10}}{3a^2+2b^2}=\frac{(3a^2)^5+(2b^2)^5}{3a^2+2b^2}$$

$$=(3a^2)^4-(3a^2)^3(2b^2)-(3a^2)^2(2b^2)^2+(3a^2)(2b^2)^3-(2b^2)^4$$

$$=81a^8-54a^6b^2+36a^4b^4-24a^2b^6-16b^8$$

a) Cociente de la suma o diferencia de cubos

Se expresa de la siguientes formas:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$$

Ejemplo:

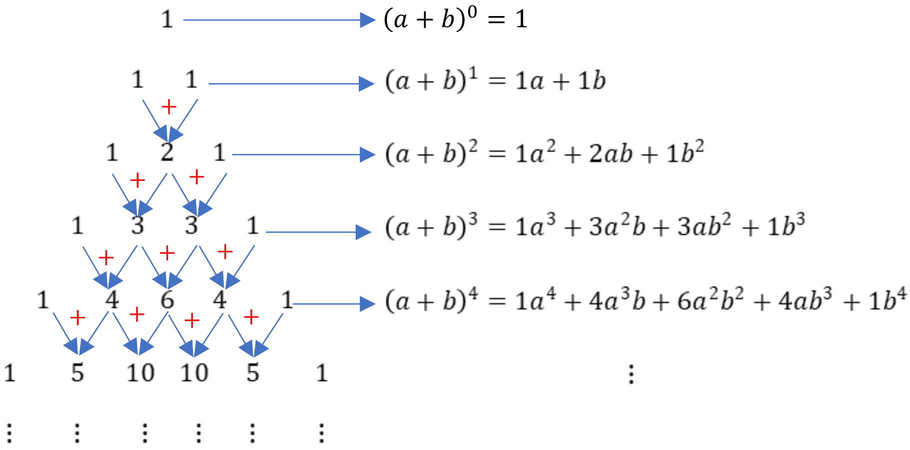
$$\frac{343\,a^3b^6+27\,x^9y^3}{7ab^2+3x^3y}=\frac{(7ab^2)^3+(3x^3y)^3}{7ab^2+3x^3y}$$

$$=(7ab^2)^2-(7ab^2)(3x^3y)+(3x^3y)^2$$

$$=49a^2b^4-21ab^2x^3y+9x^6y^2$$

3. Triángulo de Pascal

Se obtiene sumando las dos cifras horizontales para desarrollar el binomio: $(a+b)^n$



$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=1a+1b$$

$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$$

$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$

El triángulo de Pascal es útil al momento de averiguar los coeficientes de los binomios con potencia n.

4. Deducción del binomio a la n – ésima potencia

Para la n – ésima potencia de un binomio se tiene la expresión:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

El procedimiento se llama el binomio de Newton.
Si n es natural, en el desarrollo de $(a+b)^n$, se tiene:

a) El primer término es a^n y el ultimo termino es b^n.
b) Desarrollando el binomio se tiene $(n+1)$ términos.

c) La potencia del primer término a disminuye en 1 y del segundo término b aumenta en 1.

d) Para el i – ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i-\text{ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

Ejemplo:

Desarrollar el cociente $\left(3x^3+\frac{1}{2}y^5\right)^6$

Factorial de un número

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

Con $n>0$

Si $n=0$, entonces $0! = 1$

Ejemplo:

$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$

Solución

$$\left(3x^3+\frac{1}{2}y^5\right)^6 = (3x^3)^6+\frac{6}{1!}(3x^3)^{6-1}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^1+\frac{6(6-1)}{2!}(3x^3)^{6-2}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^2+\frac{6(6-1)(6-2)}{3!}(3x^3)^{6-3}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^3+$$

$$\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4!}(3x^3)^{6-4}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^4+\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{5!}(3x^3)^{6-5}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^5+$$

$$\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{6!}(3x^3)^{6-6}\left(\frac{1}{2}y^5\right)^6$$

Se simplifican las fracciones y se procede al desarrollo de las potencias:

$$=(3x^3)^6+\frac{6}{1}(3x^3)^5\left(\frac{1}{2}y^5\right)^1+\frac{6(5)}{2\cdot1}(3x^3)^4\left(\frac{1}{2}y^5\right)^2+\frac{6(5)(4)}{3\cdot2\cdot1}(3x^3)^3\left(\frac{1}{2}y^5\right)^3+\frac{6(5)(4)(3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}(3x^3)^2\left(\frac{1}{2}y^5\right)^4+$$

$$\frac{6(5)(4)(3)(2)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}(3x^3)^1\left(\frac{1}{2}y^5\right)^5+\frac{6(5)(4)(3)(2)(1)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}(3x^3)^0\left(\frac{1}{2}y^5\right)^6$$

$$=729x^{18}+6(243x^{15})\left(\frac{1}{2}y^5\right)+15(81x^{12})\left(\frac{1}{4}y^{10}\right)+20(27x^9)\left(\frac{1}{8}y^{15}\right)+15(9x^6)\left(\frac{1}{16}y^{20}\right)+$$

$$6(3x^3)\left(\frac{1}{32}y^{25}\right)+\left(\frac{1}{64}y^{30}\right)$$

Por último, se obtiene el resultado:

$$=729x^{18}+729x^{15}y^5+\frac{1215}{4}x^{12}y^{10}+\frac{135}{2}x^9y^{15}+\frac{135}{16}x^6y^{20}+\frac{9}{16}x^3y^{25}+\frac{1}{64}y^{30}$$

VALORACIÓN

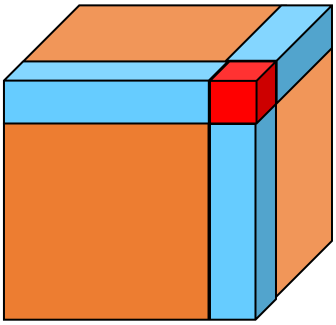
Uno de los ejemplos del uso de los productos notables es la compresión de imágenes como JPEG utilizan transformaciones matemáticas basadas en productos notables para reducir el tamaño de las imágenes sin perder demasiada calidad. Aunque a primera vista pueda parecer que las matemáticas abstractas como los productos notables están alejadas de la tecnología, la realidad es que estos conceptos fundamentales son la base de muchos de los avances tecnológicos que damos por sentados.

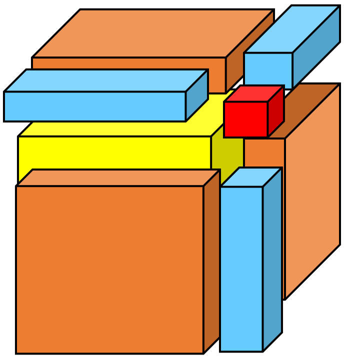
Los productos y cocientes notables son herramientas matemáticas poderosas que tienen un impacto significativo en el desarrollo tecnológico. Al comprender estos conceptos, podemos apreciar mejor la complejidad y la belleza de la tecnología que nos rodea.

PRODUCCIÓN

Actividad

Construimos las demostraciones geométricas de los productos notables con materiales reciclables y los exponemos en clase.





FACTORIZACIÓN

PRÁCTICA

La factorización es un proceso para descomponer expresiones algebraicas complejas en otras más simples, lo que facilita su comprensión y manipulación. Esto es especialmente útil al resolver problemas, ya sea en matemáticas, física, ingeniería o cualquier otra disciplina que requiera cálculos.
Juan y Adriana están paseando por las calles de La Paz y observan que existen gran cantidad de paraguas y desean saber la cantidad de colores, para esto utilizan sus conocimientos de factorización que está presente en muchas otras áreas, como la física, la química, la economía y en la vida diaria. Al comprender los principios de la factorización, podemos desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas que nos serán útiles en diversos ámbitos.

Fuente: OpenAi, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas

- ¿De qué maneras agruparías los paraguas?
- ¿En qué otras áreas podrías utilizar la agrupación de objetos?
- ¿Qué factores intervienen al momento de ordenar los objetos?
- ¿Qué son los números primos y cuál es su uso?

TEORÍA

1. Factorización

Factorizar significa escribir una expresión matemática como multiplicación de factores más simples, por ejemplo, $21 = 7 \cdot 3$, donde 3 y 7 son factores primos y 21 resulta de la multiplicación entre ellos.
La igualdad $64 - x^2 = (8 + x)(8 - x)$ indica que se descompuso el binomio en el producto de dos factores.
Para polinomios, factorizar es un procedimiento mediante el cual se transforma un polinomio en el producto de sus factores.

Ejemplo:

Factoriza: $P(x) = a^2 - 9$

Solución

El polinomio es de grado 2: $P(x) = a^2 - 9$ puede descomponerse en el producto de dos polinomios de grado 1:

$$\underbrace{P(x) = a^2 - 9}_{\text{Polinomio compuesto}} = \underbrace{(a + 3)(a - 3)}_{\text{Polinomios irreducibles}}$$

Un polinomio $P(x)$ se llama **primo o irreducible**, cuando no se puede descomponer en un producto de polinomios de grado positivo y menores en grado que P. En caso contrario se dice que el polinomio es **compuesto o reducible**.
La factorización puede ser; una suma, un polinomio, un número, etc. El objetivo es simplificar una expresión y para realizar la operación de simplificación se debe identificar a qué tipo de factorización pertenece.

Es decir, la **factorización** o descomposición factorial de una expresión consiste en escribirla como una multiplicación de expresiones algebraicas.
Resolver ecuaciones cuadráticas y aplicaciones asociadas con ellas será más sencillo cuando domines los procesos de factorización. Además, te ayudará a graficar polinomios y analizar las raíces de ecuaciones de grados mayores a dos, cuando se expresen como productos de sus factores.

Dato curioso

Para la mejor comprensión podemos hacer una clasificación de los números, según la cantidad de divisores que tenga. Recuerda que el DIVISOR es aquel número que divide al otro en forma exacta.

Ejemplo:
Decimos que 3 es divisor de 12, porque 12 es igual a $3 \cdot 4$.

Un número primo es un número entero positivo que sólo se puede dividir entre sí mismo y la unidad, es decir tiene solamente 2 divisores.

Un número compuesto es el que tiene tres o más divisores.

Recuerda...

La propiedad distributiva de los números, escrita al revés es una herramienta de factorización conocida como el ***factor común.***

$$ax + bx = x(a + b)$$

a) Factor común monomio

Se procede a extraer aquel monomio común entre los términos de un polinomio.

Ejemplo:

Factorizamos $x^3 + x^7 - x^9 + x^5$

Solución

Para encontrar el factor común, identificamos la letra con el menor exponente (x^3) y a continuación, se divide entre el factor común:

$$\frac{x^3}{x^3} = 1; \ \frac{x^7}{x^3} = x^4; \frac{x^9}{x^3} = x^6; \frac{x^5}{x^3} = x^2$$

Se realiza la división de cada término.

Resultado

$$x^3 + x^7 - x^9 + x^5 = x^3(1 + x^4 - x^6 + x^2)$$

Ejemplo:

Factorizamos $85a^8b^8 + 25a^7b^6 - 30a^9b^4$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de los coeficientes:

$MCD(85,25,30)=5$, Factor común literal: $a^7\ b^4$

Se realiza la división de cada término.

Resultado

$$85a^8\ b^8\ + 25a^7\ b^6 - 30a^9\ b^4 = 5a^7\ b^4\ (17ab^4\ + 5b^2 - 6a^2\ )$$

Ejemplo:

Factorizamos $12x^{2a+b}y^{2a+2b} - 28x^{2a}y^{a+b} + 20x^ay^b + 36x^{3a}y^{5b}$

Solución

Utilizando la propiedad de los exponentes tenemos.

$$12x^{2a+b}y^{2a+2b} - 28x^{2a}y^{a+b} + 20x^ay^b + 36x^{3a}y^{5b}$$
$$= 12x^{2a}x^by^{2a}y^{2b} - 28x^{2a}y^ay^b + 20x^ay^b + 36x^{3a}y^{5b}$$

Se halla el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de los coeficientes:

$M.C.D(12, -28, 20, 36) = 4$,Factor común literal: x^ay^b

Se realiza la división de cada término.

Resultado

$$12x^{2a+b}y^{2a+2b} - 28x^{2a}y^{a+b} + 20x^ay^b + 36x^{3a}y^{5b}$$
$$= 4x^ay^b(3x^{a+b}y^{2a+b} - 7x^ay^b + 5 + 9x^{2a}\ y^{4b})$$

Ejemplo:

Factorizamos $6x^8y^4 - 9x^7y^3 - 15x^3y^5$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de los coeficientes:

$M.C.D(6, 9, 15) = 3$, Factor común literal: x^3y^3

Se realiza la división de cada término.

Resultado

$$6x^8y^4 - 9x^7y^3 - 15x^3y^5 = 3x^3y^3\ (2x^5y - 3x^4 - 5y^2\ )$$

Ejercicios resueltos

1. *Martin quiere factorizar la expresión algebraica*

$$16x - 4x^3$$

antes de ir a dormir.

Solución

Agrupamos términos semejantes para ver si se puede efectuar más operaciones.

$$16x - 4x^3 = 4^2x - 4x^3$$
$$= 4x(4 - x^2)$$
$$= 4x(2^2 - x^2)$$
$$= 4x(2 - x)(2 + x)$$
$$\therefore 16x - 4x^3 = 4x(2 - x)(2+ x)$$

2. *Rocío está haciendo la tarea de matemática y le piden factorizar la expresión algebraica:*

$$3xa + 2y + 2a + 3xy$$

Solución

Ella procede ordenando los términos adecuadamente, para factorizar términos semejantes.

$$3xa + 2y + 2a + 3xy$$
$$= 3xa + 3xy + 2a + 2y$$

factorizamos términos semejantes en a y b:

$$3x(a + y) + 2(a + y)$$

factorizar términos semejantes en $(a + y)$:

$$(3x + 2)(a + y)$$
$$\therefore 3xa+2y+2a+3xy=(3x+2)(a+y)$$

Actividad

Expresamos por factores los siguientes términos:

1) $2x - x^2$
2) $9x^3 - 12x^2y^2 - 15x^4$
3) $125a^5b^7 + 625a^3b^4 - 225a^2b^5$
4) $x^{12}y^{11}z^9 + x^5y^9z^{15} - x^{24}y^{17}z^5$
5) $16x^{2a+b}y^{b+c}z^{a+b} - 816x^{3a+2b}y^{4b+3c}z^{2a+3b}$
6) $21x^3y^2z^5 + 33x^5y^{12}z^9 - 60x^8y^9z^2$
7) $8a^3 - 16a^4$
8) $8x^3y^7 - 4x^4y^2 + 12x^7y^3$
9) $4\sqrt{3}a^7b^{14}c^{11} + 16\sqrt{3}a^9b^8c^5 - 36\sqrt{3}a^6b^{12}c^2$
10) $x^{2m+3n}y^{4m+6n}z^{7m+9n} - x^{5m+8n}y^{8m+9n}z^{4m+3n}$
11) $a^{2x+3y}b^{5x+y} - a^{x+y}b^{x+y} + a^{3x+2y}b^{6x+7y}$
12) $7x^9y^5z^9 + 49x^2y^7z^{12} - 63x^5y^4z^{12}$
13) $\frac{8}{21}m^4n^7 - \frac{7}{27}m^8n^3 + \frac{5}{63}m^{11}n^9 - \frac{2}{45}m^2n^8$

b) Factor común polinomio

Se procede a extraer un polinomio común de otro polinomio.

Ejemplo:

Factorizamos $8m^2(x+3)+18n^3(x+3)$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes:

$MCD(8,18)=2$ Factor común: $(x+3)$

Se realiza la división de cada término.

Resultado

$$8m^2\,(x+3)+18n^3\,(x+3)=2(x+3)(4m^2+9n^3\,)$$

Ejemplo:

Factorizamos $(x+y)^2+(x+y)(x-y)$

Solución

Factor común: $(x+y)$

Por la propiedad distributiva en el producto de polinomios:

$$\begin{aligned}(x+y)^2+(x+y)(x-y)&=(x+y)[(x+y)+(x-y)]\\&=(x+y)[x+y+x-y]\\&=(x+y)2x=2x(x+y)\end{aligned}$$

Resultado

$$(x+y)^2+(x+y)(x-y)=2x(x+y)$$

Ejemplo:

Factorizamos $3x^2\,(b+d)+15x(b+d)+9y(b+d)+6y^2\,(b+d)$

Solución

Factor común: $(b+d)$

Por la propiedad distributiva en el producto de polinomios:

$$\begin{aligned}&3x^2(b+d)+15x(b+d)+9x(b+d)+6x^2\,(b+d)\\&=(b+d)(3x^2+15x+9x+6x^2\,)=(b+d)[3x(x+5+3+2x)]\\&=(b+d)[3x(5x+8)]\end{aligned}$$

Resultado

$$3x^2(b+d)+15x(b+d)+9x(b+d)+6x^2\,(b+d)=(b+d)[3x(5x+8)]$$

Ejemplo:

Factorizamos $(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)$

Solución

Factor común: $(x-3)$

Por la propiedad distributiva en el producto de polinomios:

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)\\&=(x-3)[(a+b-c)-(b-c-a)]\\&=(x-3)(a+b-c-b+c+a)\\&=(x-3)(2a)=2a(x-3)\end{aligned}$$

Resultado

$$(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)=2a(x-3)$$

Recuerda

Al extraer este factor común, procedemos en la misma forma que el factor común monomio, cuidando que el polinomio común este dentro de un signo de colección. (Paréntesis, llave, corchete).

Factorizar el signo

$$a-b=-(-a+b)$$

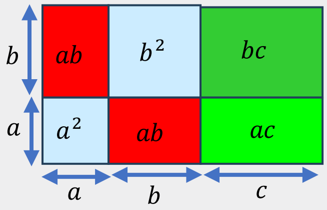
$$a+b=-(-a-b)$$

$$-a-b=-(a+b)$$

$$-a+b=-(a-b)$$

Interpretación gráfica de la propiedad distributiva

Se puede visualizar en la situación del cálculo del área de un rectángulo de lados $(a+b)$ *y* $(a+b+c)$*:*



$A=(a+b)(a+b+c)$

Actividad

Aplicamos el factor común polinomio en las siguientes expresiones algebraicas:

1) $2x-x^2$

2) $9x^3-12x^2y^2-15x^4$

3) $125a^5b^7+625a^3b^4-225a^2b^5$

4) $x^{12}y^{11}z^9+x^5y^9z^{15}-x^{24}y^{17}z^5$

5) $16x^{2a+b}y^{b+c}z^{a+b}-816x^{3a+2b}y^{4b+3c}z^{2a+3b}$

6) $21x^3y^2z^5+33x^5y^{12}z^9-60x^8y^9z^2$

7) $8a^3-16a^4$

8) $8x^3y^7-4x^4y^2+12x^7y^3$

9) $4\sqrt{3}a^7b^{14}c^{11}+16\sqrt{3}a^9b^8c^5-36\sqrt{3}a^6b^{12}c^2$

10) $x^{2m+3n}y^{4m+6n}z^{7m+9n}-x^{5m+8n}y^{8m+9n}z^{4m+3n}$

11) $a^{2x+3y}b^{5x+y}-a^{x+y}b^{x+y}+a^{3x+2y}b^{6x+7y}$

12) $7x^9y^5z^9+49x^2y^7z^{12}-63x^5y^4z^{12}$

13) $\frac{8}{21}m^4n^7-\frac{7}{27}m^8n^3+\frac{5}{63}m^{11}n^9-\frac{2}{45}m^2n^8$

2. Factor común por agrupación de términos

Se agrupan (propiedad asociativa) los términos que tengan un factor común.

Ejemplo:

Factorizamos $xy - 6 + 3x - 2y$

Solución

Se agrupan los términos

$-6 + 3x + xy - 2y = 3(-2 + x) + y(x - 2) = 3(x - 2) + y(x - 2)$

Se factoriza también: $(x - 2)$

Resultado

$$xy - 6 + 3x - 2y = (x - 2)(3 + y)$$

Ejemplo:

Factorizamos $2a^3 + 21 - 7a^2 - 6a$

Solución

Se agrupan los términos

$2a^3 + 21 - 7a^2 - 6a = 2a^3 - 7a^2 - 6a + 21 = a^2(2a - 7) - 3(2a - 7)$

Se factoriza también: $(2a - 7)$

$$a^2(2a - 7) - 3(2a - 7) = (2a - 7)(a^2 - 3)$$

Resultado

$$2a^3 + 21 - 7a^2 - 6a = (2a - 7)(a^2 - 3)$$

Ejemplo:

Factorizamos $\frac{15}{4}a^2 - \frac{21}{4}ac - \frac{10}{3}ab + \frac{14}{3}bc + 5a - 7c$

Solución

Se agrupan los términos

$$\left(\frac{15}{4}a^2 - \frac{21}{4}ac\right) - \left(\frac{10}{3}ab - \frac{14}{3}bc\right) + (5a - 7c)$$
$$= \frac{3}{4}a(5a - 7c) - \frac{2}{3}b(5a - 7c) + (5a - 7c)$$

Se factoriza también: $(5a - 7c)$

$$\frac{3}{4}a(5a - 7c) - \frac{2}{3}b(5a - 7c) + (5a - 7c) = (5a - 7c)\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + 1\right)$$

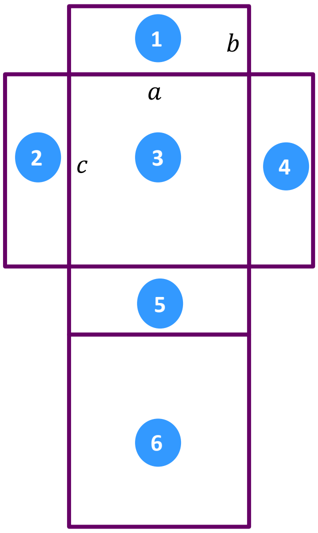
Resultado

$$\frac{15}{4}a^2 - \frac{21}{4}ac - \frac{10}{3}ab + \frac{14}{3}bc + 5a - 7c = (5a - 7c)\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + 1\right)$$

Recuerda que...

En el factoreo por agrupación de términos, se trata de hacer un doble factor común empleando la propiedad asociativa de manera adecuada y eficaz.

Un ejemplo práctico del factor común por agrupación, se aprecia al encontrar el área de figuras planas:



A_T: Área total

$A_T = ab + ac + bc + ab + ac + bc$
$A_T = ab + ab + ac + ac + bc + bc$
$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$
$A_T = 2(ab + ac + bc)$

VALORACIÓN

La factorización es un método matemático que divide una expresión algebraica en factores. Su capacidad para simplificar expresiones y reescribirlas en términos de "bloques fundamentales" llamados factores es lo que la hace importante. Esta estrategia se puede utilizar para numerosas, sumas o restas, matrices y polinomios.

Los algoritmos complejos, como el algoritmo RSA, que es la base de algunos sistemas de criptografía asimétrica, utilizan la factorización de números enteros muy grandes en factores primos. Dado que la factorización de números enteros grandes es un problema computacionalmente difícil de resolver, esta aplicación tiene implicaciones significativas para la seguridad de la información. Por lo tanto, la factorización es fundamental para garantizar la seguridad de los sistemas de criptografía y para proteger los datos sensibles.

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

La factorización nos ayuda a reducir la complejidad y aumentar la eficiencia en nuestra vida diaria:

- Mencionemos 5 momentos donde es posible aplicar el factor común en nuestro día a día.
- Investigamos: ¿Qué es el algoritmo RSA y qué relación tiene con la factorización?
- Elaboramos un mapa mental del tema creativamente y exponemos en clases.

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

PRÁCTICA

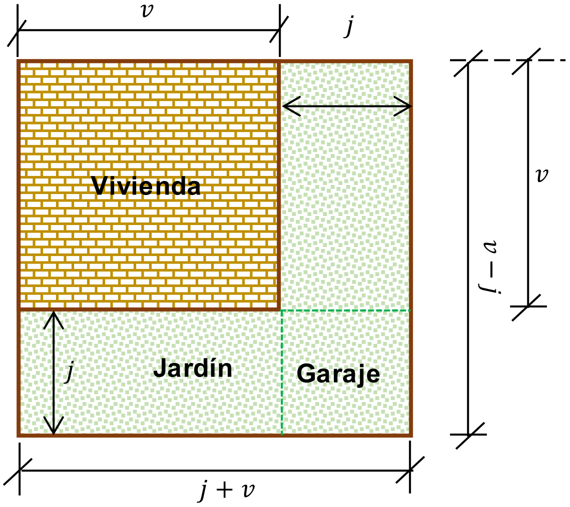
Las fórmulas de binomio se usan más a menudo de lo que pensamos. Este concepto matemático se encuentra en situaciones cotidianas, como la optimización de espacios, el diseño de espacios o para calcular el precio final de un producto con descuento.

Ignacio tiene un terreno donde una parte será construida para vivienda y el resto para el jardín exterior. Este tendrá forma de letra L como muestra la figura. Si el área total de la casa es de $169\ m^2$ y el terreno tiene un total de $298\ m^2$, ¿Cuánto medirá el jardín de Ignacio?

Las fórmulas de binomio son útiles en la ingeniería y la arquitectura para calcular este tipo de ejemplos prácticos donde se emplean expresiones algebraicas como:

$$(v + j)(v - j)$$

Por lo tanto, comprender y aplicar las fórmulas de binomio tiene implicaciones prácticas y relevantes en numerosos aspectos de nuestra vida diaria.



Actividad

Leemos y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué medida tendría el jardín de Ignacio?
- ¿Qué otras aplicabilidades de la factorización de binomios puedes mencionar?
- ¿En qué otras áreas se aplica la factorización de binomios?
- ¿Consideras que la factorización de binomios es un criterio de orden? ¿Por qué?

TEORÍA

Factorización

Es la misma expresión algebraica escrita como producto de dos factores:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$

No olvidemos que...

Un binomio está conformado por dos monomios o por dos términos.

Ejemplo:

$$x^2 - y^2$$

No olvidemos que...

Es posible cuando la expresión tiene la forma.

$x^2 - y^2$: *Diferencia de cuadrados.*
$x^3 - y^3$: *Diferencia de cubos.*
$x^3 + y^3$: *Suma de cubos.*

Este método se basa en los productos notables. Es decir, si se nos presenta un polinomio cuya forma conocemos, podemos expresar la multiplicación de los factores que lo originaron.

1. Método de identidades algebraicas

Se basa en los productos notables y consiste en desarrollarlo en forma inversa.

Ejemplo:

Expresar como cuadrado $100x^2 + 20x + 1$

Solución

Se aplica identidades: $100x^2 + 20x + 1$

$$= (10x)^2 + 2(10x) + (1)^2$$
$$= (10x + 1)^2$$

Verificación

$$(10x + 1)^2 = (10x + 1)(10x + 1) = (10x)^2 + (10x) + (10x) + (1)^2$$
$$= 100x^2 + 20x + 1^2$$

Resultado

$$100x^2 + 20x + 1 = 100x^2 + 20x + 1^2$$

Para escribir una expresión algebraica de forma más simplificada, se utiliza diferentes métodos.

2. Factorización de Binomios

a) Diferencia de cuadrados

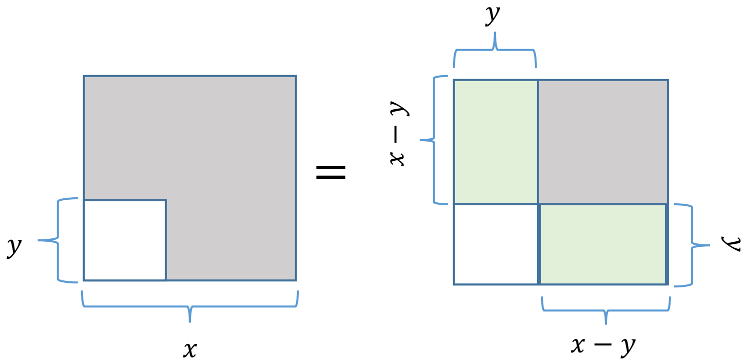
La propiedad distributiva y asociativa, aplicada al producto de los términos "$x + y$" y "$x - y$" dan como resultado:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

de modo que, al invertir la igualdad, obtenemos la conocida "diferencia de cuadrados":

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

La diferencia de cuadrados puede visualizarse geométricamente, considerando un cuadrado de lado x, a cuya área "x^2" se le restará el área de otro cuadrado de lado "y"(sabiendo que $y \leq x$).



$x^2 - y^2 = 2(x - y)y + (x - y)^2 = (x - y)(2y + x - y)$
por factor común:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Ejemplo:

Factorizamos el binomio $x^2 - 3$

Solución
Las raíces cuadradas de x^2 y $\left(\sqrt{3}\right)^2$ son x y $\sqrt{3}$ respectivamente. Luego

$$x^2 - 3 = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

por diferencia de cuadrados.

Resultado

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Ejemplo:

Escribimos 7 como el producto de la suma y la diferencia de dos enteros positivos consecutivos.

Solución
Si prestamos atención a 7: $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$
Extrayendo las raíces cuadradas positivas, obtenemos:

$$(4 + 3)(4 - 3)$$

Resultado

$$7 = (4 + 3)(4 - 3)$$

Ejemplo:

Encontramos la factorización de $(c - d)^2 - 25a^2$

Solución
Asumiendo que $c \geq d \geq 0$, las raíces de cada sumando son $(c - d)$ y $5a$, tenemos:

$$\begin{aligned}(c{-}d)^2 - 25a^2 &= [(c - d) - 5a][(c - d) + 5a]\\ &= (c - d - 5a)(c - d + 5a)\end{aligned}$$

Resultado

$$(c - d)^2 - 25a^2 = (c - d - 5a)(c - d + 5a)$$

Ejemplo:

Verificar que $169{-}m^{12}$ sea una diferencia de cuadrados.

Solución
Manipulando algebraicamente: $169 - m^{12} = 13^2 - (m^6)^2$. Identificamos las raíces de ambos sumandos: 13 y m^6:

$$169 - m^{12} = 13^2 - (m^6)^2 = (13 + m^6)(13 - m^6)$$

Resultado

$$169 - m^{12} = (13 + m^6)(13 - m^6)$$

Ejercicio resuelto

La siguiente expresión
$x^8 - y^8$
Se puede manipular algebraicamente:

$$x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2$$

para luego extraer las raíces y factorizar por diferencia de cuadrados:

$$x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$$

De lo anterior, el factor $x^4 - y^4$ se puede volver a factorizar por diferencia de cuadrados:

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

y de nuevo, podemos volver a factorizar:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Por lo tanto, la expresión final quedará:

$$x^8 - y^8 = (x - y)(x + y) \cdot (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

Teorema fundamental del álgebra

El Teorema Fundamental del Álgebra establece que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces en el conjunto de los números complejos, contando multiplicidades. Esto significa que cualquier polinomio no constante puede ser factorizado en n factores lineales, donde cada factor corresponde a una raíz del polinomio y garantiza que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado, es decir, contiene todas las raíces de cualquier polinomio con coeficientes complejos.

$$p(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a^{n-1} + a^n$$

Ejercicio resuelto

Martin ya agotado, quiere factorizar la expresión algebraica $16x - 4x^3$ antes de irse a dormir.
El binomio en cuestión se factoriza aplicando factor común y diferencia de cuadrados, en efecto:

$$\begin{aligned}16x{-}4x^3 &= 4^2x - 4x^3\\ &= 4x(4 - x^2)\\ &= 4x(2^2 - x^2)\\ &= 4x(2 - \ x)(2 + x)\end{aligned}$$

Así, Martín dormirá más tranquilo al saber que:

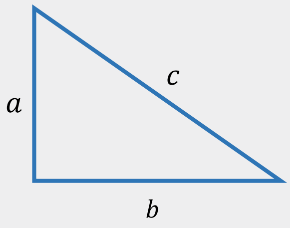
$$16x - 4x^3 = 4x(2 - x)(2 + x)$$

No olvidemos que...

Las ternas pitagóricas son conjuntos de tres números enteros positivos (a, b, c) que cumplen con la ecuación de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esto significa que estos tres números pueden representar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, donde c es la hipotenusa (el lado más largo).



Obtenemos ternas pitagóricas, tomando un par de enteros positivos m y n con $m > n$ y haciendo:
$a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$
Por ejemplo:

$$m = 7, n = 4 \Longrightarrow \begin{cases} a = 7^2 - 4^2 = 33 \\ b = 2 \cdot 7 \cdot 4 = 56 \\ c = 7^2 + 4^2 = 65 \end{cases}$$

que verifican:

$$65^2 = 33^2 + 56^2$$

Por tanto, el triángulo de lados 65, 56 y 33 será un triángulo rectángulo.

Ejemplo:

Verificar que $16 - x^2$ sea una diferencia de cuadrados y factorizar si se da el caso.

Solución

Observe que $16 = 4^2$, entonces $16{-}x^2$ si es una diferencia de cuadrados.
Las raíces cuadradas de x^2 y 16 son x y 4, después:

$$\begin{aligned}16 - x^2 &= 4^2 - x^2\\ &= (4 - x)(4 + x)\end{aligned}$$

Resultado

$$16 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$$

Ejemplo:

Encuentre la factorización de $25y^2 - 9$.

Solución

Por propiedades de potencias: $25y^2 = 5^2 \cdot y^2 = (5 \cdot y)^2 = (5y)^2$
Extrayendo las raíces cuadradas: $5y$; 3
Luego $25y^2 - 9 = (5y)^2 - 3^2 = (5y - 3)(5y + 3)$

Resultado

$$25y^2 - 9 = (5y - 3)(5y + 3)$$

Ejemplo:

Escribe 441 como producto de la suma y resta de dos números

Solución

Una forma de escribir 441 es $441 = 841{-}400$. Se eligió esta pues:

$$400 = 20^2\,;\ 841 = 29^2$$

y observando que $441 = 29^2 - 20^2$, podemos aplicar la diferencia de cuadrados:

$$29^2 - 20^2 = (29 - 20)(29 + 20)$$

Por lo tanto, 20 y 29 son los números tal que 441 se pueda escribir como suma y resta de dos números o sea:

$$441 = 29^2 - 20^2$$

Resultado

$$441 = (29 - 20)(29 + 20)$$

Ejemplo:

Factorizamos $25x^{2m} - 100x^{2n}$

Solución

Se extrae la raíz cuadrada positiva de los términos (siempre que $x \geq 0$):

$$\sqrt{(5x^m)^2} = 5x^m \qquad \sqrt{(10x^n)^2} = 10x^n$$

Esto es una diferencia de cuadrados, aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}&= (5x^m)^2 - (10x^n)^2\\ &= (5x^m + 10x^n)(5x^m - 10x^n)\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}25x^{2m} - 100x^{2n} &= (5x^m)^2{-}(10x^n)^2\\ &= (5x^m + 10x^n)(5x^m - 10x^n)\end{aligned}$$

Aplicando factor común, refinamos más la factorización:

$$5(x^m + 2x^n)\cdot 5(x^m - 2x^n) = 25(x^m + 2x^n)(x^m - 2x^n)$$

Resultado

$$25x^{2m} - 100x^{2n} = 25(x^m + 2x^n)(x^m - 2x^n)$$

b) Suma y diferencia de cubos

La suma y diferencia de cubos son identidades algebraicas que permiten factorizar expresiones cúbicas:

- La **diferencia de cubos** $\boldsymbol{a^3 - b^3}$ se puede factorizar como $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Aquí, $a^3 - b^3$ se descompone en un binomio $(a–b)$ multiplicado por el trinomio (a^2+ab+b^2).

- La **suma de cubos** $\boldsymbol{a^3 + b^3}$ se factoriza como $(a+b)(a^2-ab+b^2)$. En este caso, $\boldsymbol{a^3 + b^3}$ se descompone en un binomio $(a+b)$ multiplicado por el trinomio (a^2-ab+b^2).

Estas identidades son útiles en la simplificación de expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones cúbicas.

Para factorizar la suma de los cubos de dos números se escribe en el primer paréntesis la suma de las raíces cúbicas de cada término y en el segundo paréntesis la suma de los cuadrados de dichas raíces menos el producto de las mismas.

Ejemplo:

Factorizamos la expresión $x^3 - 1$

Solución

Observe que $1 = 1^3$.

Luego las raíces cúbicas de x^3 y 1^3 son x y 1, respectivamente. En este caso aplicamos la diferencia de cubos:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= x^3 - 1^3 \\ &= (x-1)(x^2 + x\cdot 1 + 1^2) \\ &= (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

Resultado

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Ejemplo:

Factorizamos la expresión $(x-y)^3 - (x+y)^3$

Solución

Ambos términos están elevados al cubo, por tanto, utilizamos diferencia de cubos.

$(x–y)^3 - (x+y)^3 =$

$$=[(x-y)-(x+y)]\cdot[(x-y)^2 + (x-y)\cdot(x+y) + (x+y)^2]$$

por diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\cdot b + b^2)$

$$=[(x-y)-(x+y)]\cdot[(x-y)^2 + (x-y)\cdot(x+y) + (x+y)^2]$$

$$=(-2y)\cdot[(x-y)^2 + (x-y)\cdot(x+y) + (x+y)^2]$$

$$=(-2y)\cdot[(x-y)(x-y) + (x-y)\cdot(x+y) + (x+y)(x+y)]$$

aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$=-2y\,(3x^2+y^2)$$

Resultado

$$(x-y)^3 - (x+y)^3 = -2y\,(3x^2+y^2)$$

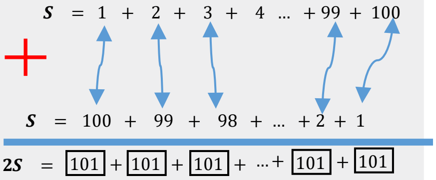
Suma de los primeros “n” números naturales

Fuente: Wikipedia

Se dice que un día, el maestro de Carl Friedrich Gauss (considerado el “príncipe de las matemáticas”), buscando mantener a los estudiantes ocupados, les dio la tarea de sumar todos los números del 1 al 100. La mayoría de los estudiantes comenzaron a sumar los números de manera secuencial, un número a la vez, lo que obviamente tomaría un buen tiempo. Sin embargo, Gauss sorprendió a todos al resolver el problema en solo unos pocos minutos.

El método:

Gauss se dio cuenta de que la suma de los números podía organizarse en pares de números que sumaban lo mismo. Observó que:



$$S = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 99 + 100$$

$$+$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

$$2S = \boxed{101} + \boxed{101} + \boxed{101} + \cdots + \boxed{101} + \boxed{101}$$

En total 101 aparece 100 veces, luego:

$$2S = 100 \cdot 101$$

y despejando S:

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Suma de los cubos de los primeros "n" naturales

A partir de la fórmula de la suma de los primeros n números naturales, podemos obtener la fórmula de la suma de los primeros n cubos, observando lo siguiente:

$$1^3 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = \left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\mathbf{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}}$$

que es válida para cualquier número n natural.

Radicales

Raíz de una potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Índices par o impar:

$$\sqrt[n]{a} = \pm, n \text{ par}, a > 0$$

$$\sqrt[n]{a} > 0, n \text{ impar}, a > 0$$

$$\sqrt[n]{a} < 0,\ n \text{ impar},\ a < 0$$

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}, \text{si } n \text{ par}, a < 0$$

Ejemplo:

Aplicamos la diferencia de cubos para factorizar $343x^3 - 64y^3$.

Solución

Manipulando algebraicamente la expresión, para cada sumando:

$$343x^3 = 7^3x^3 = (7x)^3;\ 64y^3 = 4^3y^3 = (4y)^3$$

de modo que:

$$\begin{aligned} 343x^3 - 64y^3 &= (7x)^3 - (4y)^3 \\ &= (7x-4y)[(7x)^2 + (7x)\cdot(4y) + (4y)^2] \\ &= (7x-4y)(49x^2 + 28xy + 16y^2) \end{aligned}$$

Resultado

$$343x^3 - 64y^3 = (7x-4y)(49x^2 + 28xy + 16y^2)$$

Ejemplo:

Aplicamos la suma de cubos para factorizar $27 + 64z^3$.

Solución

Por la conmutatividad de la suma, se obtendrá el mismo resultado al operar $27 + 64z^3$ y $64z^3 + 27$. Luego las raíces cúbicas de $64z^3$ y 27 son:

$$\sqrt[3]{64z^3} = \sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{z^3} = 4z;\ \sqrt[3]{27} = 3$$

Luego, factorizamos por diferencia de cubos:

$$\begin{aligned} 27+64z^3 &= 3^3 + (4z)^3 \\ &= (3+4z)[3^2 - 3\cdot(4z) + (4z)^2] \\ &= (3+4z)(9 - 12z + 16z^2) \end{aligned}$$

Resultado

$$27 + 64z^3 = (3+4z)(9 - 12z + 16z^2)$$

Ejemplo:

Utilizar propiedades de exponentes para factorizar lo siguiente:

$$a^9\, b^9\, c^9 + d^9\, e^9\, f^9$$

Solución

Según el enunciado, aplicando las leyes de exponentes a cada sumando, obtenemos:

$$a^9b^9c^9 = (abc)^9 = [(abc)^3]^3;\ d^9e^9f^9 = (def)^9 = [(def)^3]^3$$

Reemplazando en el binomio original:

$$\begin{aligned} a^9b^9c^9 + d^9e^9f^9 &= [(abc)^3]^3 + [(def)^3]^3 \\ &= [(abc)^3 + (def)^3][(abc)^6 - (abc)^3(def)^3 + (def)^6] \end{aligned}$$

Actividad

Aplicando la diferencia de los cuadrados, encontramos los factores de los siguientes binomios:

1) $a^{144} - 100$
2) $a^3 - ab^2$
3) $64z^2 - 81$
4) $49a^6 - 9b^2$
5) $3 - y^{12}$
6) $100^2 - 256$

Aplicando la suma y diferencia de los cubos, encontramos los factores de los siguientes binomios:

7) $a^3 + 8$
8) $64 - c^3$
9) $8x^3 + 125y^3$
10) $8x^3 - 125y^3$
11) $y^3 + 216$
12) $1000m^3 - 1$

Aplicamos la suma de cubo a $(abc)^3 + (def)^3$:

$$(abc)^3 + (def)^3 = (abc + def)[(abc)^2 - abcdef + (def)^2]$$

y reemplazando:

$$a^9b^9c^9 + d^9e^9f^9$$
$$= (abc + def)[(abc)^2 - abcdef + (def)^2][(abc)^6 - (abc)^3(def)^3 + (def)^6]$$

Finalmente, empleamos leyes de potencias.

Resultado

$$\begin{aligned} a^9b^9c^9 + d^9e^9f^9 &= (abc + def)[(abc)^2 - abcdef + (def)^2][(abc)^6 - (abc)^3(def)^3 + (def)^6] \\ &= (abc + def)[(abc)^2 - abcdef + (def)^2][a^6b^6c^6 - a^3b^3c^3d^3e^3f^3 + d^6e^6f^6)] \end{aligned}$$

Dato curioso

A diferencia de la suma de cubos, la diferencia de cubos sigue un patrón simétrico en términos de signos. La fórmula siempre comienza con una diferencia $(a-b)$ seguida de un trinomio que incluye los cuadrados de ambos términos y su producto, sin ningún cambio de signo en los términos del trinomio.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Actividad

Realizamos la verificación analítica de la suma y diferencia de cubos:

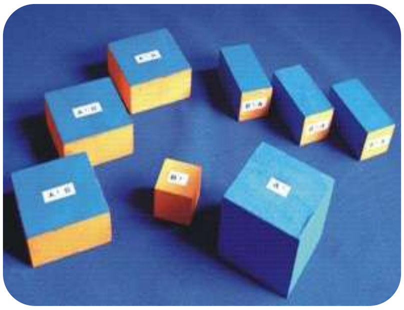
1) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

VALORACIÓN

La factorización de binomios es una herramienta fundamental en matemáticas, especialmente en álgebra, la factorización permite descomponer expresiones algebraicas complejas en factores más simples, lo que facilita su manipulación y resolución.

La factorización ayuda a identificar patrones y relaciones entre términos algebraicos, lo que puede ser útil en la resolución de problemas más complejos y en la investigación matemática, en resumen, la factorización de binomios es una habilidad fundamental en matemáticas que nos permite simplificar expresiones, resolver ecuaciones, analizar funciones y comprender mejor una amplia variedad de conceptos de factorización de binomios.



PRODUCCIÓN

La factorización es la descomposición de cualquier expresión matemática en factores. Hay una variedad de métodos que se consideran casos de factorización:

- Representamos geométricamente la suma y diferencia de cubos.
- Elaboramos un mapa mental de la factorización de binomios y lo socializamos en clases.
- Investigamos dónde se aplica la factorización de binomios y debatimos su posible importancia en nuestro diario vivir.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

PRÁCTICA

Marta compró una barra de chocolate el cual lo quiere compartir con sus primos de tal manera que pueda alcanzar para todos y tomar en cuenta las edades para hacer la repartición de la barra que tiene un área representada por un trinomio:

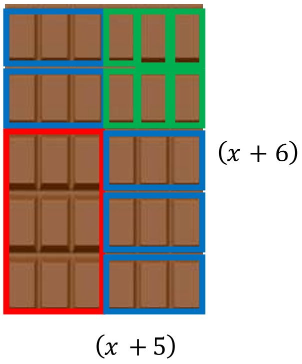
$$x^2 + 11x + 30$$

Para repartir el chocolate de manera equitativa, podemos factorizar este trinomio.

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$$

Esto significa que el área del chocolate se puede dividir en un rectángulo de dimensiones $(x + 5)$ y $(x + 6)$.

Si el chocolate tiene un área de 30 unidades cuadradas y queremos dividirlo en partes iguales, podemos usar la factorización para encontrar las dimensiones posibles.



Actividad

Leemos y respondemos las siguientes preguntas

- ¿Consideras que la factorización de trinomios es útil en tareas diarias?
- ¿Qué otras aplicabilidades de la factorización de trinomios puedes mencionar?
- ¿De qué otra manera repartirías la barra de chocolate si fueran 20 personas a las que debes compartir el chocolate según sus edades.

TEORÍA

Recuerda...

Un número real x es un cuadrado perfecto si existe y real tal que:

$$y^2 = x$$

Ejemplo:

En los enteros: 9, 16, 25,… son cuadrados perfectos.

Ejercicio resuelto

Para el siguiente trinomio:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2$$

Identificamos los cuadrados perfectos:

- $9x^2$ *es el cuadrado de* $3x$:

$$\sqrt{9x^2} = 3x$$

- $16y^2$ *es el cuadrado de* $4y$:

$$\left(\sqrt{16y^2} = 4y\right)$$

- $24xy$ *es el doble del producto de* $3x$ *con* -4y

$$(2\cdot 3x\cdot(-4y) = -24xy)$$

Aplicamos la fórmula, para el caso $a = 3x$ *y* $b = 4y$, por tanto:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$$

1. Factorización de trinomios

a) Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es un tipo especial de trinomio que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado. Es decir, es una expresión de la forma:

$$(a + b)^2 \text{ o } (a - b)^2$$

Para determinar si un trinomio es un cuadrado perfecto, verifica lo siguiente:

El primer término y el tercer término deben ser cuadrados perfectos.

El segundo término debe ser el doble del producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

Ejemplo:

Comprobar si el trinomio x^2+xy+y^2 es cuadrado perfecto.

Solución

El primer y tercer término son cuadrados perfectos, pues x es tal que $x\cdot x=x^2$ e y es tal que $y\cdot y = y^2$.

El producto de ellas es $x\cdot y$, no $2x\cdot y$ luego x^2+xy+y^2 no es un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:

Comprobar si el trinomio x^2+x+1 es cuadrado perfecto.

Solución

El primer y tercer término son cuadrados perfectos, pues $x\cdot x = x^2$ e $1\cdot 1=1^2$, respectivamente.

Comprobando: $x\cdot 1 = x \neq 2x = 2(x\cdot 1)$

Así, $x^2 + x + 1$ no es un trinomio cuadrado perfecto.

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Paso 1. Ordenamos el trinomio con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente.

Paso 2. Se verifica si el primer término y tercer término del trinomio $a^2+2ab+b^2$ (o $a^2-2ab+b^2$) son cuadrados perfectos.

Paso 3. Comprobamos que el doble del producto de las raíces, correspondientes al primer y tercer término sea igual al segundo término, sin considerar su signo.

Paso 4. Escribimos las raíces como $(a+b)^2$, cuando el signo del segundo término es positivo y $(a-b)^2$ cuando el signo del segundo término es negativo.

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $4x^2 + 12x + 9$.

Solución

Paso 1. El trinomio $4x^2+12x+9$ ya está ordenado.

Paso 2. Extraemos las raíces cuadradas del primer y tercer término:

$$2x;\ 3$$

Paso 3. Efectuamos el producto $2{\cdot}(2x{\cdot}3) = 12x$ y comprobamos en efecto que coincide con el segundo término.

Paso 4. Escribimos el cuadrado de la suma de las raíces: $(2x+3)^2$

Resultado

$$4x^2+12x+9 = (2\mathrm{x}+3)^2$$

Ejemplo:

Comprobamos que el trinomio $144a^2 - 168a + 49$ sea cuadrado perfecto y en caso afirmativo factorizamos.

Solución

Paso 1. El trinomio $144a^2 - 168a + 49$ ya aparece ordenado.

Paso 2. Las raíces cuadradas del primer y tercer término son $12a$ y 7.

Paso 3. $2(12a \cdot 7) = 2(12 \cdot 7a) = 168a$, el cual coincide con el segundo término del trinomio, sin considerar el signo.

Paso 4. Escribimos el cuadrado de la diferencia, es decir: $(12a - 7)^2$

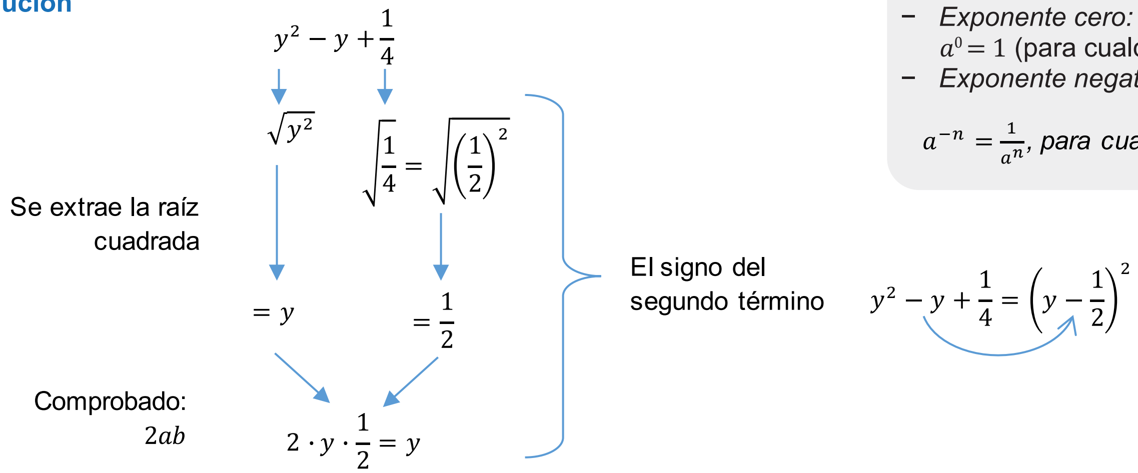
Resultado

$$144a^2 - 168a + 49 = (12a - 7)^2$$

Ejemplo:

Factorizar el trinomio $y^2 - y + \frac{1}{4}$

Solución



El resultado es: $y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$

Ejercicio resuelto

Para el trinomio

$$4a^6 - 12a^3b^3 + 9b^6$$

manipulamos algebraicamente el primer y tercer término, con el fin de encontrar los cuadrados perfectos de estos:

$4a^6$ *es el cuadrado de* $2a^3$

$$\sqrt{4a^6} = 2a^3$$

$9b^6$ *es el cuadrado de* $3b^3$

$$\sqrt{9b^6} = 3b^3$$

Verificamos el término del medio:

-$12a^3b^3$ *es el doble del producto* de $2a^3$ y $-3b^3$:

$[2{\cdot}2a^3{\cdot}(-3b^3)]=-12a^3b^3$

Aplicamos la fórmula:

$$4a^6- 12a^3 b^3+ 9b^6=$$
$$(2a^3-3b^3)^2$$

No olvidemos que...

- *Producto de potencias de la misma base:*
  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- *Cociente de potencias de la misma base:*
  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- *Potencia de una potencia:*
  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- *Potencia de un producto:*
  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- *Potencia de un cociente:*
  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- *Exponente cero:*
  $a^0 = 1$ (para cualquier $a \neq 0$)
- *Exponente negativo:*

  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, *para cualquier* $a \neq 0$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

El trinomio $7a^2 + 11a - 12$ *tiene como primer término a* $7a^2$ *y como tercer término a* – 12.

Buscamos dos números que multiplicados den -12 *y sumados den* 11.

Estos números son 12 y -1, *pues* $12 - 1 = 11$ y $12(-1) = -12$

Según el procedimiento, se forman los binomios:

$$(z + 12)(z - 1)$$

Cuyo producto es igual a $7a^2 + 11a$ – 12.

Verificación:

$$(z + 12)(z - 1)$$
$$= z\cdot z - z + 12z - 12$$
$$= z^2 + 11z - 12$$

Así, el resultado es:

$$7a^2 + 11a - 12 = (z + 12)(z - 1)$$

Ejercicio 2

Para el siguiente trinomio:

$$(2a + 3)^2 - 3(2a + 3\ ) - 28$$

utilizamos un cambio de variable:

$$y = 2a + 3$$

y con esto:

$$(2a + 3)^2 - 3(2a + 3) - 28$$
$$= y^2 - 3y - 28$$

El trinomio $y^2 - 3y - 28$ *satisface*

$-28 = -7\cdot 4\ ;\ -7 + 4 = -3$

Factorizando:

$$y^2 - 3y - 28 = (y - 7)(y + 4)$$

Devolviendo la variable original, el resultado es:

$$(2a{+}3)^2 - 3(2a + 3) - 28$$
$$= 2(a - 2)(2a + 7)$$

b) Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Considere el siguiente producto:

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + m\cdot n$$

El trinomio $x^2 + bx + c$ se descompone en factores $(x{+}m)(x{+}n)$, donde $b{=}(m{+}n)$ y $c{=}m\cdot n$.

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $a^2 + 22a - 48$

- Se escriben dos binomios cuyo primer término debe ser "a", pues debe haber un término cuadrático con coeficiente uno:
  $$= (a \qquad)(a \qquad)$$
- Luego, se anota el signo del coeficiente del segundo término, en el primer factor:
  $$=(a + \quad)(a \quad)$$
- El signo del segundo factor se determina multiplicando el signo del coeficiente del segundo término del trinomio por el signo del coeficiente del tercer término del trinomio:
  $$=(a + \quad)(a - \quad)$$
- Si los signos después de cada x son iguales, se buscan dos números cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término y cuyo producto sea el valor del tercer término del trinomio:
  $$=(a + \quad)(a - \quad)$$
- Si los signos después de cada x son distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea igual al coeficiente del segundo término y cuyo producto sea igual al coeficiente del tercer término del trinomio. El número mayor va al segundo término del primer factor y el número menor va al segundo término del segundo factor.
  $$=(a + 24)(a - 2)$$

Resultado

El trinomio factorizado es $a^2 + 22a - 48 = (a + 24)(a - 2)$

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $x^2 + 5x + 6$

Solución

$(x \quad)(x \quad)$

$(x + \ )(x \quad)$ Signo de 5

$(x + \ )(x + \ )$ Signo de 2 por el signo de 6: (+)·(+)=(+)

$(x + 3)(x + 2)$ Dos números que multiplicados dan 6 y sumados den 5

Resultado

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $y^2 - 14x - 15$

Solución

$(y \quad)(y \quad)$

$(y - \ )(y \quad)$ Signo de -14

$(y - \ )(y + \ )$ Signo de -14 por el signo de -15: $(-)\cdot(-){=}(+)$

$(y - 15)(+1)$ Dos números que multiplicados dan -15 y sumados den -14

Resultado

$$y^2 - 14x - 15 = (y - 15)(y + 1)$$

Ejemplo:

Factorizamos $5 + 4x^{3n} - x^{6n}$

Solución

Manipulando algebraicamente $5{+}4x^{3n}{-}x^{6n} = -(x^{6n} - 4x^{3n} - 5)$

Por propiedades de exponentes: $-\ (x^{6n} - 4x^{3n} - 5) = -[(x^{3n}\ )^2 - 4x^{3n} - 5]$

Como $-5 = -5\cdot 1$ y $-5{+}1{=}{-4}$, factorizamos.

Resultado

$$5{+}4x^{3n} - x^{6n} = -\ (x^{3n} - 5)(x^{3n} + 1)$$

c) Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Para un trinomio escrito como $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, amplificamos la expresión por a, es decir:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a}$$

$$= \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

Haciendo el cambio de variable $y = ax$:

$$ax^2 + bx + c = \frac{y^2 + by + ac}{a}$$

Obtenemos un trinomio al que podemos aplicar cualquiera de los dos métodos de factorización anteriores.

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $6x^2 + 11x + 3$

Solución

Amplificamos el trinomio por $a = 6$:

$$6x^2 + 11x + 3 = \frac{6 \cdot (6x^2 + 11x + 3)}{6}$$

Buscamos el cambio de variable adecuado:

$$\frac{6 \cdot (6x^2 + 11x + 3)}{6} = \frac{(6x)^2 + 11 \cdot (6x) + 6 \cdot 3}{6}$$

En este ejemplo, $y = 6x$ y reemplazamos:

$$\frac{6 \cdot (6x^2 + 11x + 3)}{6} = \frac{(6x)^2 + 11 \cdot (6x) + 6 \cdot 3}{6}$$

Factorizando el denominador, obtenemos:

$$\frac{y^2 + 11y + 18}{6} = \frac{(y + 2)(y + 9)}{6} = \frac{(6x + 2)(6x + 9)}{6} = \frac{2 \cdot 3(3x + 1)(2x + 3)}{6}$$

$$= (3x + 1)(2x + 3)$$

Resultado

$$6x^2 + 11x + 3 = (3x + 1)(2x + 3)$$

Ejemplo:

Expresar en factores $\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{5}$

Solución

Aplicando factor común: $\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{5} = \frac{1}{10}(6x^2 - 7 + 2)$

Amplificando el trinomio: $\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{5} = \frac{1}{10}(6x^2 - 7x + 2)$

Identificando la variable a cambiar:

$$\frac{1}{10}\left(\frac{6(6x^2 - 7x + 2)}{6}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{(6x)^2 - 7(6x) + 12}{6}\right)$$

Hacemos el cambio de variable $6x = y$, luego factorizamos y volvemos con la variable original:

$$\frac{1}{10}\left(\frac{y^2 - 7y + 12}{6}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{(y - 3)(y - 4)}{6}\right) = \frac{1}{10}\left(3 \cdot 2\left(\frac{(2x - 1)(3x - 2)}{6}\right)\right)$$

$$\therefore \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{5} = \frac{1}{10}(2x - 1)(3x - 2)$$

Recuerda...

Amplificar una expresión algebraica, es multiplicar la misma por la unidad, convenientemente escrita. Decimos que a está amplificada por $c \neq 0$, si

$$a \cdot 1 = a \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{c}$$

Más ejercicios...

Factorizamos:

$$3x^2 + 11x - 4$$

Solución

Amplificando el trinomio por $3 \neq 0$:

$$3x^2 + 11x - 4 =$$

$$\frac{3(3x^2 + 11(3x) - 12)}{3}$$

$$= \frac{(3x)^2 + 11(3x) - 12}{3}$$

Hacemos un cambio de variable:

$$3x = y$$

y reemplazando en el trinomio del denominador, factorizamos:

$y^2 + 11y - 12 = (y + 12)(y - 1)$

Regresando a la variable original:

$(y + 12)(y - 1) = (3x+12)(3x-1)$

De modo que, aplicando factor común:

$$(y+12)(y-1) = 3(x+4)(3x-1)$$

Por tanto

$$3x^2 + 11x - 4 =$$

$$= \frac{3(x + 4)(3x - 1)}{3}$$

$$= (x + 4)(3x - 1)$$

No olvides...

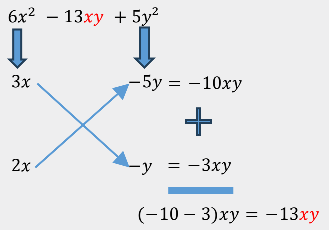
El **cambio de variable** *es una técnica matemática muy útil que se emplea para simplificar expresiones, resolver ecuaciones o transformar problemas en otros equivalentes, pero más fáciles de manejar.*

Más ejercicios...

Usando el método aspa factorizar:

- $6x^2 - 13xy + 5y^2$

Solución

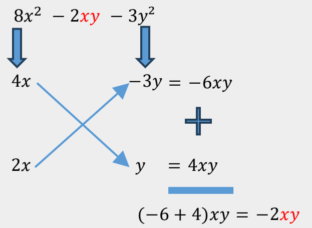


Resultado

$6x^2 - 13xy + 5y^2 = (3x-5y)(2x-y)$

- $8x^2 - 2xy - 3y^2$

Solución



Resultado

$8x^2 - 2xy - 3y^2 = (4x-3y)(2x+y)$

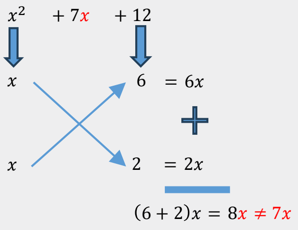
Nota

En el trinomio escrito de forma general:

$$nx^2 + pxy + qy^2$$

Si n, q son números enteros, es conveniente buscar su descomposición en factores primos y probar con todas las posibles combinaciones.

Ejemplo:



Esto no implica que el trinomio no pueda ser factorizado.

d) Aspa simple

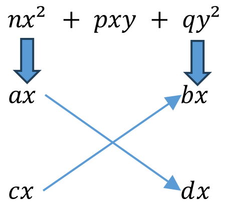
El método del aspa permite factorizar trinomios de la forma.

$$nx^2 + pxy + qy^2$$

para el cual se aplica el siguiente procedimiento:

1). Ordenamos el trinomio respecto a cualquier variable

2). Se descomponen los términos de los extremos y se acomodan en el arreglo siguiente:

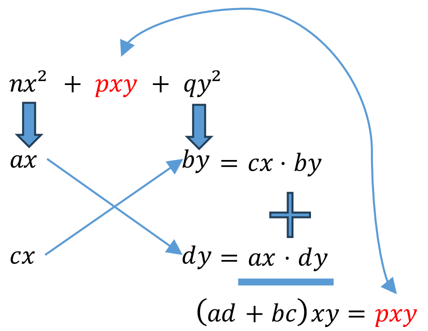


3). El arreglo encima cumple las siguientes condiciones:

$$nx^2 = ac{\cdot}cx; \; qy^2 = by{\cdot}dy$$

es decir, tanto $ac{\cdot}cx$ como $by{\cdot}dy$ son factores de nx^2 y qy^2, respectivamente.

4). Ubicados los factores de los extremos, se verifica que la suma del producto de diagonales determine el término central del trinomio. En caso de no cumplir la condición, se buscan otros factores o se cambian de posición los mismos.



5). Una vez cumplidas estas condiciones, la factorización del trinomio será el acomodar los factores de nx^2 y qy^2 de la siguiente manera:

$$nx^2 + pxy + qy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

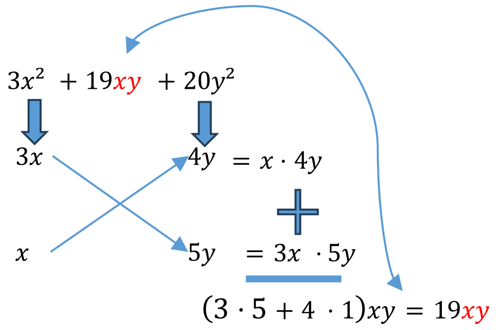
$$ax \longrightarrow by$$

$$cx \longrightarrow dy$$

Ejemplo:

Factorizamos el trinomio $3x^2 + 19xy + 20y^2$

Solución



Resultado

La factorización del trinomio es: $3x^2 + 19xy + 20y^2 = (3x + 4y)(x + 5y)$

2. Trinomio por adición y sustracción

Este método completa una expresión a trinomio cuadrado perfecto. Consiste en sumar y restar una misma cantidad con la intención de formar una diferencia de cuadrados.

Ejemplo:

Encontrar los factores $x^2 + 6x - 7$

Solución

Observamos que para completar el cuadrado perfecto necesitamos sumar y restar 9 (la mitad del coeficiente de x elevado al cuadrado).

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x - 7 + 9 - 9$$

Agrupamos y asociamos términos

$x^2 + 6x - 7 + 9 - 9 = (x^2 + 6x + 9) - 7 - 9 = (x^2+6x+9)-16$

Factorizamos el trinomio de los paréntesis:

$$(x^2 + 6x + 9) - 16 = (x + 3)^2 - 16$$

Factorizamos utilizando diferencia de cuadrados

$$(x + 3)^2 - 16 = [(x + 3) + 4][(x + 3) - 4]$$

Simplificamos

$$[(x + 3) + 4][(x + 3) - 4] = (x + 7)(x - 1)$$

Resultado

Por lo tanto, la factorización del trinomio $x^2 + 6x - 7$ es $(x+7)(x-1)$.

Ejercicio resuelto

Andrés le pide ayuda a Julio factorizar la expresión algebraica:

$$81x^2 - 11x + 121$$

Solución

Observamos que el primer y tercer término son cuadrados perfectos de $9x$ *y* 11*, respectivamente.*

Luego

$2 \cdot (9x) \cdot 11 = 198 \cdot x \neq 11x$

Entonces

$198x - 11x = 187x$

Luego, sumamos y restamos $187x$ *al trinomio:*

$81x^2 - 11x + 121 =$

$81x^2 - 11x + 121 - 187x + 187x$

$= (81x^2 - 198x + 121) + 187x$

$= (9x - 11)^2 + 187x$

Finalmente:

$81x^2 - 11x + 121 =$

$$= \left[(9x - 11) - \sqrt{187x}\right] \cdot \left[(9x - 11) + \sqrt{187x}\right]$$

cuando $x \geq 0$.

VALORACIÓN

La factorización de trinomios no es solo un tema de las matemáticas escolares; es una herramienta poderosa que nos permite comprender y resolver problemas complejos en diversos ámbitos de nuestra vida. Al desarrollar habilidades en factorización, estamos desarrollando habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas que nos serán útiles a lo largo de nuestra vida.

Como mencionamos en la práctica, con el ejemplo del chocolate, la factorización puede ayudar a dividir alimentos en porciones iguales. Esto es útil no solo en la cocina, también en situaciones más inverosímiles como en la planificación de eventos y catering, donde es importante repartir alimentos de manera equitativa.

Estudiar la factorización de trinomios desarrolla habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, y es un paso fundamental para entrar en la generalización de polinomios. Estas habilidades son valiosas en cualquier campo y en la vida diaria, ya que nos permiten abordar problemas complejos de manera lógica y estructurada.

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

La factorización de trinomios es una herramienta matemática versátil que tiene aplicaciones en una amplia gama de campos:

- Elaboramos un mapa mental de la factorización de trinomios y todos sus casos. Socializa esta información en clases, mediante una exposición.
- Elaboramos un ensayo sobre las aplicaciones de la factorización de trinomios.

Fuente: Yandex, 2024

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES APLICADAS AL CONTEXTO Y LA TECNOLOGÍA

Términos semejantes y su relación con la producción

1) $3x - 2y - 5x + 7y$

2) $4a + 2b - a + 3b$

3) $5m - 3n + 2m - n$

4) $6x^2 + 3xy - 2x^2 + 5xy$

5) $2a^3b^2 - a^2b^3 + 3a^3b^2$

6) $5a^2b - 2ab^2 + a^2$

7) $(2x^2y - 3xy^2) + (5x^2y + xy^2)$

8) $(7a^3b^2 - 2ab^3) - (3a^3b^2 + 4ab^3)$

9) $3x^2y^2z + 2xyz^2 - x^2y^2z + 5xyz^2$

10) $4x^2y - 2xyz + 3y^2z$

11) $(2x^2y^2 - 3xy^3 + 4x^3y) + (x^2y^2 + 2xy^3 - x^3y)$

12) $(5a^2b^2c - 3abc^2) - (2a^2b^2c + abc^2)$

13) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y$

14) $\frac{2}{3}a^2b - \frac{1}{5}ab^2 + \frac{1}{5}a^2b - \frac{1}{3}ab$

15) $-2x^2y + 3xy^2 - 5x^2y + 2xy^2$

16) $-\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{4}x^2y$

17) $\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x$

18) $0.7a + 1.2a - 0.5a$

19) $-\frac{3}{5}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$

20) $\sqrt{2}x^2y - \sqrt{3}xy^2 + \sqrt{8}x^2y + \sqrt{12}xy^2$

21) $(0.6a^3b^2 - 0.2ab^3) - (0.4a^3b^2 + 0.8ab^3)$

22) $(\sqrt{2}x^2y^2z + \sqrt{3}xyz^2) - (\sqrt{20}x^2y^2z + \sqrt{8}xyz^2)$

23) $5pqr^2 - 3p^2qr + 2pqr^2 + 5p^2qr$

24) $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$

25) $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

26) $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$

Operaciones con expresiones algebraicas

Suma y resta de polinomios

1) $(2x + 3) + (5x - 2)$

2) $(4y^2 - 3y + 1)$ con $(2y^2 + 5y - 3)$

3) $(3a^2b - ab^2 + 2)$ con $(a^2b + 4ab^2 - 1)$

Suma:

1) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)$ con $(\frac{5}{2}x - \frac{1}{4}y)$

2) $(0.5x^2y + 0.2xy^2)$ con $(0.3x^2y - 0.7xy^2)$

3) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y$ con$\sqrt{8}x - \sqrt{12}$

4) $\pi a^2 + 2\pi ab$ con $\pi b^2 - \pi ab$

5) $e^2 + 2e^2 - x$ con $3e^2 - e^2 - x$

6) De $4a^4 - 10a^3 - a^2 - 3a$, resta $8a^2 - 5a + 7$

7) $(3x^3 - 2x^2 + 5x - 1) - (x^3 + 4x^2 - 2x + 3)$

8) $(5y^4 - 3y^3 + 2y^2 - y) - (2y^4 + y^3 - 4y^2 + 3y)$

9) De $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$, resta $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 2$

Producto de polinomios

1) $(x + 2)(x + 3)$

2) $(2y - 1)(y + 4)$

3) $(3a + 5)(2a - 3)$

4) $(4a^3c - 7a^2b - 2c)(-3ac^4)$

5) $(x^2 + 2x - 1)(x - 3)$

6) $(2a^2 - 3ab + b^2)(a + 2b)$

7) $(3m - 2n)(2m^2 + mn - n^2)$

8) $(x + y + 1)(x - y - 2)$

9) $(2a^2 + 3ab - b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$

10) $(x^3 + 2x^2 - x + 1)(x^2 - x + 3)$

11) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)(4x - 2)$

12) $(0.5a^2 + 0.25ab)(2a - 0.4b)$

13) $(\sqrt{2}x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - \sqrt{3})$

14) $(x^{-2} + 2x^{-1})(x^2 - 3x)$

División

1) $\dfrac{8x^{12}b^{20}}{4x^4b^{10}}$

2) $\dfrac{a^3+3a}{a}$

3) $\dfrac{3x^2-6x+9}{x-2}$

4) $\dfrac{9r^3+27x^2+18x+54}{3x+6}$

5) $\dfrac{-7a^{18}y^2}{42x^3y^{10}}$

6) $\dfrac{15z^3+3z^2}{z^2}$

7) $\dfrac{5z^3-20z^2+25z}{5z}$

8) $\dfrac{3u^4+2u^2+3u-6}{u^2+u-2}$

9) $\dfrac{-7a^{18}y^2}{42x^3y^{10}}$

10) $\dfrac{8c^2d-20c^3}{3c^2}$

11) $\dfrac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$

12) $\dfrac{6v^4+43v^2-4}{2v^2-2+v}$

13) $\dfrac{91r^4s^{60}}{17r^2s^{59}}$

14) $\dfrac{c^4-16}{c-4}$

15) $\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}$

16) $\dfrac{t^3-6t-2}{t-3}$

17) $\dfrac{49y^{10}z^8}{7z^2}$

18) $\dfrac{x^4+3x^3-x^2}{x^2}$

19) $\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}$

20) $\dfrac{r^6-1}{r+1}$

21) $\dfrac{-144x_1^7x_2^6}{-12(x_1x_2)^2}$

22) $\dfrac{10x^2y+5xy^2}{5xy}$

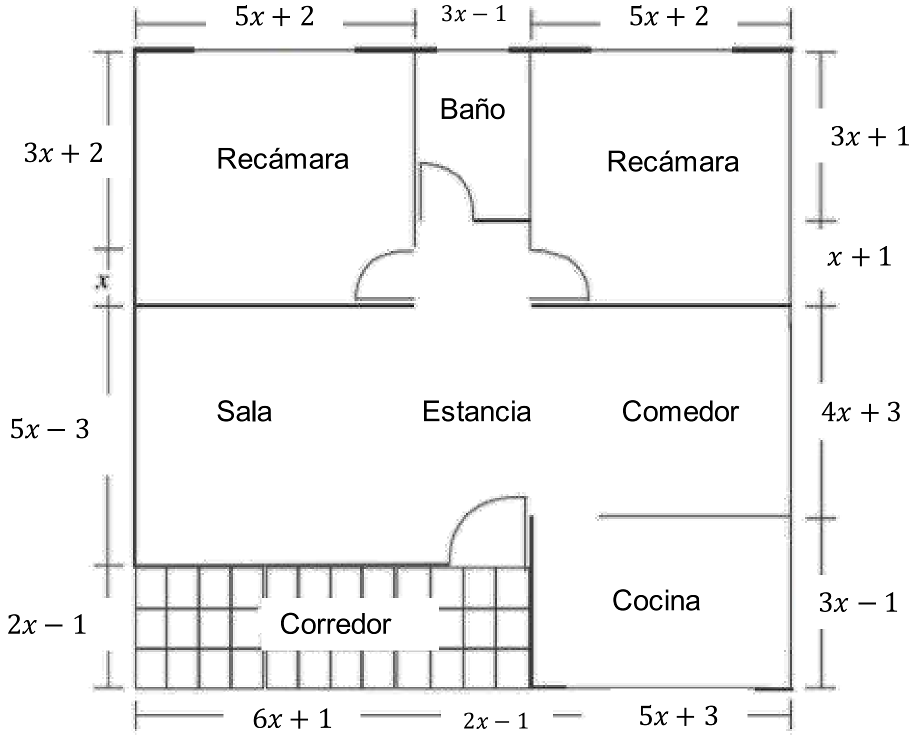
23) $\dfrac{5x^4+15x^3+25x^2+10}{5x}$

24) $\dfrac{-1729a^{18}y^2}{1729y^2a^{18}}$

25) $\dfrac{4xy^2+8xy+12y}{2y}$

26) $\dfrac{8x^3+16x^2+24x+32}{4x+8}$

27) Observe el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular:



De acuerdo con la información del gráfico, calcula la superficie que se cubrirá en la construcción, excepto en la correspondiente al corredor.

PRODUCTOS NOTABLES

1) $(a+b)^2$
2) $(m+1)(m-1)$
3) $(2p+7)(2p-7)$
4) $(x-y)^2$
5) $(h+4)^2$
6) $(3a+4b+5c)^2$
7) $(m+n)(m-n)$
8) $(b-c)^2$
9) $(6x+5)^2$
10) $(p+3)(p-3)$
11) $(2m+3)^2$
12) $(7c-2d)(7c+2d)$
13) $(2a+5)^2$
14) $(z+5)(z-5)$
15) $(4y+3)(4y-3)$
16) $(x-4)^2$
17) $(a-b)^2$
18) $(5u+6v)^2$
19) $(c+d)^2$
20) $(3x-1)(3x+1)$
21) $(2k-3)(2k+3)$
22) $(3y-2)^2$
23) $(y-6)^2$
24) $(a+3b-2c)^2$
25) $(u+1)(u-1)$
26) $(z+w)^2$
27) $(3x-4y)(3x+4y)$
28) $(k+7)^2$
29) $(p+2q)(p-2q)$
30) $(5p+7q)^2$
31) $(a+b+c)^2$
32) $(3a+2b)^2$
33) $(6m-2n)(6m+2n)$
34) $(2x+3y)(2x-3y)$
35) $(4x-y)^2$
36) $(2t+5)^2$
37) $(q-p)^2$
38) $(5m+3n)(5m-3n)$
39) $(3h+4)^2$

COCIENTES NOTABLES

1) $\frac{z^2-4}{z-2}$
2) $\frac{b^4-81}{b^2-9}$
3) $\frac{2x^2+8x+8}{2x+4}$
4) $\frac{a^3-8}{a-2}$
5) $\frac{100x^2-4x^2y^2}{30x^2-6x^2y}$
6) $\frac{5p^2-25}{p-5}$
7) $\frac{3b^3+9b^2+9b}{3b+3}$
8) $\frac{a^{4n}b^{8n}-c^{8n}d^{4n}}{a^{2n}b^{4n}+c^{4n}d^{2n}}$
9) $\frac{r^4-1}{r^2-1}$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UN INCÓGNITA

Resuelve las siguientes ecuaciones

1) $2x+5=15$
2) $2(x+5)-3(x-2)=7$
3) $2a-3(b+2)+4c=b$
4) $x-3=7$
5) $\frac{4}{5}x-7=\frac{3}{2}x+2$
6) $8b-5(2c-3)=-6$
7) $5x=20$
8) $6(x+4)-2(x-1)=5(x+3)$
9) $2x+3=2x+5$
10) $x+6=12$
11) $3w+5-7w-9w-11w+13=16-8w$
12) $6b+4=6b+7$
13) $3x-4=11$
14) $10x-8+3x-7+x=20x-10-6x$
15) $9s-3=9s+4$
16) $7x-35=0$
17) $3(2x-4)-5(x+1)=2(x-3)+6$
18) $2.3v+0.8=1.7v+1.9$
19) $\frac{x}{2}=8$
20) $0.75x+2.3=1.5-1.2$
21) $4x+9=25$
22) $\frac{3x+4}{2}-\frac{2x-1}{3}=5$
23) $5.2y+1.4=2.7y+3.9$
24) $x-5=10$
25) $6x=18$

FACTORIZACIÓN

Factoriza las siguientes expresiones

1) $a^3b^2 - 2a^3b$
2) $9k^3m - 3k^2m^2$
3) $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
4) $4p^3 - 8p^2q + 12pq^2$
5) $9a^5b - 12a^2b^3 + 15ab^2 - 18a^3b^4$
6) $2mn + 4mp + 3n + 6p$
7) $18x^5 + 30x^4$
8) $5x^2 - 10x^3 + 15x^2$
9) $3xy - 6y + 2y - 4$
10) $10mn^2 + 15m^2n$
11) $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$
12) $9k^2 - 3kl + 6km - 2lm$
13) $25b^2 + 35b^4 - 45b^5$
14) $3ax + 6ay + 2bx + 4by$
15) $pq - pr + qs - rs$

Factorización de binomios

1) $16a^2 - 9b^2$
2) $8x^3 - 27y^3$
3) $27x^3 + 64y^3$
4) $25x^2 - 49y^2$
5) $125a^3 - 64b^3$
6) $8a^3 + 125b^3$
7) $81p^2 - 36q^2$
8) $27m^3 - 8n^3$
9) $1 + 64z^3$
10) $49m^2 - 64n^2$
11) $64p^3 - 1$
12) $343m^3 + 27n^3$
13) $100r^1 - 1$
14) $125r^3 - 8s^3$
15) $8x^3 + 27y^3$

Factorización de trinomios

1) $9(x - y) + 12(x - y)(x - y) + 4(x - y)^2$
2) $m^2 - 5m + 6$
3) $x^2 + 11x + 30$
4) $9(a^2 + 2a + 1)^2 - 12(a^2 + 2a + 1) + 4$
5) $z^2 + 3z - 18$
6) $2m^2 + 13m + 20$
7) $z^4 + y^2z^2 + \frac{z^4}{16}$
8) $n^2 + 8n + 16$
9) $6z^2 + 17z + 10$
10) $144x^4a^4 - 24x^2a^3 + a^2$
11) $p^2 - 9p + 14$
12) $8p^2 + 20p + 12$
13) $x^2 - 4x + 4$
14) $r^2 + 5r - 24$
15) $9r^2 + 21r + 10$
16) $p^2 - 6pq + 9q^2$
17) $k^2 + 4k - 21$
18) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$
19) $9r^2 - 12rs + 4s^2$
20) $b^2 - 2b - 15$
21) $m^2 + \frac{4}{5}m - \frac{2}{5}$
22) $4m^2 + 12mn + 9n^2$
23) $2x^2 + 5x + 3$
24) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
25) $25a^2 - 30ab + 9b^2$
26) $3a^2 - 7a + 2$
27) $6y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}$
28) $x^2 + 7x + 12$
29) $4m^2 + 8m - 12$
30) $5z^2 + \frac{4}{3}z - \frac{1}{3}$
31) $a^2 - 4a - 12$
32) $5y^2 - 9y + 4$
33) $r^2 + \frac{7}{8}r - \frac{1}{4}$
34) $y^2 + 2y - 8$
35) $6z^2 + 11z - 10$
36) $w^2 + 4w + 2$

LA REGLA DE RUFFINI

PRÁCTICA

La factorización se realiza en el conjunto de las expresiones algebraicas racionales enteras respecto a la variable y respecto a los coeficientes en el conjunto de los números racionales, aunque en este último caso puede existir alguna reconsideración en abandonar el conjunto racional (Q).
El número de factores primos de un polinomio se obtienen contando el número de factores basales, es decir los factores que se encuentren como base de una potencia y que contengan a la variable, es así que un polinomio factorizado presenta una cantidad determinada de factores algebraicos, es decir expresiones que lo dividen en forma exacta en el cual no se considera a ninguna constante.

El establecimiento de venta de alimentos y bebidas "Akaena" tiene la siguiente función de costos $C(x)$ en función de la cantidad de productos (x):

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 6$$

Para minimizar los costos, necesitamos encontrar los puntos críticos de esta función, es decir, los valores de x para los cuales la cantidad de productos de $C(x)$ con respecto a (x) es cero. Estos puntos críticos son importantes para entender cómo los costos están en función de la cantidad de platos producidos (cantidad de productos) y así ajustar su producción para minimizar los costos.

Fuente: OpenAi, 2024

Actividad

Respondemos a las siguientes preguntas:
¿Consideras que la regla de Ruffini es útil en el diario vivir? ¿Por qué?
¿Qué relación existe entre la regla de Ruffini y la resolución de ecuaciones polinomiales?
¿Existe aplicaciones de la regla de Ruffini en la programación, economía, la ingeniería y la medicina?

TEORÍA

Dato curioso

Es un método abreviado para dividir polinomios, que simplifica el proceso en comparación con la división larga. Se utiliza principalmente cuando se divide un polinomio por un binomio de la forma $x-c$, donde c es una constante.
La diferencia entre ambas es que la regla de Ruffini se utiliza para factorizar polinomios (el cual podría requerir el uso sucesivo de la división sintética), mientras que la otra se utiliza para encontrar el cociente y residuo sin utilizar la división larga.

Ejemplo:
Dividir $2x^3-3x^2+5x-7$ entre $x-2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 5 & -7 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & \boxed{7} \end{array}$$

$$\therefore 2x^3-3x^2+5x-7$$
$$= (x-2)(2x^2+x+7)+7$$

1. El método de Ruffini

Este método consiste en aplicar la división sintética o propiedad de la divisibilidad entre polinomio.
Si para un polinomio $P(x)$ de grado n existe un $a \in$ R tal que $P(a)$=0 entonces un factor de $P(x)$ será el binomio $(x-a)$.
Existen polinomios que no tienen raíces reales. El ejemplo más típico es el polinomio x^2+1, el cual no tiene raíces reales, luego es irreducible sobre los números reales, es decir, no se puede factorizar.

2. Aplicación del método de Ruffini para factorizar polinomios

Al utilizar la regla de Ruffini para factorizar un polinomio, debe estar completo (esto no representa problema alguno, pues se pueden completar con ceros a aquellos grados intermedios que no aparecen en el polinomio).

Ejemplo:

$$x^4 + 1 = x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

1). Se debe ordenar el polinomio a factorizar decrecientemente, en forma descendente, y si falta algún término se deja un espacio, comprendiendo que el coeficiente del término que falta es cero, se hace esto para que el polinomio se escriba completo.

2). Hay que precisar que el polinomio deba tener término independiente y si no lo tiene se debe extraer el factor común hasta obtener el término independiente.

Ejemplo:

$x^5 + 3x^2 + x = x(x^4 + 3x + 1)$. Se debe aplicar la regla a $x^4 + 3x + 1$.

3). Acomodar los coeficientes del polinomio en una tabla.

4). Anotar un divisor del término independiente en la esquina inferior izquierda, bajar el primer coeficiente del polinomio. Se anota el producto de estos dos debajo del segundo coeficiente del polinomio, se suma (o resta) en vertical, se procede de la misma forma: multiplicando y sumando en vertical, hasta obtener cero “0” en la última suma vertical, considerando que, si no resulta cero, se puede reiniciar el proceso anotando otro divisor del término independiente del polinomio. Nota: La manera más fácil de seleccionar el divisor adecuado es reemplazando éste en el polinomio original, en lugar de la variable principal, si resulta cero, es el adecuado.

5). Ya con el primer divisor, que conformará luego el primer factor, se repite el procedimiento con los nuevos coeficientes hasta dejar un solo coeficiente.

Teorema del factor

Es un resultado algebraico, el cual indica que si $p(x)$ es un polinomio, entonces un número a es una raíz de ese polinomio (es decir, $p(a)=0$) si y solo si $(x-a)$ es un factor de $p(x)$), en símbolos:

$$p(a)=0 \Leftrightarrow p(x)=(x-a)q(x)$$

donde $q(x)$ es otro polinomio de grado menor que $p(x)$

Ejemplo:

Factorizar $-6-3x^2+x^4+11x-3x^3$

Solución

1). Ordenamos el polinomio de manera descendente:

$$P(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

2). Identificamos al término independiente $a = 6$

3). Formamos una tabla con los coeficientes del polinomio, trazamos dos líneas perpendiculares:

4). Escribimos uno de los **divisores** del término independiente a la izquierda de la línea vertical.

El teorema del factor ayuda en la elección del divisor del término independiente que es factor de $p(x)$:

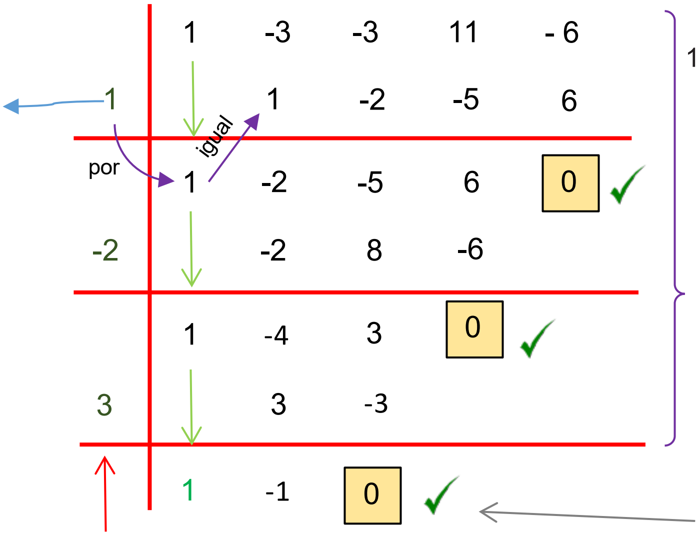
$p(1)=1^4-3\cdot1^3-3\cdot1^2+11\cdot1-6=0$

$p(-2)=0$

$p(3)=0$

Mientras que $p(-1)$, $p(2)$, $p(-3)$, $p(6)$ y $p(-6)$ son no nulos.

Por tanto, los divisores de -6 adecuados son 1, −2, 3.



	1	-3	-3	11	- 6
1		1	-2	-5	6
	1	-2	-5	6	0 ✓
-2		-2	8	-6	
	1	-4	3	0 ✓	
3		3	-3		
	1	-1	0 ✓		

Divisores del término independiente.

1). Se baja el 1º coeficiente, se multiplica el divisor 1 por el 1º coeficiente, el resultado se escribe en la siguiente columna para sumar en vertical. Repetimos el proceso hasta simplificar los coeficientes. El divisor que se escoja debe ser un número que haga que al final nos dé resto cero.

Como nos queda un solo coeficiente; entonces, hemos terminado de factorizar.

Resultado

El resultado de la factorización por el método de Ruffini es:

$$P(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6=(x-1)^2\,(x+2)(x-3)$$

Actividad

Para el polinomio $s(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+9x^3-11x^2+13x-15$, encontramos los valores de $\boldsymbol{s(x)}$, cuando $\boldsymbol{x}$ es igual a:

1) $x = 8$

2) $x = 3$

3) $x = 12$

4) $x = -1$

5) $x = -3$

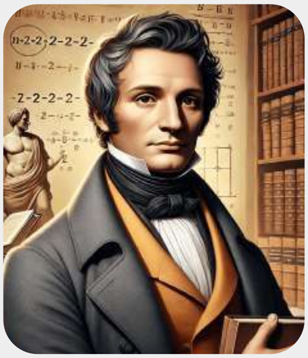
6) $x = -12$

7) $x = 1$

8) $x = 6$

Paolo Ruffini

Matemático, filósofo y médico italiano (1765 - 1822)



Fuente: OpenAI, 2024

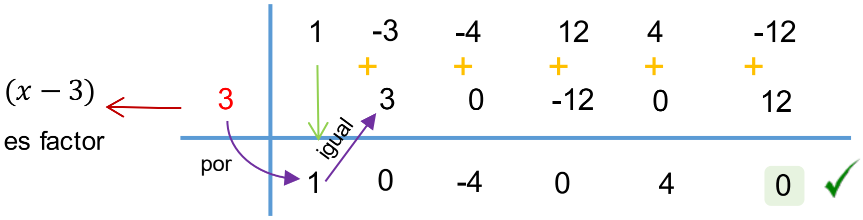
Ejemplo:

Factorizar el polinomio $Q(x)=x^5-3x^4-4x^3+12x^2+4x-12$

1). El polinomio $Q(x)$ ya está ordenado en forma descendente.

2). Los divisores de 12 son $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$

3). Procedemos a dibujar una tabla, acomodando los coeficientes del polinomio (incluidos aquellos grados que no aparecen, completarlos con ceros). La tabla se dibuja así:



	1	-3	-4	12	4	-12
3		3	0	-12	0	12
	1	0	-4	0	4	0 ✓

Por tanto, el polinomio $Q(x)$ tendrá un factor $Q(x)=(x-3)\cdot P(x)$ donde $P(x)=x^4-4x^2+4$.

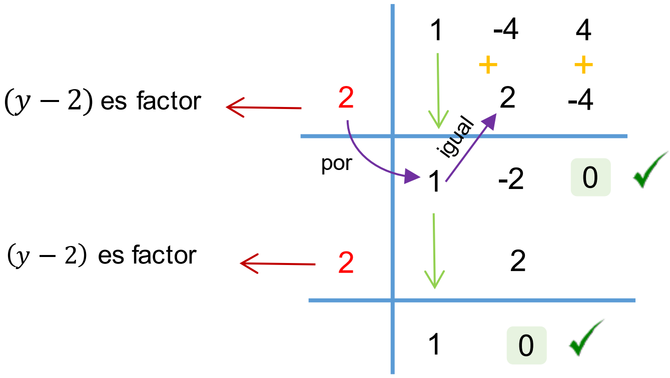
Efectuamos un cambio de variable en $P(x)$: $x^2=y$. Luego $P(x)$ se transforma en $P'(y)=y^2-4y+4$.

Es posible utilizar de nuevo la regla de Ruffini:

- El polinomio $P'(y)$ ya está ordenado en forma descendente.
- Los divisores de 4 son ±1,±2,±4
- Procedemos a dibujar una tabla, acomodando los coeficientes del polinomio (incluidos aquellos grados que no aparecen, completarlos con ceros). La tabla se dibuja así:

Nota

Aunque la regla de Ruffini es aplicable a cualquier polinomio de con coeficientes enteros, es recomendable su uso para polinomios de grado mayor o igual a 3, pues para binomios y trinomios de grado 2 ya tenemos muchas técnicas de factorización que son más eficientes.



	1	-4	4
2		2	-4
	1	-2	0 ✓
2		2	
	1	0 ✓	

La factorización del polinomio $P'(y)$ es $P'(y)=(y-2)(y-2)=(y-2)^2$. Retornando a nuestra variable original x:

$$Q(x)=(x-3)\ (y-2)^2=(x-3)\ (x^2-2)^2$$

Por tanto, la factorización de $Q(x)$ empleando la regla de Ruffini es:

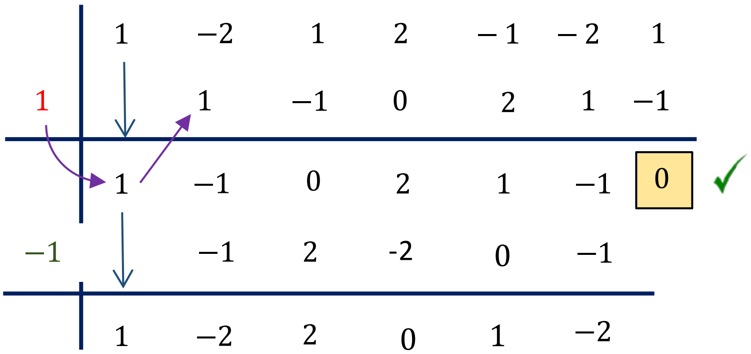
$$Q(x)=(x-3)\ (x^2-2)^2$$

Nota: Una factorización más completa de $Q(x)$ es

$$Q(x)=(x-3)\left(x+\sqrt{2}\right)^2\left(x-\sqrt{2}\right)^2$$

Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio, solamente por el método de Ruffini:
$R(a) = a^6 - 2a^5 + a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a + 1$
Solución El polinomio $R(a)$ ya aparece ordenado decrecientemente, por tanto ordenamos sus coeficientes en una tabla, similar a los ejemplos anteriores:



	1	−2	1	2	−1	−2	1	
1		1	−1	0	2	1	−1	
	1	−1	0	2	1	−1	0	✓
−1		−1	2	-2	0	−1		
	1	−2	2	0	1	−2		

Dato histórico

Fue Niels Henrik Abel quien finalmente demostró que las ecuaciones de quinto grado (quinticas) no pueden ser resueltas por radicales en el caso general, un resultado clave en la historia del álgebra.
Sin embargo, Paolo Ruffini fue el primero en hacer un intento serio de demostrar esta imposibilidad. En 1799, Ruffini publicó un trabajo en el que afirmaba haber demostrado que las ecuaciones de grado 5 no podían resolverse por radicales, pero su demostración no era completamente rigurosa y fue criticada por sus contemporáneos.

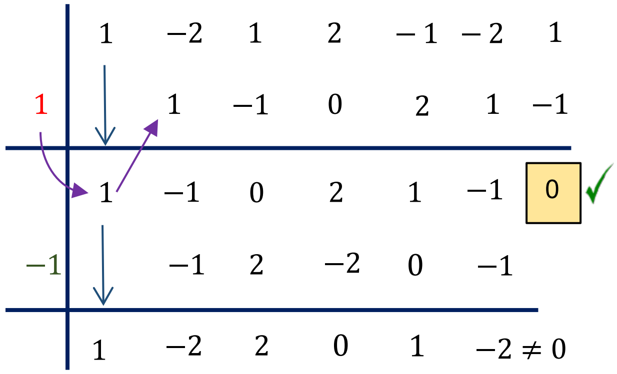
La factorización por Ruffini, primero busca los divisores enteros de 1, que son -1 y 1. El diagrama encima concluye que $(x-1)$ es un factor de $R(a)$, luego escribimos

$$R(a) = (a-1)(a^5 - a^4 + 2a^2 + a - 1)$$

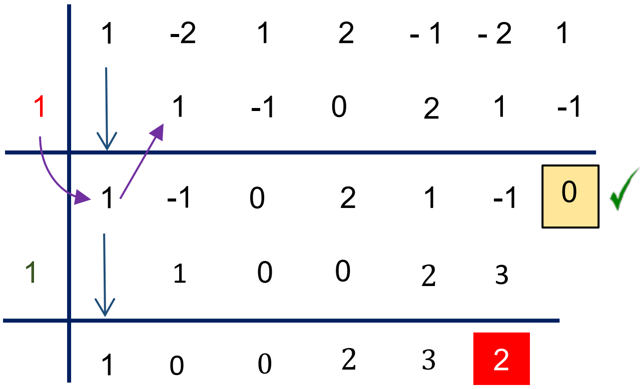
Ahora, sea $S(a) = a^5 - a^4 + 2a^2 + a - 1$ el cual verificamos si es posible factorizar por Ruffini, sabiendo que los divisores enteros de su término independiente son −1 y 1.

$$S(-1) = (-1)^5 - (-1)^4 + 2(-1)^2 + (-1) - 1 = (-1) - 1 + 2 - 1 - 1 = -1$$
$$S(1) = 1^5 - 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 2$$

Según las tablas, también se comprueba que con estos dos valores, no podemos tener factores del polinomio S que los contengan:



	1	−2	1	2	−1	−2	1	
1		1	−1	0	2	1	−1	
	1	−1	0	2	1	−1	0	✓
−1		−1	2	−2	0	−1		
	1	−2	2	0	1	−2 ≠ 0		



	1	-2	1	2	- 1	- 2	1	
1		1	-1	0	2	1	-1	
	1	-1	0	2	1	-1	0	✓
1		1	0	0	2	3		
	1	0	0	2	3	2		

Por tanto, la factorización, según el enunciado es:

$$R(a) = (a-1)(a^5 - a^4 + 2a^2 + a - 1)$$

Actividad

Determinamos los factores de los siguientes polinomios aplicando el método de Ruffini. En caso de que el método no resulte, justificamos por qué evaluando todos los divisores del término independiente:

1) $p(a) = a^3 - 4a^2 + 5a - 2$
2) $s(d) = d^3 - 5d^2 + 6d - 2$
3) $q(b) = 2b^4 - 3b^3 - 5b^2 + 9b - 6$
4) $t(e) = 3e^3 - 7e^2 + 2e + 4$
5) $r(c) = c^5 - 4c^4 + 7c^3 - 6c^2 + 5c - 2$
6) $u(f) = f^4 + 3f - 5f^2 + 7f - 9$
7) $v(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
8) $w(g) = 4g^4 - 6g^3 + 9g^2 - 3g + 8$
9) $z(k) = 2k^5 - 3k^4 + 5k^3 - 7k^2 + 9k - 11$

3. Factorización (Miscelánea)

La factorización de polinomios puede implicar la combinación de varios métodos para llegar a una expresión completamente factorizada. Algunos casos comunes de factorización que combinan diferentes técnicas incluyen:
Factorización por agrupación y luego por factor común:

Ejemplo:
Factorizar $3xa+2y+2a+3xy$

Solución

$3xa+2y+2a+3xy = 3xa+3xy+2a+2y$ Por propiedad asociativa
$= 3x(a+y)+2(a+y)$ Por factor común
$= (a+y)(3x+2)$ Otra vez, factor común

Resultado

$$3xa+2y+2a+3xy = (a+y)(3x+2)$$

a) Factorización por factor común y trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

Ejemplo:
Factorizamos $x^4-11x^3+30x^2$

Solución

$x^4-11x^3+30x^2 = x^2\,(x^2-11x+30)$ Aplicando factor común
$= x^2(x-6)(x-5)$ El trinomio satisface $(-6)(-5) = 30$ y $-6 -5 = -11$

Resultado

$$x^4 - 11x^3 + 30x^2 = x^2\,(x-6)(x-5)$$

b) Factorización por diferencia de cuadrados y factor común

Ejemplo:
Factorizamos $49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2$

Solución

Es conveniente expresar todos los términos en su forma cuadrática, para así poder aplicar diferencia de cuadrados.

$49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2 = 7^2(x^2)^2 - 2^2(x^2 - 3x)^2$ expresamos como un cuadrado perfecto
$= (7x^2)^2 - (2(x^2 - 3x))^2$ propiedades de exponentes
$= [7x^2 - 2(x^2 - 3x)][7x^2 + 2(x^2 - 3x)]$ diferencia de cuadrados
$= (7x^2 - 2x^2 + 6x)(7x^2 + 2x^2 - 6x)$ propiedad distributiva
$= (5x^2 + 6x)(9x^2 - 6x)$
$= 3x^2(5x + 6)(3x - 2)$ factorizando términos semejantes

Resultado

$$49x^4 - 4(x^2 - 3x)^2 = 3x^2\,(5x + 6)(3x - 2)$$

c) Factorización por cambio de variable y trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo:
Encuentre la factorización de $\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9,\ b \in \mathbb{R}, b \geq 0$

Solución

$\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9 = (m^2)^{\frac{1}{3}} - 6\sqrt[3]{m} + 9$ propiedad $(a^b)^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$, para cualquier $a, b, c \in \mathbb{N}$
$= \left(m^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9$ propiedad, para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}, \left(a^b\right)^c = (a^c)^b$
$= (\sqrt[3]{m})^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9$ propiedad, para cualquier $a, b, c \in \mathbb{N},\ a^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a}$

Haciendo el cambio de variable

$(\sqrt[3]{m})^2 - 6\sqrt[3]{m} + 9 = u^2 - 6u + 9$ Reemplazando la nueva variable u

$= u^2 - 6u + 9$

$= (u-3)(u-3)$ Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto

$= (u-3)^2 = (\sqrt[2]{m} - 3)^2$ Regresando a la variable original

Resultado

$$\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9 = (\sqrt[2]{m} - 3)^2$$

VALORACIÓN

La regla de Ruffini es una conocida herramienta del álgebra a la cual recurrimos en primer lugar factorizar polinomios. Aunque pueda parecer un concepto abstracto y limitado a las aulas de matemática, sus aplicaciones trascienden el ámbito académico y tienen un impacto significativo en nuestra vida diaria. Al factorizar un polinomio, lo descomponemos en componentes más simples, lo que facilita su análisis y manipulación. Esto es particularmente beneficioso cuando trabajamos con expresiones complicadas.

Podemos obtener información sobre los ceros de un polinomio (los valores de x para los cuales se anula el polinomio), lo que nos permite analizar el comportamiento de la función correspondiente. Esto es esencial en muchas disciplinas, como la física, la ingeniería, entre otras.

Algunos ejemplos útiles incluyen:

Física: La factorización se utiliza para resolver ecuaciones de movimiento y analizar el comportamiento de los sistemas físicos.

Química: Los polinomios se utilizan en la química para representar reacciones químicas y calcular concentraciones de sustancias.

Algoritmos: En el diseño de algoritmos, se utiliza la factorización de polinomios para resolver problemas de optimización y análisis de datos.

Criptografía: Algunos sistemas de cifrado requieren factorización de números enteros grandes.

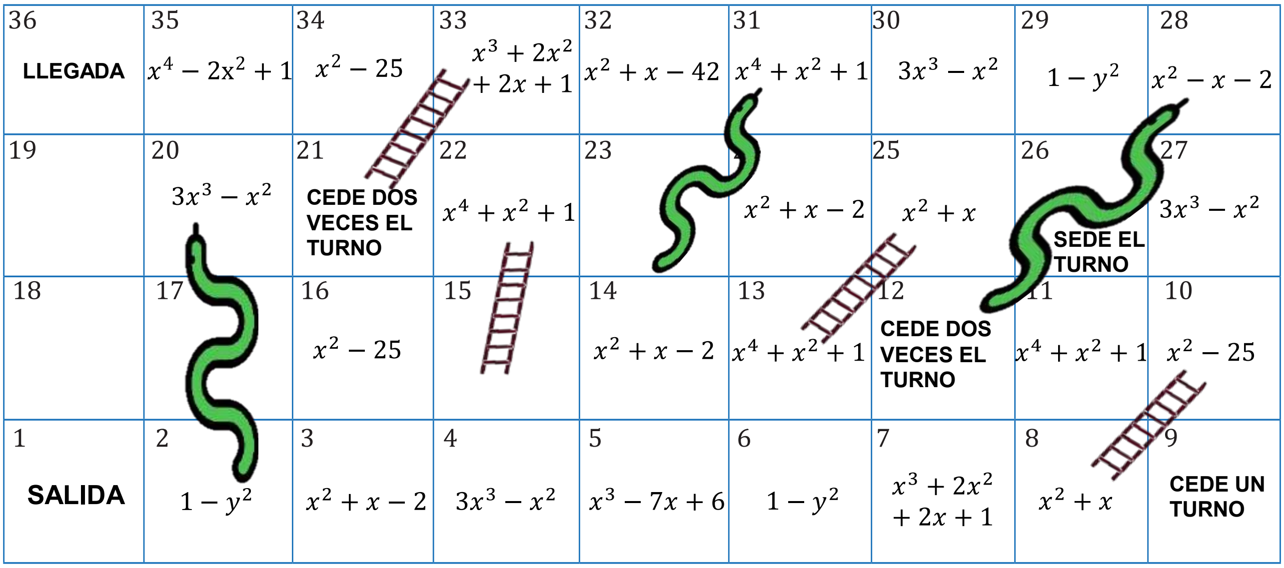
La regla de Ruffini es una herramienta útil en matemática esencial que se utiliza en una amplia gama de campos. Comprender los principios de la factorización nos ayuda a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas que nos serán útiles a lo largo de nuestra vida.

Fuente: OpenAi, 2024

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

- Construímos el juego de la **escalera de factorización** y jugamos en clases.
- Creamos uno similar en nuestros cuadernos, alternando los ejercicios.



36 **LLEGADA**	35 x^4-2x^2+1	34 x^2-25	33 x^3+2x^2+2x+1	32 x^2+x-42	31 x^4+x^2+1	30 $3x^3-x^2$	29 $1-y^2$	28 x^2-x-2
19	20 $3x^3-x^2$	21 **CEDE DOS VECES EL TURNO**	22 x^4+x^2+1	23	x^2+x-2	25 x^2+x	26 **SEDE EL TURNO**	27 $3x^3-x^2$
18	17	16 x^2-25	15	14 x^2+x-2	13 x^4+x^2+1	12 **CEDE DOS VECES EL TURNO**	11 x^4+x^2+1	10 x^2-25
1 **SALIDA**	2 $1-y^2$	3 x^2+x-2	4 $3x^3-x^2$	5 x^3-7x+6	6 $1-y^2$	7 x^3+2x^2+2x+1	8 x^2+x	9 **CEDE UN TURNO**

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y APLICACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN

PRÁCTICA

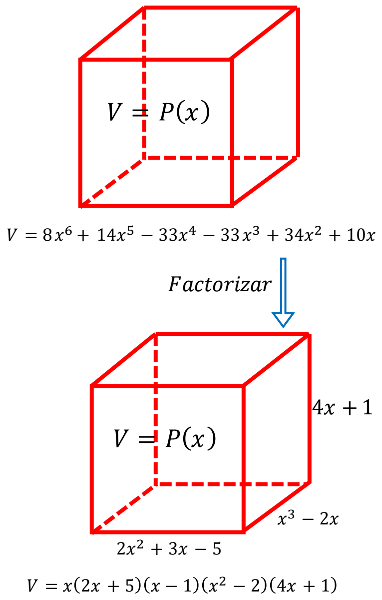
El concepto de la factorización relacionado con el reconocimiento de las figuras geométricas básicas (cuadrado y rectángulo), es útil para factorizar trinomios de segundo grado potenciando el sistema algebraico y el pensamiento variacional.

Factorizar el volumen de un cuerpo geométrico significa descomponer el polinomio que representa el volumen en un producto de factores más simples.

Debido a que obtenemos el polinomio, que representa el volumen del prisma, al desarrollar el producto, podemos afirmar que la factorización es la operación inversa de la multiplicación.

Podemos afirmar geométricamente que, al factorizar el volumen de un prisma, podemos calcular sus lados: ancho, largo y alto. En cambio, podemos decir que siempre se puede calcular el volumen de un prisma dada sus dimensiones mediante el proceso de multiplicación.

Respecto a la representación visual del binomio de Newton propuesta por Jhon Wallis y las representaciones que se pueden extraer de Euclides y las sugerencias de Dienes, son las que permiten estructurar y hacer un recorrido por las representaciones planas y tridimensionales de las factorizaciones.



$V = 8x^6 + 14x^5 - 33x^4 - 33x^3 + 34x^2 + 10x$

$V = x(2x + 5)(x - 1)(x^2 - 2)(4x + 1)$

Actividad

Analizamos y contestemos la siguiente pregunta:

- ¿Cómo se aplicaría la factorización en tu diario vivir?,¿Es posible?

Realizamos la siguiente tarea:

- Mencionamos 3 ejemplos del uso de la factorización con cuerpos geométricos.

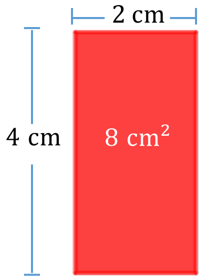
TEORÍA

1. Interpretación geométrica

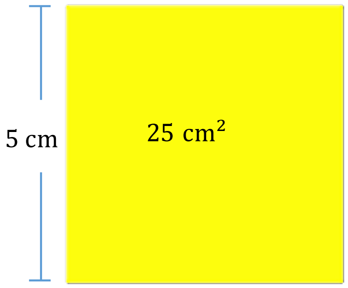
La interpretación geométrica de la factorización se refiere a la representación visual de expresiones algebraicas factorizadas en términos de formas geométricas. Esta interpretación permite comprender mejor las relaciones entre las variables y cómo se relacionan con las propiedades de las figuras geométricas.

En esencia, la interpretación geométrica de la factorización implica considerar las expresiones algebraicas como áreas o dimensiones de formas geométricas específicas. Al factorizar una expresión algebraica, se busca descomponerla en factores más simples, lo que puede corresponder a descomponer una figura geométrica en partes más manejables y fáciles de entender.

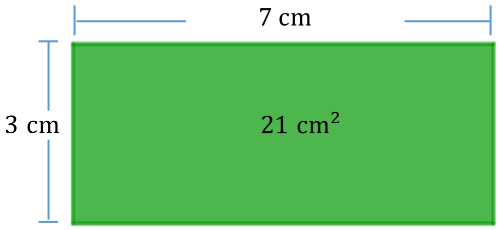
Por ejemplo, la representación gráfica del factor común monomio se puede hacer utilizando bloques rectangulares o cuadrados que representen cada uno de los términos del polinomio, en función de las longitudes de su base, altura y área dadas en metros, centímetros, etc, para luego identificar el término que es común a todos los términos del polinomio.



Base: 2 cm
Altura: 4 cm
Área: (2 cm)(4 cm) = 8 cm^2



Base: 5 cm
Altura: 5 cm
Área: (5 cm)(5 cm) = 25 cm^2

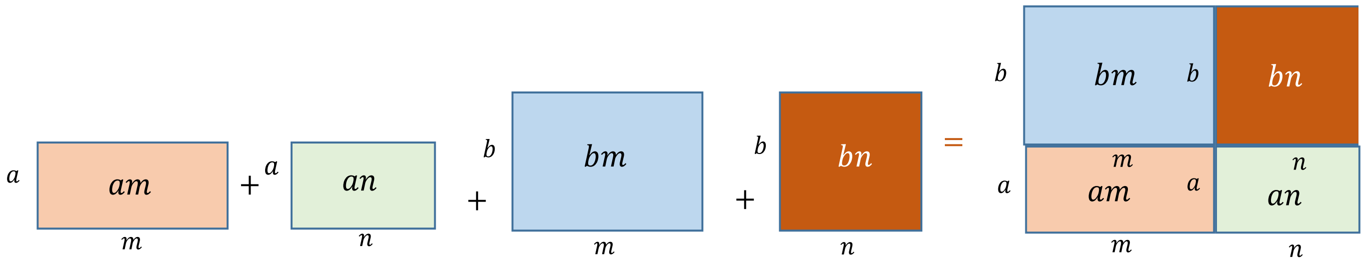


Base: 7 cm
Altura: 3 cm
Área: (7 cm)(3 cm) = 21 cm^2

Ejemplo:

Representar geométricamente la factorización de:

$$am + an + bm + bn = a(m + n) + b(m + n) = (a + b)(m + n)$$

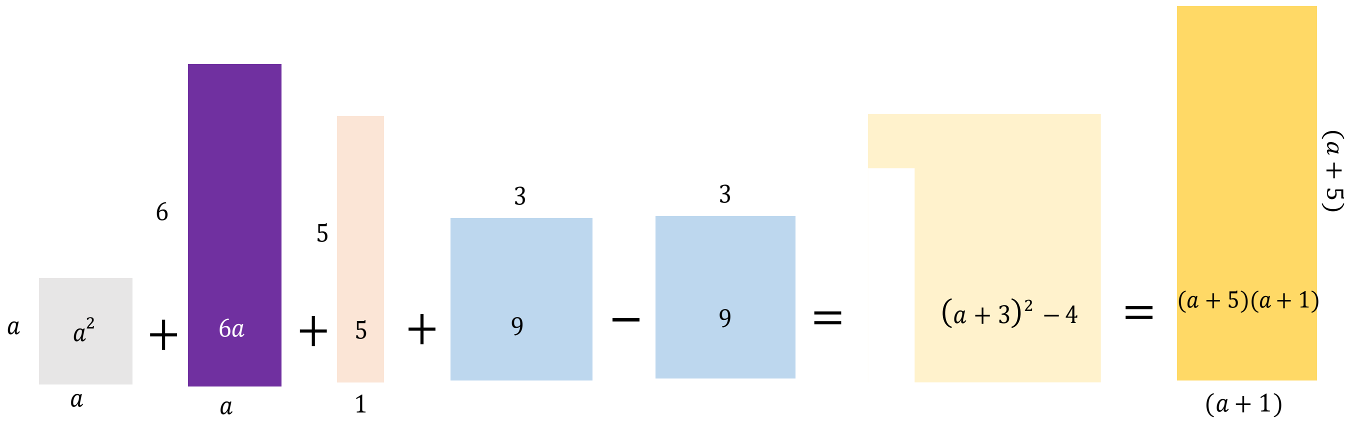


La interpretación gráfica del factor común y factor por agrupación aplicado a $am+an+bm+bn$, es la descomposición en rectángulos más pequeño el rectángulo de lados $a + b; m + n$.

Completar el cuadrado es una técnica algebraica utilizada para convertir una expresión cuadrática en una forma factorizada que permite resolver ecuaciones o simplificar la expresión, por ejemplo para factorizar el trinomio $a^2 + 6a + 5$, dividimos el coeficiente del segundo término entre dos y lo elevamos al cuadrado, en este caso $(6/2)^2 = 9$. Sumando y restando 9 al trinomio: $a^2 + 6a + 5 = a^2 + 6a + 5 + 9 - 9$.

Asociando convenientemente, $a^2 + 6a + 5 = (a^2 + 6a + 9) - 4$ y factorizando por trinomio cuadrado perfecto, tenemos: $(a + 3)^2 - 4 = [(a + 3) + 2][(a + 3) - 2] = (a + 5)(a + 1)$ por diferencia de cuadrados.

Geométricamente, la suma de las áreas de los rectángulos y cuadrados, es la misma del rectángulo del lado derecho de la igualdad:



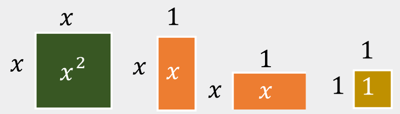
2. Caja de polinomios

Se denomina "Caja o Cajón de Polinomios" a un conjunto de piezas rectangulares que representan términos algebraicos. Al ubicarlas sobre una superficie o tablero orientado, permiten determinar las dimensiones de la base y la altura de áreas geométricas. De esta forma, se establece una relación entre la geometría y el álgebra, facilitando una mejor comprensión de la factorización.

Sin embargo, solo se puede representar polinomios de grado 2 con coeficientes positivos y negativos (con preferencia racionales), pues hacemos uso del plano cartesiano, el cual es bidimensional. Cada rectángulo será denominado "ficha" y su ubicación dependerá del signo de cada uno de sus términos. Es así que en el primer o tercer cuadrante será para las fichas cuyos términos tienen signo positivo, mientras los términos con signo negativo, irán al segundo o cuarto cuadrante.

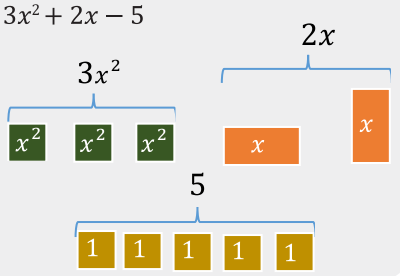
Caja de polinomios

Las variables y las constantes de los trinomios, se representan con rectángulos:



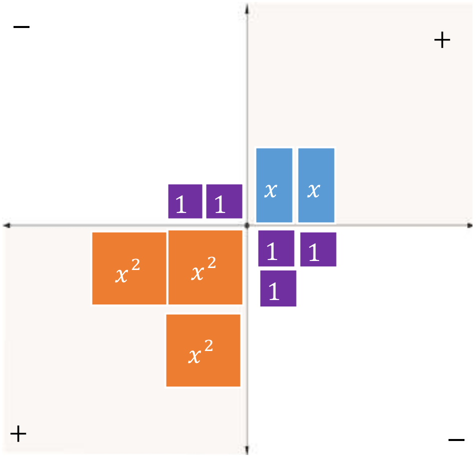
Ejemplo:

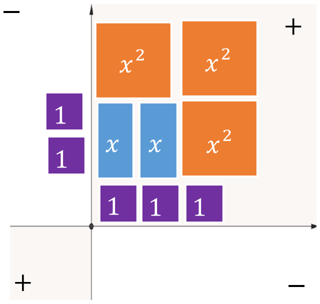
$3x^2 + 2x - 5$

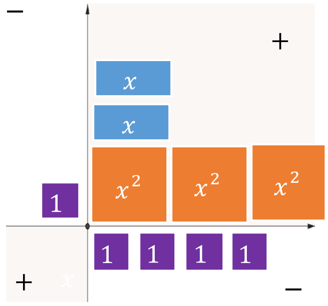


Ejemplo:

Algunas de las posibles representaciones del trinomio $3x^2+2x-5$ en el plano cartesiano:







Cajón de polinomios

Puedes descargar la aplicación gratuita para dispositivos Android desde Play Store a través del siguiente enlace:

https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_ri-reto.cajapolinomios_2_3

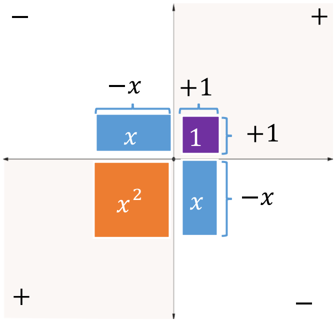
¿Cómo factorizar con la Caja de Polinomios?

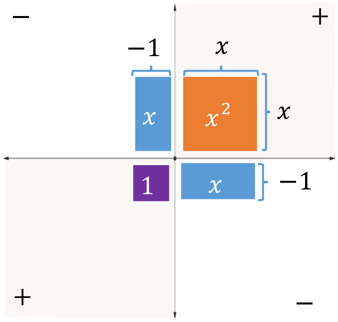
Factorizar un polinomio usando este método, implica organizar una representación rectangular del mismo, siempre que esta sea factible.

Ejemplo:

Mostramosdos representaciones rectangulares del trinomio x^2-2x+1

Solución





El rectángulo formado por las diferentes componentes de x^2-2x+1, tiene área: $(-x+1)(-x+1)=(-x+1)^2=(1-x)^2=(x-1)^2$ que es la factorización del trinomio.

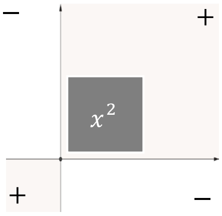
El rectángulo formado por las diferentes componentes de x^2-2x+1, tiene área: $(-x+1)(-x+1)=(-x+1)^2=(1-x)^2=(x-1)^2$ que es la factorización del trinomio.

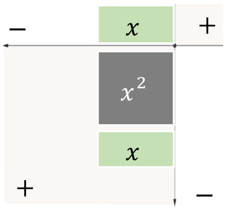
3. Encuadre minimal

La representación rectangular de la factorización de un trinomio, a veces no será posible solamente con la representación de los términos que la componen en el plano cartesiano, luego es necesario sumar y restar cantidades iguales para conseguirlo. Ilustremos este hecho con un ejemplo.

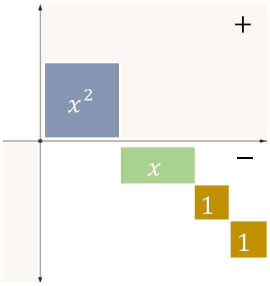
Ejemplo:

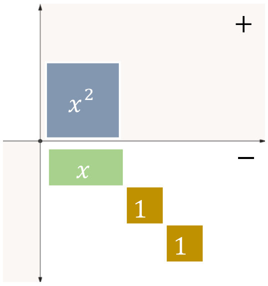
Representemos en el plano cartesiano los términos x^2 y x^2+x-x.

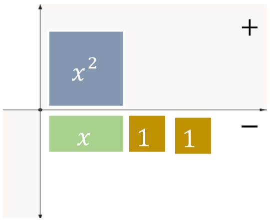




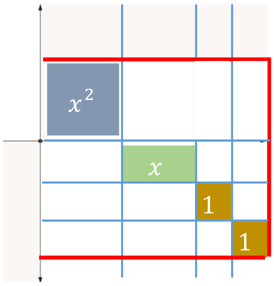
Sea ahora el polinomio x^2-x-2 y para este exhibimos tres diferentes representaciones en el plano cartesiano:



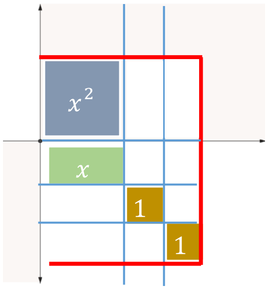




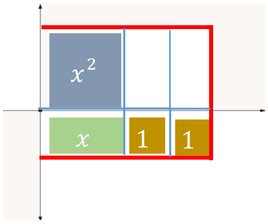
¿Qué diferencias podemos observar? Si bien las tres representaciones son correctas, la que está en izquierda presenta mayor dispersión, mientras que la central y la derecha presentan una menor dispersión. Esto puede ser reformulado así:



La cantidad de fichas en blanco contenidos en el rectángulo rojo es 12.



La cantidad de fichas en blanco contenidos en el rectángulo rojo es 8.



La cantidad de fichas en blanco contenidos en el rectángulo rojo es 2.

El rectángulo de la izquierda requiere 12 espacios para ser completado.

El rectángulo central requiere 8 espacios para ser completado.

El rectángulo de la derecha requiere solamente 2 espacios para ser completado.

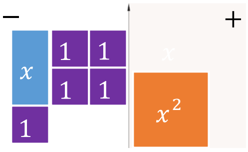
Un encuadre se dice **minimal**, cuando el arreglo rectangular de un polinomio requiere el **menor número** de fichas para ser completado. Como ejemplo, el arreglo

Ejemplo:

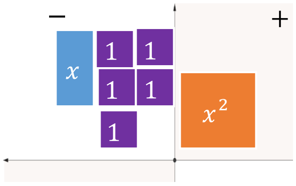
Encuentre un encuadre minimal y no minimal para el trinomio x^2-x-5

Solución

Este encuadre es **minimal**, pues se requieren dos fichas para ser completado:



Este encuadre no es **minimal**, pues se requieren al menos 3 fichas para ser completado:

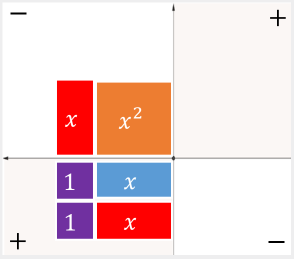


Encuadre minimal viable

Si un encuadre minimal puede completarse con una cantidad de fichas par cuya equivalencia algebraica es nula y completan el ractángulo de un polinomio $p(x)$, este se denomina minimal viable.

Ejemplo:

Un encuadre minimal viable del polinomio $-x^2+x-2$ que se factoriza $(x+2)(-x-1)$



Los rectángulos se cancelan.

Si el rectángulo que representa al trinomio se obtiene a partir de un **encuadre minimal viable**, entonces el trinomio se ha factorizado. El producto de las dimensiones del rectángulo corresponde a la factorización.

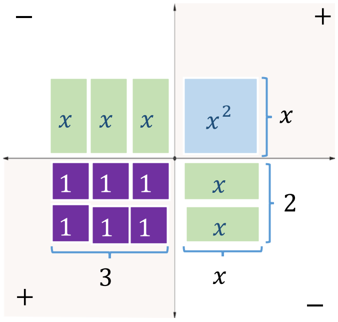
Ejemplo:

Factorizamos x^2-5x+6 y comprobamos lo hecho mostrando su representación en el plano cartesiano.

Solución

①

Ubicamos las fichas en el plano cartesiano tomando en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas



②

La factorización del trinomio es igual al producto de la base por la altura del encuadre minimal:
Area: x^2-5x+6
Base: $-x+3$
Altura: $-x+2$

Si el rectángulo que representa al trinomio se obtiene a partir de un encuadre minimal viable, entonces el trinomio se ha factorizado. El producto de las dimensiones del rectángulo corresponde a la factorización.

Resultado

$$x^2-5x+6=(-x+3)\ (-x+2)$$

Ejemplo:

Dado el encuadre minimal viable del trinomio x^2-2x-3, mostramos gráficamente que su factorización completando fichas es $(x-3)(x+1)$

Solución

Procedamos a completar un posible encuadre minimal viable del trinomio:

Las medidas de dos lados consecutivos del rectángulo son $(x+1)$ y $(x-3)$ y su área es $(x+1)(x-3)$, que corresponde a la factorización de x^2-2x-3.

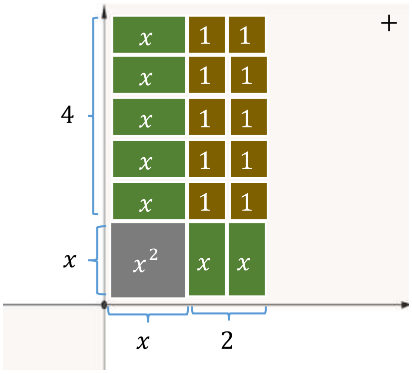
Ejemplo:

Factorizar x^2+6x+8

Solución

①

Ubicamos las fichas en el plano cartesiano tomando en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas



②

La factorización del trinomio es igual al producto de la base por la altura del encuadre minimal:
Area: x^2+6x+8
Base: $x+2$
Altura: $x+4$

Resultado

$$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$$

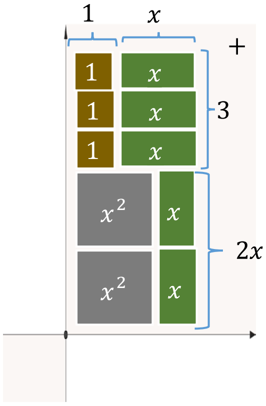
Ejemplo:

Dado el encuadre minimal viable del trinomio x^2-2x-3, mostramos gráficamente que su factorización completando fichas es $(x-3)(x+1)$

Solución

①

Ubicamos las fichas en el plano cartesiano tomando en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas



②

La factorización del trinomio es igual al producto de la base por la altura del encuadre minimal:
Area: $2x^2+5x+3$
Base: $x+1$
Altura: $2x+3$

VALORACIÓN

Aplicaciones de la factorización.

La factorización es una herramienta esencial del álgebra que se utiliza en una variedad de campos.

Economía: Se utiliza en modelos económicos para analizar variables como la oferta y la demanda.

Estadística: En el análisis de datos, la factorización se emplea para simplificar expresiones y realizar cálculos.

Ingeniería: La factorización es esencial en el diseño de estructuras y sistemas, ya que permite analizar y optimizar el comportamiento de los materiales.

Criptografía: La factorización de números enteros grandes es fundamental en algunos sistemas de cifrado.

La factorización es una herramienta útil que se puede utilizar en una amplia gama de circunstancias. Al dominar esta técnica, podrás abordar problemas más complejos en matemáticas y otras disciplinas.

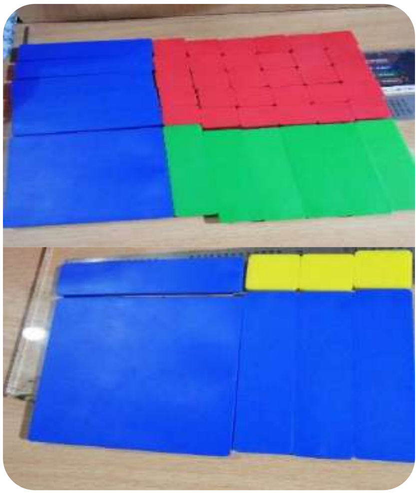
PRODUCCIÓN

Caja de Polinomios

Elaboramos la **Caja de Polinomios** con material reciclado de nuestro entorno, para realizar la interpretación geométrica en la factorización.

Materiales:

- Dos papeles de cartulina tamaño oficio.
- 4 cuadrados de 4 x 4 cm.
- 10 rectángulos de 4 x 2 cm.
- 16 cuadrados de 2 x 2 cm.
- Cinta de embalaje, marcadores de agua, tijeras, estuche geométrico.



FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

PRÁCTICA

Fuente: OpenAi, 2024

El diseño y cálculo de vigas es un aspecto fundamental en la construcción de una vivienda. La ingeniería estructural utiliza modelos matemáticos para garantizar la seguridad y durabilidad de estas estructuras, para una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro, la deflexión máxima (δ) se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\delta = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Donde:

- P: Carga concentrada
- L: Longitud de la viga
- E: Módulo de elasticidad del material
- I: Momento de inercia de la sección transversal

Los aspectos que se deben tomar en cuenta son la combinación de cargas; las vigas suelen estar sometidas a varias cargas simultáneamente (peso propio, cargas vivas, cargas sísmicas, etc.), efectos de segundo orden; en algunos casos, los desplazamientos de la viga pueden modificar la distribución de las cargas, lo que requiere un análisis más detallado y los cálculos deben cumplir con las normas y códigos de construcción vigentes.

Es así que las fracciones algebraicas, al igual que las fracciones numéricas, son una herramienta fundamental en el álgebra y tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos campos.

Actividad

Leemos y debatimos en clase la lectura anterior en base a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el papel fundamental de las fracciones algebraicas en nuestro diario vivir?
- ¿Qué otras aplicabilidades de las fracciones algebraicas puedes mencionar?
- ¿Por qué las fracciones algebraicas son la base para realizar operaciones?
- ¿Cómo el uso de las fracciones algebraicas permite abordar con mayor eficacia situaciones del mundo real?

TEORÍA

Valor numérico

Es el resultado que se obtiene al sustituir los valores de las variables en la fracción por números específicos y luego realizar las operaciones correspondientes.

Ejemplo: *Si tenemos la fracción*

$$\frac{2x-5}{y-3}$$

¿Cuál es su valor cuando $x=4$ *e* $y=-3$*?*

Simplemente reemplazamos en vez de x*, el número* 7 y −3 *en vez de* y.

$$\frac{2x-5}{y-3} = \frac{2\cdot 4-5}{-3-3} = \frac{8-5}{-6}$$

$$= \frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

El valor es $-\frac{1}{2}$

1. Fracción algebraica

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas, cuyo denominador (o divisor) debe ser distinto de cero. A lo largo del capítulo trataremos con fracciones cuyas componentes son polinomios de una y varias variables.

Ejemplo:

$$\frac{x^2y+xy^2}{x+y};\frac{3abx+6cyz}{a^2+b^2+c^2};\frac{3x}{x^2-4}$$

2. Equivalencia de fracciones algebraicas

Para concluir que dos fracciones algebraicas son iguales, es necesario y suficiente que se cumpla el producto en cruz tanto de numeradores como denominadores, es decir:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow A\cdot D = B\cdot C$$

También es válida la amplificación, es decir dada una fracción algebraica, podemos obtener otra equivalente:

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}, B\neq 0, C\neq 0$$

3. El mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (abreviado m.c.m.) de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica más pequeña (de menor grado) que es múltiplo de todas ellas.

a) Mínimo común múltiplo de monomios

El m. c. m de dos o más monomios con coeficientes enteros, es otro monomio cuyo coeficiente es el m.c.m. de todos los coeficientes multiplicado por el producto de todas las variables involucradas con el exponente más grande.

Ejemplo:

Hallar el m.c.m. de $8x^2 yz^3$, $40abc^3$, $27x^4a^3z$

Solución

1. Hallamos el m.c.m. de 8, 40 y 27

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2^3 \qquad 40 = 2^3 \cdot 5 \qquad 27 = 3^3$$

Por tanto, el m.c.m. de 8,40 y 27 es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$

2. De la parte literal de cada monomio, tomamos el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente: $a^3bc^3x^4yz^3$.

3. El m.c.m. de $x^2 yz^3$, $40abc^3$, $27x^4a^3z$ es $1080a^3bc^3x^4yz^3$

b) Mínimo común múltiplo de polinomios

El m.c.m. de dos o más polinomios es el producto de los factores primos, comunes y no comunes, con su mayor exponente (cuando estos no posean factores en común, el m.c.m. será simplemente el producto de ellos).

Ejemplo:

Hallamos el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$3x^2 + 4xy + y^2;\ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

Solución

1. Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$3x^2 + 4xy + y^2 = (3x + y)(x + y)$$
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y)$$

El único factor en común de estos polinomios es $(x + y)$

2. El m.c.m. de los polinomios $3x^2 + 4xy + 3y^2$; $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ es

$$(3x + y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

Recuerda...

*Cuando los coeficientes son enteros, el m.c.m. se interpreta como “**de los múltiplos en común, el más pequeño…**”*

Ejercicio resuelto

Sean ahora los siguientes monomios:

$$7xyz;\ a^2x^4b^3y^3$$

Por la conmutatividad asociatividad del producto, escribimos:

$$81xyz = (81z)(xy)$$
$$a^2x^4b^3y^3 = (ax^3b^3)(xy)$$

Luego escribimos

- $81xyz$ *es un* **múltiplo** *de* $81z$, *pues* xy *es otra expresión algebraica, tal que* $81xyz = (81z)(xy)$.
- $a^2x^4b^3y^3$ *es un* **múltiplo** *de* $ax^3b^3y^2$ *pues* xy *es otra expresión algebraica, tal que* $a^2 x^4b^3y^3 = (ax^3b^3y^2)(xy)$

Más ejercicios

Calculamos el m.c.m. de los siguientes monomios:

$2a^3b^2c^4d;\ 3a^5bcd^3$

El m.c.m. de los coeficientes es 6.

Identificamos que los monomios tienen las variables a,b,c,d elevadas a distintas potencias:

- a^3 *y* a^5: *El m.c.m. es* a^5
- b^2 *y* b: *El m.c.m. es* b^2
- c^4 *y* c^2: *El m.c.m. es* c^4
- d *y* d^3: *El m.c.m. es* d^3

(Se eligen los de mayor exponente por la condición de ser múltiplo en común)

Por tanto, el m.c.m. es:

$$6a^5b^2c^4d^3$$

Ejercicio resuelto

Encontremos el m.c.m. *de los siguientes polinomios:*

$m^2-mn; mn+n^2; m^2-n^2$

Estos polinomios se pueden factorizar utilizando el factor común:

- $m^2-mn=m(m-n)$
- $mn+n^2=n(m+n)$
- $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$

Identificamos que las expresiones tienen los factores m,n, $(m-n)$, $(m+n)$

Por tanto el m.c.m. *es:*

$mn(m-n)(m+n)$

Acerca del m.c.m. de números enteros

En una clase de Educación Física, el Grupo A hace flexiones cada 10 minutos, mientras que el Grupo B hace abdominales cada 15 minutos. La maestra les pregunta: ***"Si ambos grupos comienzan los ejercicios al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo pasará hasta que ambos grupos vuelvan a hacer sus ejercicios al mismo tiempo?"***

La respuesta está en el m.c.m. *de los tiempos 10 y 18 minutos:*

- $10=2\cdot5$
- $18=2\cdot3\cdot3$

Por tanto el m.c.m. *es* $2\cdot3^2\cdot5=90$*, es decir en una hora y media, ambos grupos volverán a realizar sus ejercicios al mismo tiempo.*

Ejemplo:

Hallamos el m.c.m. de $a^4b^3+a^3b^4$; $a^5b^2+a^2b^5$; a^6b+ab^6

Solución

1. Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3\,(a+b)$$
$$a^5b^2+a^2b^5=a^2b^2(a^3+b^3)=a^2b^2(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^6b+ab^6=ab(a^5+b^5\,)=ab(a+b)(a^4-a^3\,b+a^2\,b^2-ab^3+b^4)$$

Resultado

2. El m.c.m. es $a^3b^3\,(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

Ejemplo:

Hallamos el m.c.m. de $2(a^2+ab+b^2)$; $48(a^3-b^3)$

Solución

1. Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

El m.c.m. de 2 y 48 es $2^4=16$.

Factorizando los polinomios:

a^2+ab+b^2 no se puede factorizar.

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ es una diferencia de cubos.

Resultado

2. El m.c.m. es $48(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ejemplo:

Calculamos el m.c.m. de x^3+2bx^2; $x^3\,y-4b^2xy$; $x^2y^2+4bxy^2+4b^2y^2$

Solución

1. Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$x^3+2bx^2=x^2(x+2b);$$
$$x^3y-4b^2xy=xy(x^2-4b^2)=xy(x+2b)(x-2b);$$
$$x^2y^2+4bxy^2+4b^2y^2=y^2(x^2+4bx+4b^2)=y^2(x+2b)^2$$

Resultado

2. El m.c.m. es $x^2\,y^2\,(x+2b)^2\,(x-2b)$

Ejemplo:

Hallar el m.c.m. de "x^2+1" y "$x+3$"

Solución

Los polinomios son irreducibles, por tanto, no presentan factores en común:

Resultado

El m.c.m. es $(x^2+1)(x+3)$

Actividad

Determinamos las expresiones que son m.c.m **de las siguientes:**

1) $x^4-16; x^3-4x$

2) $18x^4y^3z^2$

3) $z^2-z; z^3-z^2$

4) $a^3b^2; a^2bc$

5) $p^2qr; pq^3r^2$

6) $25p^3q^5r^2s; 50p^2q^7r^4s^3$

7) $x^2y+xy^2+1; x^2-y^2$

8) $3a^2x-9a^2; x^2-6x+9$

9) $x^3+2x^2-8x; x^2-4$

4. Máximo Común Divisor

El máximo común divisor (abreviado M.C.D.) de dos o más expresiones algebraicas es el mayor factor común que divide exactamente a cada una de las expresiones dadas.

a) Máximo Común Divisor de monomios

El M.C.D. de dos o más monomios con coeficientes enteros, es otro monomio cuyo coeficiente es el M.C.D. de todos los coeficientes multiplicado por el producto de todas las variables involucradas con el exponente más pequeño.

Ejemplo:

Ahora buscamos el M.C.D. de $8x^2yz^3$, $40xyz^3$, $27x^4y^3z$

Solución

1). Hallamos el M.C.D. de 8, 40 y 27

8	40	27	2
4	20	9	2
2	10	3	2
1	5	1	3
			3
			3
			5

el M. C. D. de 8, 40 y 27 es 1

2). Se toman los factores literales comunes con el menor exponente:

$$xyz$$

3). Por tanto el M.C.D. es:

M.C.D.: $1 \cdot xyx = xyz$

b) Máximo Común Divisor de polinomios

Para determinar el M.C.D. de dos o más polinomios, se descomponen los polinomios dados en sus factores primos (factorizar). El M.C.D. es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplo:

Encontrar el M.C.D. de los polinomios $6x^3+9x^2$ y $3x^2+12x$

Solución

1. Factorizamos los polinomios

$$6x^3+9x^2 = 3x^2\,(2x+3) = (3\cdot x)\cdot x\cdot(2x+3)$$

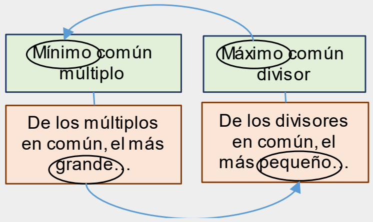
$$3x^2+12x = 3x(x+4) = (3\cdot x)\cdot(x+4)$$

2. Habiendo identificado a los factores comunes con el menor exponente, el máximo común divisor de $6x^3+9x^2$ y $3x^2+12x$ es

$$M.C.D = 3x$$

Dualidad

En matemáticas, la dualidad es un principio que aparece en diversas áreas y consiste en la idea de que muchos conceptos, teoremas o estructuras tienen una forma dual que es igualmente válida, pero que invierte ciertas propiedades o relaciones. En otras palabras, si tenemos una afirmación matemática o estructura, su dual puede obtenerse intercambiando ciertos términos o transformando las relaciones en una manera opuesta, y lo interesante es que esta dualidad suele conservar verdades matemáticas.



Ejercicio resuelto

Para los monomios

$$40p^4\,q^2\,r^3;\ 60p^3\,qr^2$$

las variables en común son p,q,r.

El M.C.D. de 40 y 60 es 20.

- Entre p^4 y p^3, tomamos p^3
- Entre q^2 y q, tomamos q
- Entre r^3 y r^2, tomamos r^2

Luego el M.C.D. es $20p^3qr^2$

Actividad

Determinamos las expresiones que son M.C.D. de las siguientes:

1) $2a^2 + ab; 8a^2 - 8ab$

2) $5x^3y^2z^4w; -x^4y^3z^2w^5$

3) $a^3 - b^3, (a - b)^3$

4) $45p^4q^5r^3; 30p^6q^3r^7$

5) $x^2 - y^2; (x - y)^2$

6) $25p^3q^5r^2s; 50p^2q^7r^4s^3$

7) $x^2y - 3xy^2 + 2x^3y; 2x^3y + 4xy^2 - 6x^2y$

8) $3a^2x - 9a^2; x^2 - 6x + 9$

9) $8x^3y^2 - 4x^2yz + 12xy^3; 16x^2y^2z + 4x^2y - 8x^3yz^2$

Recuerda

El signo de una fracción, puede ir tanto en el numerador, el denominador y al frente de la misma, es decir

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Recordando las propiedades de potenciación de números reales que conocemos, si tenemos una fracción cualquiera $\frac{a}{b}$ *con* $b\neq0$, *se cumple que:*

$$\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$$

Ahora, para el signo negativo que multiplica a la fracción, podemos escribir:

$$-\frac{a}{b}=(-1)\frac{a}{b}=(-1)ab^{-1}$$

Asociando y conmutando:

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{b} &= a\cdot(-1)\cdot b^{-1}\\
&= a\cdot(-1)\cdot b^{-1}\\
&= a\cdot(-1)\cdot b^{-1}\cdot(-1)\cdot(-1)^{-1}\\
\Longrightarrow\quad & a\cdot(-1)\cdot b^{-1}\\
&= (-1)(-1)ab^{-1}(-1)^{-1}\\
&= 1\cdot ab^{-1}\,(-1)^{-1}\\
&= a[b\cdot(-1)]^{-1}\\
&= a(-b)^{-1}=\frac{a}{-b}
\end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Ahora

$$-\frac{a}{b}=(-1)ab^{-1}=(-a)b^{-1}=\frac{-a}{b^{-1}}$$

Por tanto, acabamos de probar que $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$

Así, tenemos una triple igualdad:

$$-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$$

que prueba nuestra afirmación.

5. Simplificación de fracciones

La simplificación de fracciones algebraicas consiste en reducir una fracción que contiene expresiones algebraicas en el numerador y/o en el denominador a su forma más simple, eliminando factores comunes entre ambos. Este proceso es similar a la simplificación de fracciones numéricas, pero involucra términos algebraicos.

Para simplificar una fracción algebraica, se siguen estos pasos:

1). **Factorización**: Se factorizan tanto el numerador como el denominador si es posible. Esto puede incluir la aplicación de técnicas como factor común, factorización de trinomios, diferencia de cuadrados, entre otros.

2). **Cancelación de factores comunes**: Después de la factorización, se cancelan los factores que sean comunes tanto en el numerador como en el denominador.

Ejemplo:

Simplificamos las siguientes fracciones algebraicas así:

a)

$$\frac{x^2-4}{x^2+3x-4}$$

Solución

1). Factorizamos el numerador: $\boldsymbol{x^2-4}$ es una diferencia de cuadrados, así que se puede expresar como $(x-2)(x+2)$.

2). Factorizamos el denominador: x^2+3x-4 es un trinomio que se puede factorizar como $(x-1)(x+4)$.

Así:

$$\frac{x^2-4}{x^2+3x-4}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+4)}$$

Observamos que tanto el numerador como el denominador no tienen factores en común, por tanto, la fracción está en su forma más simple (no es posible simplificarla más).

b)

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$$

Solución

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}$$

El resultado simplificado es $\frac{x-3}{x+3}$

Actividad

Ahora simplificamos las siguientes fracciones algebraicas:

1) $\frac{4x}{8x}$

2) $\frac{7b^3}{14b^2}$

3) $\frac{6y^2}{3y}$

4) $\frac{9x^2y}{3xy}$

5) $\frac{5a^2+10a}{15a}$

6) $\frac{4a^2+8a}{12a}$

7) $\frac{8x^3+4x^2}{4x}$

8) $\frac{10x^2-5x}{5x}$

9) $\frac{12x^2y+6xy^2}{6xy}$

10) $\frac{18a^6b^2-9a^4b^3+6a^3b}{3a^3b}$

11) $\frac{20x^5y^2-40x^3y^3+60x^2y}{20x^2y}$

12) $\frac{9x^4y^2-18x^3y^3+27x^2y}{9x^2y}$

6. Operaciones básicas con fracciones algebraicas

a) Adición y sustracción

Para sumar o restar fracciones se procede de esta forma:
Se halla el denominador común (m.c.m.).
Dicho denominador se divide por el denominador de la primera fracción.
El resultado de la división se multiplica por el numerador de la fracción y así sucesivamente.
Si es posible, se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo:

Sumamos $\frac{x}{2y} + \frac{y}{3x}$

Solución

1). El denominador común (m.c.m.) es el producto $2{\cdot}y{\cdot}3{\cdot}x = 6xy$.

2). Dicho denominador se divide por el denominador de la primera, la segunda y así sucesivamente.

$$\frac{6xy}{2y} = 3x \Longrightarrow 3x\cdot x = 3x^2, \frac{6xy}{3x} = 2y \Longrightarrow 2y\cdot y = 2y^2$$

(Observe que $3x^2 = 3x\cdot x = \frac{6xy}{2y}\cdot x \Longrightarrow \frac{x}{2y} = \frac{3x^2}{6xy}$ y también que

$2y^2 = 2y\cdot y = \frac{6xy}{3x}\cdot y \Longrightarrow \frac{y}{3x} = \frac{2y^2}{6xy}$

3). Reescribimos la fracción, que ahora es homogénea:

$$\frac{x}{2y} + \frac{y}{3x} = \frac{3x^2}{6xy} + \frac{2y^2}{6xy} = \frac{3x^2 + 2y^2}{6xy}$$

Resultado

$$\frac{x}{2y} + \frac{y}{3x} = \frac{3x^2 + 2y^2}{6xy}$$

Ejemplo:

Sumamos $\frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$

1). El denominador común (m.c.m.) de las fracciones se obtiene factorizando los denominadores:

$$m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) \Longrightarrow \text{m.c.m.: } (m-n)(m+n)$$

2). Dicho denominador se divide por el denominador de la primera, la segunda y así sucesivamente.

$$\frac{(m-n)(m+n)}{(m-n)} = m+n \Longrightarrow (m+n)(m+n) = (m+n)^2$$

$$\frac{(m-n)(m+n)}{m^2-n^2} = 1 \Longrightarrow 1\cdot(m^2+n^2)$$

3). Reescribimos la fracción, que ahora es homogénea:

$$\frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)(m+n)} - \frac{m^2+n^2}{(m-n)(m+n)} = \frac{m^2 + (m+n)^2 + n^2}{(m-n)(m+n)}$$

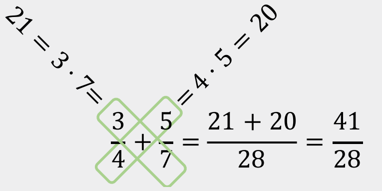
Resultado

$$\frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} = \frac{m^2 + (m+n)^2 + n^2}{(m-n)(m+n)}$$

Método de la mariposa

Se trata de un recurso visual para realizar operaciones de suma y resta de dos fracciones. Con este método se emplea la multiplicación diagonal y horizontal de los denominadores y los numeradores, así como las multiplicaciones de los denominadores para calcular la suma o resta de una manera visual.

Ejemplo:



$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{21+20}{28} = \frac{41}{28}$$

Nota

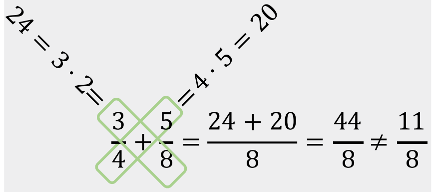
El método funciona solamente cuando los denominadores son primos entre sí (coprimos), es decir si su M.C.D. es igual a 1.

Ejemplo:

Utilizando el método de la mariposa, efectuar

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

Solución



$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{24+20}{8} = \frac{44}{8} \neq \frac{11}{8}$$

Aquí, 4 y 8 no son primos relativos, pues su máximo común divisor es $4 \neq 1$.

Ejemplo:

Sumamos
$$\frac{cy}{cy-y^2}-\frac{c+y}{cy}-\frac{y}{c^2-cy}$$

Solución

1). El denominador común (m.c.m.) de las fracciones se obtiene factorizando los denominadores:

$$cy-y^2=y(c-y);\ c^2-cy=c(c-y)$$

Los factores en común son: $c, y, (c-y)$. Luego el m.c.m. es $cy(c-y)$

2). Dicho denominador se divide por el denominador de la primera, la segunda y así sucesivamente.

$$\frac{cy(c-y)}{cy-y^2}=\frac{cy(c-y)}{y(c-y)}=c;\frac{cy(c-y)}{cy}=c-y;\frac{cy(c-y)}{c^2-cy}=\frac{cy(c-y)}{c\,(c-y)}=y$$

3). Multiplicamos los productos obtenidos con sus respectivos numeradores, respetando los signos correspondientes

$$\frac{cy}{cy-y^2}-\frac{c+y}{cy}-\frac{y}{c^2-cy}=\frac{cy(c)-c(c+y)(c-y)-y\cdot y}{cy(c-y)}=\frac{c^2y-c^2-cy-y^2}{cy(c-y)}$$

Interpretación

La interpretación de la multiplicación de fracciones algebraicas puede variar según el contexto y la situación específica. Sin embargo, en general, puede verse como la combinación de dos ***proporciones*** *o* ***relaciones*** *entre cantidades. Cada fracción algebraica representa una relación entre variables o expresiones algebraicas, y al multiplicarlas, estás combinando estas relaciones para obtener una nueva relación.*

b) Multiplicación

El producto de dos fracciones algebraicas se obtiene multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. El resultado es otra fracción cuyo numerador y denominador es el producto de los numeradores y el producto de los denominadores de las fracciones dadas, respectivamente.

Pasos para su realización

1). Se descomponen en factores las expresiones algebraicas en el numerador y denominador
2). Se simplifican los factores comunes en el numerador y denominador.
3). Se multiplican los factores restantes.

Ejemplo:

Multipliquemos los siguientes pares y ternas de fracciones algebraicas:

a)
$$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{5x}{4y}$$

Solución

$$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{5x}{4y}=\frac{2x\cdot 5x}{3y\cdot 2\cdot 2y}=\frac{x\cdot 5\cdot x}{3y\cdot 2\cdot y}=\frac{5x^2}{6y^2}$$

Resultado

$$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{5x}{4y}=\frac{5x^2}{6y^2}$$

Actividad

Ahora es nuestro turno de sumar fracciones algebraicas:

1) $\frac{2a}{3b}+\frac{5a}{4b}$

2) $\frac{3x}{y^2}+\frac{2y}{x^2}$

3) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{x}$

4) $\frac{3x}{y+2}+\frac{5x}{y+2}$

5) $\frac{a^2+b}{c^3}+\frac{b^2+c}{a^2}$

6) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$

7) $\frac{4a^2}{5bc}+\frac{6b^2}{7ac}$

8) $\frac{x^2}{y+1}+\frac{y^2}{y+1}+\frac{2xy}{y+1}$

9) $\frac{2a^3+b^2}{c^2-1}+\frac{a^2+c}{c+1}$

10) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{x-2}{x+1}+\frac{x^2+4x+5}{x-1}$

11) $\frac{a^2+b}{c^2}+\frac{b^2+c}{a^2}+\frac{c^2+a}{b^2}$

12) $\frac{a^2-b}{b^2-c}+\frac{b^2-c}{a^2-b}+\frac{a^2-c^2}{b^2-a^2}$

b)

$$\frac{5x}{7y}\cdot\frac{4a}{5b}$$

Solución

$$\frac{5x}{7y}\cdot\frac{4a}{5b}=\frac{5\cdot 4\cdot x\cdot a}{5\cdot 7\cdot b\cdot y}=\frac{4ax}{7by}$$

Resultado

$$\frac{5x}{7y}\cdot\frac{4a}{5b}=\frac{4ax}{7by}$$

c) Efectuamos el siguiente producto de tres fracciones algebraicas

$$\frac{2a^2b^3c}{3xy^2}\cdot\frac{5x^3yz}{4a^2b}\cdot\frac{6ab^2c}{5y^2z^2}$$

Solución

$$\frac{2a^2b^3c}{3xy^2}\cdot\frac{5x^3yz}{4a^2b}\cdot\frac{6ab^2c}{5y^2z^2}=\frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot a^3\cdot b^5\cdot c^2\cdot x^3\cdot y\cdot z}{3\cdot 4\cdot 5\cdot a^2\cdot b\cdot x\cdot y^4\cdot z^2}$$

Simplificando coeficientes nos queda:

$$\frac{a^3\cdot b^5\cdot c^2\cdot x^3\cdot y\cdot z}{a^2\cdot b\cdot x\cdot y^4\cdot z^2}=\frac{ab^4c^2x^2z}{y^3z}$$

sin olvidar simplificar la parte literal.

Resultado

$$\frac{2a^2b^3c}{3xy^2}\cdot\frac{5x^3yz}{4a^2b}\cdot\frac{6ab^2c}{5y^2z^2}=\frac{ab^4c^2x^2z}{y^3z}$$

c) Efectuamos el siguiente producto de tres fracciones algebraicas

$$\frac{z^2-6z+9}{3};\frac{6}{z^3-27};\frac{1}{2z-6}$$

Solución

Factorizamos los polinomios de las expresiones, tanto como sea posible:

$$\frac{z^2-6z+9}{3}\cdot\frac{6}{z^3-27}\cdot\frac{1}{2z-6}=\frac{(z-3)^2}{3}\cdot\frac{6}{(z-3)(z^2+3z+9)}\cdot\frac{1}{2(z-3)}$$

Multiplicando numeradores y denominadores:

$$\frac{(z-3)^2}{3}\cdot\frac{6}{(z-3)(z^2+3z+9)}\cdot\frac{1}{2(z-3)}=\frac{1\cdot 6\cdot(z-3)^2}{2\cdot 3\cdot(z-3)^2(z^2+3z+9)}$$

Simplificando:

$$\frac{z^2-6z+9}{3}\cdot\frac{6}{z^3-27}\cdot\frac{1}{2z-6}=\frac{1\cdot 6\cdot(z-3)^2}{2\cdot 3\cdot(z-3)^2(z^2+3z+9)}=\frac{1}{z^2+3z+9}$$

Ejercicio resuelto

Si tenemos la igualdad

$$\frac{2}{x+2}+\frac{5}{x+3}=\frac{ax+b}{(x+2)(x+3)}$$

Encontrar los valores de a y b.

Solución

Efectuamos la suma del lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{2}{x+2}+\frac{5}{x+3}=\frac{2(x+3)+5(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{2x+6+5x+10}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{7x+16}{(x+2)(x+3)}$$

Por la igualdad, tenemos

$$\frac{ax+b}{(x+2)(x+3)}=\frac{7x+16}{(x+2)(x+3)}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $(x+3)(x+2)$

$$ax+b=7x+16$$

Por igualdad de polinomios:

$a=7$ y $b=16$.

Simplificar...

$$\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-1}\right](x+1)$$

Solución

Por la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x+1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Simplificando:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x+1-2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$$

El resultado es 1.

Actividad

Ahora es nuestro turno de multiplicar las siguientes fracciones algebraicas:

1) $\frac{2x^2+x}{6}\cdot\frac{8}{4x+2}$

2) $\frac{m+n}{mn+n^2}\cdot\frac{n^2}{m^3+n^3}$

3) $\frac{2a-2}{2a^2-50}\cdot\frac{a^2-4a-5}{3a+3}$

4) $\frac{x^2-1}{2x^2}\cdot\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}$

5) $\frac{x^{3a}y^{3b}z^{3c}}{abc}\cdot\frac{x^{3a}+x^{3b}+x^{3c}}{a+b+c}$

6) $\frac{2a-2}{2a^2-50}\cdot\frac{a^2-4a-5}{3a+3}$

Simplificar...

$$[x-xy(x+y)^{-1}]\left[\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}\right]^{-1}$$

Solución

Primero es conveniente convertir la potencia -1:

$$(x+y)^{-1}=\frac{1}{x+y};$$

$$\left(\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}\right)^{-1}=\frac{x^2-y^2}{x^3-x^2y}$$

El ejercicio queda:

$$[x-xy(x+y)^{-1}]\left[\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}\right]^{-1}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x+y}\right)\frac{x^2-y^2}{x^3-x^2y}$$

Factorizando y simplificando:

$$=\left(x-\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{x^2(x-y)}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{(x+y)}{x^2}$$

Por propiedad distributiva:

$$=\frac{x(x+y)}{x^2}-\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y}{x^2}$$

$$=\frac{x+y}{x}-\frac{1}{x^2}$$

El resultado es $\frac{x+y}{x}-\frac{1}{x^2}$

c) División

El cociente de dos fracciones algebraicas es equivalente al producto de una de ellas por el inverso multiplicativo de la otra, siempre que la otra sea no nula.

Ejemplo:

1). Efectuamos la división de las siguientes fracciones:

$$\frac{8a^2}{6b^2};\frac{16ax}{81b^3}$$

Solución

Encontramos el inverso multiplicativo de $\frac{16ax}{81b^3}$:

Ahora la división se convierte en una multiplicación de fracciones algebraicas:

$$\frac{8a^2}{6b^2}\div\frac{16ax}{81b^3}=\frac{8a^2}{6b^2}\cdot\frac{81b^3}{16ax}=\frac{8\cdot 81\cdot a^2\cdot b^3}{6\cdot 16\cdot a\cdot b^2\cdot x}=\frac{81ab}{12x}$$

Resultado

$$\frac{8a^2}{6b^2}\div\frac{16ax}{81b^3}=\frac{81ab}{12x}$$

2). Dividimos las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-9}{x+3}\div\frac{x-3}{x^2-6x+9}$$

Solución

Encontramos el inverso multiplicativo de $\frac{x-3}{x^2-6x+9}$:

$$\left(\frac{x-3}{x^2-6x+9}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{x-3}{x^2-6x+9}}=\frac{x^2-6x+9}{x-3}$$

Ahora la división se convierte en una multiplicación de fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-9}{x+3}\div\frac{x-3}{x^2-6x+9}=\frac{x^2-9}{x+3}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x-3}$$

Factorizando y simplificando:

$$\frac{x^2-9}{x+3}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x+3}\cdot\frac{(x-3)^2}{(x-3)}=\frac{(x-3)(x+3)(x-3)^2}{(x+3)(x-3)}=(x-3)^2$$

3). Dividimos $\frac{2x^2y-8xy}{3x}$ entre $\frac{4xy-12y}{x-3}$

Solución

$$\frac{2x^2y-8xy}{3x}\div\frac{4xy-12y}{x-3}=\frac{2x^2y-8xy}{3x}\cdot\frac{x-3}{4xy-12y}$$

$$=\frac{2xy(x-4)}{3x}\cdot\frac{x-3}{4y(x-3)}=\frac{(x-4)(x-3)}{6}$$

Actividad

Ahora es nuestro turno de dividir las siguientes fracciones algebraicas:

1) $\frac{6x^2}{3x}\div\frac{2x}{4}$

2) $\frac{8b}{4}\div\frac{2b}{3}$

3) $\frac{4a^2}{2a}\div\frac{2a}{3}$

4) $\frac{2x^2+3x}{x}\div\frac{x+1}{x^2}$

5) $\frac{3a^2b+4ab^2}{2ab}\div\frac{a+b}{3b}$

6) $\frac{6x^2y^2-3xy}{3xy}\div\frac{2x-y}{4x}$

7) $\frac{4m^2n-2mn^2}{2mn}\div\frac{2m-n}{3}$

8) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2}\div\frac{x-1}{x^3}$

d) Fracciones complejas

Una **fracción compleja** es aquella fracción cuyo numerador o denominador o ambos son fracciones algebraicas o expresiones mixtas.

Para simplificarlas usualmente se siguen estos pasos:

1). Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y denominador de la fracción compleja.

2). Se divide el resultado que se obtenga en el numerador entre el resultado que se obtenga en el denominador.

Ejemplo:

a) Simplificamos la siguiente fracción compleja:

$$\frac{\frac{y^2}{b}+\frac{b}{y^2}}{1-\frac{b}{y}}$$

Solución

$$\frac{\frac{y}{b}+\frac{b}{y^2}}{1+\frac{b}{y}}=\frac{\frac{y^3+b^3}{by^2}}{\frac{y+b}{y}}=\frac{y(y^3+b^3)}{by^2(y+b)}=\frac{y^3+b^3}{by(y+b)}=\frac{(y+b)(y^2-by+b^2)}{by(y+b)}$$

$$=\frac{y^2-by+b^2}{by}$$

b) Reducimos a la mínima expresión la siguiente fracción compleja:

$$\frac{\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x^2+x}}{\frac{4}{x^4-1}+\frac{5}{x^2+4x}}$$

Ejercicio resuelto

Damián le pide ayuda a su hermano para simplificar la siguiente fracción compleja:

$$\frac{x+2-\frac{3}{x+4}}{\frac{x}{x+4}+\frac{1}{x+4}}$$

Solución

Sacando el común denominador:

$$\frac{x+2-\frac{3}{x+4}}{\frac{x}{x+4}+\frac{1}{x+4}}=\frac{x+2-\frac{3}{x+4}}{\frac{x}{x+4}+\frac{1}{x+4}}=\frac{\frac{x^2+2x+4x+8-3}{x+4}}{\frac{x+1}{x+4}}$$

$$=\frac{\frac{x^2+6x+5}{x+4}}{\frac{x+1}{x+4}}$$

Factorizando x^2+6x+8

$$=\frac{\frac{(x+5)(x+1)}{x+4}}{\frac{x+1}{x+4}}$$

$$=\frac{(x+5)(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+4)}$$

Simplificando:

$$=\frac{(x+5)(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+4)}$$

$$=x+5$$

La fracción compleja simplificada es:

$$x+5$$

Solución

El numerador es $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x^2+x}$ Aquí entran muchas propiedades de factorización:

$$\frac{\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x-2}{x^2+x}}{\frac{4}{x^4-1}+\frac{5}{x+1}}=\frac{\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}+\frac{3x-2}{x(x+1)}}{\frac{4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}+\frac{5}{x+1}}=\frac{\frac{x(2x+3)+(3x-2)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}}{\frac{4+5(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}$$

$$=\frac{\frac{2x^2+3x+3x^2-3x-2x+2}{x(x+1)(x-1)}}{\frac{4+5(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}=\frac{\frac{5x^2-2x+2}{x(x+1)(x-1)}}{\frac{4+5(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}$$

$$=\frac{(5x^2-2x+2)(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)[4+5(x-1)(x^2+1)]}=\frac{(5x^2-2x+2)(x^2+1)}{x[4+5(x-1)(x^2+1)]}$$

El resultado simplificado es $\frac{(5x^2-2x+2)(x^2+1)}{x[4+5(x-1)(x^2+1)]}$

Actividad

Ahora es nuestro turno de simplificar las siguientes fracciones complejas:

1) $\frac{\frac{x^2-4}{x^2+2x}}{\frac{2x^2}{x+2}}$ **2)** $\frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{-4}{x^2-1}}$ **3)** $\frac{\frac{2x+5}{x^2-3x+2}}{\frac{x^3-x^2+2x-1}{x^2+4x+4}-\frac{2x+1}{x^2-4}}$ **4)** $\frac{\frac{3a}{a^2+1}}{\frac{5a-2}{a^2+3a+2}}$ **5)** $\frac{\frac{4z}{z+2}+\frac{x+1}{x^2-4}}{\frac{3z-1}{z^2+5z+6}+\frac{2}{z+3}}$

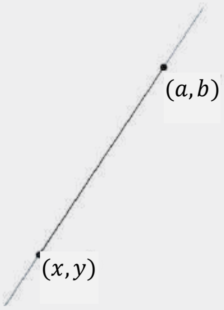
Fracciones algebraicas y geometría analítica

En geometría analítica, las fracciones y expresiones algebraicas aparecen a menudo. He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo:

a) *La pendiente* m *entre dos puntos* (x,y) *y* (a,b) *viene dada por la fracción algebraica;*

$$m = \frac{b-y}{a-x}$$



b) *Las ecuaciones de las secciones cónicas, vienen dadas por sumas, restas de fracciones algebraicas:*

- *Ecuación de la circunferencia*

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{r}^2$$

- *Ecuación de la elipse*

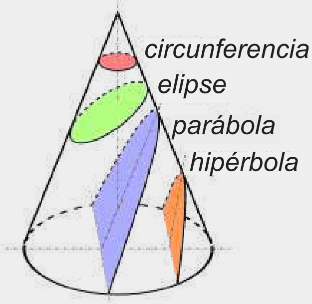
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- *Ecuación de la parábola*

$$y = ax^2 + bx + c$$

- *Ecuación de la parábola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/11/Conic_Sections.svg/lang-es-330px-Conic_Sections.svg.png

6. Operaciones combinadas

a) Adición y sustracción

La adición y sustracción combinadas de fracciones algebraicas sigue una serie de pasos similares a la regla básica de suma y resta de fracciones numéricas.

Ejemplo:

1). Simplificamos

$$\frac{1}{x^2-xy} + \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{x^3y-xy^3}$$

Solución

Factorizamos donde sea posible:

$$\frac{1}{x^2-xy} + \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{x^3y-xy^3} = \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{xy(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy(x-y)(x+y)}$$

El m.c.m. es $xy(x-y)(x+y)$, luego dividimos el m.c.m. entre cada uno de los denominadores de los términos y multiplicamos los resultados por sus respectivos denominadores:

$$\frac{1}{x^2-xy} + \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{x^3y-xy^3} = \frac{y(x+y)+(x-y)(x+y)-(x^2+y^2)}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{xy+y^2+x^2-y^2-x^2-y^2}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{xy-y^2}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{y(x-y)}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{1}{x(x+y)}$$

Resultado

$$\frac{1}{x^2-xy} + \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{x^3y-xy^3} = \frac{1}{x(x+y)}$$

2). Efectuar operaciones para simplificar la siguiente fracción combinada:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4}$$

Solución

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-2+x+2-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

Resultado

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{2(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

b) Multiplicación y división combinadas

Como en el caso anterior, procedemos a llevar cada división a un producto de fracciones algebraicas, para finalmente multiplicarlas en conjunto, simplificando y reduciendo términos semejantes cuando sea posible.

Ejemplo:

Vamos a simplificar el producto y división de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{z-3}{4z-4}\cdot\frac{z^2-9z+18}{z^2-6z+9}\div\frac{z^2-36}{2z^2-2z}$$

Solución

El inverso multiplicativo de $\frac{z^2-16}{2z^2-2z}$ es $\frac{2z^2-2z}{z^2-16}$

$$\frac{z-3}{4z-4}\cdot\frac{z^2-9z+18}{z^2-6z+9}\div\frac{z^2-16}{2z^2-2z}=\frac{z-3}{4z-4}\cdot\frac{z^2-9z+18}{z^2-6z+9}\cdot\frac{2z^2-2z}{z^2-16}$$

Factorizando y simplificando:

$$\frac{z-3}{4z-4}\cdot\frac{z^2-9z+18}{z^2-6z+9}\cdot\frac{2z^2-2z}{z^2-16}=\frac{z-3}{4(z-1)}\cdot\frac{(z-3)(z-6)}{(z-3)^2}\cdot\frac{2z(z-1)}{(z+6)(z-6)}$$

Conmutando y ordenando:

$$=\frac{2z(z-1)(z-3)^2(z-6)}{4(z-1)(z-3)^2(z+6)(z-6)}=\frac{z}{2(z-6)}$$

Resultado

$$\frac{z-3}{4z-4}\cdot\frac{z^2-9z+18}{z^2-6z+9}\div\frac{z^2-36}{2z^2-2z}=\frac{z}{2(z-6)}$$

Ejemplo:

Simplificamos:

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}\div\frac{1}{\frac{z}{(x-z)(x+z)}}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\div\frac{1}{\frac{(x-y)(x+y)}{y+z}}$$

Solución

Primero efectuamos operaciones conocidas:

$$\frac{1}{\frac{z}{(x-z)(x+z)}}=\frac{(x-z)(x+z)}{z};\quad\frac{1}{\frac{(x-y)(x+y)}{y+z}}=\frac{y+z}{(x-y)(x+y)}$$

Así, tenemos

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}\div\frac{1}{\frac{z}{(x-z)(x+z)}}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\div\frac{1}{\frac{(x-y)(x+y)}{y+z}}=$$

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}\cdot\frac{(x-z)(x+z)}{z}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\cdot\frac{y+z}{(x-y)(x+y)}=$$

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}\cdot\frac{z}{(x-z)(x+z)}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{y+z}$$

Factorizando

$$=\frac{x^2-z^2}{y+z}\cdot\frac{z}{x^2-z^2}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{y+z}=\frac{z^2}{(y+z)^2}=\left(\frac{z}{z+y}\right)^2$$

Resultado

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}\div\frac{1}{\frac{z}{(x-z)(x+z)}}\cdot\frac{z}{x^2-y^2}\div\frac{1}{\frac{(x-y)(x+y)}{y+z}}=\left(\frac{z}{z+y}\right)^2$$

Recuerda

Al realizar las operaciones, estos consejos podrían ser de ayuda:

***Encuentra un común denominador**: Antes de sumar o restar fracciones algebraicas, asegúrate de que todas las fracciones tengan el mismo denominador.*

***Factoriza y simplifica**: Factoriza los polinomios en los numeradores y denominadores y simplifica cuando sea posible. Esto puede reducir la complejidad de las fracciones antes de realizar las operaciones.*

***Usa paréntesis**: Para evitar errores, coloca paréntesis alrededor de cada fracción antes de sumar o restar.*

***Ten cuidado con los signos**: Presta mucha atención a los signos de las fracciones. Es fácil cometer errores al aplicar signos negativos o positivos, así que asegúrate de aplicar los signos correctamente en cada término de la expresión.*

***Factoriza el resultado final**: Después de realizar las operaciones de suma y resta, factoriza el resultado final y simplifica si es posible. Esto puede ayudarte a expresar la fracción de la manera más simple posible.*

Ejercicio resuelto

Hallar E, donde

$$E=\frac{(x^2-4)}{(x+2)}\cdot\frac{x+3}{x^2-9}\div\frac{x^2-1}{x+3}$$

Solución

$$E=\frac{(x^2-4)}{(x+2)}\cdot\frac{x+3}{x^2-9}\cdot\frac{x-3}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}\cdot\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}$$

Simplificando:

$$E=\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$$

Actividad

Ahora es nuestro turno de simplificar las siguientes multiplicaciones y divisiones combinadas:

1) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}$

2) $\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}$

3) $\frac{x}{y}\div\frac{y}{z}$

4) $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}$

5) $\frac{a}{2b}\cdot\frac{3b}{c}$

6) $\frac{x^2-1}{x+1}\cdot\frac{y+3}{y^2-9}$

7) $\frac{a^2+ab}{b(a+b)}\div\frac{ab}{b^2}$

8) $\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{2x}{x^2-x}$

9) $\frac{m^2-4}{m+2}\div\frac{m-2}{m^2-4m}$

10) $\frac{p^2-q^2}{p-q}\cdot\frac{r^2-s^2}{r-s}$

11) $\frac{m^4-16}{m^2-4}\div\frac{m^3-8}{m-2}\cdot\frac{m^2+4}{m+2}$

12) $\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}\cdot\frac{y^2-1}{y-1}\div\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}$

c) Descomposición en fracciones parciales

Es un proceso matemático que consiste en expresar una fracción como la suma de varias fracciones más simples (irreducibles), llamadas también fracciones parciales. Este proceso es útil en diversas áreas de la matemática, como el cálculo y el álgebra, así como en la resolución de ecuaciones racionales.

Ejemplo:

Hallamos para la siguiente fracción, su descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{5}{(y-7)(y+11)}$$

Solución

La cuestión es encontrar dos fracciones, cuya suma sea $\frac{5}{(y-7)(y+11)}$

Las planteamos como $\frac{A}{(y-7)}$ y $\frac{B}{(y+11)}$ donde A y B son incógnitas a encontrar.
Observamos que el m.c.m. es $(y-7)(y+11)$.
Desarrollamos la suma:

$$\frac{A}{y-7}+\frac{B}{y+11}=\frac{A(y+11)+B(y-7)}{(y-7)(y+11)}$$

La condición es una igualdad:

$$\frac{5}{(y-7)(y+11)}=\frac{A(y+11)+B(y-7)}{(y-7)(y+11)}\Rightarrow 5=A(y+11)+B(y-7)$$

El objetivo es encontrar los valores de A y B, sujetas a la condición

$$5=A(y+11)+B(y-7)$$

Si hacemos $y=7, 5=A(y+11)+B(7-7)\Rightarrow 5=18A$
Podemos despejar A, obteniendo:

$$A=\frac{5}{18}$$

Si hacemos $y=-11, 5=A(-11+11)+B(-11-7)\Rightarrow 5=-18B$
Podemos despejar B, obteniendo:

$$B=-\frac{5}{18}$$

Por lo tanto, las fracciones buscadas son $\frac{\frac{5}{18}}{y-7}$ y $\frac{-\frac{5}{18}}{y+11}$ cuya suma es

$$\frac{\frac{5}{18}}{y-7}+\frac{-\frac{5}{18}}{y+11}=\frac{5}{(y-7)(y+11)}$$

Importante

La descomposición de una fracción en fracciones simples se utiliza en varios contextos matemáticos y científicos para resolver problemas que involucran fracciones algebraicas. Aquí hay algunas áreas y situaciones donde se aplica esta técnica:

- *Cálculo integral.*
- *Teoría de control.*
- *Resolución de ecuaciones Diferenciales.*
- *Análisis de circuitos eléctricos.*
- *Teoría de probabilidad.*
- *Finanzas.*
- *Química.*
- *Economía.*

Estos son solo algunos ejemplos de dónde se utiliza la descomposición de fracciones en fracciones simples en diversos campos.

Es una herramienta matemática esencial para resolver problemas en los que se manejan fracciones algebraicas y transformaciones de Laplace, además de su utilidad en la resolución de integrales fraccionarias.

Sistema de ecuaciones

Retomando el ejemplo, tenemos

$$5=A(y+11)+B(y-7)$$
$$\Rightarrow\ 0x+5=(A+B)y+(-11A+7B)$$

Igualando, se obtiene un ***Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas****:*

$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{5}{18}\\B=-\frac{5}{18}\end{cases}$$

d) Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

Cuando los matemáticos introdujeron el álgebra y los polinomios, no pensaban que podrían ser herramientas muy útiles para la resolución de infinidad de problemas.

Ejemplo:

1). Supongamos que se tiene $\frac{3}{x}$ de una caja de galletas y queremos repartirla entre 4 amigos, ¿cuántas galletas recibirá cada amigo?

Solución

Para repartir las galletas igualmente entre los 4 amigos, simplemente se divide la cantidad total de galletas $\frac{3}{x}$ entre el número de amigos:

$$\frac{\frac{3}{x}}{4}=\frac{3}{4x}$$

Respuesta

Cada amigo recibirá $\frac{3}{4x}$ galletas.

2). Un tanque de agua se llena a una velocidad de $\frac{5}{2x}$ litros por minuto y otro tanque se llena a una velocidad de $\frac{3}{x}$ litros por minuto. Si el primer tanque tiene una capacidad de a litros y el segundo b litros, ¿cuál es el tiempo total de llenado de los tanques?

Solución

Para encontrar el tiempo en que el primer tanque estará lleno, por regla de tres simple:

$$\begin{tikzcd}
\text{L} & \text{min} \\
\frac{5}{2x} \arrow[r] & 1 \\
a \arrow[r] \arrow[ur] & X
\end{tikzcd}$$

obtenemos el valor de X, que es el tiempo en que se llena el primer tanque:

$$X=\frac{a\cdot 1}{\frac{5}{2x}}=\frac{2ax}{5}$$

Para encontrar el tiempo en que el segundo tanque estará lleno, por regla de tres simple:

$$\begin{tikzcd}
\text{L} & \text{min} \\
\frac{3}{x} \arrow[r] & 1 \\
b \arrow[r] \arrow[ur] & Y
\end{tikzcd}$$

obtenemos el valor de Y, que es el tiempo en que se llena el segundo tanque:

Respuesta El tiempo en minutos acumulado de llenado de ambos tanques es $X+Y=\frac{2ax}{5}+\frac{bx}{3}$

3). Para hacer un color de pintura específico, se mezcla $\frac{x}{3}$ litros de pintura azul y $\frac{2x}{5}$ litros de pintura roja, ¿cuál es la fracción resultante de pintura violeta?

Solución

La fracción resultante de pintura violeta es la suma de las fracciones de pintura azul y roja:

Para pensar

Supongamos que s satisface

$$s=\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{\vdots}}}}}$$

Notemos que la expresión encuadrada coincide con s*:*

$$s=\cfrac{3}{1+\boxed{\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{\vdots}}}}}}$$

Luego

$$s=\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{\vdots}}}}}=\frac{3}{2+s}$$

Igualando y despejando

$$s=\frac{3}{s+2}$$

obtenemos el trinomio:

$$s^2+2s-3=0$$

Los valores de s *que cumplen la igualdad son* -3 *y* 1.

Verificación

$$(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$$

$$1^2+2\cdot 1-3=0$$

Ahora si $E=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots}}}}$

, obtenemos:

$$E=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots}}}}=\frac{1}{1+E}$$

Multiplicando por $1+E$:

$$E^2+E-1=0$$

El valor del discriminante es:

$$1^2-4\cdot 1(-1)=5$$

de modo que, los valores de E son

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Para pensar

¿Cuál es el valor de

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}$$

sabiendo que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0?$$

Solución

$$A=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}$$

Por la propiedad conmutativa y asociativa:

$$A=\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)$$

Balanceamos la ecuación, sumando 3 a cada lado:

$$A+3=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)+3$$

$$\Longrightarrow A+3=$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)+1+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+1$$

$$+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)+1$$

Como $1=\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$

Reemplazamos, asociando y factorizando al mismo tiempo:

$$A+3=$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{x}\right)$$

$$+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{z}\right)$$

$$=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=(x+y+z)\cdot 0=0$$

Luego $A+3=0$ y por tanto $A=-3$, es decir:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}=-3$$

Fracción de pintura violeta $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}=\frac{x\cdot 5+2x\cdot 3}{15}=\frac{5x+6x}{15}=\frac{11x}{15}$

Respuesta La fracción resultante de pintura violeta es $\frac{11x}{15}$.

4). Para hacer un tipo de jugo tropical, se mezclan $\frac{a}{4}$ litros de jugo de piña, $\frac{3b}{7}$ litros de jugo de naranja y $\frac{2c}{5}$ litros de agua, ¿cuál es la fracción total de jugo tropical resultante en función de a, b y c?

Solución

El total de litros de jugo es:

$$\frac{a}{4}+\frac{3b}{7}+\frac{2c}{5}=\frac{35a+60b+56c}{140}$$

Respuesta

El total es $\frac{35a+60b+56c}{140}$

5). Para hacer un jarabe medicinal, se mezclan $\frac{y-1}{\frac{4}{a+2}}$ litros de extracto de hierbas, $\frac{x+1}{\frac{5}{3b-2}}$ litros de agua purificada y $\frac{y+3}{\frac{6}{2x}}$ litros de azúcar líquida, ¿cuál es la fracción total del jarabe resultante?

Solución

El total de litros de jarabe es:

$$\frac{y-1}{\frac{4}{a+2}}+\frac{x+1}{\frac{5}{3b-2}}+\frac{y+3}{\frac{6}{2x}}=\frac{(a+2)(y-1)}{4}+\frac{(3b-2)(x+1)}{5}+\frac{x(y+3)}{3}$$

Respuesta La fracción total resultante es:

$$\frac{15(a+2)(y-1)+12(3b-2)(x+1)+20x(y+3)}{60}$$

6) Una superficie rectangular tiene una superficie dada por la fracción algebraica $\frac{3}{(a-3)(a-4)}$ y cuyos lados vienen dados por $\frac{A}{a-3}$ y $\frac{B}{a-4}$. Encuentre los valores de A y B para conocer los lados del rectángulo.

Solución

$$\frac{A}{a-3}+\frac{B}{a-4}=\frac{A(a-4)+B(a-3)}{(a-3)(a-4)}$$

Igualando con la fracción algebraica

$$\frac{3}{(a-3)(a-4)}=\frac{A(a-4)+B(a-3)}{(a-3)(a-4)}$$

Así, $3=A(a-4)+B(a-3)$

Cuando $a=4, B=3$ y también cuando $a=3$, entonces $A=-3$

Respuesta Los lados del rectángulo vienen dados por las expresiones

$$-\frac{3}{a-3};\frac{3}{a-4}$$

Actividad

En el último problema, obtuvimos a $-\frac{3}{a-3};\frac{3}{a-4}$ las expresiones que corresponden a la longitud de los lados de un rectángulo. Respondemos a las siguientes cuestiones:

1) Las dimensiones de figuras geométricas siempre son no negativas, ¿para qué valores de a, toman valores positivos las expresiones correspondientes de los lados $-\frac{3}{a-3}$ y $\frac{3}{a-4}$?

2) Qué ocurre si $a=3$ o $a=4$, es un número? ¿es cero? Debatimos con los compañeros de clase.

VALORACIÓN

Las fracciones algebraicas son una herramienta fundamental tanto en el ámbito académico como en aplicaciones prácticas y tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos campos su estudio es esencial.

- En Física, se utilizan para modelar fenómenos físicos como la velocidad, la aceleración, la densidad y muchas otras magnitudes. Por ejemplo, la ley de Ohm, que relaciona el voltaje, la corriente y la resistencia en un circuito eléctrico, se expresa como una fracción algebraica.
- En Química, son fundamentales en cálculos estequiométricos y en la expresión de concentraciones de soluciones.
- En Economía, se utilizan para analizar variables económicas como la oferta y la demanda, el crecimiento económico y la inflación.
- En Ingeniería, son esenciales pues muchos modelos matemáticos para el diseño de estructuras, circuitos eléctricos, sistemas mecánicos y más, son modelizados a través de expresiones que muchas veces involucran fracciones algebraicas.
- En Informática, se utilizan en algoritmos y programación para representar relaciones y realizar cálculos.

Fuente: OpenAi, 2024

Trabajar con fracciones algebraicas ayuda a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y lógico, el dominio de las fracciones algebraicas es esencial para el estudio de matemáticas avanzadas, como el cálculo, álgebra lineal, geometría analítica. Estas áreas son fundamentales para carreras en ciencias, tecnología, etc.

PRODUCCIÓN

Cadena de dominós de fracciones algebraicas

Materiales:

- 12 fichas de dominó de cartulina o papel bond.
- 1 hoja para rellenar los resultados.
- Tijeras, pegamento, etc.

Instrucciones:

Con las 12 fichas del juego, se debe formar una cadena que relacionen unas operaciones entre fracciones algebraicas y el resultado de esas operaciones. Para ello, escribimos fracciones algebraicas en las fichas.

Efectuamos las operaciones entre fracciones planteadas y rellena una tabla con tus resultados.

Comprobamos con alguna compañera o compañero de clase que los resultados son correctos.

Después de recortar las fichas, se debe hacer una cadena con todas las fichas, utilizando sus resultados de la tabla rellenada, empezando con INICIO y acabando con FINAL.

Fracción inicial	Fracción reducida
$\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-x-2}$	$\frac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2}$
$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}$	$\frac{2x^2+8}{x^2-4}$
$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{4x}{x^2-1}$
$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$	$\frac{2}{x+1}$
$1-\frac{x}{y}$	$\frac{x-y}{y}$
$\frac{3x-2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}$	$\frac{x^2+6x}{x^2-1}$
$\frac{x-y}{xy}+\frac{x-z}{yz}$	$\frac{2x^2+8}{x^2-4}$
$\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}$	$\frac{-x^2+x+2}{x^2-1}$
$\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}$	$\frac{x^2+x+2}{x^2-1}$
$x-\frac{1}{x}$	$\frac{x^2+1}{x}$
$\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}$	$\frac{5x^2+7x}{x^2-1}$
INICIO	**FINAL**

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m)

Determina el m.c.m. de las siguientes expresiones algébricas:

1) $3a^2+3ab;\ 5a^2-5ab$

2) $6x^3y-6x^2y;\ 9x^3y^2+18x^2y^2$

3) $4x^3y^2-8x^2y^3;\ 12x^2y^3$

4) $ab+b;\ a^2+a$

5) $a^2-a;\ 3a^3-3a^2$

6) $30ax^2-15x^3;\ 10axy^2-20x^2y^2$

7) $9ax^3y^4;\ 3a^2x^2y^4-9a^2x^2y^4$

8) $5a^2-15a;a^3-3a^2$

9) $3x^3+15x^2;\ ax^2+5ax$

10) $a^2-b^2;\ a^2-2ab+b^2$

11) $m^3+n^3;\ 3am+3an$

12) $x^2-4;\ x^3-8$

13) $2ax^2+4ax;\ x^3-x^2-6x$

14) $9x^2-1;\ 9x^2-6x+1$

15) $4a^2+4ab+b^2;\ 2a^2-2ab+ab-b^2$

16) $3x^2+3x-60;\ 6x^2-18x-24$

17) $8x^3+y^3;\ 4ax^2-ay^2$

18) $2a^3-12a^2b+18ab^2;\ a^3x-9ab^2x$

19) $ac+ad-2bc-2bd;\ 2c^2+4cd+2d^2$

20) $3a^2m^2+6a^2m-45a^2;6am^2x+24amx-30ax$

21) $4x^4-y^2;\ (2x^2-y)^2$

22) $3x^5-3x;\ 9x^3-9x$

23) $a^2+ab;\ ab+b^2;\ a^3+a^2b$

24) $2x^3-2x^2;\ 3x^2-3x;\ 4x^3-4x^2$

Máximo Común Divisor (M.C.D.)

Determina el M.C.D. de las siguientes expresiones algébricas:

1) $3x+3;\ 6x-6$

2) $5x+10;\ 10x^2-40$

3) $x^3+2x^2y;\ x^2-4y^2$

4) $3a^2x-9a^2;\ x^2-6x+9$

5) $4a^2-9b^2;\ 4a^2-12ab+9b^2$

6) $a^3+a^2b;\ a^3+2a^2b+ab^2$

7) $3ax+12a;\ 2bx^2+6bx-8b$

8) $x^3-25x;\ x^2+2x-15$

9) $(x-1)^2;\ x^2-1$

7) $(x+1)^2;\ x^2+1$

8) $x^3+y^3;\ (x+y)^3$

9) $x^3-y^3;\ (x-y)^3$

10) $x^2+3x-10;\ 4x^2-7x-2$

11) $a^2+a-30;\ a^2+3a-18$

12) $x^3-9x+5x^2-45;\ x^4+2x^3-15x^2$

13) $x^6-4x^3-32;\ ax^4+2ax^3+4ax^2$

14) $8(x-y)^2;\ 12(x^2-y^2)$

15) $5(x+y)^2;\ 10(x^2+y^2)$

16) $6a(m+n)^3;\ 4a^2b(m^3+n^3)$

17) $ax(m-n)^3;\ x^3(m^3-n^3)$

18) $2a^2+2a;\ 3a^2-4a;\ a^4-a^2$

19) $x^2+2x;\ x^3-2x^2;\ x^2-4$

20) $x^2+x-2;\ x^2-4x+3;\ x^2-x-6$

21) $6a^2+13a+6;\ 3a^2+14a+8;\ 4+12a+9a^2$

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificamos o reducimos a su más simple expresión:

1) $\dfrac{3ab}{2a^2x + 2a^3}$

2) $\dfrac{xy}{3x^2y - 3xy^2}$

3) $\dfrac{2ax + 4bx}{3ay + 6by}$

4) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

5) $\dfrac{10a^2b^3c}{80(a^3 - a^2b)}$

6) $\dfrac{x^2 - 4}{5ax + 10a}$

7) $\dfrac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6}$

8) $\dfrac{15a^2bn - 45a^2bm}{10a^2b^2n - 30a^2b^2m}$

9) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

10) $\dfrac{3x^2y + 15xy}{x^2 - 25}$

11) $\dfrac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3}$

12) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$

13) $\dfrac{6x^2 + 5x - 6}{15x^2 - 7x - 2}$

14) $\dfrac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1}$

15) $\dfrac{2ax + ay - 4bx - 2by}{ax - 4a - 2bx + 8b}$

Operaciones básicas con fracciones algebraicas

a) Adición y sustracción

Sumamos:

1) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

2) $\dfrac{2}{x+4} - \dfrac{1}{x-3}$

3) $\dfrac{3}{1+x} + \dfrac{6}{2x+5}$

4) $\dfrac{m}{m-n} - \dfrac{m}{m+n}$

5) $\dfrac{m+3}{m-3} + \dfrac{m+2}{m-2}$

6) $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}$

7) $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

8) $\dfrac{2}{x-5} - \dfrac{3x}{x^2-25}$

9) $\dfrac{1}{3x-2y} + \dfrac{x-y}{9x^2-4y^2}$

10) $\dfrac{x+a}{x+3a} - \dfrac{3a^2-x^2}{x^2-9a^2}$

11) $\dfrac{m}{a^2-am} + \dfrac{a}{am-m^2} + \dfrac{a+m}{am}$

12) $\dfrac{3}{2x+4} - \dfrac{x-1}{2x-4} - \dfrac{x+8}{x^2-4}$

13) $\dfrac{1}{x+x^2} + \dfrac{1}{x-x^2} + \dfrac{x+3}{1-x^2}$

14) $\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{4xy}{x^2-y^2}$

15) $\dfrac{1}{a-5} + \dfrac{a}{a^2-4a-5} + \dfrac{a+5}{a^2+2a+1}$

b) Resta

1) $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}$

2) $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}$

3) $\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$

4) $\frac{a+b}{a^2+ab}-\frac{b-a}{ab+b^2}$

5) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-\frac{m+n}{m-n}$

6) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}$

7) $\frac{1}{a^3-b^3}-\frac{1}{(a-b)^3}$

8) $\frac{x+2}{8x-8}-\frac{x-1}{4x+4}$

9) $\frac{x}{xy-y^2}-\frac{1}{y}$

10) $\frac{a-1}{a^2+a}-\frac{1}{2a-2}-\frac{1}{2a+2}$

11) $\frac{1}{4a+4}-\frac{1}{8a-8}-\frac{1}{12a^2+12}$

12) $\frac{y}{x^2-xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-y}$

13) $\frac{a}{a^2+ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$

14) $\frac{1}{x^2-xy}-\frac{1}{x^2+xy}-\frac{2y}{x^3-xy^2}$

15) $\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}$

16) $\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}-\frac{1}{xz}-\frac{x+y+z}{xyz}$

c) Multiplicación

Multiplicamos:

1) $\frac{15m^2}{19ax^3}\cdot\frac{20y^2}{38a^3x^4}$

2) $\frac{11x^2y^3}{7m^2}\cdot 22y^4$

3) $\frac{5a^3}{a^2b+3ab^2}\cdot\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2}$

4) $\frac{2x^3-2x}{2x^2+6x}\cdot\frac{x^2-x}{2x+6}$

5) $\frac{1}{x^2-x-30}\cdot\frac{2}{x^2+x-42}$

6) $\frac{4x-6}{x+1}\cdot\frac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2}$

7) $\frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24}\cdot\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56}$

d) División

Dividimos:

1) $\frac{4y^2}{7a^3}\div\frac{21a}{5x^4}\div\frac{5x^2}{7y^3}$

2) $\frac{5}{a}\div\frac{2a}{b^2}\div\frac{3b}{10}$

3) $\frac{2x^2+x}{6}\div\frac{4}{8x+4}$

4) $\frac{5x+25}{14}\div\frac{7x+7}{10x+50}$

5) $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\div\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}$

6) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy}\div\frac{x^2}{x^2-4y^2}$

7) $\frac{a-1}{2a^2-50}\div\frac{a^2-4a-5}{6a+6}$

8) $\frac{x^3-27}{a^3-1}\div\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$

e) Fracciones complejas

Simplificamos:

1) $$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

2) $$\frac{a+4+\frac{4}{a}}{1-\frac{2}{a}}$$

3) $$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}$$

4) $$\frac{a-x+\frac{x^2}{a+x}}{a^2-\frac{a^2}{a+x}}$$

5) $$\frac{\frac{20x^2+7x-6}{x}}{\frac{4}{x^2}-25}$$

Operaciones combinadas

a) Suma y resta combinada

Simplificarmos:

1) $$\frac{2x+1}{12x+8}-\frac{x^2}{6x^2+x-2}+\frac{2x}{16x-8}$$

2) $$\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x}$$

3) $$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2+y^2}$$

4) $$\frac{a-1}{3a+3}-\frac{a-2}{6a-6}+\frac{a^2+2a-6}{9a^2-9}$$

5) $$\frac{1}{a^2+2a-24}+\frac{2}{a^2-2a-8}-\frac{3}{a^2+8a+12}$$

6) $$\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{xy+y^2}+\frac{y}{x^2+xy}$$

7) $$\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a+3}{a^2-a+1}-\frac{a-1}{a+1}$$

b) Multiplicación y división combinadas

Simplificamos:

1) $$\frac{(a^2-3a)^2}{9-a^2}\cdot\frac{27-a^3}{(a+3)^2-3a}\div\frac{a^4-9a^2}{(a^2+3a)^2}$$

2) $$\frac{a^2-5a}{b+b^2}\div\left(\frac{a^2+6a-55}{b^2-1}\cdot\frac{ax+3a}{ab^2+11b^2}\right)$$

3) $$\frac{1}{a^3+a^2x}\div\left(\frac{a^3-a^2x}{a^2+2ax+x^2}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^3+ax^2}\right)$$

4) $$\left(\frac{2}{x^2+x-42}\div\frac{1}{x^2+x-42}\right)\cdot\frac{(x+7)}{4}$$

5) $$\left(\frac{4m-6}{m+1}\div\frac{20m^2-30m}{15m^3+15m^2}\right)\cdot\frac{4}{m-1}$$

Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

Responde:

1) El área de un rectángulo es $2xy+4x+2x+4$ m^2 y uno de sus lados mide $x+1$ m, ¿cuál es la longitud del otro lado?

2) Un jardinero mezcla $\frac{z}{6a}$ litros de fertilizante con $\frac{5z}{8b}$ litros de agua para preparar una solución nutritiva, ¿cuál es la fracción total de la mezcla de solución nutritiva?

3) Tú y tu amigo ganaron un premio de Bs $\frac{7}{2x}$. Si deciden dividirlo de manera justa y equitativa, ¿cuántos bolivianos recibirá cada uno?

4) Tienes dos recipientes de jugo. El primer recipiente contiene $\frac{2x}{x+3}$ litros de jugo de naranja y el segundo recipiente contiene $\frac{3}{2x}$ litros de jugo de maracuyá. Si decides mezclar ambos jugos en un tercer recipiente, ¿cuántos litros de jugo obtendrás?

5) Un contratista construye una pared utilizando $\frac{\frac{x+1}{2x-3}}{3}$ metros cuadrados de ladrillos y $\frac{\frac{2x-1}{x+4}}{5}$ metros cuadrados de cemento. Luego divide el área total construida por $\frac{3x+5}{x-2}$ para calcular el número de secciones, ¿cuál es el área final de cada sección?

POTENCIACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

La potenciación algebraica, aquella operación que consiste en multiplicar un número por sí mismo un determinado número de veces, es una herramienta matemática de gran poder y versatilidad. Su aplicación se extiende a prácticamente todas las ramas de la ciencia y la tecnología, desde la física y la química hasta la ingeniería y la informática. La potenciación nos permite escribir números extremadamente grandes o pequeños de forma concisa.

La potenciación algebraica es una herramienta fundamental en la informática. Desde la representación de números hasta la realización de cálculos complejos, la potenciación está presente en todos los niveles de una computadora. Su comprensión es esencial para cualquier persona que quiera profundizar en el funcionamiento interno de las computadoras y desarrollar software.

Megan está preparando el anuario digital de su curso con fotos y videos de dos minutos, por esta razón analiza el espacio que tiene en su computadora, si su disco duro tiene una capacidad de $500\ GB$, en realidad significa que tiene aproximadamente $500\cdot\ 2^{30}$ bytes = $2^{22}\ \ Mb$ de almacenamiento. ¿Cuántas fotos y videos podrá almacenar si cada foto ocupa aproximadamente $16\ Mb\ (2^{4}\ \ Mb)$ y el video de dos minutos $256\ Mb\ (2^{8}\ \ Mb)$?

Unidad	Equivalencia en potencias de 2	Valor aproximado en decimal
Kilobyte (KB)	2^{10} bytes	1024 bytes
Megabyte (MB)	2^{20} bytes	1 048 576 bytes
Gigabyte (GB)	2^{30} bytes	1 073 741 824 bytes
Terabyte (TB)	2^{40} bytes	1 099 511 627 776 bytes

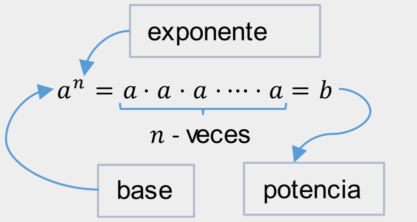
Actividad

Leemos y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas fotos podrá almacenar en la memoria de $500\ GB$ y exprésalo en potencia?
- ¿Cuántas fotos y videos podrá almacenar en la memoria de $500\ GB$ y exprésalos en potencias?
- ¿Qué otras aplicaciones de la potenciación algebraica puedes mencionar?

TEORÍA

Componentes de una potencia



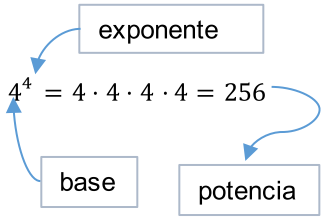
$$a^{n} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ - veces}} = b$$

1. Teoría de exponentes

La teoría de exponentes estudia las diversas relaciones existentes entre todas las clases de exponentes, mediante propiedades y teoremas.

Las potencias pueden verse como manera simplificada de escribir una multiplicación de un mismo número reiteradas veces.

Ejemplo:



$$4^{4} = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 256$$

La manera de leer esta expresión es “**cuatro a la cuarta**”

Actividad

Ahora escribimos el número de multiplicaciones de las bases que indican las potencias y viceversa en los siguientes:

1) $\square = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$

2) $3^{7} =$

3) $4^{3} =$

4) $\square = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$

5) $\alpha^{5} =$

6) $1000^{0} =$

a) Propiedades de exponentes

N°	Propiedad	Forma general	Ejemplo
1	**Producto de bases iguales**, se escribe la base y se suman los exponentes, respetando sus signos.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(7z)^{14} \cdot (7z)^6 = (7z)^{20}$
2	**Cociente de bases iguales**, se escribe la base y se restan los exponentes, respetando los signos.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{(7z)^{8m}}{(7z)^{2m}} = (7z)^{8m-2m} = (7z)^{6m}$
3	Si el **exponente es cero** y la base es un número distinto de cero, el resultado es 1.	$a^0 = 1$	$(70y)^0 = 1$
4	**Potencia de otra potencia,** copiamos la base y multiplicamos los exponentes.	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$\left[(11x)^3\right]^4 = (11x)^{12}$
5	Cuando el **exponente es negativo**, escribimos una fracción con numerador igual a 1 y denominador a la base y el mismo exponente, con el signo cambiado.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(-3x)^{-2} = \frac{1}{(-3x)^2}$
6	La **potencia de un producto** será el producto de las potencias elevadas al mismo exponente.	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot a^m$	$[(2x)(8y)]^5 = (2x)^5 \cdot (8y)^5$
7	La **potencia de un cociente** es igual al cociente de cada una de las bases elevadas al mismo exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{8mn}{7pq}\right)^6 = \frac{(8mn)^6}{(7pq)^6}$

Ejemplo:

Producto de bases iguales

a) $7^3 \cdot 7^6 \cdot 7 \cdot 7^9 = 7^{(3+6+1+9)} = 7^{19}$

b) $17^{1729} \cdot 17^{1729} \cdot 17^{1729} = 17^{3\cdot(1729)} = 17^{5187}$

c)

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^{3a} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{4b} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{5c} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{3a+4b+5c}$$

d) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = x^{\frac{1+2+4}{3}} = x^{\frac{7}{3}}$

Cociente de bases iguales

a) $\frac{5^{89}}{5^{91}} = 5^{89-91} = 5^{-2}$

b) $\frac{x^{2025}}{x^{2024}} = x^{2025-2024} = x^1 = x$

c) $\frac{z^{q-p}}{z^{p-q}} = z^{(q-p)-(p-q)} = z^{q-p-p-q} = z^{q-q-p-p} = z^{-2p}$

d)

$$\frac{5^{1+2+3+4+5+6}}{5^{-6-5-4-3-2-1}} = \frac{5^{(1+2+3+4+5+6)}}{5^{-(6+5+4+3+2+1)}} = 5^{(1+2+3+4+5+6)+(6+5+4+3+2+1)}$$

$$= 5^{2(1+2+3+4+5+6)} = 5^{42}$$

Exponente cero

a) $\left(\pi^{e^{\pi e}}\right)^0 = 1$

b) $(9a + 5b)^0 = 1$

Potencia de otra potencia

a) $4^2 = (2^2)^2 = 2^{(2\cdot 2)} = 2^4 = 16$

b) $(3^3)^2 = 3^{(3\cdot 2)} = 3^6$

c) $a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m = (a^m)^n$

Exponente negativo

a) $3^{-1} = \frac{1}{3^1}$

b) $6^{-6} + 6^{-3} = \frac{1}{6^6} + \frac{1}{6^3}$

c) $(748)^{896} \cdot (784)^{-896} = (748)^{896} \cdot \frac{1}{(784)^{896}}$

$$= \frac{(748)^{896}}{(748)^{896}} = 1$$

Potencia de un producto

a) $(9 \cdot 8)^2 = 9^2 \cdot 8^2$

b) $[a(b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g)]^7$

$= a^7 \cdot (b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g)^7$

c) $\left(\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)\right)^{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{\left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{\left(-\frac{1}{4}\right)}$

Potencia de un cociente

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1^{\left(-\frac{1}{4}\right)}}{4^{\left(-\frac{1}{4}\right)}}$

b) $\left(-\frac{x}{2y}\right)^{10} = \frac{x^{10}}{(2y)^{10}}$

Actividad

Aplicamos las propiedades de potenciación más conveniente para simplificar los siguientes:

1) $b^2 \cdot b^3 \cdot b^5 \cdot b^7$

2) $(-c)^{-3} \cdot (-c)^{-3} \cdot (-c)^{-3}$.

3) $(3d)^2 \cdot (3d)^2 \cdot (3d)^2$

4) $n^a \cdot n^a \cdot n^a \cdot n^a \cdot n^a$

5) $\frac{a^{20}}{a^{20}} - \frac{a^{21}}{a^{19}} + \frac{a^{2024}}{a^{2024}}$

6) $8^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

7) $\frac{30^3}{30^2} - \frac{40^4}{40^3} - \frac{50^5}{50^4}$

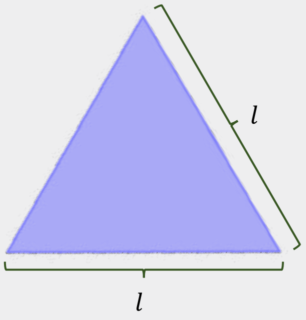
8) $[(2^2)^2]^3 + (2^0)^2$

9) $[(3^3)^3]^2 + (3^0)^5$

2. Reducción de expresiones algebraicas aplicando las diferentes propiedades de potenciación

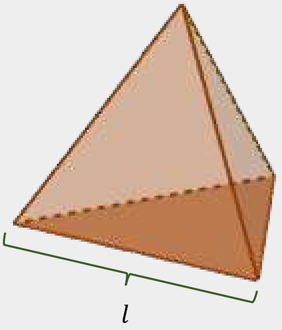
A continuación, se simplificarán expresiones algebraicas utilizando las propiedades de exponentes que vimos antes.

Representación geométrica de las potencias



El área de un triángulo equilátero de lado l, viene dada por la expresión

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\boxed{l^2}$$



El volumen de un tetraedro regular de arista l viene dado por:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\boxed{l^3}$$

a) Reducción de expresiones algebraicas aplicando las diferentes propiedades de potenciación

A continuación, se simplificarán expresiones algebraicas utilizando las propiedades de exponentes que vimos antes.

Ejemplo:

Simplificamos

$$F = \frac{\overbrace{f\cdot f\cdot f\cdot \cdots \cdot f\cdot f}^{50-\text{veces}}}{\underbrace{f\cdot f\cdot f\cdot \cdots \cdot f}_{48-\text{veces}}}$$

Solución

La expresión de F contiene tanto en su numerador y denominador, un producto con una indicación sobre cuántas veces se multiplica f, luego:

$$F = \frac{f^{50}}{f^{48}} = f^{50-48} = f^2$$

por la potencia del cociente de la misma base.
El resultado es $F = f^2$

Ejemplo:

Simplificamos:

$$\underbrace{(5x\cdot 5x\cdot \cdots \cdot 5x)}_{m-veces} + \underbrace{(x\cdot x\cdot \cdots \cdot x)}_{m-veces} + \underbrace{(mx\cdot mx\cdot \cdots \cdot mx)}_{m-veces}$$

Solución

Analizamos en el primer sumando:
Si $m = 2$; $5\cdot x\cdot 5\cdot x = 5\cdot 5\cdot x\cdot x = 5^2\cdot x^2$
Si $m = 3$; $5\cdot x\cdot 5\cdot x\cdot 5\cdot x = 5\cdot 5\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot x = 5^3\cdot x^3$
En general para cualquier número natural m, tendremos $5^m\cdot x^m$

Aplicamos el mismo análisis al segundo y tercer sumando, y obtenemos x^m y $m^m\cdot x^m$, respectivamente.

Luego la suma queda $5^m\cdot x^m + x^m + m^m\cdot x^m$ y factorizando:

$$5^m\cdot x^m + x^m + m^m\cdot x^m = (5^m + 1 + m^m)x^m$$

El resultado simplificado es $(5^m + 1 + m^m)x^m$.

Actividad

Aplicamos las propiedades de potenciación más convenientes para simplificar los siguientes:

1) $A = x^{2+a}\cdot x^{3-a}\cdot x^{4+a}$

2) $B = 2^{2+x}\cdot 2^{3-x}\cdot 2^{4-x}\cdot 2^x\cdot$

3) $I = 3^{2^{2^0}} - 2^{0^{2^3}}$

4) $D = a^{1^{1^2}} + b^{3^{5^8}}$

5) $E = (2a)^{-a+a}\cdot (2a)^3 + (2025)^{-a+a}$

6) $F = \frac{2^2}{2^{-2}}$

7) $G = \frac{a^{2+1}-2^a}{a^{3+2}-a^{2+1}-a^2}$

8) $H = \frac{b^3}{b^{3+3}-b^{6+1}-b^3}$

Ejemplo:

Simplificamos:

$$D = (x^2 \cdot y)^3 \cdot \frac{(x \cdot y^2)^2}{x^4}$$

Solución

Se va a detallar cada paso de la simplificación:

$D = \left(x^2\right)^3 \cdot y^3 \cdot \frac{x^2 \cdot \left(y^2\right)^2}{x^4}$	Por potencia del producto
$= x^{2\cdot3} \cdot y^3 \cdot \frac{x^2 \cdot y^{2\cdot2}}{x^4}$	Por potencia de otra potencia
$= x^6 \cdot y^3 \cdot \frac{x^2 \cdot y^4}{x^4}$	Multiplicando los exponentes
$= x^6 \cdot y^3 \cdot y^4 \cdot \frac{x^2}{x^4}$	Asociando
$= x^6 \cdot y^{3+4} \cdot x^{2-4}$	Por potencia de la misma base y del cociente.
$= x^{6+(-2)} \cdot y^7$	Por potencia de la misma base y operaciones
$= x^4 \cdot y^7$	

El resultado es $D = x^4 \cdot y^7$

Ejemplo:

A Marco en su preparación para un examen de matemática, le piden simplificar la expresión:

$$M = (8x^4y^{-3})^{-2}\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$$

Solución

Se va a detallar cada paso de la simplificación:

$M = \frac{1}{\left(8x^4y^{-3}\right)^2}\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$	Por potencia negativa
$= \frac{1}{\left(8x^4\frac{1}{y^3}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^5}y^2\right)$	Por potencia negativa, en y^{-3} y x^{-5}
$= \frac{1}{\left(\frac{8x^4}{y^3}\right)^2}\cdot\left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$	Operaciones algebraicas
$= \frac{1}{\frac{\left(8x^4\right)^2}{\left(y^3\right)^2}}\cdot\left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$	Potencia de un cociente
$= \frac{1}{\frac{64x^8}{y^6}}\cdot\left(\frac{y^2}{2x^5}\right)$	Por potencia de otra potencia
$= \frac{y^6}{64x^8}\cdot\frac{y^2}{2x^5}$	Operaciones algebraicas
$= \frac{y^{6+2}}{64\cdot2\cdot x^{8+5}}$	Producto de potencias con la misma base
$= \frac{y^8}{128x^{13}}$	Operaciones algebraicas

Respuesta

Marco está totalmente seguro que el resultado de la simplificación es:

$$\frac{y^8}{128x^{13}}$$

Contraejemplo en matemática

Un contraejemplo en matemática es un ejemplo específico que demuestra que una afirmación general es falsa. Aquí algunos ejemplos en diferentes áreas de la matemática:

- ***Aritmética***

***Afirmación**: "La suma de dos números enteros siempre es mayor que ambos sumandos"*

***Contraejemplo**: Tomemos tanto a 0 como a 1, luego su suma es*

$$0 + 1 = 1$$

pero concluir que $0 < 1$ y $1 < 1$ es falso.

- ***Álgebra***

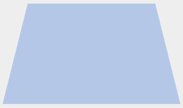
***Afirmación**: "Todo polinomio de grado 2 tiene al menos una solución real"*

***Contraejemplo**: El polinomio $x^2+1=0$ no tiene soluciones reales.*

- ***Geometría***

***Afirmación**: "Todo cuadrilátero con dos lados paralelos es un paralelogramo"*

***Contraejemplo**: Un trapecio tiene dos lados paralelos, pero no es un paralelogramo, ya que sólo dos de sus lados son paralelos.*



Sin embargo, la búsqueda de contraejemplo para afirmaciones puede ser tan compleja como desafiante. El jurista y matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), había afirmado la inexistencia de números enteros positivos x,y y z, tal que:

$$x^n + y^n = z^n$$

*donde $n \geq 2$. Durante más de 300 años se intentó probar o refutar tal afirmación, hasta que en 1995 el matemático inglés Andrew Wiles pudo dar al conocimiento público una demostración de tal afirmación, pasando a llamarse "**el último teorema de Fermat**".*

Signos de las potencias

Base	Exponente	Signo del resultado
Positiva	Par	Positiva
	Impar	Positiva
Negativa	Par	Positiva
	Impar	Negativa

Potencia de un monomio y un polinomio

Para calcular la potencia de un monomio, se eleva al exponente el coeficiente del monomio y cada una de las variables de la parte literal (con sus respectivos exponentes).

Ejemplo:

1). $(\mathbf{7c^3d^2})^2 = 49c^6d^4$

2). $(\mathbf{-15y})^3 = -3375y^3$

3). $(\mathbf{-11p^5q^8})^2 = 121p^{10}q^{16}$

4). $\left(-\frac{1}{5}\mathbf{a^2b^3}\right)^2 = \frac{1}{5}a^4b^6$

Las potencias de un ***polinomio*** *se refiere a elevar la expresión a un exponente natural. En el tema de productos notables se estudia con mayor detalle. Las potencias más conocidas y utilizadas son:*

- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
- $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3$ $= \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3$
- $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^3$ $= \mathbf{a}^3 - 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 - \mathbf{b}^3$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{ab} + 2\mathbf{ac} + 2\mathbf{ac}$

Ejemplo:

- $(\mathbf{a}+\mathbf{2b})^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$
- $(\mathbf{3a}+\mathbf{2b})^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$
- $(\mathbf{x}-\mathbf{5y})^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$
- $(\mathbf{x}+\mathbf{2})^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ejemplo:

En la prueba de matemática, la maestra les pide a sus estudiantes simplificar la expresión:

$$R = (2^{-n} + 3^{-n} + 4^{-n})^{\frac{1}{n}} \cdot (6^n + 8^n + 12^n)^{-\frac{1}{n}}$$

Solución

$$R = \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Por potencia negativa

$$= \left(\frac{3^n\cdot4^n + 2^n\cdot4^n + 2^n\cdot3^n}{2^n\cdot3^n\cdot4^n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Sumando las fracciones dentro los paréntesis

$$= \left(\frac{(3\cdot4)^n + (2\cdot4)^n + (2\cdot3)^n}{(2\cdot3\cdot4)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Potencia de un producto

$$= \left(\frac{(12)^n + (8)^n + (6)^n}{(24)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Operaciones aritméticas

$$= \frac{(12^n+8^n+6^n)^{\frac{1}{n}}}{(24^n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Por potencia de otra potencia

$$= \frac{(12^n+8^n+6^n)^{\frac{1}{n}}}{(24^n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Por potencia de un cociente

$$= \frac{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}{(24^n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{(6^n+8^n+12^n)^{\frac{1}{n}}}$$ Conmutando y asociando

$$= \frac{1}{(24^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{24}$$ Simplificando la expresión

Respuesta La maestra debe verificar que los estudiantes obtengan $\frac{1}{24}$ como resultado final.

3. Signo de las potencias

Signos de potencia de cantidades positivas: Cualquier potencia de un número positivo, evidentemente es positivo, porque equivale a un producto en que todos los factores son positivos.

Ejemplo:

- $(1)^{\mathbf{2025}} = 1$
- $(4y)^{\mathbf{3}} = 64x^3$
- $(9a^2b^3)^{-2} = \frac{1}{81a^4b^6}$
- $(2m^5n^8)^6 = 64m^{30}n^{48}$

Signos de potencia de cantidades positivas

En cuanto a las potencias de números negativos, existe dos posibilidades:

“Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva”

Ejemplo:

- $(\mathbf{-2})^{\mathbf{2}} = 4$
- $(\mathbf{-3x})^{\mathbf{2}} = 9x^2$
- $(\mathbf{-5a^2b^3})^{\mathbf{4}} = 625a^8b^{12}$
- $(\mathbf{-2m^5n^8})^{\mathbf{6}} = 64m^{30}n^{48}$

“Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa”

Ejemplo:

- $(\mathbf{-2})^{\mathbf{3}} = -8$
- $(\mathbf{-3x})^{\mathbf{3}} = -27x^3$
- $(\mathbf{-5a^2b^3})^{\mathbf{5}} = -3125a^{10}b^{15}$
- $(\mathbf{-2m^5n^8})^{\mathbf{7}} = -128m^{35}n^{56}$

Actividad

Simplificamos utilizando propiedades adecuadas:

1) $A = -(-100)^0 - \left(\frac{1}{-2}\right)^{-2}$

2) $C = \frac{2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3}}{2^{x-2}}$

3) $E = \frac{4a^{2025}}{a^{1825}} - \frac{6a^{2024}}{a^{1824}} + \frac{a^{2023}}{a^{1823}}$

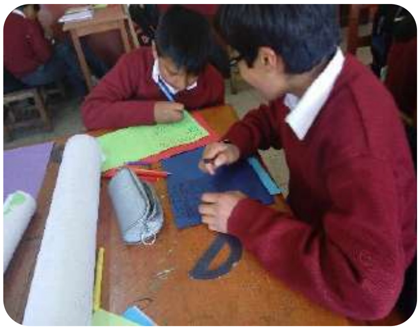
4) $B = \left(\frac{5}{y}\right)^{-3} + \left(\frac{5}{y}\right)^{-3} + \left(\frac{5}{y}\right)^{-3}$

5) $D = \frac{6^{x+1} - 6^{x-1} + 6^{x-2025}}{6^{x-2024}}$

6) $G = (2z+1)^0 + (2z+1)^0$

VALORACIÓN

La potenciación algebraica es una herramienta matemática fundamental que nos permite modelar y comprender una amplia variedad de fenómenos, desde el crecimiento de una población hasta el comportamiento de las partículas subatómicas. Aunque no siempre la vemos de forma explícita, está presente en muchos aspectos de nuestra vida diaria.



Los exponentes son una herramienta matemática fundamental que encontramos en muchas áreas de nuestra vida diaria. Su capacidad para representar números muy grandes o muy pequeños de forma concisa los hace indispensables en diversos campos, algunas de las aplicaciones más comunes de los exponentes son:

Física: Describen fenómenos como la desintegración radiactiva, el crecimiento exponencial de poblaciones o la disminución exponencial de ciertas sustancias.

Química: Se utilizan en cálculos relacionados con reacciones químicas, concentraciones de sustancias y constantes de equilibrio.

Biología: Modelan el crecimiento de poblaciones, la propagación de enfermedades y la genética.

Astronomía: Expresan distancias enormes entre estrellas y galaxias, así como la masa de cuerpos celestes.

Los exponentes son una herramienta muy útil que nos permite modelar y comprender una amplia variedad de fenómenos, desde el crecimiento de una población hasta estimar distancias que escapan a nuestra imaginación.

PRODUCCIÓN

La **tetración** es una operación matemática que representa una iteración de la exponenciación. Si bien es menos común que otras operaciones como la adición, multiplicación o exponenciación, es útil para describir crecimientos muy rápidos

Formalmente, la tetración se define como una secuencia de potencias iteradas de una base a, repetida n veces. Se denota como ${}^{n}a$ o también $a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ con n exponentes, por ejemplo, el número ${}^{3}2 = 2^{2^{2}}$ lo calculamos $2^{(2^{2})} = 2^{4} = 16$

Fuente: OpenAi, 2024

Materiales	Descripción de la actividad
− Pizarras o papel gráfico − Marcadores − Calculadoras científicas − Acceso a software matemático (opcional, si el aula cuenta con acceso)	1). Organizamos grupos de 2 a 4 personas 2). Proponemos a cada grupo calcular las siguientes tetraciones − ${}^{2}3$ − ${}^{2}4$ − ${}^{3}2$ − ${}^{3}3$ 3). Cada grupo comparte sus resultados con la clase. La o el maestro guía una discusión sobre las propiedades de la tetración (crecimiento rápido, desafíos en su cálculo, etc.) y cómo se diferencia de otras operaciones. 4). Discutir las implicaciones del resultado y cómo representa el crecimiento exponencial de la tetración.

Analizamos la lectura anterior para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la dificultad al calcular tetraciones ara números más grandes?
- ¿Qué es el número de Graham?
- ¿Cuál es la moraleja que nos deja la tetración y otras formas de generar números inmensamente grandes acerca de la imaginación humana?

RADICACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

La radicación algebraica es una operación matemática fundamental con múltiples aplicaciones en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana, la radicación permite resolver ecuaciones que involucran potencias, lo cual es esencial en muchas áreas de las matemáticas

Los estudiantes del tercero de secundaria observan que cae el foco de alumbrado del tinglado de su colegio, saben que la altura del tinglado es de 32 m, su curiosidad es conocer el tiempo que tardo en caer el foco al suelo. Utilizaremos la fórmula de la caída libre, que incluye una raíz cuadrada.

Fuente: OpenAi, 2024

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Donde:

- h es la altura desde la que se deja caer el objeto.
- g es la aceleración debida a la gravedad (aproximadamente 9.81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

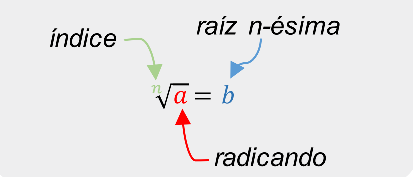
Actividad

Leemos y respondemos las siguientes preguntas:

- Explicamos en nuestros términos que entendemos por caída libre
- ¿Cuáles otras aplicaciones de la radicación algebraica podemos mencionar?
- En nuestras palabras, ¿por qué la fórmula de la caída libre involucra una raíz cuadrada?

TEORÍA

Partes de una raíz n-ésima



Para tu conocimiento

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado, la A.S.A.L.E. en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal "."

*Tomando en cuenta estos aspectos, se utilizará el **punto decimal** como separador.*

Ejemplo:

3.14 ; 0.71 ; -0.5 ; -0.11...

Fuente: Sistema Internacional de unidades

1. Radicales (raíz de índice natural de una expresión algebraica)

Si bien se indica muchas veces que la radicación es "la operación inversa a la potenciación", esto puede ser desglosado en la siguiente frase:

"para un número dado, si encontramos otro cuya potencia n-ésima es el primero, el segundo número es una raíz n-ésima del primero"

En símbolos, podemos expresarlo así:

$$a = b^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

y la frase, puede adaptarse para números a y b:

"para un número a, si encontramos otro número b cuya potencia n-ésima es igual a a, entonces b es una raíz n-ésima de a"

Ejemplo:

1). Sabemos que $25 = 5^2$, luego 5 es una raíz (en este caso decimos **cuadrada**) de 25.
2). Sabemos que $1000 = 10^3$, luego 10 es una raíz (en este caso decimos **cúbica**) de 1000.
3). Sabemos que $16 = 2^4$, luego 2 es una raíz (en este caso decimos **cuarta**) de 16.
4). Sabemos también que $32 = 2^5$, luego 2 es una raíz (en este caso decimos **quinta**) de 32.

Ejemplo:

Calcular las siguientes raíces aplicando la definición:

a) $144 = 12^2 \Leftrightarrow 12 = \sqrt{144}$
b) $3^3 = 27 \Leftrightarrow 3 = \sqrt[3]{27}$
c) $-125 = (-5)^3 \Leftrightarrow -5 = \sqrt[3]{-125}$
d) $\sqrt{169} = 13 \Leftrightarrow 13^2 = 169$
e) $\sqrt{121} = 11 \Leftrightarrow 121 = 11^2$
f) $5^6 = 15625 \Leftrightarrow \sqrt[6]{15625} = 5^6$
g) $(4)^3 = 64 \Leftrightarrow \sqrt[3]{64} = 4$
h) $1024 = 2^{10} \Leftrightarrow \sqrt[10]{1024} = 2$

2. Propiedades de radicales

N°	Propiedad	Forma general	Ejemplo
1	**Potencia de una raíz y raíz de una potencia**. Las raíces no son más que potencias, por tanto muchas de las propiedades para potencias se cumplen para radicales.	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$
2	**Raíz de un producto**. El producto de radicales de igual índice es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$
3	**Raíz de un cociente.** La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2$
4	**Raíz de una raíz.** Se multiplican los índices de los radicales y se copia la cantidad subradical.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[3\cdot5]{32768} = \sqrt[15]{32768} = 2$

Ejemplo:

Simplificamos utilizando las propiedades de radicales:

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{49b^2c^3d^4} &= \sqrt{7^2b^2c^3d^4}\\ &= \sqrt{7^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 \cdot d^2 \cdot d^2}\\ &= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d^2} \cdot \sqrt{d^2}\\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot c \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{c}\\ &= bcd^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{c}\\ &= bcd^2\sqrt{3c}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{350} &= \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}\\ &= \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot 7}\\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7}\\ &= 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}\\ &= 5\sqrt{5 \cdot 7}\\ &= 5\sqrt{5 \cdot 7}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{1156} &= \sqrt{2^2 \cdot 17^2}\\ &= \sqrt{2^2 \cdot 17^2}\\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{17^2}\\ &= 2 \cdot 17\\ &= 34\end{aligned}$$

3. Introducción de factores en un radical

A partir de la raíz de un producto:

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

es decir, tenemos la igualdad: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

Interpretando, el factor a, se introduce en el radical elevado a la potencia igual que el subíndice.

Ejemplo:

a) $\frac{2}{3}\sqrt[5]{128} = \sqrt[7]{\frac{2^7}{3^7} \cdot 2^7} = \sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot 2^7}$

$= \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$

b) $2a\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 3}$

$= \sqrt[3]{24a^3}$

c) $7\sqrt{2a} = \sqrt{7^2 \cdot 2a}$

$= \sqrt{98a}$

Nota para la raíz cuadrada

Para $n = 2$ y $a = 25$, tenemos

$$25 = 5^2 \Leftrightarrow 5 = \sqrt{25}$$

pero también se verifica que

$$25 = (-5)^2 \Leftrightarrow -5 = \sqrt{25}$$

*De aquí en adelante, la raíz cuadrada de un número, será aquel **NO NEGATIVO**, luego sólo puede ocurrir:*

$$\sqrt{25} = 5$$

Actividad

Introducimos el factor debajo del signo del radical en los siguientes ejemplos:

1) $5\sqrt{8}$
2) $2\sqrt{3b}$
3) $t\sqrt{3z}$
4) $2x\sqrt[3]{3x^2}$
5) $7^{\frac{1}{n}}\sqrt{7}$
6) $2\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$
7) $a\sqrt{10}$
8) $b\sqrt{100}$
9) $2\sqrt[2]{3}$
10) $2^2\sqrt{2^4}$

Exponentes fraccionarios

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$$

El exponente fraccionario es una forma equivalente de expresar un radical, lo cual nos permite utilizar propiedades de exponentes que ya aprendimos en temas anteriores

$$\sqrt{\boldsymbol{a}} = \sqrt[2]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{n^5} = n^{\frac{5}{3}}$$

Ejercicio resuelto

Ángel desarrolla la expresión

$$E = \sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{1250}$$

y quiere saber si el resultado es una cantidad irracional.

Solución

$$E = \sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{1250}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{5^4 \cdot 2}$$

pues $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$= \sqrt{3^2}\sqrt{2} + \sqrt{2^2}\sqrt{2} + \sqrt{(5^2)^2}\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 25\sqrt{2}$$

$$= 30\sqrt{2}$$

Respuesta

Ángel llega a concluir que $E = 30\sqrt{2}$ *es un número irracional (el cuál explicaremos más adelante).*

4. Reducción de radicales al mínimo común índice

Se halla el m.c.m. de los índices, que será el índice común del radicando y luego se eleva cada cantidad en el radical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

Ejemplo:

Igualar los índices de los siguientes radicales: $\sqrt[4]{2a}$; $\sqrt[8]{8b^{32}}$, $\sqrt[12]{6n^2}$

Solución

Hallamos el m.c.m. con los índices de los radicales 4,8 y 12 que es 24:

Ya que $24 \div 4 = \mathbf{6}$,

$$\sqrt[4]{2a} = \sqrt[4\cdot\mathbf{6}]{(2a)^{\mathbf{6}}} = \sqrt[\mathbf{24}]{(2a)^{\mathbf{6}}}$$

Ya que $24 \div 8 = \mathbf{3}$

$$\sqrt[8]{8b^{32}} = \sqrt[8\cdot\mathbf{3}]{(8b^{32})^{\mathbf{3}}} = \sqrt[24]{(8b^{32})^{\mathbf{3}}}$$

Ya que $24 \div 2 = \mathbf{2}$

$$\sqrt[12]{6n^2} = \sqrt[\mathbf{2}\cdot 12]{(6n^2)^2} = \sqrt[24]{36n^2}$$

Así, obtenemos los radicales: $\sqrt[\mathbf{24}]{(2a)^{\mathbf{6}}}$, $\sqrt[24]{(8b^{32})^{\mathbf{3}}}$ y $\sqrt[24]{36n^2}$

5. Operaciones con radicales

Estudiaremos la suma, resta, multiplicación y división entre radicales.

a) Suma y resta con radicales

Para realizar estas operaciones los radicales deben ser semejantes. Dos radicales son semejantes si tienen la misma cantidad sub radical y el mismo índice. Son ejemplos de radicales semejantes $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 10\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$

Ejemplo:

Sumar o restar los siguientes radicales

Solución

1) $A = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (1+2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2) $B = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = (4-1)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

3) $C = \sqrt{12} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{75}$

$$= \sqrt{4\cdot 3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{25\cdot 3}$$

$$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\cdot 5\cdot\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 13\sqrt{3}$$

$$= -11\sqrt{3}$$

4) $D = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$

$$= \sqrt[3]{2^3\cdot 2} + \sqrt[3]{2\cdot 5^3}$$

$$= \sqrt[3]{2^3\cdot 2} + \sqrt[3]{5^3\cdot 2}$$

$$= \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$$

$$= 7\sqrt[3]{2}$$

5) $E = \sqrt{50} + 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$

$$= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$$

$$= (5 + 4 - 12)\sqrt{2}$$

6) $F = 3\sqrt{y} - \sqrt{y} - 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y}$

$$= 3\sqrt{y} - 5\sqrt{y}$$

$$= -2\sqrt{y}$$

Actividad

Igualamos los índices de los siguiente radicales:

1) $\sqrt{7}$; $\sqrt[24]{2}$

2) $2\sqrt{2\sqrt{a}}, 3b\sqrt[3]{5}$

3) $\sqrt[9]{2}; \sqrt[18]{2}$; $\sqrt[81]{3}$

4) $4\sqrt{\frac{a}{b}}$; $8\sqrt[3]{\frac{2a}{b}}$

5) $2\sqrt{3}$; $2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

6) $x\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{2x^3}$; $\sqrt[5]{3x}$

Sumamos o restamos, según corresponda:

7) $A = 2\sqrt{b} - 7\sqrt{b} - 10\sqrt{a} + 12\sqrt{a}$

8) $B = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2}$

9) $C = 48\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{500}$

10) $D = 8\sqrt{54} - 10\sqrt{12} - 20\sqrt{6}$

b) Multiplicación con radicales

A partir de la potencia de un producto, tenemos que:

$$\boxed{(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}}$$

y como $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, tenemos $\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$. Interpretando esta última igualdad, dos radicales se pueden multiplicar si ambos son del mismo índice.

Ejemplo:

Multiplicamos los siguientes radicales

1) $A = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$
$= \sqrt{7 \cdot 7}$
$= \sqrt{49}$
$= 7$

2) $B = (2\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{5})$
$= 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
$= 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$
$= 8\sqrt{15}$

3) $C = (\sqrt{12}) \cdot (\sqrt{18})$
$= \sqrt{12 \cdot 18}$
$= \sqrt{216}$
$= 6\sqrt{6}$

4) $D = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$
$= \sqrt[3]{5 \cdot 25}$
$= \sqrt[3]{125}$
$= 5$

5) $D = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3a} \cdot \sqrt{6}$
$= \sqrt{2a \cdot 3a \cdot 6}$
$= \sqrt{36a^2}$
$= 6a$

6) $E = (4\sqrt{7}) \cdot \sqrt[3]{5}$
$= 4 \cdot \sqrt[2]{7} \cdot \sqrt[3]{5}$
(Los índices son diferentes).

7) $F = (\sqrt[4]{16}) \cdot (\sqrt[4]{81})$
$= \sqrt[4]{16 \cdot 81}$
$= \sqrt[4]{1296}$
$= \sqrt[4]{6^4} = 6$

8) $G = \sqrt{50x^2} \cdot \sqrt{8x^2} =$
$= 5x\sqrt{2} \cdot 2x\sqrt{2}$
$= (5x + 2x)\sqrt{2}$
$= 7x\sqrt{2}$

9) $H = \sqrt{63a^7b^5} \cdot \sqrt{28a^5b^4}$
$= 3a^3b^2\sqrt{7a} \cdot \sqrt{b} \cdot$
$2a^2b^2\sqrt{7a}$
$= (3a^3b^2\sqrt{b} + 2a^2b^2)\sqrt{7a}$

5. División con radicales.

Dos radicales se pueden dividir si tienen los mismos índices. Si sus índices son distintos se deben igualar. Para dividir radicales utilizamos la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \div \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}} = \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$$

Ejemplo:

Dividir los siguientes radicales:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{54x^6}}{\sqrt[3]{2x^2}}$

Solución

$\dfrac{\sqrt[3]{54x^6}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{54x^6}{2x^2}}$
$= \sqrt[3]{27x^4}$
$= 3x^{\frac{4}{3}}$

2) $A = \dfrac{3\sqrt{40}}{8\sqrt{12}}$

Solución

$\dfrac{3\sqrt{40}}{8\sqrt{12}} = \dfrac{3\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 5}}{8\sqrt{4 \cdot 3}}$
$= \dfrac{3 \cdot 2\sqrt{10}}{8 \cdot 2\sqrt{3}}$
$= \dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

3) $\dfrac{\sqrt[6]{729a^{12}}}{\sqrt[6]{9a^6}}$

Solución

$\dfrac{\sqrt[6]{729a^{12}}}{\sqrt[6]{9a^6}} = \sqrt[6]{\dfrac{729a^{12}}{9a^6}}$
$= \sqrt[6]{81a^6}$
$= 3a$

4) $B = \dfrac{5\sqrt{2a}}{3\sqrt{a}}$

Solución

$\dfrac{5\sqrt{2a}}{3\sqrt{a}} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a}}$
$= \dfrac{5}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{2a}{a}}$
$= \dfrac{5}{3} \cdot \sqrt{2}$

5) $C = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{18^{-1}}}{\sqrt[6]{24}} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{18^{-1}}}{\sqrt[6]{24}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{4^2}\sqrt[6]{18^{-1}}}{\sqrt[6]{2^3 3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3 \cdot 4^2 \cdot 18^{-1}}{2^3 3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3 \cdot 3^{-1} \cdot 2^4 \cdot 2^{-3}}{18}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^{3-1} \cdot 2^{4-3}}{18}}$

$= \sqrt[6]{\dfrac{3^2 \cdot 2^1}{18}} = \sqrt[6]{1} = 1$

Dato histórico

Behend vnnd Hübſch
Rechnung dürch die kunſtreichen regeln Algebre/ ſo gemeincklich die Coſs genent werden. Darinnen alles ſo treülich an tag gegeben/ das auch allein auß vleiſſigem leſen on allen mündtlichē vnterricht mag begriffen werden. Hindangeſetzt die meinūg aller dere/ ſo biſher vil vngegründten regeln angehangen. Einem jeden liebhaber diſer kunſt luſtig vnd ergetzlich.
Züſamen bracht dürch
Chriſtoffen Rüdolff
vom Jawer.
Mit Keiſerlichen Freiheiten
diß büch in dreie jaren nit nach zü drucken/ bey peen zehen marck golds vnd verlierung de büchr.

El actual símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático alemán Christoph Rudolff para representar esta operación, que aparece en su libro Coss. El signo no es más que una forma estilizada de la letra r minúscula para hacerla más elegante, alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina radix, que significa raíz.

Raíz cuadrada entera

Para hallar la raíz cuadrada entera de 79 debemos buscar los números cuadrados dentro los cuales se ubica 46, es decir

$$8^2 < 79 < 9^2$$

La raíz cuadrada entera de un número es la raíz del mayor cuadrado perfecto contenido en él.

En este caso, entre 8 y 9 no existen números enteros y

$$64 = 8^2 < 79$$

Por tanto, la raíz cuadrada entera de 79, pues es el mayor cuadrado que es menor que 79.

La diferencia entre 79 y 64 es

$$79 - 64 = 15$$

Luego, 15 es denominado el resto.

Actividad

Hallamos los productos de los radicales:

1) $I = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8}$

2) $M = (3\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{5})$

3) $P = \dfrac{4\sqrt[2]{1024z}}{16\sqrt{144x}}$

4) $S = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdots z}}$

5) $J = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

6) $N = \sqrt{\dfrac{b}{2}} \cdot \sqrt[2]{\dfrac{2}{b}}$

Hallamos los cocientes de los radicales:

7) $Q = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$

8) $T = \dfrac{14\sqrt{100}}{3\sqrt{16}}$

9) $K = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4}$

10) $O = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

11) $R = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{12}}$

12) $U = \dfrac{\sqrt[5]{3zy}}{\sqrt[5]{2z^2y}}$

¿PORQUÉ TENEMOS LA IGUALDAD $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ donde $C = \sqrt{A^2 - B}$?

Verificando:

$$A + \sqrt{B} = A + \sqrt{A^2 - (A^2 - B)}$$

Hacemos $C^2 = A^2 - B$, *luego*

$$A + \sqrt{B} = A + \sqrt{A^2 - C^2}$$

$$= \frac{A + C}{2} + 2\sqrt{\frac{A^2 - C^2}{4}} + \frac{A - C}{2}$$

como $2\sqrt{\frac{A^2 - C^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{(A+C)}{2}\frac{(A-C)}{2}}$

$A + \sqrt{B} =$

$$\frac{A + C}{2} + 2\sqrt{\frac{(A + C)}{2}\frac{(A - C)}{2}} + + \frac{A - C}{2}$$

por producto notable:

$$A + \sqrt{B} = \left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{A + C}}{2}} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{A - C}}{2}}\right)^2$$

Es decir,

$$\boxed{\sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}} = \sqrt{A + \sqrt{B}}}$$

6. Radicales dobles

Son radicales que se encuentran dentro de otro radical relacionados mediante sumas o restas. Convertirlo a un solo radical significa aplicar la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}\,; \qquad C = \sqrt{A^2 - B};\ A^2 \geq B}$$

También podemos utilizar la regla, válida para números positivos x, y:

$$\boldsymbol{\sqrt{A + 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,; \qquad x + y = A;\ \ x \cdot y = B}$$

Ejemplo:

Descomponer usando $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{A + C}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\boldsymbol{A - C}}{2}}$

1) $X = \sqrt{7 - \sqrt{13}}$

Solución: Hacemos $A = 7$ y $B = 13$.

Calculamos C:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

$$= \sqrt{7^2 - 13}$$

$$= \sqrt{49 - 13}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

Luego, reemplazamos:

$$X = \sqrt{\frac{7 + 6}{2}} + \sqrt{\frac{7 - 6}{2}}$$

$$\therefore X = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

2) $Y = \sqrt{12 - \sqrt{23}}$

Solución: Hacemos $A = 12$ y $B = 23$.

Calculamos C:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

$$= \sqrt{12^2 - 13}$$

$$= \sqrt{144 - 23}$$

$$= \sqrt{121} = 11$$

Luego, reemplazamos:

$$Y = \sqrt{\frac{12 + 11}{2}} + \sqrt{\frac{12 - 11}{2}}$$

$$\therefore Y = \sqrt{\frac{23}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

3) Vamos a verificar primero la propiedad: $\sqrt{A + 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ donde $x + y = A; x \cdot y = B; x \geq 0; y \geq 0$

Solución:

$\sqrt{A - 2\sqrt{B}} = \sqrt{(x + y) + 2\sqrt{x \cdot y}}$ pues $x + y = A;\ x \cdot y = B$

$= \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x \cdot y}}$ pues $(\sqrt{x})^2 = x; (\sqrt{y})^2 = y$

$= \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ pues $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$

Ejemplo: Descomponemos los radicales utilizando la propiedad $\sqrt{A + 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

1) $U = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

Para $x = 2; y = 3$, tenemos $x + y = 5; x \cdot y = 6$, luego

$$U = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

2) $V = \sqrt{14 + \sqrt{192}}$

Para $x = 6; y = 8$, tenemos $x + y = 5; x \cdot y = 6$, y

$$V = \sqrt{14 + 2\sqrt{48}}$$

Por tanto $V = \sqrt{6} + \sqrt{8}$

3) $W = S = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}}$

Como $5x - 2 = (3x + 1) + (2x - 3)$ y también

$$(3x + 1) \cdot (2x - 3) = 6x^2 - 7x - 3$$

Luego por la propiedad:

$$W = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 3}$$

Actividad

Ahora es nuestro turno de aplicar la propiedad en los siguientes ejercicios:

1) $C = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

2) $F = \sqrt{21 + \sqrt{80}}$

3) $I = \sqrt{23 + 2\sqrt{57}}$

4) $D = \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$

5) $G = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}}$

6) $E = \sqrt{14 + \sqrt{196}}$

7) $H = \sqrt{13 + 2\sqrt{42}}$

8) $J = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}$

9) $K = \sqrt{8a + 1 + 2\sqrt{15a^2 + 7a - 2}}$

VALORACIÓN

Las raíces, especialmente la raíz cuadrada, son una herramienta matemática fundamental que aparece en una gran variedad de fórmulas y ecuaciones. Aquí te presento algunas de las más comunes:

Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto) se relaciona con los catetos (los otros dos lados) mediante la siguiente fórmula:

$$hipotenusa \ = \sqrt{cateto_1^2 + cateto_2^2}$$

Radio de un círculo de área A:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Velocidad final de un objeto en caída libre:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Desviación estándar:

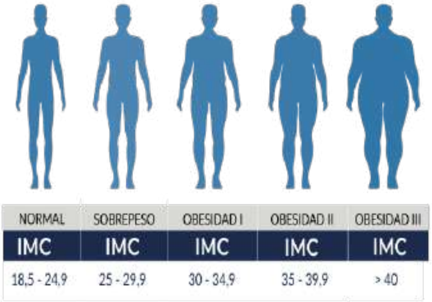
$$T = \sqrt{k \cdot r^3}$$

La tercera ley de Kepler (o ley de los periodos)

$$\sigma \ = \sqrt{\frac{\sum(x_i \ - \ \mu)^2}{N}}$$

La altura en el Índice de Masa Corporal (IMC):

$$altura = \sqrt{\frac{peso}{IMC}}$$



Estas fórmulas muestran cómo las raíces cuadradas y otros radicales son fundamentales para describir y analizar fenómenos en diversas disciplinas.

PRODUCCIÓN

Las pantallas de los monitores se suelen comercializar indicando su diagonal, ya que es una medida fácil de entender y comparar entre diferentes modelos, la diagonal, junto con el ancho o el alto, nos permite calcular la relación de aspecto de la pantalla (por ejemplo, $16 : 9$, $4 : 3$)

La pantalla de un televisor, celular o tableta es un rectángulo. La diagonal de este rectángulo forma un triángulo rectángulo con los lados correspondientes al ancho y alto de la pantalla. Para calcular la longitud de la diagonal, podemos utilizar el Teorema de Pitágoras, que establece que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (la diagonal en este caso) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (el ancho y el alto).

$$hipotenusa \ = \sqrt{cateto_1^2 + cateto_2^2}$$

Si la medida de los monitores de nuestro laboratorio de computación son de ancho 60 centímetros y de alto 40 centímetros. Para calcular la diagonal, utilizamos la fórmula del teorema de Pitágoras.

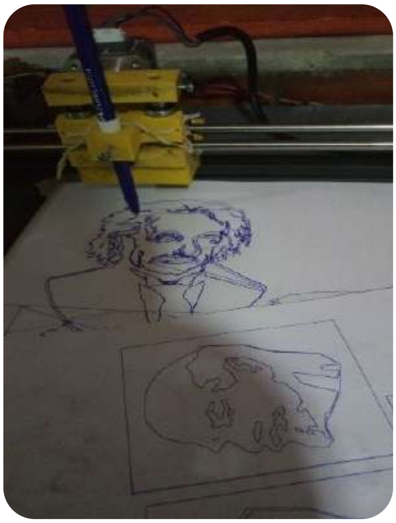
La raíz cuadrada es una herramienta esencial para calcular la diagonal de una pantalla, una medida fundamental en la industria de la electrónica de consumo.

En base a la lectura anterior, respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la diagonal de tu monitor del laboratorio de computación?
- En tu hogar realizamos la medición de las pantallas de televisor(es), monitor de computadora (sean personales o no), pantalla de los celulares y realizamos un cuadro con estas medidas encontradas.
- Elaboramos un mapa mental del tema avanzado y lo explicamos en clases.

RACIONALIZACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA



La racionalización algebraica puede parecer un concepto abstracto y limitado al ámbito de las matemáticas, pero en realidad tiene muchas aplicaciones en nuestra vida diaria, muchas veces más sutiles de lo que imaginamos.

Esta técnica matemática que nos permite eliminar las raíces del denominador de una fracción, tiene aplicaciones mucho más allá del ámbito estrictamente matemático. De hecho, sus principios se pueden aplicar a una amplia variedad de situaciones cotidianas, pues permite literalmente hacer una división racional de cantidades irracionales.

Es razonable considerar que la noción de conjugado, o de expresión conjugada, utilizada en la escuela y en niveles superiores de formación es consecuencia de la identidad polinomial $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$; la conocida diferencia de cuadrados. En función de estas similitudes introducimos la que denominamos definición escolar:

El conjugado de la expresión $a+b$ es $a-b$

Es así que el conjugado en expresiones racionales es una herramienta útil para eliminar radicales del denominador de una fracción y simplificar expresiones algebraicas. Su aplicación se basa en la propiedad de la diferencia de cuadrados

Actividad

Leemos y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es necesario racionalizar?
- ¿Es posible racionalizar una expresión que involucre radicales de orden arbitrario?
- ¿Por qué incluimos la noción de conjugado en el proceso de racionalización?

TEORÍA

Recuerda

Por el momento, no es posible calcular la raíz cuadrad de números negativos:

Ejemplo:

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

donde $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.

Números Irracionales

Los pitagóricos, seguidores de la escuela fundada por Pitágoras, se enfrentaron a una crisis filosófica cuando descubrieron la existencia de los números irracionales. Este descubrimiento surgió al intentar calcular la diagonal de un cuadrado unitario utilizando el teorema de Pitágoras. La longitud de la diagonal resultaba ser $\sqrt{2}$, un número que no podía expresarse como una fracción, lo que violaba su creencia fundamental de que todos los números eran racionales (fracciones de enteros).

1. Racionalización

La racionalización es una operación que permite eliminar raíces de numeradores o denominadores. En general se racionaliza los denominadores. Para ello, se utilizan las reglas de las potencias y de factorización.

a) Racionalización de fracciones de la forma $\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\boldsymbol{A}}}$

Para racionalizar una fracción, se debe multiplicar el denominador por el radicando del denominador, luego el radicando del denominador se convierte en una potencia perfecta.

Notemos que cuando multiplicamos dos radicales con índice 2, en el producto desaparece el radical:

$$\sqrt{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}}=\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2=\boldsymbol{a}$$

Ejemplo:

Hallamos el producto de los radicales en cada caso:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{49}\right)^2=2$

2) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=\left(\sqrt{169}\right)^2=169$

3) $\sqrt{23}\cdot\sqrt{23}=\left(\sqrt{529}\right)^2=529$

4) $\sqrt{31}\cdot\sqrt{31}=\left(\sqrt{961}\right)^2=961$

5) $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=(\sqrt{n})^2=n$, si $n\geq 0$

6) $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=(\sqrt{y})^2=y$

7) $\sqrt{p-1}\cdot\sqrt{p-1}=\left(\sqrt{p-1}\right)^2$

$=p-1$

si $p\geq 1$.

Para racionalizar un monomio se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por la raíz del denominador.

$$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}}=\frac{b\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}=\frac{\boldsymbol{b}\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}}$$

Ejemplo:

Racionalizamos:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Solución

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$

Solución

$$\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

c) $\frac{17}{\sqrt{11}}$

Solución

$$\frac{17}{\sqrt{11}}=\frac{17}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$$

$$=\frac{17\cdot\sqrt{11}}{(\sqrt{11})^2}$$

$$=\frac{17\sqrt{11}}{11}$$

$$\therefore\frac{17}{\sqrt{11}}=\frac{17\sqrt{11}}{11}$$

e) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}};x>0$

Solución

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}{x}$$

$$=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1}=x^{-\frac{1}{6}}$$

$$\therefore\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{6}}$$

f) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

Solución

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\sqrt{\mathbf{6}}}=\frac{(\mathbf{1}+\sqrt{3})\sqrt{\mathbf{6}}}{(\sqrt{\mathbf{6}})^{\mathbf{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\mathbf{6}}+\sqrt{\mathbf{18}}}{6}=\frac{\sqrt{\mathbf{6}}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}=\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{6}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$$

$$\therefore\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{6}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$$

g) $\frac{\sqrt{x}\cdot y+x\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x\cdot y}}$

Solución

$$\frac{\sqrt{x}\cdot y+x\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x\cdot y}}\cdot\frac{\sqrt{x\cdot y}}{\sqrt{x\cdot y}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}\cdot y+x\cdot\sqrt{y})\cdot\sqrt{x\cdot y}}{(\sqrt{x\cdot y})^2}$$

$$=\frac{xy\sqrt{y}+yx\sqrt{x}}{xy}$$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

h) $\frac{a-b}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}},a>0;b<0;a\neq b$

Solución

$$\frac{a-b}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}=\frac{a-b}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}=\frac{(a-b)\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\left(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\therefore\frac{a-b}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Ventajas de racionalizar

Una de las ventajas del porque racionalizar es que, si necesitamos sumar o restar fracciones con radicales, es más fácil calcular si hay números enteros en el denominador en lugar de números irracionales.

Ejemplo:

Sería más complicado sumar lo siguiente:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

En cambio, resulta más efectivo haber racionalizado ambos sumandos:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

$$=\frac{7(2\sqrt{3})+3(3-\sqrt{2})}{21}$$

Ejercicio resuelto

Racionalizamos para efectuar la diferencia:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Solución

Para $\frac{3}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

Para $\frac{3}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}$$

Actividad

Racionalizamos las siguientes fracciones:

1) $R=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

2) $\bar{A}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

3) $C=\frac{10}{1+\sqrt{10}}$

4) $\bar{I}=\frac{54}{\sqrt{54}+\sqrt{53}}$

5) $O=\frac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

6) $N=\frac{p+1}{1+\sqrt{p}}$

7) $A=\frac{3}{\sqrt{3}-3}$

8) $L=\frac{1}{1-\sqrt[2]{2^4}}$

9) $I=\frac{1}{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}$

10) $Z=\frac{10}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$

11) $\underline{A}=\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

12) $\bar{R}=\frac{1}{\sqrt{1001}-\sqrt{1000}}$

Para racionalizar una fracción, donde el índice del radical sea diferente de 2, por ejemplo 3, multiplicamos por un radical de tal forma se convierta en un cubo perfecto para que pueda simplificarse. A continuación, racionalizamos radicales que tiene distintos índices.

Ejemplo:

Racionalizamos:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{b}}$

Solución

$$\frac{1}{\sqrt[5]{b}} = \frac{1}{\sqrt[5]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}}$$
$$= \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{b^5}}$$
$$= \frac{\sqrt[5]{b}}{b}$$
$$= b^{\frac{1}{5}-1}$$
$$= b^{-\frac{4}{5}}$$

2) $\frac{a^2}{\sqrt[9]{a^2}}$

Solución

$$\frac{a^2}{\sqrt[9]{a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt[9]{a^2}} \cdot \frac{\sqrt[9]{a^7}}{\sqrt[9]{a^7}}$$
$$= \frac{a^2 \cdot \boldsymbol{\sqrt[9]{a^7}}}{\boldsymbol{\sqrt[9]{a^9}}}$$
$$= \frac{a^{2+\frac{7}{9}}}{a}$$
$$= \boldsymbol{a^{2+\frac{7}{9}-1}}$$
$$= a^{\frac{16}{9}}$$

3) $\frac{10}{\sqrt[3]{10}}$

Solución

$$\frac{10}{\sqrt[3]{10}} = \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^2}}$$
$$= \frac{10\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^3}}$$
$$= 10^{1+\frac{1}{3}-1}$$
$$= 10^{\frac{1}{3}}$$

4) $\frac{b}{\sqrt[5]{b}}$

Solución

$$\frac{b}{\sqrt[5]{b}} = \frac{b}{\sqrt[5]{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt[5]{b^4}}}{\boldsymbol{\sqrt[5]{b^4}}}$$
$$= \frac{b\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{b^5}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{b\sqrt[5]{b^4}}}{\boldsymbol{b}}$$

5) $\frac{2y^5}{3\sqrt[3]{5y^2}}$

$$= \frac{2y^5}{3\sqrt[3]{5y^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt[3]{5^2y}}}{\boldsymbol{\sqrt[3]{5^2y}}}$$
$$= \frac{2y^5\sqrt[3]{25y}}{3\sqrt[3]{5^3y^3}}$$
$$= \frac{2y^5\sqrt[3]{25y}}{3 \cdot 5 \cdot y}$$
$$= \frac{\boldsymbol{2y^4\sqrt[3]{25y}}}{\boldsymbol{15}}$$

b) Racionalización de fracciones de la forma $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}}$

Para racionalizar una fracción que contiene dos o más radicales debemos multiplicar por su conjugada. El conjugado de un binomio es el mismo binomio, pero con el signo del segundo término cambiado.

Producto de un conjugado

El producto de binomios conjugados, es decir la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda. En otras palabras, se cumple la fórmula:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

Ejemplo:

Hallamos el conjugado:

Expresión	Conjugado
$c + d$	$c - d$
$1 + \sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$
$5 - 7abc$	$5 + 7abc$
$\sqrt{a} - (\sqrt{a+b})$	$\sqrt{a} + (\sqrt{a+b})$
$10b - \sqrt{z}$	$10b + \sqrt{z}$
$1 \mp x$	$1 \pm x$

Ejemplo:

Racionalizamos

1) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}$$
$$= \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$$

2) $\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

3) $\frac{5(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{5(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{5(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}{\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$$
$$= \frac{5(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$
$$= \frac{5(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$
$$= 5(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
$$= 5\sqrt{x}-5\sqrt{y}$$

Actividad

Racionalizamos las siguientes fracciones:

1) $R = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$

2) $\bar{A} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

3) $C = \frac{10}{1+\sqrt{10}}$

4) $I = \frac{1}{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}$

5) $O = \frac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

6) $N = \frac{p+1}{1+\sqrt{p}}$

7) $A = \frac{3}{\sqrt{3}-3}$

8) $L = \frac{1}{1-\sqrt[2]{2^4}}$

9) $\bar{I} = \frac{54}{\sqrt{54}-\sqrt{53}}$

10) $Z = \frac{10}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$

11) $\underline{A} = \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

12) $\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{1001}-\sqrt{1000}}$

c) Racionalización de fracciones de la forma $\frac{C}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}}$

Debemos multiplicar por alguna expresión que satisfaga la suma o diferencia de cubos perfectos. Es decir, se debe aplicar el producto notable:

$$(a-b)(\boldsymbol{a^2+ab+b^2}) = a^3-b^3$$
$$(a+b)(\boldsymbol{a^2-ab+b^2}) = a^3+b^3$$

Ejemplo:

Racionalizamos buscando la suma y diferencia de cubos

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$

Solución

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}\right)\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{5^{\frac{2}{3}}+5^{\frac{1}{9}}+5^{\frac{2}{3}}}{(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3)}$$

$$= \frac{2\left(5^{\frac{2}{3}}\right)+5^{\frac{1}{9}}}{5-3} = \frac{2\left(5^{\frac{2}{3}}\right)+5^{\frac{1}{9}}}{5-3}$$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}$

Solución

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a+b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a-b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a+b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a-b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a+b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2}{a+b+a-b}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2-\sqrt[3]{a+b}\cdot\sqrt[3]{a+b}+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^2}{2a}$$

Ejercicio resuelto

¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b}$ *si*

$$a = \frac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}} \text{ y } b = \frac{2-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}?$$

Solución

Para a*, racionalizamos:*

$$\frac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}} = \frac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(2)^2+2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{(2)^2+2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$$

$$= \frac{(2+\sqrt[3]{3})((2)^2+2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}{2^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}$$

$$= \frac{(2+\sqrt[3]{3})((2)^2+2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}{5}$$

Para b*, racionalizamos*

$$\frac{2-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}} = \frac{2-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(2)^2-2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{(2)^2-2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$$

$$= \frac{(2-\sqrt[3]{3})((2)^2-2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}{2^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}$$

$$= \frac{(2+\sqrt[3]{3})((2)^2-2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}{11}$$

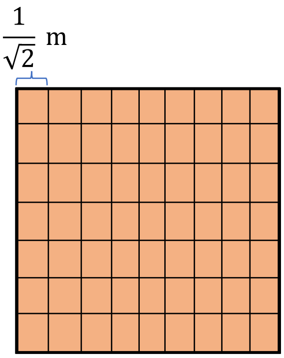
$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{11(2+\sqrt[3]{3})((2)^2+2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}{5(2-\sqrt[3]{3})((2)^2-2\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2)}$$

2. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problemas varios que incluyen raíces cuadradas.

Problema

El piso de un salón fue cubierto con mosaicos como en la figura: ¿Cuánto mide el lado superior del piso, conociendo la medida de uno de los lados del mosaico?



Solución

En el lado superior del piso cubierto, se pueden contar 9 mosaicos, por tanto la longitud de ese lado es $9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

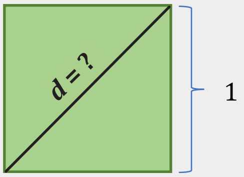
Racionalizando:

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

Respuesta

Aproximadamente, el lado superior del piso mide 6,36 metros.

Si el lado de un cuadrado vale 1...



Solución

Por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$d^2 = \sqrt{1^2+1^2} = 2$$

Entonces $d^2 - 2 = 0$

Factorizando:

$$\left(d-\sqrt{2}\right)\left(d+\sqrt{2}\right) = 0$$

Como las longitudes son positivas

$$d = \sqrt{2}$$

¡Un número irracional!

Actividad

Racionalizamos las siguientes fracciones buscando la suma o diferencia de cubos:

1) $\bar{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}-3}$

2) $\bar{A} = \frac{3}{\sqrt[3]{13}+5}$

3) $C = \frac{5}{\sqrt[3]{16}-7}$

4) $\bar{I} = \frac{7}{\sqrt[3]{19}+9}$

5) $O = \frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt[3]{9}}$

6) $N = \frac{4}{1-\sqrt[3]{m}}$

7) $A = \frac{n^3-1}{1+\sqrt[3]{n}}$

8) $L = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$

9) $I = \frac{1}{\sqrt[3]{2025}-\sqrt[3]{2024}}$

10) $Z = \frac{8}{(a^2-ab+b^2)}$

11) $\underline{A} = \frac{x^3-y^3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

12) $M = \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}$

13) $\bar{O} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}$

14) $S = \frac{t}{t^3+1}$

15) $Y = \frac{8}{(a^2+ab+b^2)}$

16) $Z = \frac{18}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}$

Raíces en matemática

Si se estudia a profundidad el cálculo de la raíz cuadrada descubriremos que está relacionado con diversas áreas de la matemática

Ecuaciones de segundo grado, funciones y gráficas

Teorema de Pitágoras, trigonometría

Raíz Cuadrada

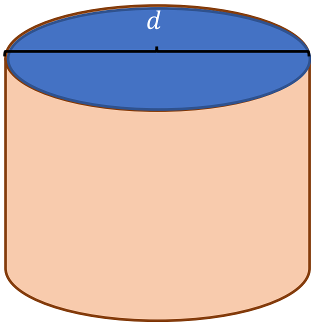
Exponentes fraccionarios, funciones y gráficas

Números irracionales, Números reales

Problema

Un tanque cilíndrico tiene un área de base de $\pi \cdot \sqrt{8}$ metros cuadrados. Si se quiere construir una tapa circular que cubra exactamente la base del tanque, ¿cuál debería ser el diámetro de la tapa, racionalizando la expresión?

Solución



El área del círculo es $\pi \cdot \sqrt{8}$, luego el radio es

$$r^2 \cdot \pi = \pi \cdot \sqrt{8} \Longrightarrow r^2 = \sqrt{8}$$

luego factorizamos

$$r^2 - \sqrt{8} = \left(r - \left(\sqrt{\sqrt{8}}\right)\right)\left(r + \left(\sqrt{\sqrt{8}}\right)\right) = 0$$

La longitud tiene que ser una cantidad positiva, por tanto

$$r = \sqrt{\sqrt{8}}$$

Sin embargo $r = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ y por tanto $d = 2\sqrt{2\sqrt{2}} \approx 3.40$

Respuesta

El diámetro de la tapa debería ser aproximadamente 3.40 metros.

Problema

Una electricista está calculando la potencia eléctrica en un circuito utilizando la fórmula $P = \frac{V^2}{R}$, pues tiene a mano los valores $V = \sqrt{50}$ voltios y $R = \sqrt{3}$ ohmios, ¿cuál es la potencia del circuito después de racionalizar la expresión?

Fuente: OpenAi, 2024

Solución

Reemplazando los valores en la fórmula dada:

$$P = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow P = \frac{\left(\sqrt{50}\,\mathrm{V}\right)^2}{\sqrt{3}\ \Omega} = \frac{50}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega} = \frac{50}{\sqrt{3}}\ \mathrm{W}$$

Racionalizando el valor $\frac{50}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28.87$$

Respuesta

La potencia del circuito es de aproximadamente 28.87 Watts.

Problema

Amalia tiene una prueba de matemática en el curso básico de ingeniería, para el cual se prepara y se propone resolver la siguiente expresión:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} - 7$$

Solución

Racionalizando cada sumando:

- $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}$

$$\vdots$$

- $\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \cdot \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$

$$= \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} = \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

Luego, reemplazamos en la expresión dada:

$$S = \underbrace{\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} + \cdots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}}_{fracción\ homogénea} - 7$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} - 7$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1} - 7 = \frac{1-10}{-1} - 7 = \frac{-9}{-1} - 7 = 9 - 7 = 2$$

Respuesta $S = 2$

VALORACIÓN

Simplificar una expresión para eliminar raíces en el denominador, tiene varias aplicaciones prácticas, pues son puentes a la obtención de fórmulas que modelan diversos fenómenos en la vida diaria y en diferentes campos:

La optimización de las dimensiones en la fabricación de piezas para proyectos de robótica puede hacer que el proceso de impresión 3D sea más eficiente y preciso. Por ejemplo, simplificar las dimensiones de una pieza del motor puede garantizar que encaje y funcione correctamente, reduciendo la necesidad de ajustes posteriores.

Ingeniería y Física, las ecuaciones a menudo contienen raíces cuadradas o cúbicas. Racionalizar estas expresiones puede simplificar los cálculos y hacer que las soluciones sean más manejables. Por ejemplo, al calcular la resistencia en circuitos eléctricos o la velocidad de un objeto en movimiento.

Arquitectura y construcción, los arquitectos y constructores utilizan la racionalización para simplificar cálculos relacionados con áreas y volúmenes. Esto es crucial para determinar la cantidad de materiales necesarios y para asegurar la estabilidad estructural de los edificios.

Economía y Finanzas, en finanzas, la racionalización puede ayudar a simplificar fórmulas complejas que involucran tasas de interés y amortización de préstamos. Esto facilita la comprensión y comparación de diferentes opciones financieras:

Computación, en algoritmos y programación, la racionalización puede optimizar el rendimiento de los cálculos, especialmente en gráficos por computadora y procesamiento de señales.

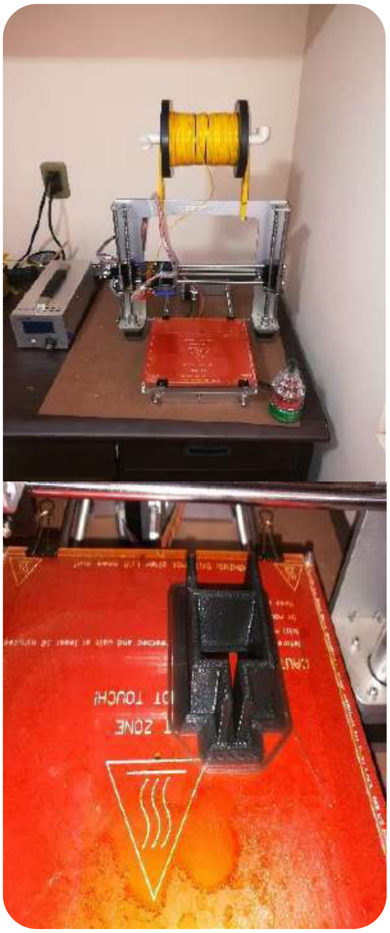
Óptica, en el cálculo del índice de refracción y otros fenómenos ópticos, la racionalización ayuda a simplificar las expresiones que contienen raíces cuadradas.

Electromagnetismo: En el análisis de circuitos eléctricos, especialmente en circuitos de corriente alterna (AC), la racionalización se utiliza para simplificar la impedancia compleja.

Concentración de soluciones, en la preparación y análisis de soluciones químicas, la racionalización ayuda a simplificar las fórmulas que contienen raíces cuadradas.

Cálculo de intereses, en la determinación de pagos de intereses y amortización de préstamos, la racionalización facilita la simplificación de las fórmulas financieras.

Dosificación de medicamentos, en la dosificación de medicamentos, especialmente en pediatría, la racionalización se utiliza para simplificar las fórmulas que calculan la dosis basada en la superficie corporal.



PRODUCCIÓN

La/el maestra/o anotará en el pizarrón, tantos ejercicios sobre racionalización de todo tipo como la mitad de la cantidad de estudiantes en la pizarra, asignado al azar a las/los estudiantes que elaboren fichas anotando cada ejercicio en una de ellas. Luego cada ejercicio de la ficha deberá ser resuelto por los estudiantes elegidos, anotando las respuestas al reverso de la ficha, en un plazo no mayor a 5 minutos (los ejercicios deben ser planteados para su resolución en ese lapso de tiempo).

La otra mitad recibirá de cada estudiante una sola ficha, pasando uno por uno al pizarrón para escribir y exponer en detalle el proceso para obtener la respuesta, en el reverso de la ficha.

- Si la/el primer estudiante no pudo resolver a tiempo el ejercicio, el segundo deberá resolverlo en pizarra.
- Si el segundo estudiante presenta dificultades para la resolución del ejercicio en pizarra, la/el maestra/o deberá orientarle en su resolución.
- Si la cantidad de estudiantes es impar, la/el maestra/o deberá hacer una ficha extra con un problema y su respuesta al reverso para tal estudiante.

Una vez terminadas las exposiciones de cada uno de los estudiantes, la/el maestra/o deberá plantear otros problemas, de modo que sean ahora los estudiantes que presentaron su exposición, aquellos que resuelvan el ejercicio de cada ficha, anotando solo la respuesta al reverso.

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

ECUACIONES LINEALES

PRÁCTICA

Las ecuaciones lineales, pese a su aparente simplicidad, tienen una amplia gama de aplicaciones en nuestra vida diaria. Desde la planificación de menús hasta la gestión de costos, estas herramientas matemáticas son fundamentales para optimizar procesos y garantizar la calidad de los productos.

Teresa tiene un negocio en el que produce pizzas artesanales. Los costos de producción se dividen en dos partes: un costo fijo, que siempre es el mismo, y un costo variable, que depende de la cantidad de pizzas que produce, ya que incluye el costo de los ingredientes para cada pizza. Podemos modelar el costo total de producción de la siguiente manera:

- x: Número de unidades producidas
- C: Costo total de producción
- a: Costo fijo (Bs 12)
- b: Costo variable por unidad (Bs 5)
- $C = bx + a$

Fuente: OpenAi, 2024

Las ecuaciones lineales son una herramienta esencial para comprender y modelar nuestro entorno. Su alcance es tan amplio que abarca desde las ciencias exactas hasta las ciencias sociales, así como las actividades cotidianas. Dominar las ecuaciones lineales es como tener una brújula para navegar por los numerosos desafíos de la vida.

Actividad

Respondemos las siguientes actividades y preguntas:
- ¿Qué podemos hacer con este modelo?
- Crea tu propio modelo para la actividad económica de tu familia
- ¿Por qué son tan importantes las ecuaciones en el diario vivir?

TEORÍA

Dato curioso

Fuente: OpenAi, 2024

Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió entre el siglo III y IV, conocido principalmente por sus innovaciones en el campo del álgebra. A menudo se le llama "el padre del álgebra" debido a sus importantes contribuciones a la resolución de ecuaciones algebraicas, que sentaron las bases de este campo matemático.

1. Ecuación

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas que se verifica solo cuando las variables o incógnitas toman valores específicos.

Ejemplo:

a) $x + 3 = 0$ Ecuación de 1° grado con 1 incógnita

b) $5x + 2 = \frac{2}{3}x$ Ecuación de 1° grado con 1 incógnita

c) $x + y = 6$ Ecuación de 1° grado con 2 incógnitas

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$ Ecuación de 2° grado con 1 incógnita

e) $x^2 + y^2 = 25$ Ecuación de 2° grado con 2 incógnitas

2. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal o de primer grado es una igualdad matemática que involucra una o más incógnitas. En este estudio, nos enfocaremos en las ecuaciones lineales con una sola incógnita.

La forma general de una ecuación de primer grado es:

$$ax + b = 0; \quad a \neq 0$$

Donde a y b son constantes (números) y “x” es la incógnita o variable.

Ejemplo:

Son ecuaciones lineales:

a) $3x + 1 = 13$

b) $2x - (x - 2) = 2(x - 1)$

c) $\{2 - [x - (x - 3)]\} + 1 = -(5x - 2) - 2(x - 3)$

d) $\dfrac{x + 1}{2} + \dfrac{2x - 4}{4} = 2$

3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado, aplicamos las siguientes propiedades de igualdad de los números reales:

a)	Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$	Propiedad de la suma
b)	Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$	Propiedad de la sustracción
c)	Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$	Propiedad de la multiplicación
d)	Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	Propiedad de la división

Es decir, a una igualdad podemos sumar, restar, multiplicar, y dividir a ambos miembros de la igualdad sin que se altere la igualdad.
Una igualdad tiene dos miembros:

$$\underbrace{2x - 5}_{\text{Primer miembro}} \overset{\text{Igualdad}}{=} \overbrace{3(4 - 3x)}^{\text{Segundo miembro}}$$

Reglas para resolver ecuaciones lineales

***Regla 1**. Si hay paréntesis en la ecuación debemos eliminarlos como en las operaciones habituales con números.*
***Regla 2**. Podemos sumar o restar cualquier número a ambos miembros de la ecuación, por lo que cualquier término "x" o número que esté sumando se mueve al otro lado restando y viceversa.*
***Regla 3**. Mueva los términos "x" a un lado y los números al otro.*
***Regla 4**. Reducir los términos semejantes.*
***Regla 5**. Cualquier número que se multiplica, toda la expresión, de un lado se mueve al otro lado dividiendo, y un número que se divide, toda la expresión, de un lado se mueve al otro lado multiplicando*

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita debemos despejar la incógnita (dejar solo a la incógnita) utilizando las propiedades antes mencionadas.

Ejemplo:

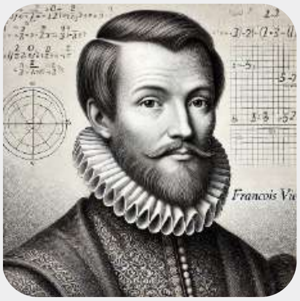
Resolvemos $5x - 9 = 3x + 7$

$5x - 9 = 3x + 7$	El objetivo será dejar solo a "x"
$5x - 9 + 9 = 3x + 7 + 9$	Sumar 9 a ambos miembros
$5x - 3x = 3x + 16 - 3x$	Restamos $3x$
$2x = 16$	Dividimos entre 2
$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{16}{2}$	Simplificando
$x = 8$	

Para verificar se sustituye la solución en la ecuación original, veamos:

$5x - 9 = 3x + 7$	Para probar sustituimos el valor de "x"
$5(8) - 9 = 3(8) + 7$	$x = 8$ sustituimos en la ecuación
$40 - 9 = 24 + 7$	Operamos
$31 = 31$	Se cumple la igualdad, por tanto $x = 8$ es solución de la ecuación.

François Viète



Fuente: OpenAi, 2024

(1540-1603)
Matemático francés, fue el primero que utilizó letras para designar a las incógnitas y las constantes de las ecuaciones algebraicas.

Actividad

Resolvemos aplicando las propiedades de igualdad y realizando la prueba para verificar la igualdad

1) $x + 2 = 3$
2) $2x - 2 = 10$
3) $4x - 2 = 3x - 12$
4) $6x - 2 = 4x + 2$
5) $8x - 2 = 4x + 2$
6) $10x - 1 = 8x + 3$
7) $4x - 1 = 10x - 2$
8) $6x - 2 = 10$
9) $10x + 2 = 0$
10) $8x - 1 = 2x + 5$
11) $4x + 3 = 2x + 3$
12) $12x - 4 = 2x - 4$

¿El epitafio de Diofanto?

Cuenta la leyenda que en la tumba de Diofanto se inscribió este epitafio:

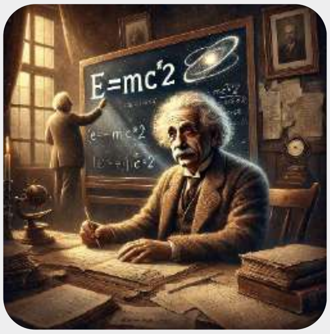
Diofanto pasó una sexta parte de su vida en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte como soltero. Cinco años después de casarse, tuvo un hijo que murió cuatro años antes que él, habiendo vivido la mitad de los años que vivió su padre.

Si x representa la edad de Diofanto al morir, la información anterior se representa con la ecuación lineal:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

¿El epitafio de Diofanto?

En 1905 Albert Einstein estudio una de las ecuaciones ($E=mc^2$) más famosas de la física en su artículo sobre la teoría de la relatividad especial.



Fuente: OpenAi, 2024

Las ecuaciones lineales se aplican para modelar problemas como la oferta y la demanda en economía.

Para resolver de manera sencilla una ecuación, se utiliza la transposición de términos de un miembro al otro, lo que se basa en las propiedades de las igualdades. Por ejemplo, si un término está sumando en un lado, pasa al otro lado restando; si está restando, pasa sumando; si multiplica, pasa dividiendo; y si divide, pasa multiplicando. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

Resolvemos $3x−5=7−x$

$3x-5=7-x$ El objetivo es despejar solo a “x”

$3x+x=7+5$ Sumando $+x$; $+5$ y operando

$4x=12$ 4 esta miltiplicando a x y pasa a dividir

$x=\frac{12}{4}$ Finalmente x esta solo en el primer miembro

$x=3$

Para la verificación sustituyamos el valor de la incógnita en la ecuación original.

$3x-5=7-x$ Para probar sustituimos el valor de “x”

$3(3)-5=7-3$ Operamos

$9-5=4$

$4=4$ Se cumple la igualdad, por tanto $x=3$ es solución de la ecuación.

Ejemplo:

Resolver $3x-\frac{1}{2}=2(x-2)$

$3x-\frac{1}{2}=2x-4$ Distributividad en lado derecho

$3x-2x=\frac{1}{2}-4$ Sumando $-2x$; $+\frac{1}{2}$ y operando

$x=\frac{1-8}{2}$ Sumando los términos

$x=-\frac{7}{2}$

Verificación:

$3x-\frac{1}{2}=2(x-2)$ Sustituimos el valor de “x”

$3\left(-\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{2}=2\left(-\frac{7}{2}-2\right)$ Operamos las fracciones

$-\frac{21}{2}-\frac{1}{2}=-7-4$ Sumando la fracción homogénea

$\frac{-21-1}{2}=-11$ Operamos

$-11=-11$ Es una identidad, así $x=-\frac{7}{2}$ es solución de la ecuación.

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $x-2=8$
2) $x-5=10$
3) $x-13=-2$
4) $6x+7=4x+2$
5) $5x-2=x+8$
6) $2025-x=x+2026$
7) $x-1=10x-52$
8) $x+60=10x$
9) $10x-2=8$
10) $8x+5=x+5$
11) $-x+3=x-10$
12) $-x+55=2x-5$

4. Resolución de ecuaciones con signos de agrupación

Son ecuaciones afectadas por signos de agrupación, para resolverlas, es necesario eliminar dichos signos, teniendo en cuenta el signo o coeficiente que afecta a cada término dentro de los paréntesis o corchetes.

Ejemplo:

Resolvemos $2(x-5)=-(x-2)$

$2(x-5)=-(x-2)$	Por distributividad
$2x-10=-x+2$	Pasando la variable y termino
$2x+x=2+10$	Sumando términos
$3x=12$	3 pasa a dividir al segundo miembro
$x=\frac{12}{3}$	Simplificando
$x=4$	

Ejemplo:

Resolvemos $-\{-[2-(4x-5)]-x\}=x$

$-\{-[2-(4x-5)]-x\}=x$	Distribuimos el signo negativo en ( )
$-\{-[2-4x+5]-x\}=x$	Distribuimos el signo negativo en [ ]
$-\{-2+4x-5-x\}=x$	Distribuimos el signo negativo en { }
$2-4x+5+x=x$	Transponiendo los términos
$-4x+x-x=-5-2$	Sumando
$-4x=-7$	Dividiendo por (-4)
$x=\frac{7}{4}$	

Ejemplo:

Resolvemos

$$-\{-[3-2(4m-5)-5(4-m^2)]+2m\}=-5[-2(m+1)-m^2]$$

$$-\{-[3-8m+10-20+5m^2]+2m\}=-5[-2m-2-m^2]$$

$$-\{-3+8m-10+20-5m^2+2m\}=10m+10+5m^2$$

$$3-8m+10-20+5m^2-2m=5m^2+10m+10$$

$$5m^2-5m^2-8m-2m-10m=10-3-10+20$$

$$-20m=30-13$$

$$-20m=17$$

$$20m=-17$$

$$m=-\frac{17}{20}$$

Signos de agrupación

Son símbolos matemáticos usados para agrupar números o expresiones algebraicas.

( )	*Paréntesis*
[ ]	*Corchetes*
{ }	*Llaves*

Signos de agrupación

1). *Identificamos los signos de agrupación.*
2). *Eliminamos los signos de agrupación internos.*
3). *Distribuímos los números o signos multiplicando los términos dentro de los paréntesis.*
4). *Trabajamos con los corchetes y llaves de la misma manera, desde interno hacia lo externo.*
5). *Simplificamos la expresión combinando los términos semejantes.*

Si queremos suprimir signos de agrupación:

- *Si el signo anterior es positivo, los términos se mantienen con el mismo signo.*
- *Si el signo anterior es negativo, los términos se extraen con el signo cambiado.*

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $2(x-2)=2$
2) $2x-2=-(x-1)$
3) $4(x-3)=-(4-x)$
4) $6(x+12)=-(4x+2)$
5) $2-(x-2)=x-2$
6) $24-x=x-(x+4)$
7) $x-\{x-[x-(x-1)]-x\}=x-6$
8) $8-\{x-[2x-2(x+4)]-8\}=2(x-1)$
9) $12-\{4x+[10-2(x-1)]-1\}=-(x-8)$

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

El primer método para encontrar el m.c.m. es el siguiente: escribimos los múltiplos de cada número, identificamos los múltiplos comunes y elegimos el más pequeño entre ellos.

El segundo método para hallar el mínimo común múltiplo es seguir estos pasos:

- *Descomponer cada número en factores primos.*
- *Seleccionar los factores primos, tanto comunes como no comunes, con sus mayores exponentes.*
- *Multiplicar los factores primos seleccionados.*

Ejemplo:

12	8	6	2
6	4	3	2
3	2	3	2
3	1	3	3
1	1	1	

El mínimo común múltiplo es:

$$\text{m.c.m}(12, 8, 6) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

¿Qué pasa con 0 = 0?

*Al resolver una ecuación, puede ocurrir que al simplificar los términos semejantes obtengamos 0=0. En ese caso, hay **infinitas soluciones**, ya que cualquier valor de la incógnita x cumple la igualdad.*

Lo que tenemos no es una ecuación, sino una identidad: una expresión algebraica que se verifica para cualquier valor de las variables. Por ejemplo:

$$2x + 3 = -x + 3 + 3x$$

5. Resolución de ecuaciones con coeficiente fraccionario

Para eliminar las fracciones, multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.

Ejemplo:

Resolvemos $\dfrac{2x-2}{2} + \dfrac{x-2(x-4)}{6} = \dfrac{x}{3}$

El mínimo común múltiplo de 2 y 6 es 6, es decir, m.c.m $(2, 6) = 6$ se multiplica en la ecuación:

$$\frac{6(2x-2)}{2} - \frac{6[x-2(x-4)]}{6} = \frac{6x}{3}$$

$$3(2x-2) - [x-2(x-4)] = 2x$$

$$6x - 6 - [x - 2x + 8] = 2x$$

$$6x - 6 - x + 2x - 8 = 2x$$

$$6x - x + 2x - 2x = 6 + 8$$

$$5x = 14$$

$$x = \frac{14}{5}$$

6. Ecuaciones fraccionarias

Son ecuaciones que además de tener coeficientes fraccionarios, tienen denominadores con incógnitas o variables. Para resolverlas, se multiplica por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores. Para encontrar el m.c.m. primero se deben factorizar los denominadores.

Ejemplo:

Resolvemos $\dfrac{2x}{x+1} - 3 = -\dfrac{x}{x-1}$

El m.c.m. de "x + 1" y "x − 1" es su producto, es decir $(x-1)(x+1)$, luego el mismo se multiplica n ambos lados de la ecuación:

$$\frac{2x(x-1)(x+1)}{x+1} - 3(x-1)(x+1) = -\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$2x(x-1) - 3(x-1)(x+1) = -x(x+1)$$

$$2x^2 - 2 - 3(x^2 - 1) = -x(x+1)$$

$$2x^2 - 2 - 3x^2 + 3 = -x^2 + x$$

$$2x^2 - 3x^2 + x^2 - x = 2 - 3$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2x}{2} + 3 = 8$

2) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{2} - 7 = 6$

3) $\dfrac{4x}{7} - \dfrac{x}{2} + x = 3$

4) $\dfrac{2x-2}{2} - 5 = \dfrac{x-3}{3}$

5) $\dfrac{2x-10}{5} - 12 = \dfrac{x+12}{5}$

6) $\dfrac{2x-10}{7} + 1 = \dfrac{x+12}{3}$

7) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{10x-1}{9}$

8) $\dfrac{m-3}{12} - \dfrac{2m-1}{4} = \dfrac{m-8}{3}$

9) $\dfrac{m+1}{10} - \dfrac{m-12}{5} = \dfrac{2m-10}{5} + \dfrac{6m-12}{2}$

Ejemplo:

Resolvemos $\frac{3x+1}{6x-2}=\frac{2x+5}{4x-13}$

Aplicamos la propiedad: $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $b,d\neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\longrightarrow ad=bc$

$$\frac{3x+1}{6x-2}=\frac{2x+5}{4x-13}\quad\Longrightarrow\quad(3x+1)(4x-13)=(2x+5)(6x-2)$$

$$\Longrightarrow\ 12x^2-39x+4x-13=12x^2-4x+30x-10$$

$$\Longrightarrow\ -13+10=12x^2-12x^2+35x+26x$$ ordenando en términos semejantes

$$\Longrightarrow\ -3=61x$$ propiedad $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0,$ $\boxed{a\cdot b=c\Longrightarrow b=\frac{c}{a}}$

$$\Longrightarrow\ x=-\frac{3}{61}$$

Ejemplo:

Resolvemos $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-4}{3x-2}=\frac{2}{3}$

El m.c.m. de "$2x+1$" ;“$3x-2$” y 3 es $3(2x+1)(3x-2)$, luego se multiplica en la ecuación:

$$\frac{3(2x+1)(3x-2)(2x-1)}{2x+1}-\frac{3(2x+1)(3x-2)(x-4)}{3x-2}=\frac{2\cdot 3(2x+1)(3x-2)}{3}$$

$$3(3x-2)(2x-1)-3(2x+1)(x-4)=2(2x+1)(3x-2)$$ aplicamos la propiedad distributiva

$$3(6x^2-7x+2)-3(2x^2-7x-4)=2(6x^2-x-2)$$

$$18x^2-21x+6-6x^2+21x+12=12x^2-2x-4$$ todas las incógnitas al primer miembro

$$2x=-22$$

$$x=-\frac{22}{2}$$ aplicamos la propiedad de división

$$x=-11$$

Ejemplo:

Resolvemos $\frac{3}{m-4}-\frac{2}{m-3}=\frac{8}{m^2-7m+12}$

Note que $m^2-7m+12=(m-4)(m-3)$. El m.c.m. de "$m-4$" y "$m-3$“ es $(m-4)(m-3)$, luego:

$$\frac{(m-4)(m-3)\cdot 3}{m-4}-\frac{(m-4)(m-3)\cdot 2}{m-3}=\frac{(m-4)(m-3)\cdot 8}{(m-4)(m-3)}$$

$$3(m-3)-2(m-4)=8$$

$$3m-9-2m+8=8$$

$$3m-2m=8-8+9$$

$$m=9$$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones para x:

1) $(x+a)(x-b)-x(x+a)=0$

2) $x(x-a)=(x-a)^2-a^2+3a$

3) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$

4) $\frac{ax-b}{ax+b}-\frac{ax}{ax-b}=\frac{ab}{a^2x^2-b^2}$

5) $\frac{a-1}{x-a}-\frac{2a(a-1)}{x^2-a^2}=-\frac{2a}{x+a}$

6) $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Despejamos la incógnita indicada:

1) $\frac{A-t}{n}=L\,;\qquad A=?$

2) $Q=\frac{Ts-r}{T}\,;\qquad T=?$

3) $T=\frac{\sqrt{L}}{F}\,;\qquad L=?$

Ecuaciones en las ciencias

El estudio de las matemáticas está lleno de ecuaciones importantes; veamos algunas:

- *Ecuación de Newton:* $F = ma$
- *Ecuación para la velocidad:* $v = \frac{x}{t}$
- *Longitud de círculo:* $C = 2\pi r$
- *Área del círculo:* $A = \pi r^2$
- *Volumen de esfera:* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- *Ecuación de la relatividad:* $E = mc^2$
- *Ecuación de Euler:* $e^{i\pi} + 1 = 0$
- *Ley de gravitación universal:* $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
- *Teorema de Pitágoras:* $a^2 + b^2 = c^2$
- *Ley de gases ideales:* $PV = nRT$

7. Ecuaciones literales

Las ecuaciones literales son aquellas que, además de tener una incógnita, contienen otras variables. Para resolverlas, se trata a estas variables adicionales como si fueran coeficientes.

Ejemplo:

Resolvemos $\frac{x+m}{n} - \frac{x-n}{m} = 2 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{R}\,;\ \ n, m \neq 0$

El m.c.m. de n y m es nm, luego:

$$\frac{x+m}{n} - \frac{x-n}{m} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{m(x+m) - n(x-n)}{nm} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{mx + m^2 - nx + n^2}{nm} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x(m-n) + (m^2+n^2)}{nm} = 2$$

$$\Longrightarrow x(m-n) + (m^2 + n^2) = 2nm$$

$$\Longrightarrow n^2 - 2mn + m^2 = x(n-m)$$

$$\Longrightarrow (n-m)(n-m) = x(n-m)$$

$$\Longrightarrow \frac{(n-m)(n-m)}{(n-m)} = x$$

$$\Longrightarrow x = n - m$$

Ejemplo:

Resolvemos $\frac{x-a}{x+a} - \frac{x+a}{x-a} = \frac{2ax + a^2b}{x^2 - a^2}$

Note que $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$, luego el m.c.m. de "$x+a$“ y "$x-a$" es $(x+a)(x-a)$, luego se multiplica en la ecuación:

$$\frac{\boldsymbol{(x+a)(x-a)}(x-a)}{x+a} - \frac{\boldsymbol{(x+a)(x-a)}(x+a)}{x-a} = \frac{a\boldsymbol{(x+a)(x-a)}(2x+ab)}{(x+a)(x-a)}$$

$(x-a)(x-a) - (x+a)(x+a) = a(2x+ab)$ simplificamos y aplicamos la propiedad distributiva

$x^2 - 2ax + a^2 - (x^2 + 2ax + a^2) = 2ax + a^2b$

$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 2ax + a^2b$ sumamos términos

$-2ax - 2ax = 2ax + a^2b$

$-4ax - 2ax = a^2\, b$

$-6ax = a^2b \quad // \left(\frac{1}{a}\right)$ aplicamos la propiedad de división

$x = -\frac{b}{6a}$

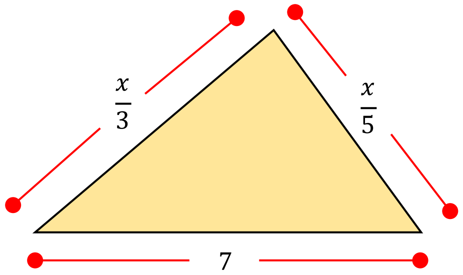
8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema. Un paisajista planifica una serie de pequeños jardines triangulares fuera de un nuevo edificio de oficinas. Sus planes exigen que un lado sea un tercio del perímetro y el otro lado un quinto del perímetro. El espacio asignado para cada uno permitirá que el tercer lado sea de 7 metros. Encontramos el perímetro del triángulo.

Solución

De la condición se cumple:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7$$
$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7$$
$$15x = 5x + 3x + 105$$
$$x = 15$$



Respuesta El perímetro es 17 metros

Problema El número de mesas en un salón de clase es el doble del número de sillas más 6 si en el salón hay 36 muebles entre mesas y sillas, ¿cuántas mesas y sillas hay?

Solución

x: es el número de sillas

$2x+6$: el número de mesas

Planteando la ecuación:

$$2x+6+x=36$$
$$x=10$$

Luego:

$x=10$: número de sillas

$2x+6=26$: número de mesas.

Problema Wara llevaba sus ovejas a pastar. Por el camino, un tercio de ellas se apartó al ver un zorro; al llegar a casa contó que solo le quedaban 24, ¿cuántas ovejas tenía inicialmente

Solución

$\boldsymbol{x}$: la cantidad de ovejas inicialmente

$\boldsymbol{\frac{x}{3}}$: un tercio de lo que tenía

Planteando la ecuación:

$$x-\frac{x}{3}=24$$
$$3x-x=72$$
$$2x=72$$

Por tanto, inicialmente tenía una cantidad de 36 ovejas

VALORACIÓN

Las ecuaciones lineales se caracterizan por tener variables de primer grado. Se aplican en el cálculo de magnitudes como la distancia, el tiempo, el costo o el precio. Por ejemplo, para calcular la distancia recorrida a velocidad constante, se puede utilizar la siguiente ecuación:

$d=v\cdot t$ ⇔ distancia = velocidad · tiempo

Las ecuaciones de primer grado son una poderosa herramienta matemática que se utiliza para resolver una amplia variedad de problemas en la vida cotidiana.

Fuente: OpenAi, 2024

PRODUCCIÓN

En trabajos donde se realiza una tarea repetitiva, como ensamblar piezas, la relación entre el tiempo total trabajado y el número de piezas ensambladas puede expresarse con una ecuación lineal. Por ejemplo, si ensamblar una pieza toma 5 minutos, el tiempo total de ensamblaje sería:

Tiempo = 5 · Número de piezas.

Si vendemos un producto a un precio fijo, puedes usar una ecuación lineal para calcular tus ingresos. Por ejemplo, si vendes cada unidad por Bs 25, la ecuación sería:

Ingresos = $\mathbf{25}\cdot$ Número de unidades vendidas.

Esto te permite saber cuánto ganarás, en función de cuántos productos hayas vendido.

- Investigamos y escribimos dos ejemplos sobre aplicaciones de las ecuaciones lineales en la construcción, la medicina, la economía y las recetas de cocina.

Resolvemos en equipos, los problemas a continuación:

- Joselyn tiene conejos y gallinas en su casa, siendo 24 el número total de sus patas. Además, si en total tiene 9 animales, ¿Cuántos conejos tiene Joselyn?

- Un atletismo, ha recorrido la quinta parte de la carretera. Si le quedan por recorrer 1040 metros, ¿cuál es la longitud del camino?

Elaboramos un esquema de resolución para explicarlo a la clase.

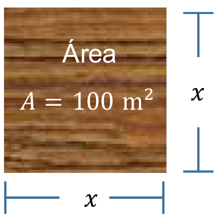
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

PRÁCTICA

Uno de los temas en los que se utilizan las ecuaciones cuadráticas es el cálculo de áreas de figuras geométricas, como rectángulos, círculos y triángulos. Por ejemplo, si don Ramiro quiere cultivar maíz en un terreno cuadrado y sabe que su área es de 100 m², ¿cómo se puede determinar la longitud de sus lados?

Sea x el lado del terreno cuadrado. Para hallar las medidas de los lados del cuadrado se debe resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 = 100$$



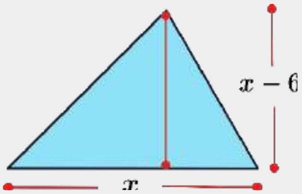
Fuente: OpenAi, 2024

Actividad

Sabiendo que el área de un triángulo es:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\textbf{base} \cdot \textbf{altura}}{2}$$

Calculamos el área del triángulo de la derecha.



TEORÍA

Partes de una ecuación de segundo grado

Término lineal

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Término cuadrático

Término independiente

- **Término cuadrático** ax^2: *Es el término que tiene la variable elevada al cuadrado.*
- **Término lineal** bx: *Es el término que tiene la variable sin exponente.*
- **Término independiente** c: *Es el término que no tiene la variable.*

Fuente: OpenAi, 2024

1. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado, también llamada ecuación cuadrática, es una ecuación polinómica de la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

donde a, b, c son constantes reales y "x" es la variable o incógnita. La característica principal de una ecuación de segundo grado es que el exponente más alto de la variable es 2, cuya gráfica mes una **parábola**.

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser de dos tipos: **completas e incompletas.**

COMPLETAS	INCOMPLETAS	
$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$
Ejemplo: $x^2 + 4x + 4 = 0$ $2x^2 - x + 3 = 0$ $x^2 + 12x + 1 = 0$	*Ejemplo:* $x^2 + 12x = 0$ $9x^2 - x = 0$ $121x^2 - 3x = 0$	*Ejemplo:* $x^2 + 40 = 0$ $8x^2 - 7 = 0$ $8x^2 - 4 = 0$

2. Resolución de ecuaciones incompletas

La resolución de ecuaciones incompletas sigue procedimientos específicos según el caso. Las soluciones o raíces de estas ecuaciones son los valores que satisfacen la ecuación cuadrática.

Ejemplo:

Resolver la ecuación incompleta $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \;\Rightarrow\; x(ax + b) = 0$$ Factorizamos "x" y el producto es cero

$$\Rightarrow\; x = 0; \quad ax + b = 0$$ Al menos uno de ellos es igual a cero.

$$\Rightarrow\; x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$ Son soluciones de la ecuación.

Ejemplo:

Resolvemos $4x^2 + x = 0$

$4x^2 + x = 0$ Despejamos x

$x(4x+1) = 0$ Factorizamos x, (factor común).

$x=0$ ó $4x + 1 = 0$ Uno de los factores debe ser cero, por tanto, separamos.

$\boldsymbol{x_1=0}$; $4x + 1 = 0$ Resolvemos la ecuación lineal

$$4x = -1$$

$$\boldsymbol{x_2} = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo:

Resolvemos $12x^2 = -48x$

$12x^2 = -48x$ Despejamos x

$12x^2 + 48x = 0$ Factorizamos x, (factor común).

$x(12x+48) = 0$ Uno de los factores debe ser cero,

$x=0$ ó $12x + 48 = 0$ por tanto, separamos.

$\boldsymbol{x_1=0}$; $12x + 48 = 0$ Despejamos x

$$12x = -48$$

$$x_2 = -\frac{48}{12}$$

$$\boldsymbol{x_2 = -4}$$

Ejemplo:

Resolvemos $x^2 - \frac{2}{121} = 0$

$$x^2 - \frac{2}{121} = 0$$

despejamos x

$$x^2 = \frac{2}{121}$$

Pasamos el termino independiente al segundo miembro

$$x_1 = +\sqrt{\frac{2}{121}}$$

El exponente 2 se despeja como raíz cuadrada al 2do miembro

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\sqrt{2}}{11}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{11}}$$

Teorema del factor cero

Si el resultado de multiplicar dos factores es cero, al menos uno de ellos debe ser igual a cero, o incluso ambos podrían serlo. En general, para $a,b \in R$ esto se expresa como:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Este teorema es muy importante en la resolución de ecuaciones de segundo grado por el método de factorización.

Raíz cuadrada

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \geq 0$:

$$a^2 = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$$

La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y uno negativo. El único número con una sola raíz cuadrada es el cero.

AL-KHWARIZMI

Fuente: OpenAi, 2024

Su obra Kitab al-jabr wa almuqabalah, traducida al latín en el siglo XII, dio origen al término 'álgebra' y compila reglas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, similares a las usadas hoy.

Actividad

Resolvemos ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$:

1) $4x^2 + 2x = 0$

2) $4x^2 - 16x = 0$

3) $13x^2 = 169x$

4) $x^2 = \frac{2x}{121}$

5) $12x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

6) $\frac{x^2 + 2x}{2} = 6$

Resolvemos ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$:

1) $81x^2 - 9 = 0$

2) $1024x^2 - 4 = 0$

3) $\frac{x^2}{4} - 25 = 0$

4) $\frac{100x^2 - 25}{10} = 10$

5) $x^2 - \frac{289}{225} = 0$

6) $\frac{x^2 + 51}{2} = 50$

Teorema del factor cero

La ecuación $x^2+1 = 0$ *no tiene soluciones reales, porque ningún número real elevado al cuadrado satisface esta igualdad* $x^2 = -1$; *pero el problema se superó con la construcción de números imaginarios y la invención de la unidad imaginaria* $\boldsymbol{i}$, *definida como:*

$$i = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

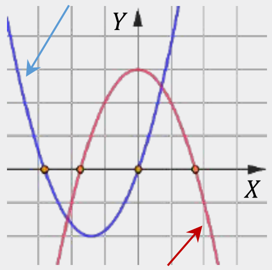
Luego la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} &x^2 + 1 = 0 \\ &x^2 = -1 \\ &x = \pm\sqrt{-1} \\ &\boldsymbol{x = \pm i} \end{aligned}$$

Parábolas y ecuaciones cuadráticas

La gráfica de una ecuación de segundo grado es una parábola su forma es $y=ax^2 + bx + c$. *Su vértice tiene la coordenada* $x = -\frac{b}{2a}$ *y la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo según el signo del término cuadrático.*

$ax^2 + bx + c = 0$



$-ax^2 + bx + c = 0$

Método de aspa simple para factorizar

El método del aspa simple es una técnica para factorizar trinomios de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 \pm bx \pm c}$$

$$\boldsymbol{x^2 \pm bx \pm c}$$

3. Resolución de ecuaciones completas

Una ecuación de segundo grado se puede resolver de varias maneras: de forma gráfica, por factorización, usando la fórmula general o completando el cuadrado.

a) Resolución gráfica

La gráfica muestra dónde la parábola cruza el eje "X"; el proceso para llegar a este resultado se explica en el siguiente ejemplo.

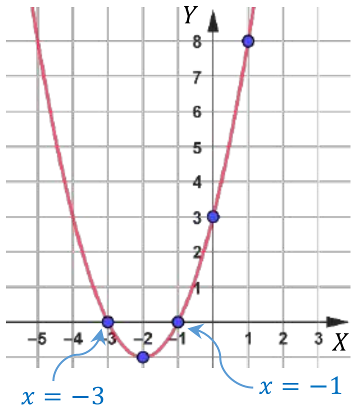
Ejemplo:

Resolvemos gráficamente $x^2 + 4x + 3 = 0$.
El primer paso consideramos $y = x^2 + 4x + 3$ y generamos una tabla de valores para poder trazar un gráfico.

x	$y = x^2 + 4x + 3$	(x, y)
0	$y = x^2 + 4x + 3$	(0, 3)
1	$1^2 + 4{\cdot}1 + 3 = 8$	(1, 8)
-1	$(-1)^2 + 4{\cdot}(-1) + 3 = 0$	(-1, 0)
-2	$(-2)^2 + 4{\cdot}(-2) + 3 = -1$	(-2, -1)
-3	$(-3)^2 + 4{\cdot}(-3) + 3 = 0$	(-3, 0)

El **segundo paso** a partir de esta tabla de valores se traza un gráfico en un plano cartesiano.

En el **tercer paso** buscamos las intersecciones de la parábola con el eje "X", y anotamos puntos de intersección en $\mathbf{x = -3}$ y $\mathbf{x = -1}$, que son las soluciones de la ecuación.

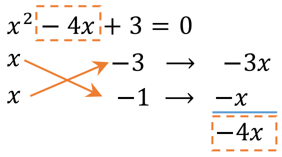


b) Resolución por factorización

La resolución por este método consiste en factorizar el trinomio, generalmente usando el método de aspa simple, y luego se iguala cada factor a cero.

Ejemplo:

Resolvemos $x^2 - 4x + 3 = 0$



$$\Rightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{ó} \quad x = 1$$

Ejemplo:

Resolver $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$\begin{array}{lccl} 2x^2 & \boxed{+5x} & -3 = 0 & \\ x & & 3 & \longrightarrow +6x \\ 2x & & -1 & \longrightarrow -x \\ & & & \boxed{+5x} \end{array}$$

$$\Rightarrow (x+3)(2x-1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -3 \quad \text{ó} \quad 2x = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -3\,; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

c) Resolución por factorización

Se tiene la ecuación segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces o soluciones se calculan por la formula general:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El término dentro de la raíz cuadra, $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama discrimínate y determina la naturaleza de sus soluciones:

- Si $\Delta > 0$, hay dos soluciones reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$, hay una única solución real.
- Si $\Delta < 0$, no tiene soluciones reales.

Ejemplo:

Resolver $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Identificando $a = 3$, $b = 2$ y $c = -5$, luego en la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

De donde:

$$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+8}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2-8}{6} = \dfrac{-10}{6} = -\dfrac{5}{3} & \Rightarrow x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$x_1 = 1\,; \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

Babilonios

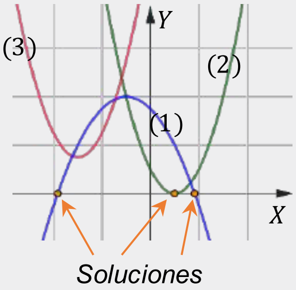
Fuente: OpenAi, 2024

Existen pruebas de que los babilonios, alrededor del año 1600 a.C., ya sabían cómo resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no contaban con una notación algebraica para expresar la solución.

Babilonios

Las soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado son los valores x_1 y x_2, si existen, que hacen cierta la ecuación. Gráficamente, las raíces se encuentran donde la parábola corta el eje "X".

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$



- (1) tiene dos soluciones diferentes.
- (2) tiene dos soluciones iguales.
- (3) no tiene soluciones reales.

Actividad

Resolvemos graficando:

1) $x^2 - 7x + 3 = 0$
2) $x^2 + 3x + 2 = 0$
3) $x^2 - 8x + 7 = 0$

Resolvemos factorizando:

1) $m^2 - m + 14 = 0$
2) $m^2 - 2m - 8 = 0$
3) $3m^2 - 15m = 18$

Resolvemos por la formula general:

1) $w^2 + w - 30 = 0$
2) $w^2 = -6w - 9 = 0$
3) $2w^2 = 24 - 2w = 0$
4) $w^2 = -4 - 6w$
5) $9t^2 = 6 - 6t$
6) $t^2 - 4t = -2$

Completando cuadrados

En la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para completar cuadrado se sugiere:

- *El termino constante "c" debe estar en un lado de la ecuación.*
- *Si $a \neq 1$, se divide todos los términos entre a.*
- *Se suma en ambos lados de la ecuación, el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x", es decir:*

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Se factoriza el trinomio y resulta cuadrado de un binomio.
- Tomando raíz cuadrada en ambos lados.
- Se despeja "x".

d) Resolución completando cuadrados

Completar el cuadrado es una técnica que permite reescribir una ecuación cuadrática en la forma $(x \pm a)^2 + b$.

Ejemplo:

Resolvemos $x^2 - 4x + 3 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$	Llevar el término independiente al segundo miembro
$x^2 - 4x = -3$	Se completa al cuadrado
$x^2 - 4x + \mathbf{2^2} = -3 + \mathbf{2^2}$	Sumando 2^2 en ambos miembros
$(x-2)^2 = 1$	Trinomio cuadrado perfecto
$x - 2 = \pm\sqrt{1}$	Propiedad de raíz cuadrada
$x - 2 = \pm 1$	

De donde:

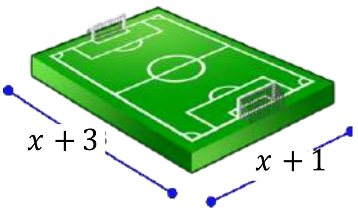
$$x - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = +1 & \Rightarrow \quad x_1 = 3 \\ x_2 - 2 = -1 & \Rightarrow \quad x_2 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

En el siguiente apartado resolvemos algunos problemas de ecuación de segundo grado.

Problema La cancha de la unidad educativa Bolivia tiene un área de 195 m². Utilizando la figura proporcionada, encontramos la longitud de sus lados.



Solución

Área rectangular:

$A = (x+3)(x+1) = 195$

$x^2 + 4x + 3 = 195$

$x^2 + 4x - 192 = 0$

$(x-12)(x+16) = 0$

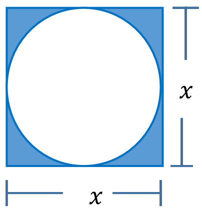
$\Rightarrow \quad x = 12; x = -16$

Por tanto, los lados miden $12 + 1$ y $12 + 3$ metros es decir, 13 y 15 metros.

Problema

Calculamos el área de la parte sombreada. Sabiendo que el área del cuadrado es 36 m.

Solución



Área del cuadrado:

$A = x \cdot x = 36$

$x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36}$

$\Rightarrow \quad x = \pm 6$

$\Rightarrow \quad x_1 = 6; \; x_2 = -6$

De donde, lado del cuadrado es 6 m, entonces el radio del circulo es $r = 3$ m, luego área pedida será:

$$A_s = A_{\square} - A_{\odot} = 36 - \pi r_2 = 36 - \pi \cdot 3^2 = 9(4 - \pi)$$

$$\Rightarrow \quad A_s = 9(4 - \pi)\text{ m}^2$$

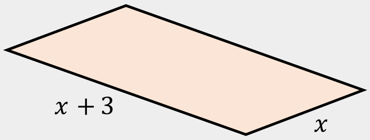
Actividad

Resolvemos completando cuadrados:

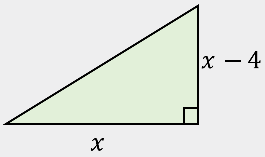
1) $y^2 = -10y - 24$
2) $x^2 + 2x = 6$
3) $a^2 - 12a = -35$
4) $a^2 + 4a = -32$
5) $y^2 - 6y = 3$
6) $a^2 - 8a = -11$
7) $m^2 + 4m = -2$

Resolvemos los siguientes problemas:

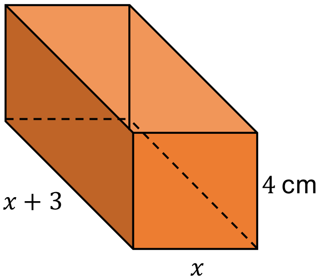
1) El largo de un rectángulo es 3 pies más grande que su ancho. Determine las dimensiones del rectángulo, si su área es 28 pies cuadrados.



2) Sabiendo que un triángulo rectángulo tiene un área de 320 m². Calcular las dimensiones de sus lados.



Problema: Una compañía de cosméticos diseña una caja sin tapa para empacar sus productos con un volumen de 72 cm³. Sus dimensiones están representas en la gráfica. Hallar las dimensiones de la caja.



Solución

Volumen de la caja:

$V = 4 \cdot x \cdot (x+3) = 72$

$4x^2 + 12x = 72$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x-3)(x+6) = 0$

$x - 3 = 0 \quad \lor \quad x + 6 = 0$

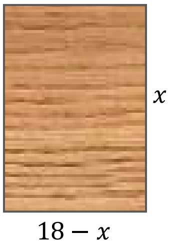
$\Rightarrow \; x = 3; x = -6$

(El caso $x = -6$ se descarta porque el problema trata de encontrar longitudes, cuyos valores siempre son números reales no negativos).

Así $4, 3$ y $3 + 3 = 6$ son las dimensiones de la caja.

Problema: Determina las dimensiones de un terreno que ocupa un área de 72 m² y además uno de los lados es 18 unidades menos que el otro.

Solución



Datos:

x: es un lado

$x - 18$: el otro lado

Planteamos la ecuación del área rectangular del terreno:

$A = x \cdot (18 - x) = 72$

$18x - x^2 = 72 \;\Rightarrow\; x^2 - 18x + 72$

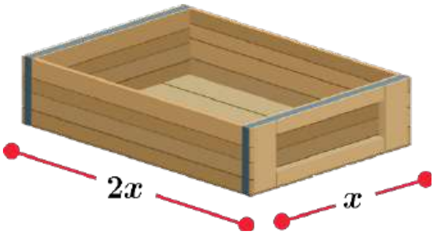
$\Rightarrow \; (x-12)(x-6)$

$\Rightarrow \; x = 12; x = 6$

Por tanto, los lados miden 6 y 12 unidades.

VALORACIÓN

En nuestra vida cotidiana, muchas veces debemos calcular el área de cierto espacio, para acomodar algo para construir algo, a veces el área de un lote de terreno o el área de cajas y otros objetos. Un ejemplo de esto involucra construir una caja rectangular en donde la base de un lado debe tener el doble de la longitud del otro lado.



Analizamos y respondemos:

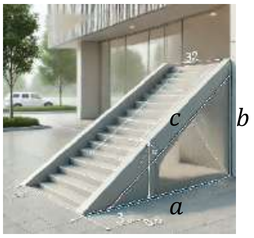
- ¿Qué otras aplicaciones en la vida cotidiana tienen las ecuaciones cuadráticas?
- ¿En qué áreas científicas se utilizan las ecuaciones cuadráticas?

PRODUCCIÓN

La construcción de objetos que tengan formas geométricas requiere el manejo de ecuaciones de segundo grado, es importante investigar y aplicar la teoría de ecuaciones cuadráticas para ampliar nuestro aprendizaje.

Resolvemos:

Una de las leyes importantes en matemática es el Teorema de Pitágoras, señala que en todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa. Investigamos otros ejemplos en nuestro entorno.



a: cateto

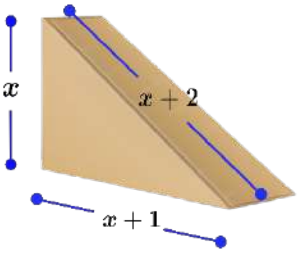
b: cateto

c: hipotenusa

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Resolvemos:

En la figura observamos una caja de madera triangular. Utilizando el Teorema de Pitágoras, calculamos la hipotenusa del triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.



REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

POTENCIACIÓN

1) Aplicamos las propiedades de potenciación:

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad ; \quad \boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

a) $a^{12} \cdot a^{24} \cdot a^{48}$

b) $10^2 \cdot 10^2$

c) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$

d) $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{1-2x}$

e) $3^x \cdot 3^{x-3} \cdot 3^{4-x}$

f) $5^{n-1} \cdot 5^{n+3} \cdot 5^{-2n}$

g) $\frac{2^3}{2^2}$

h) $\frac{2^{4+2n}}{2^{n-2}}$

i) $\frac{3^{5x-5}}{3^{5x-4}}$

j) $\frac{2^{x^2-3x+1}}{2^{x^2-3x-1}}$

2) Aplicamos las propiedades de potenciación:

$$\boldsymbol{a^0 = 1;\ (a^m)^n = a^{(m \cdot n)}}$$

a) $2a^0 + a^2 - a^0$

b) $(2024)^2 \cdot (2024)^{-2}$

c) $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{-4}$

d) $a^{2x} \cdot a^{x+3} \cdot a^{-3-3x}$

e) $(-1)^{x+3} \cdot (-1)^{x-3}$

f) $e^{x-1} \cdot e^{x+3} \cdot e^{1-2x}$

g) $(2^2)^2$

h) $[2^0]^2 + [2^{\frac{5}{3}}]^3$

i) $(1^{2x})^{2025}$

j) $[(2^3)^2]^2$

k) $[2^{\frac{3}{2}}]^2 - [2^{\frac{1}{2}}]^2$

3) Aplicamos las propiedades de potenciación:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot a^m}$$

a) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$

b) $(2x)^2 \cdot (2x)^{-3}$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-2}$

d) $m^{2x} \cdot m^{x-5} \cdot m^{3-3x}$

e) $(-2)^{x-3} \cdot (-2)^{4-3x}$

f) $e^{2x-1} \cdot e^{x-3} \cdot e^{1-2x}$

g) $(2^2 \cdot 2^{-1})^{-3}$

h) $[2^{-2}]^2 - [2^{-\frac{1}{3}}]^3$

i) $(2^0 \cdot 2^{-2} \cdot 2^2)^{-2}$

j) $[(2^{-2} \cdot 2^2)^{-2}]^{-2}$

k) $[2^{\frac{3}{2}}]^2 - [2^{\frac{1}{2}}]^2$

4) Aplicamos las propiedades de potenciación:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

b) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

5) Simplificamos utilizando propiedades de exponentes:

a) $\frac{a^{17} \cdot a^{-29}}{a^{-15} \cdot a}$

b) $\frac{a^7 \cdot a^{-9}}{a^{-5} \cdot a^5} - \frac{a^0 \cdot a^2}{a^{-2} \cdot a^2}$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1$

d) $\left(\frac{9}{4}\right)^{12} \cdot \frac{8^8}{3^{22}} - \frac{2^{12} \cdot 5^{10}}{(2 \cdot 5)^{10}}$

g) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)^{-2}$

h) $\left(\frac{2x}{xy}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2x}{xy}\right)^2$

i) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-1}$

j) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2\right] \div \left(\frac{x}{6}\right)^{-1}$

6) Las bacterias son seres vivos minúsculos que se reproducen dividiéndose por la mitad cada cierto tiempo. Si suponemos que una bacteria se divide cada minuto.

En ese caso, después de dos minutos tendríamos cuatro bacterias, a los tres minutos ocho bacterias y así sucesivamente. ¿Cuántas bacterias tendríamos a los 10 minutos?

7) Una persona escucha un rumor, tres horas después ya se lo había contado a dos personas, cada una de las cuales, tres horas después se lo cuentan a otras dos que no lo conocían y así sucesivamente. ¿Cuántas personas han escuchado el rumor después de 18 horas?

8) Un tipo de bacteria se coloca en una solución nutritiva para que se multiplique. Las bacterias se dividen en dos cada 30 minutos. Si inicialmente hay 15 bacterias, y cada una se divide en dos cada media hora, ¿cuántas bacterias habrá en tres horas? Expresa el resultado en forma de potencia.

Fuente: OpenAi, 2024

RADICACIÓN

1) Utilizamos la definición de radicación:

a) $\sqrt{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 = 4$

b) $\sqrt{9} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

c) $\sqrt{121} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

d) $\sqrt{289} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

e) $\sqrt[3]{1728} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

f) $\sqrt[3]{512} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

g) $\sqrt[5]{32} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

h) $\sqrt[7]{128} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

i) $\sqrt[7]{2187} = \_\_ \quad \Leftrightarrow \quad \_\_\_ = \_\_\_$

2) Aplicamos las propiedades de potenciación. Expresar como exponente fraccionario o viceversa:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$$

a) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{3^5}$

c) $\sqrt[3]{4^3}$

d) $\sqrt[5]{4^2}$

e) $\sqrt{3}$

f) $\sqrt{3^{10}}$

g) $\sqrt[5]{x^{-1}} = 3^{\frac{2}{3}}$

h) $\sqrt[3]{(x+y)^5}$

i) $\sqrt[5]{(a+b)^2}$

j) $\sqrt[3]{(1-x)^{-2}}$

k) $\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^3}$

3) Aplicamos las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

a) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{20}$

b) $\sqrt{50}$

c) $\sqrt{80}$

d) $\sqrt{120}$

e) $\sqrt[3]{54}$

f) $\sqrt[3]{625}$

g) $\sqrt{800}$

h) $\sqrt{1024}$

i) $\sqrt[3]{128}$

j) $\sqrt[3]{3125}$

k) $\sqrt[5]{64} = 3^{\frac{2}{3}}$

l) $\sqrt[7]{(1+y)^5}$

m) $\sqrt[5]{(a+b)^2}$

n) $\sqrt[3]{1+x+y}$

o) $\sqrt[3]{(x+y+z)^5}$

p) $\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^4}$

q) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^5}$

4) Aplicamos las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$$

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

c) $\sqrt{\frac{120}{4}}$

d) $\sqrt{\frac{100}{80}}$

g) $\sqrt[3]{\frac{a^7}{a^3}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

i) $\sqrt{\frac{120}{4}}$

j) $\sqrt{\frac{100}{80}}$

5) Aplicamos las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n \cdot m]{\boldsymbol{a}}$$

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{729}}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{a^6}}$

g) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{64}}}$

h) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{x^6}{4096}}}}$

i) $\sqrt{\frac{120}{4}}$

j) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{x^{2025}}{x^{2024}}}}}$

6) Igualamos los índices:

a) $\sqrt{3}\ ;\ \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{3}\ ;\ \sqrt[3]{3}\ ;\ \sqrt[5]{2}$

c) $2\sqrt{2}\ ;\ 4\sqrt[3]{5}$

d) $a\sqrt{2}\ ;\ a\sqrt[5]{2}$

e) $2\sqrt{x}\ ;\ \sqrt[3]{x};\ 2\sqrt[5]{x}$

f) $2\sqrt{\frac{a}{b}}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

7) Sumamos y restamos:

a) $B = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

b) $C = 12\sqrt{a} - 22\sqrt{a} - 15\sqrt{a} + 4\sqrt{a}$

c) $D = 7\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 30\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

d) $E = \sqrt{x} + 20\sqrt{x} - 21\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

e) $L = 6\sqrt{x+y} - \sqrt{x+y} - 5\sqrt{x+y}$

g) $M = 7\sqrt{x-y} - \sqrt{x-y} - 6\sqrt{x-y}$

8) Multiplicamos

a) $S = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

b) $A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

c) $A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

d) $U = \sqrt{x} \cdot \sqrt{4x}$

e) $E = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

f) $L = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$

g) $V = \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m}$

h) $I = \sqrt[5]{m^2} \cdot \sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{m^2}$

i) $E = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

j) $N = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$

9) Dividimos:

a) $J = \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{144}}$

b) $E = \frac{8\sqrt{100x^2}}{2\sqrt{4x^4}}$

c) $R = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt{20}}$

f) $U = \frac{12\sqrt{2xy}}{3\sqrt{xy}}$

g) $S = \frac{8\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{a^2+2ab+b^2}}$

h) $A = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt{a+b}}$

10) Descomponemos en radicales simples:

a) $S = \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$

b) $U = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

c) $C = \sqrt{5 + 2\sqrt{7}}$

d) $R = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$

f) $U = \sqrt{1 + 2\sqrt{9}}$

g) $R = \sqrt{10 + 2\sqrt{4}}$

h) $U = \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}$

i) $S = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

RACIONALIZACIÓN

1) Racionalizamos: Caso $\frac{B}{\sqrt{A}}$:

a) $S = \frac{1}{\sqrt{17}}$

b) $A = \frac{1}{\sqrt{13}}$

c) $N = \frac{8}{\sqrt{20}}$

d) $T = \frac{1}{\sqrt{30}}$

e) $A = \frac{2}{2\sqrt{5}}$

f) $C = \frac{8}{12\sqrt{2}}$

g) $R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

h) $C = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$

i) $O = \frac{a}{\sqrt[3]{10a}}$

j) $C = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$

k) $H = \frac{3}{\sqrt{9(x-y)}}$

l) $A = \frac{8}{2\sqrt{16(a-b)}}$

m) $B = \frac{2a}{a\sqrt{4a+4b}}$

2) Racionalizamos: Caso $\frac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}}}$

a) $M = \frac{1}{\sqrt{2}-2}$

b) $A = \frac{1}{\sqrt{5}-5}$

c) $R = \frac{8}{8-\sqrt{8}}$

d) $D = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

e) $A = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

f) $C = \frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

g) $R = \frac{1}{\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

h) $C = \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

i) $O = \frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}$

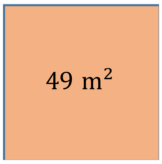
j) $C = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

k) $H = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$

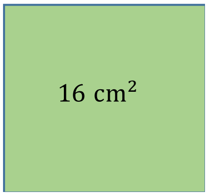
l) $A = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$

m) $B = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}$

3) Si el área de un cuadrado es igual a 49 m², ¿cuál es la medida de su lado?



4) El área de un cuadrado es igual a 16 cm², ¿cuál es perímetro del cuadrado?



5) Una mesa cuadrada tiene una superficie de 121 dm², ¿cuál es la medida del lado de la mesa cuadrada?

6) Ana corre 5 vueltas alrededor de un jardín rectangular, cuya área es de 600 m². Si la longitud del jardín es el doble de su ancho, ¿cuántos metros recorre Ana en total?

7) En la unidad educativa CONVIFACG se quieren distribuir 625 estudiantes, formando un cuadrado, ¿cuántos estudiantes habrá en cada lado del cuadrado?

ECUACIONES LINEALES

1) Resolvemos:

a) $6x - 2 = 4x - 5$
b) $x + 5 = 3x - 5$
c) $10x - 2 = x - 1$
f) $3x + 8 = 8x - 8$
g) $x - 10 = 3x - 10$
h) $2023x - 2 = 2024x$

2) Resolvemos:(ecuaciones con signos de agrupación)

a) $6(x - 2) = x$
b) $-(x + 5) = x$
c) $-2 = -(1 - x)$
f) $-[-(x - 1) - 1] = -(x - 1)$
g) $x - [-(x + 5) - 7] = -x$
h) $1 - \{-[-(x - 1) - 1]\} = 1$

3) Dividimos:

a) $\frac{x}{4} - \frac{x-2}{4} = \frac{1}{4}$
b) $\frac{x+5}{2} - \frac{4x-2}{5} = -\frac{2}{3}$
c) $\frac{2x-5}{7} - \frac{2-x}{5} = \frac{x-2}{10}$
f) $\frac{x}{5} - \frac{x-2}{5} = \frac{x}{10}$
g) $\frac{x-5}{3} - \frac{x-1}{9} = -\frac{1}{3}$
h) $\frac{x-1}{8} + \frac{2-x}{16} = -\frac{x-1}{8}$

4) Resolvemos: (ecuaciones fraccionarias)

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 3$
b) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 5$
c) $\frac{5x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x+2}$
f) $\frac{2x-4}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{12}{x+1}$
g) $\frac{x^2+x+3}{x^2-x+3} = \frac{2x+5}{2x+7}$
h) $\frac{5}{1+x} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} = 0$

5) Resolvemos (ecuaciones literales)

a) $abx = a - x(a^2 + b^2) - b(ax - 1)$
b) $(m-4)x + (m - 5)x = (x - 5)m + (x - 4)m$
c) $(x + m)^2 - (x + n)^2 = (m - n)^2$
d) $\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2-6a^2}{ab}$
e) $\frac{x+a}{x-a} = \frac{x-a}{x+a} - \frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$

6) Busca un número sabiendo que si se le divide entre 3 y al resultado se le suma 2 se obtiene 5.

7) La suma de tres números consecutivos es 48, ¿cuáles son los números?

8) El perímetro de un rectángulo es 12 metros, si su base mide 4 metros, ¿cuánto mide la altura?

9) En un rectángulo la base mide el doble que la altura y su perímetro es 132 metros, ¿cuánto miden la base y la altura?

ECUACIONES CUADRÁTICAS

1) Resolvemos (ecuaciones incompletas)

a) $m^2 - 9m = 0$
b) $-4x^2 - x = 0$
c) $16t^2 - 8t = 0$
d) $100x^2 - 10x = 0$
e) $169x^2 - 13x = 0$
f) $25t^2 - 25x = 0$
g) $81t^2 -= 0$
h) $121k^2 - 36 = 0$
i) $144k^2 - 169 = 0$
j) $196x^2 - \frac{1}{36} = 0$
k) $\frac{t^2}{100} - \frac{1}{400} = 0$

2) Resolvemos por factorización:

a) $m^2 + 10m + 9 = 0$
b) $-4m^2 + m + 1 = 0$
c) $8t^2 + 10t + 3 = 0$
d) $t^2 + 2t - 15 = 0$
e) $t^2 - 18t + 77 = 0$
f) $2t^2 + 8t + 8 = 0$
g) $8t^2 - 12t - 36 = 0$
h) $6k^2 + 5k - 6 = 0$
i) $15k^2 - 7k - 4 = 0$
j) $x^2 + 24x + 143 = 0$
k) $t^2 + 17t + 72 = 0$
l) $4t^2 - 7t + 3 = 0$

3) Igualamos los índices:

a) $m^2 + 2m + 6 = 0$
b) $-x^2 - 7x + 12 = 0$
c) $4x^2 + 3x - 22 = 0$
d) $t^2 + 4t - 21 = 0$
e) $x^2 + 63 = 16x$
f) $2t^2 - 7t + 4 = 0$
g) $20 = -5k^2 - 5k$
h) $2k^2 = 3k - 2$
i) $5t^2 - 7t - 90 = 0$
j) $4t^2 + 3t = 22$

4) Sumamos y restamos:

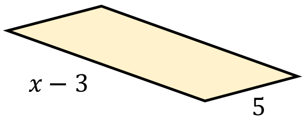
a) $m^2 + 6m - 16 = 0$
b) $x^2 - 12x + 20 = 0$
c) $t^2 = -10t - 16$
f) $t^2 + 2t = 3$
g) $7 = k^2 + 6k$
h) $6k^2 = 8 - 13k$

5) Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.

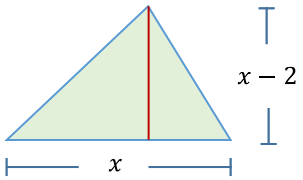
6) La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Hallar dichos números.

7) Si se aumenta el lado de un cuadrado en 4 cm, el área aumenta en 80 cm². Calcula el lado del cuadrado.

8) Un rectángulo tiene área de 10 cm². Considerando la gráfica, hallar las longitudes de sus lados



9) Un triángulo tiene área de 16 cm². Considerando la gráfica, hallar la ecuación que representa su área.



BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson Educación de México.

Allen, R. A. (2007). *Álgebra Elemental*. Pearson. México.

Allen, R. A. (2008). *Álgebra Intermedia*. Pearson. México.

Baldor, A. (2008). *Álgebra* (2.ª ed.). Patría. México.

Chapman, H., & Libertini, L. (2020). *Descomposición de fracciones y fracciones parciales*. LibreTexts.

Dennis, G. Z. (2012). *Álgebra y trigonometría*. McGraw-Hill. México.

Diccionario de Matemáticas. (2000). Editorial Cultural S.A. Polígono Industrial Arroyomolinos – España.

Earl, W. S. (2009). *Álgebra y trigonometría*. Cengage Learning Editores. México.

Fmaima. (2015, marzo 23). *Fracciones algebraicas*. SlideShare.

Londoño, N., & Bedoya, H. (2003). *Matemática Progresiva 3*. Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

Madrid. (2020, 29 de febrero). *Los polinomios y sus aplicaciones*. Matemáticas y sus fronteras. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2020/02/29/147396

Ministerio de Educación. (2023). *Subsistema de Educación Regular. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Texto de aprendizaje. 3er año, primero, segundo y tercer trimestre.* La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. (2023). *Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. (2023). *Prontuario de mis aprendizajes Matemática*.

Murray, R. (2007). *Álgebra Superior*. McGraw-Hill. México.

Olmos Millán, A., & Martínez C, L. C. (2003). *Matemática Práctica 3*. Editorial Voluntad S.A. – Colombia.

Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. P. (2005). *La caja de polinomios*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 13(1), 83-97.

Valencia, L. R. (2023). *Compilado de Matemática 3* [texto inédito].

Vázquez Vidal, G. (2018). *Usos y curiosidades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo que nunca te habías imaginado*. WordPress. Recuperado el 28 de agosto de 2023, de https://gloriavazquezvidal.wordpress.com/2018/09/06/usos-y-curiosidades-del-maximo-comun-divisor-y-del-minimo-comun-multiplo-que-nunca-te-habias-imaginado/

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **3 ER AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Cindy Maribel Chambi Villca

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

Biología - Geografía
Delma Frida Flores López

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

SEGUNDO TRIMESTRE

Lengua Castellana
Ernesto Huallpa Tolaba

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

Ciencias Sociales
David Castro Fresco

TERCER TRIMESTRE

Lengua Castellana
Cindy Maribel Chambi Villca

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

Biología - Geografía
David Sinko Yapu

Ciencias Sociales
David Castro Fresco

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol