



ÁREA:

MATEMÁTICA



3^{er}

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN



ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

© De la presente edición

Texto de aprendizaje. 3er año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambí

Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo

Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas

Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL

Olga Marlene Tapia Gutiérrez

Directora General de Educación Primaria

Delia Yucra Rodas

Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos

Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL

Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria

Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES

Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA

Unidad de Educación Género Generacional

Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo

Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros

Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:

Franz Javier Del Carpio Sempértegui

DIAGRAMACIÓN:

Freddy Edgar Machaca Mamani

Depósito legal:

4-1-24-2024 P.O.

Cómo citar este documento:

Ministerio de Educación (2024). Texto de aprendizaje. 3er año de escolaridad. Educación
Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA

INDÍCE

Presentación.....	5
MATEMÁTICA.....	49
Primer trimestre	
Operaciones con expresiones algebraicas	50
Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita	56
Productos y cocientes notables aplicados al desarrollo de la tecnología	62
Factorización	70
Factorización de binomios.....	74
Factorización de trinomios	80
Segundo trimestre	
Factorización de polinomios (ruffini).....	92
Interpretación geométrica y aplicación de la factorización	98
Fracciones algebraicas y sus operaciones	102
Tercer trimestre	
Potenciación algebraica en el desarrollo de la ciencia y la tecnología	122
Radicación algebraica en el desarrollo de la ciencia y la tecnología	128
Racionalización algebraica en el desarrollo de la ciencia y la tecnología.....	134
Ecuaciones lineales.....	140
Ecuaciones de segundo grado.....	148



PRESENTACIÓN

Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

PRÁCTICA

Se tiene la siguiente receta para realizar un pastel:

- $\frac{1}{2}$ taza de mantequilla
- 2 tazas de harina
- $\frac{3}{4}$ cucharadita de levadura en polvo
- 3 huevos
- 1 taza de azúcar
- 300 ml de leche



Si asigno una variable algebraica a cada elemento de la receta, tendríamos:

$$\frac{1}{2}m + 2H + \frac{3}{4}l + 3h + a + 300L = \text{Pastel}$$

Si quisiera dos pasteles, la expresión matemática sería:

$$2\text{Pasteles} = 2\left(\frac{1}{2}m + 2H + \frac{3}{4}l + 3h + a + 300L\right)$$

Entonces, se necesitará 1 taza de mantequilla, 4 tazas de harina, $1\frac{1}{2}$ cucharadita de levadura en polvo, 6 huevos, 2 tazas de azúcar y 600 ml de leche.

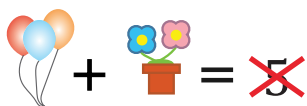
Actividad

Respondemos:

- ¿Cuál es la conclusión que puedes afirmar?
- De la anterior aplicación, ¿puede argumentar qué tipo de ecuación representa?

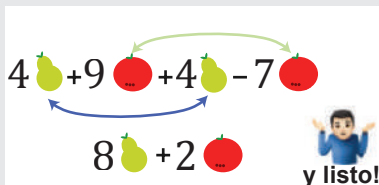
TEORÍA

TÉRMINOS NO SEMEJANTES



TÉRMINOS SEMEJANTES

Solo suma peras con peras
y manzanas con manzanas



1. Términos semejantes y su relación con la producción

1.1. Definición de términos semejantes

Tienen la misma parte literal y pueden ser de signos iguales o distintos.

$$3a - 5a + 7a$$

1.2. Reducción de términos semejantes

Cuando los términos semejantes tienen igual signo se suma la parte numérica y se copia el mismo signo, también se copia la parte literal.

Ejemplo. Reducir la expresión $12y + 9y + 3y$

Solución $12 + 9 + 3 \rightarrow 24y$

Ejemplo. Reducir la expresión $-6a - 10a$

Solución $-6 - 10 \rightarrow -16a$

Ejemplo. Reducir la expresión $9x^2 + 5x^2 + 6x^2$

Solución $9x^2 + 5x^2 + 6x^2 = 20x^2$

Ejemplo. Reducir la expresión $-3abc^3 - 7abc^3 - 2abc^3 - 4abc^3$

Solución $-3abc^3 - 7abc^3 - 2abc^3 - 4abc^3 = -16abc^3$

Cuando los términos semejantes son de signos diferentes se restan los coeficientes y se anota el signo del mayor número.

Ejemplo. Reducir las siguientes expresiones, $13x - 6x$ y $6y - 9y$

Solución $13x - 6x = 7x$

$6y - 9y = -3y$

Una expresión algebraica tiene términos con diferente parte literal, primero se debe agrupar los que tienen la misma letra, luego se realiza la operación que corresponda; en caso de tener exponente también estos deben ser iguales.

Ejemplo. Reducir la expresión, $7a - 3b + 4c - 12a + 5b + 2c - 8b - 3c$

Solución

$$= 7a - 12a - 3b + 5b - 8b + 4c + 2c - 3c$$

$$= (7 - 12)a + (-3 + 5 - 8)b + (4 + 2 - 3)c$$

$$= -5a - 6b + 3c$$

Para reducir varios términos semejantes con distintos signos, se deben agrupar aquellos que tienen signos positivos, seguidamente los de signos negativos, posteriormente se reducen a una sola expresión. Una vez reducidos, los resultados se restan colocando el signo del mayor número.

Ejemplo. Reducir la expresión, $4xy + 7xy - 5xy + 15xy - 9xy$

Solución

$$= 4xy + 7xy + 15xy - 5xy - 9xy$$

$$= 26xy - 14xy$$

$$= 12xy$$

1.3. Reducción de términos semejantes con signos de agrupación

Se recomienda suprimir los signos de agrupación de adentro hacia afuera, tomando en cuenta lo siguiente:

- Signo positivo delante de un signo de agrupación, los términos mantienen el mismo signo: $+(-x + 1) = -x + 1$
- Signo negativo delante de un signo de agrupación, los términos cambian de signo: $-(a - 2) = -a + 2$

Ejemplo. Reducir la expresión, $x - \{-2x + [-(5x)]\}$

Solución

$$= x - \{-2x + [-(5x)]\}$$

$$= x - \{-2x + [-5x]\}$$

$$= x - \{-2x - 5x\}$$

$$= x - \{-7x\}$$

$$= x + 7x$$

$$= 8x$$

Ejemplo. Reducir la expresión, $-\{6a - 4b - [3a - 9b + 7(a - 5b)]\}$

Solución

$$= -\{6a - 4b - [3a - 9b + 7(a - 5b)]\}$$

$$= -\{6a - 4b - [3a - 9b + 7a - 35b]\}$$

$$= -\{6a - 4b - 3a + 9b - 7a + 35b\}$$

$$= -6a + 4b + 3a - 9b + 7a - 35b$$

$$= -6a + 3a + 7a + 4b - 9b - 35b$$

$$= 10a - 6a + 4b - 44b$$

$$= 4a - 40b$$

REGLA PRÁCTICA

Los signos de agrupación:

Paréntesis ()

Corchetes []

Llaves { }

Quando el signo de agrupación tiene coeficiente +1 (simplemente +), los términos dentro del signo de agrupación mantienen si signo positivo o negativo.

Quando el signo de agrupación tiene coeficiente -1 (simplemente -), los términos dentro del signo de agrupación, si son positivos, se hacen negativos y si son negativos, se hacen positivos.

LEY DE SIGNOS

Para el producto de dos términos, la ley de signos se reduce a:

El producto de signos iguales es positivo (+).

El producto de signos diferentes es negativo (-).

$$(+) \cdot (+) = (+)$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

$$(+) \cdot (-) = (-)$$

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

Ejemplo:

$$(-6) \cdot (+4) = -24$$

$$(-7) \cdot (-2) = +14$$

$$(+3) \cdot (-5) = -15$$

$$(+4) \cdot (+8) = +32$$

Reducimos los siguientes términos semejantes:

- $7y + 3$
- $9xy - 3xy + 12xy$
- $14b + 8b + 4b$
- $6ab - 8c - 17ab + 11c + 9c$
- $-16xyz + 10xyz$
- $-10xy^2 - 2xy^2 + 8xy^2$

Reducimos los términos semejantes, eliminando los signos de agrupación:

- $-\{ -[7a - 8b + 4 - (-4a + 7 + 13b)] \}$
- $5[4xz + 6x - (3x - 8yz) - 7]$
- $-6\{-8abc + 3ab^3 + [5ab^3 + 3abc - (4abc - 2ab^3)]\}$
- $3ab - [-5ab - 14bc + 7ac + (9ac - 5bc)]$
- $-3\{2x + 3y + [9z - 5x + 11y - (2y + 6z)]\}$

RECUERDA

Las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo a la cantidad de términos que cuente en:

MONOMIOS

Que tienen un solo término

Ejemplo:

$$6xyz$$

BINOMIOS

Las expresiones que tienen dos términos

Ejemplo:

$$7az + 4mn$$

Trinomios

Expresiones algebraicas de tres términos

Ejemplo:

$$10mn - 15mn^2 - 8m^2n$$

POLINOMIOS

Cuando la expresión tiene cuatro o más términos

Ejemplo:

$$9mn + 7ab - 11xy - 3xyz^2 + 12$$

PARA RECORDAR

- Términos de signos iguales se suman y se copia el mismo signo.
- Términos de signos diferentes se restan y se anota el signo del mayor.
- Términos semejantes son aquellos que tiene igual parte literal sin importar el signo que tengan.

2. Operaciones con expresiones algebraicas

2.1. Suma y resta de expresiones algebraicas

Para sumar y restar expresiones algebraicas es necesario agrupar los términos semejantes y aplicar la ley de signos, en caso de que existan signos de agrupación, luego se reducen todos los términos semejantes de la expresión.

Ejemplo. Sumar los términos, $3a$; $5a$; $4a$

Solución $= 3a + 5a + 4a = 12a$

Ejemplo. Sumar los términos, $7x$; $9x - y$

Solución

$$= 7x + (9x - y)$$

$$= 7x + 9x - y$$

$$= 16x - y$$

Ejemplo. Sumar los términos, $8ab + 5bc$; $12ac - 10ab$; $-7bc + 14ac$

Solución $= (8ab + 5bc) + (12ac - 10ab) + (-7bc + 14ac)$

$$= 8ab + 5bc + 12ac - 10ab - 7bc + 14ac$$

$$= 8ab - 10ab + 5bc - 7bc + 12ac + 14ac$$

$$= -2ab - 2bc + 26ac$$

Ejemplo. Restar los términos, $-16xz$ "de" $-8xz$

Solución $= -8xz - (-16xz)$

$$= -8xz + 16xz = 8xz$$

Ejemplo. Restar los términos, $13x^2y - 4yz - 7xy^2$ de $21x^2y + 8xy^2 - 9yz$

Solución $= 21x^2y + 8xy^2 - 9yz - (13x^2y - 4yz - 7xy^2)$

$$= 21x^2y + 8xy^2 - 9yz - 13x^2y + 4yz + 7xy^2$$

$$= 21x^2y - 13x^2y + 8xy^2 + 7xy^2 - 9yz + 4yz$$

$$= 8x^2y + 15xy^2 - 5yz$$

Ejemplo. Restar los términos, $7ab + 6abc + 11ac$ de $22ab - 8abc - 9ac$

Solución $= 22ab - 8abc - 9ac - (7ab + 6abc + 11ac)$

$$= 22ab - 8abc - 9ac + 7ab - 6abc - 11ac$$

$$= 22ab + 7ab - 8abc - 6abc - 9ac - 11ac$$

$$= 29ab - 14abc - 20ac$$

Realizamos las sumas algebraicas:

- $12xyz$; $8xyz$; $-15xyz$
- $-4a^2b + 9ab^2$; $5abc$; $11ab^2$; $-7abc$; $-11a^2b + 3ab^2$
- $4axz + 19ab$; $-18axz + 6ab$

Realizamos las restas algebraicas:

- $14xy^3 + 10xyz^2$ de $-20xy^2 + 6ayz^2$
- $-9ab - 15ac$ de $14ac - 18ac$
- $17abd$ de $-4abd$
- $17xyz + 13xy - 4x^2y$ de $-11xy + 21xyz - 12x^2y$

2.2. Multiplicación algebraica

Es una operación en la que, dadas dos cantidades, multiplicando $N(x)$ y multiplicador $M(x)$, se debe encontrar una tercera cantidad llamada producto $P(x)$.

Ley de signos:

$$\begin{array}{ll} + \cdot + = + & - \cdot - = + \\ + \cdot - = - & - \cdot + = - \end{array}$$

Ley de exponentes. El producto de potencias de igual base es igual a la potencia cuyo exponente es la suma de sus exponentes, es decir:

$$a^3 \cdot a^5 \cdot a^2 \cdot a^7 = a^{17}$$

Ley de coeficientes. El coeficiente del producto de dos factores, es igual a el producto de los coeficientes de los factores.

$$5x \cdot 7y = (5 \cdot 7)xy = 35xy$$

Regla para multiplicar expresiones algebraicas. Primero se multiplican los coeficientes a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, aplicando las anteriores leyes mencionadas.

Ejemplo. Multiplicar:

$$2a^3 \cdot 2a^4 \cdot 2a^7 = (2 \cdot 2 \cdot 2)a^{3+4+7} = 8a^{14}$$

Ejemplo. Multiplicar:

$$15x^2 \cdot 2x \cdot 3x^{-5} = (15 \cdot 2 \cdot 3)x^{2+1-5} = 90x^{-2}$$

Ejemplo. Multiplicar:

$$5a^9 \cdot \frac{7}{2}a^{-5} = \left(\frac{5 \cdot 7}{2}\right)a^{9-5} = \frac{35}{2}a^4$$

Ejemplo. Multiplicar:

$$7y^4 \cdot (2y^2 - 9xyz) = 14y^6 - 63xy^5z$$

Ejemplo. Multiplicar:

$$(7y - 5x) \cdot (3x + 4y)$$

$$\text{Operaciones de términos: } 7y \cdot 3x = 21xy$$

$$\text{Operaciones de términos: } 7y \cdot 4y = 28y^2$$

$$\text{Operaciones de términos: } -5x \cdot 3x = -15x^2$$

$$\text{Operaciones de términos: } -5x \cdot 4y = -20xy$$

$$21xy + 28y^2 - 15x^2 - 20xy$$

$$-15x^2 + 28y^2 + xy$$

RECUERDA

Las operaciones se realizan en un determinado orden:

- Paréntesis
- Exponentes y raíces
- Multiplicar y dividir antes de la suma y resta (si no hay signos de agrupación)
- Suma y resta de izquierda a derecha

No olvidar que:

Propiedades Algebraicas		
Propiedad	Explicación	Ejemplo
Distributiva	Multiplicar el número externo por cada uno de los internos	$5(8+3) = 5(8)+5(3)$
Asociativa	Grupos diferentes no afectan el resultado	$(5+8)+3 = 5+(8+3)$
Conmutativa	Orden de los factores no afecta el resultado	$5+8+3 = 3+8+5$
Identidad	Número se mantiene igual	$5 \cdot 1 = 5 \text{ ó } 5+0 = 5$

No olvidar que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$2^7$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

$$2^3 \quad 2^4$$

Realizamos las siguientes multiplicaciones:

a) $19ab \cdot (-3bc^2)$

b) $(2x^2y) \cdot (-4xyz) \cdot (12x^3y^{-3}z)$

c) $(3ab^2 - 5a^2b + 8a + 3) \cdot 7ab$

d) $(-x + 1) \cdot (-6xy + 2xz + 5yz - 4)$

e) $\left(\frac{2ab^3}{5}\right) \cdot \left(\frac{7a^5bc}{2c^3}\right)$

f) $\left(\frac{4x}{7} - 3y\right) \cdot (-xy^2 - 21y^3)$

g) $\frac{9a^3bc}{ac^2} \cdot (3ab^2 + 5ac - 11abc^5 - a^4b^{-2}c)$

h) $(-5xy + 1) \cdot (6x^4y - 5xy^3 - 13 + 2x^2y^2)$

i) $(4mn + 7mn^2 - 9m) \cdot (-3m^2n - 8m^2n^2 + 5)$

j) $(-13xy - 2y) \cdot (15x + 12x^2 - 7)$

k) $(-9mn + 10m^2n) \cdot (2mn^2 + 3) \cdot (11n - 7m)$

l) $\left(\frac{5pq^3}{r}\right) \cdot \left(\frac{7pqr}{3q^6}\right) \cdot \left(\frac{9p^{-5}q}{q^{-3}r}\right)$

ELEMENTOS DE LA DIVISIÓN

Dividendo $\rightarrow y^2 + 3y + 2$ $\mid y + 2$ $\leftarrow$ Divisor
 $\begin{array}{r} -y^2 - 2y \\ 0 + y + 2 \\ -y - 2 \\ \hline \text{Resto} \rightarrow 0 \end{array}$ $y + 1 \leftarrow$ Cociente

RECUERDA

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6x^8}{6x^4} = \frac{8-4}{6/3=2} = 2x^4$$

DIVIDIR ES SIMPLIFICAR

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{x \cdot x}{1} = x^2$$

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$$

3. División algebraica

Es una operación que se denota $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dadas dos cantidades llamadas dividendo $P(x)$ y divisor $Q(x)$; hallar una tercera cantidad llamada cociente $R(x)$.

Ley de signos. $+$ entre $+$ $=$ $+$ $-$ entre $-$ $=$ $+$
 $+$ entre $-$ $=$ $-$ $-$ entre $+$ $=$ $-$

Ley de exponentes. La potencia de la división de bases iguales es igual a la resta de las mismas. Es decir:

$$\frac{a^7}{a^4} = a^{(7-4)} = a^3$$

Ley de coeficientes. El coeficiente del cociente resulta de la división del dividendo entre el divisor.

$$\frac{14a^3}{2} = (14 \div 2) a^3 = 7a^3$$

3.1. División de monomios

Se divide los coeficientes y posteriormente se copia la parte literal aplicando las leyes de potencias mencionadas anteriormente.

Ejemplo. Dividir:

$$\frac{15b^7c^5}{3b^2c} = 5b^{7-2}c^{5-1} = 5b^5c^4$$

Ejemplo. Dividir:

$$\frac{125x^6y^3z}{5x^2yz^4} = 25x^{6-2}y^{3-1}z^{1-4} = 25x^4y^2z^{-3}$$

Ejemplo. Dividir:

$$\frac{9m^{2+x}n^{y-1}}{m^xn^3} = 9m^{2+x-x}n^{y-1-3} = 9m^2n^{y-4}$$

3.2. División de polinomios entre monomios

Para dividir polinomios con monomios el divisor se debe de repartir a cada uno de los términos del polinomio y se realiza la división correspondiente siguiendo los pasos anteriores.

Ejemplo. Dividir: $6a^{10}b^7 - 9b^4c^{-3} + 12a^5$ entre $3a^2b^{-2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{6a^{10}b^7}{3a^2b^{-2}} - \frac{9b^4c^{-3}}{3a^2b^{-2}} + \frac{12a^5}{3a^2b^{-2}} \\ &= 2a^8b^9 - 3a^{-2}b^6c^{-3} + 4a^3b^2 \end{aligned}$$

Ejemplo. Dividir: $4p^5q^{-7}r^2 + 10p^3q^8 - 2p^{-3}q^6r^{-2}$ entre $2p^{-4}qr^7$

$$\begin{aligned} &= \frac{4p^5q^{-7}r^2}{2p^{-4}qr^7} + \frac{10p^3q^8}{2p^{-4}qr^7} - \frac{2p^{-3}q^6r^{-2}}{2p^{-4}qr^7} \\ &= 2p^9q^{-8}r^{-5} + 5p^7q^7r^{-7} - pq^5r^{-9} \end{aligned}$$

Actividad

Realizamos las siguientes divisiones algebraicas:

a) $16a^7b^9c^{-4}$ entre $4a^{-5}b^6c^{-1}$

b) $27x^3y^7z^8$ entre $3y^2z^5$

c) $4x^{4-n}y^{2+m}z^5$ entre $2x^{3+2n}y^{-4}z^{n-2}$

d) $5a^8b^9 - 12ab^3 + 3a^2b^2$ entre a^3b^{-5}

e) $49x^{11}y^5 + 7x^{-5}z^3 + x^9z^3$ entre $7x^2yz^4$

f) $x^5 + x^4 - x^3$ entre $x - 1$

g) $10x^3 + 2x^2 + 8x + 16$ entre $2x + 2$

h) $a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a + 4$ entre $a + 1$

i) $x^3 + 3x^2 - 14x - 30$ entre $x - 5$

j) $y^4z^5 + y^3z^3 + y^2z^1$ entre $yz^2 - 1$

k) $x^5 + x^4 - 2x^3$ entre $x - 1$

Regla para dividir expresiones algebraicas que tengan divisor con más de un término

En la división de polinomios es necesario ordenar los términos en forma descendente o ascendente, luego se realiza la división para lo que se recomienda los siguientes pasos:

P1.- Se ordena el dividendo y el divisor de la misma forma ya sea descendente o ascendente.

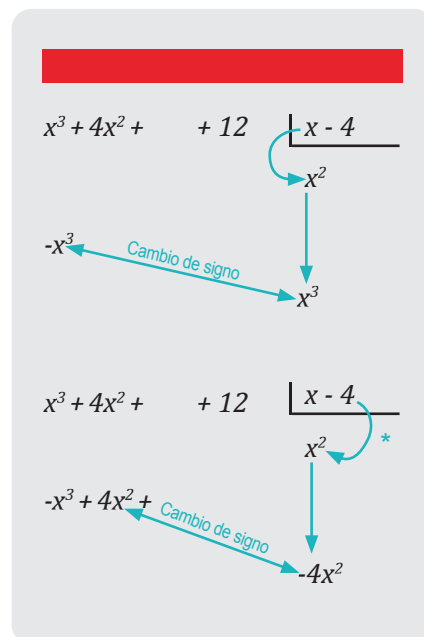
P2.- Se divide el 1er. término del dividendo entre el 1er. término del divisor y ese resultado nos dará el cociente.

P3.- Se multiplica el cociente con todo el divisor y su resultado se anota debajo del dividendo con signo cambiado.

P4.- Luego se reducen los mismos y se baja los siguientes términos así se procede a repetir los pasos hasta que el resto sea cero o quede un residuo.

Ejemplo. Dividir: $z^6 - z^4 + z^2 + 2$ entre $z + 1$

$$\begin{array}{r}
 z^6 \quad - z^4 + z^2 \quad + 2 \quad | \quad z + 1 \\
 \underline{-z^6 - z^5} \\
 0 - z^5 - z^4 \\
 \underline{+z^5 + z^4} \\
 0 + 0 + z^2 \\
 \underline{-z^2 - z} \\
 0 - z + 2 \\
 \underline{+z + 1} \\
 +3 \text{ (residuo)}
 \end{array}$$



Actividad

Dividir: $3x^3 - x^2 - x + 2$ entre $3x - 1$
Dividir: $a^5 + a^4 - a^3 + a^2 + a + \frac{3}{16}$ entre $a + \frac{1}{2}$

En la vida diaria, para hablar de términos semejantes, podríamos compararlo con una habitación totalmente desordenada en la cual hay que darle a cada elemento su lugar, es así como funcionan los términos semejantes debido a que cada prenda debe ir con su igual y no debemos colocarla en cualquier parte, obviamente habrá prendas similares pero no iguales de tal forma que cada cosa tiene su sitio, es así que podemos relacionar la matemática con nuestro diario vivir y al mismo tiempo ella nos ayuda a que nuestras tareas lleven un determinado orden para que todo funcione bien.

¿Qué importancia tiene el orden en las actividades que realizas y qué beneficio te pueden traer a futuro?

¿De qué manera relacionas los términos semejantes en tus actividades diarias?

VALORACIÓN



PRODUCCIÓN

Actividad

Organizamos a tus compañeras y compañeros del curso, recolecten envases desechables como botellas, bolsas de jugos, otros envases plásticos y cartones que contaminan el medio ambiente de tu contexto. Clasifica lo recolectado separándolos según su semejanza para luego reutilizarlos en la elaboración de masetas, loreros, basureros, mandiles, individuales, etc.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

PRÁCTICA

Desde el origen de las matemáticas se han presentado **problemas relacionados con ecuaciones de primer grado**, conocidas también como 'ecuaciones lineales'. Los **griegos** fueron de los primeros en contribuir al desarrollo de los métodos actuales. Contribuyeron con el álgebra geométrica, basada en soluciones por procesos geométricos. Todos estos desarrollos científicos llegaron a manos de los árabes quienes los extendieron por Europa. Finalmente, en el siglo XVII el matemático y filósofo **René Descartes** contribuyó con la **notación simbólica**, y así el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de los sistemas de ecuaciones importantes para el desarrollo tecnológico.



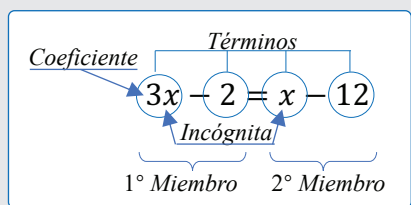
Actividad

Luego de la lectura, respondemos:

- Investiguemos si existe algún aporte matemático de nuestro país.
- ¿Qué problemas resolvían las culturas, utilizando las ecuaciones?
- ¿Dónde ocupas las ecuaciones en tu diario vivir?

TEORÍA

ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN



CLASIFICACIÓN DE ECUACIONES

Ecuaciones Enteras

$$3x + 2 = 5x - 8$$

Ecuaciones fraccionarias

$$\frac{3}{x} + 2 = 5x - 3$$

Ecuaciones Irracionales

$$x + 3 = \sqrt{x} - 2$$

Las ecuaciones están formadas por

$$1er\ miembro = 2do\ miembro$$

1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a aquella en que la incógnita esta elevada a la primera potencia.

Ejemplo

$$2x + 3 = 21$$

La letra "x" es la incógnita.

3 y 21 son términos independientes.

Ecuación. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece una (o más) incógnitas.

Incógnita. Normalmente se simboliza con la letra "x", la cual representa cantidades a determinar; las cuales hacen que tengan un valor verdadero o falso.

Transposición de términos. Se cambian de posición todos los términos de la derecha a la izquierda y de izquierda a derecha, para realizar esta transposición de miembros todos los términos mantienen su mismo signo.

Regla de transposición de términos:

1. Si un término suma a otro, éste al cambiarlo de miembro cambia y viceversa si está restando pasara a sumar.
2. Si un término multiplica pasará al otro miembro a dividir y si divide pasará a multiplicar.

Grado de una ecuación. Está determinado por el exponente mayor del factor literal.

Resolución de una ecuación de 1er grado con una incógnita

1. Se tiene que ordenar todos los términos semejantes en el lado izquierdo.
2. Si estuvieran las incógnitas en el lado derecho se realiza la transposición de miembros.
3. Se reduce los términos semejantes.
4. Si la variable queda acompañada de algún coeficiente distinto de uno este valor pasará al otro miembro a dividir.

5) En caso de que existan signos de agrupación paréntesis, corchetes y llaves, estos se eliminan aplicando la ley de signos.

6) Se despeja la incógnita.

7) Se realiza la prueba.

Nota.- En caso de que la incógnita sea negativa, se multiplica toda la ecuación por menos uno (-1).

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación:

Solución

$$\begin{aligned}
 &9x - 3 = 5x + 5 \\
 \text{P1. Se realiza la transposición de términos} &\longrightarrow 9x - 5x = +5 + 3 \\
 \text{P3. Se reducen los terminos semejantes} &\longrightarrow 4x = 8 \\
 \text{P4. El coeficiente pasa al otro miembro a dividir} &\longrightarrow x = \frac{8}{4} \\
 &x = 2
 \end{aligned}$$

Prueba

$$\begin{aligned}
 9x - 3 &= 5x + 5 \\
 9(2) - 3 &= 5(2) + 5 \\
 18 - 3 &= 10 + 5 \\
 15 &= 15
 \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación: $-8a + 4 = 9 + 2a - 6 + (5a + 8)$

Solución

$$\begin{aligned}
 -8a + 4 &= 9 + 2a - 6 + 5a + 8 \\
 -8a - 2a - 5a &= 9 - 6 + 8 - 4 \\
 -15a &= 7 \quad / * -1 \\
 15a &= -7 \\
 a &= \frac{-7}{15}
 \end{aligned}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
 -8\left(\frac{-7}{15}\right) + 4 &= 9 + 2\left(\frac{-7}{15}\right) - 6 + \left[5\left(\frac{-7}{15}\right) + 8\right] \\
 \frac{56}{15} + 4 &= 9 - \frac{14}{15} - 6 + \left[\frac{-7}{3} + 8\right] \\
 \frac{56+60}{15} &= 9 - 6 - \frac{14}{15} + \frac{-7+24}{3} \\
 \frac{116}{15} &= \frac{135-90-14+85}{15} \\
 \frac{116}{15} &= \frac{116}{15}
 \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación: $3x + (6x + 1) - (x + 3) + (2x - 4) = 0$

Solución

$$\begin{aligned}
 3x + 6x + 1 - x - 3 + 2x - 4 &= 0 \\
 3x + 6x - x + 2x &= -1 + 3 + 4 \\
 10x &= 6 \\
 x &= \frac{6}{10} \\
 x &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

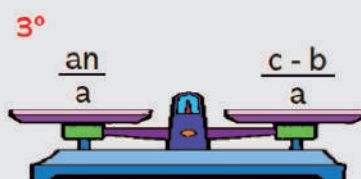
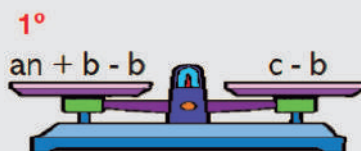
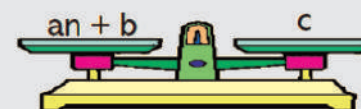
SIGNOS DE LA MULTIPLICACIÓN

$$\begin{aligned}
 (+) \cdot (+) &= + \\
 (+) \cdot (-) &= - \\
 (-) \cdot (+) &= - \\
 (-) \cdot (-) &= +
 \end{aligned}$$

SIGNOS DE LA DIVISIÓN

$$\begin{aligned}
 (+) \div (+) &= + \\
 (+) \div (-) &= - \\
 (-) \div (+) &= - \\
 (-) \div (-) &= +
 \end{aligned}$$

TRANSPOSICIÓN



PARA PENSAR

Juega al sudoku

9			3	4		7	
8	5		7			3	4
	7		8	9	1	2	
	6	8				4	
3			6	8	7		1
				5	4		3
					8		
		4	1		2	5	
6		5		7	9	1	2

Encuentra el valor para el resultado.

$$\begin{aligned} \text{Azul} + \text{Azul} &= 4 \\ \text{Azul} + \text{Rojo} &= 3 \\ \text{Rojo} + \text{Amarillo} &= 4 \\ \text{Amarillo} - \text{Azul} &= ? \end{aligned}$$

RECUERDA EL PROCEDIMIENTO

Resolver la siguiente ecuación: $3 - \frac{x}{2} = 3x + 17$.

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} - 3x &= 17 - 3 \\ \frac{-x - 6x}{2} &= 14 \\ \frac{-7x}{2} &= 14 \\ -x &= \frac{14 \cdot 2}{7} \\ -x &= 4 \\ (-1) \cdot -x &= (-1) \cdot 4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación: $\frac{3(x+5)}{2} - 1 = 4x - 7(x+2) + 6$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{3(x+5)}{2} - 1 &= 4x - 7(x+2) + 6 \\ 3x + 15 - 2 &= 2(4x - 7x - 14 + 6) \\ 3x + 13 &= 8x - 14x - 28 + 12 \\ 3x - 8x + 14x &= -28 + 12 - 13 \\ 9x &= -29 \\ x &= -\frac{29}{9} \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación: $\frac{2}{x} + \frac{5}{3} = \frac{7}{x}$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{x} \\ \frac{6 + 5x}{3x} &= \frac{7}{x} \\ 6 + 5x &= 21 \\ 5x &= 21 - 6 \\ 5x &= 15 \\ x &= \frac{15}{5} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 10x + 70 - 24 + 30x &= 45 - 12x + 6 \\ 40x + 46 + 12x &= 51 \\ 52x &= 51 - 46 \\ x &= \frac{5}{52} \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{2} - \frac{4y-4}{6} + y &= \frac{5y-1}{4} - \frac{2y-3}{3} \\ 6y + 18 - 8y + 8 + 12y &= 15y - 3 - 8y + 12 \\ 10y + 26 &= 7y + 9 \\ 10y - 7y &= 9 - 26 \\ 3y &= -17 \\ y &= -\frac{17}{3} \end{aligned}$$

Actividad

—Resolvamos las siguientes ecuaciones de primer grado:

- $5a - 7 = 9a + 3$
- $16x + 9 + 8x = 2x - 12$
- $6 - 7x - 1 = x - 11x + 4$
- $5(a + 16) = -2 + 18a - a$
- $4y - 8(2y - 9 + 6y) = 5(-3y + 12)$

- $\frac{x-5}{3} - \frac{x-10}{2} + \frac{x}{6} = 3$
- $\frac{7}{5}x + 9 = 2$
- $\frac{z+5}{3} + \frac{10}{7} = \frac{7}{6}$
- $\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = x + 7$

2. Resolución de problemas del contexto con ecuaciones de primer grado

Ejemplo. Juan utiliza $\frac{1}{5}$ de su sueldo en vestimenta; $\frac{1}{4}$ del total en alimentación; $\frac{1}{8}$ en transporte. ¿Cuál será su sueldo? Sabiendo que para los otros gastos le sobra 799,85 Bs.

Solución

- Sueldo percibido por Juan x
- Gastos en vestimenta $\frac{1}{5}x$
- Gastos de alimentación $\frac{1}{4}x$
- Gastos de transporte $\frac{1}{8}x$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + 799,85 = x$$

$$\frac{8x + 10x + 5x + 31994}{40} = x$$

$$23x + 31994 = 40x$$

$$23x - 40x = -31994$$

$$-17x = -31994$$

$$x = \frac{31994}{17}$$

$$x = 1882$$

Respuesta. El sueldo percibido por Juan es de Bs. 1882

Ejemplo. Silvia tiene 20 años y su Papá 45. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre ha de ser el doble de la de Silvia?

Solución.

- Años que tienen que transcurrir: x
- Edad de Silvia dentro de x años: $20 + x$
- Edad del padre dentro de x años: $45 + x$

$$2(20 + x) = 45 + x$$

$$40 + 2x = 45 + x$$

$$2x - x = 45 - 40$$

$$x = 5$$

Respuesta. Deben pasar 5 años para que el papá de Silvia tenga el doble de edad que Silvia

Ejemplo. Pedro y Alejandro se reúnen a jugar cartas, Pedro cuenta con 16 cartas más que Alejandro, si en total tienen 56 cartas ¿Cuántas cartas tiene cada uno?

Solución

- Total, cartas que tiene Alejandro: x
- Total, cartas que tiene Pedro: $x + 16$

$$x + x + 16 = 56$$

$$2x = 56 - 16$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

Pedro $x + 16$

$$20 + 16 = 36$$

Respuesta. Alejandro tiene 20 cartas y Pedro tiene 36 cartas.

SIGNOS DE LA MULTIPLICACIÓN



$\frac{1}{5}x$ vestimenta

$\frac{1}{4}x$ alimentación

$\frac{1}{8}x$ transporte

RESOLVER

Hallar un número tal que la suma de su doble y de su triple sea igual a 100.

Planteamiento	Ecuación
El número que se busca.	x
Doble del número.	$2x$
Triple del número.	$3x$
La suma de su doble y de su triple sea igual a 100.	$2x + 3x = 100$
Resolver la ecuación.	$5x = 100$
Despejar la incógnita.	$x = 100/5$
El número buscado.	$x = 20$
El doble de 20 es 40 y su triple es 60, la suma es $40+60=100$.	

LENGUAJE NUMÉRICO

Intervienen números y signos de operación.

LENGUAJE ALGEBRAICO

Combina letras con números y signos de operación aritmética.

PIENSA

Hacer que 4 nueves sumen 100

$$9 + 9 \times 9 - 9 = 100$$

¿Quién soy?, mi valor es menor que veinte y estoy exactamente a mitad del camino entre 10 y 20.

PROBLEMA DE EDAD

Si Alcira es 12 años menor que Elba y dentro de 7 años la edad de Elba es el doble que la edad de Alcira. ¿Qué edad tiene Elba?

Planteamiento	Ecuación
x es la edad de Elba.	x
Elba tiene 12 años más que Alcira.	x + 12
Dentro de 7 años, se suma a las edades; Elba y Alcira.	x + 7 ; x + 12 + 7
La edad de Elba es el doble que la de Alcira.	2(x + 7) = x + 19
Resolver la ecuación	2x - x = 19 - 12
Despejar la incógnita	x = 5
La edad de Elba es 17 y la de Alcira es 5. En 7 años Alcira tendrá 12 y Elba 24, es decir, Elba tendrá el doble que Alcira.	

Ejemplo. Adela tiene 3 jaulas y 80 pajaritos de colores. La jaula más pequeña es la tercera parte de la mediana, la mediana es la mitad de la más grande. Ayudemos a Adela a distribuir los pajaritos en cada jaula de manera que sea proporcional la distribución al tamaño de la jaula.

Solución

- Número de pájaros de jaula grande: x
- Número de pájaros de jaula mediana: x/2
- Número de pájaros de la jaula pequeña: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 80$$

$$\frac{6x + 3x + x}{6} = 80$$

$$10x = 80 \cdot 6$$

$$10x = 480$$

$$x = \frac{480}{10}$$

$$x = 48$$

$$\text{Jaula media } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(48) = 24$$

$$\text{Jaula pequeña } \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}(48) = 8$$

Respuesta. En la jaula más grande entraran 48 pajaritos, en la mediana 24 pajaritos y en la pequeña 8.

Ejemplo. En el curso tercero de secundaria las mujeres superan a los hombres en 5. Sabiendo que son un total de 39 estudiantes ¿Cuántas mujeres y cuántos hombres hay en el curso?

Solución

- Número de mujeres x+5
- Número de varones x

$$x + 5 + x = 39$$

$$2x = 39 - 5$$

$$x = \frac{34}{2}$$

$$x = 17$$

$$\text{Número de mujeres } 17 + 5 = 22$$

Respuesta. En el curso hay 17 varones y 22 mujeres.

Actividad

Resolvemos el problema

- Si en una florería hay 52 ramos de flores y el número de ramos de rosas es el triple que el número de ramos de claveles más 7. ¿Cuántos ramos de rosa y cuantos ramos de claveles hay en la florería?



Ejemplo. Si el triple de un número más 34 es igual a 157 ¿Qué número es? Solución

- El triple del número es: $3x$
- El triple de un número más 34: $3x + 34$

$$34 + 3x = 157$$

$$3x = 157 - 34$$

$$3x = 123$$

$$x = \frac{123}{3}$$

$$x = 41$$

Prueba

$$34 + 3x = 157$$

$$34 + 3 \cdot 41 = 157$$

$$34 + 123 = 157$$

$$157 = 157$$

Respuesta. El número es 41.

LENGUAJE COMÚN AL ALGEBRAICO

Un número cualquiera: x

El producto de dos números cualquiera: xy

La suma de dos números cualquiera: $x+y$

La resta de dos números cualquiera: $x-y$

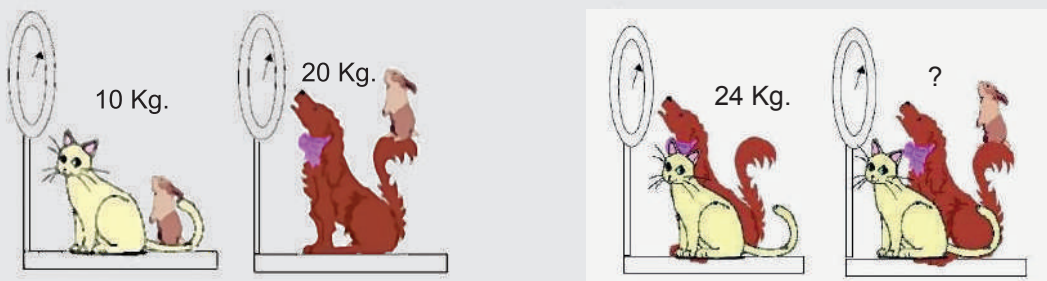
El duplo de un número cualquiera: $2x$

El triple de un número cualquiera: $3x$

El cuadrado de un número cualquiera: x^2

El cubo de un número cualquiera: x^3

Resolvamos el problema de la figura:



- Un perro, un gato y un conejo están en una balanza como indica la imagen. ¿Cuál es el peso de cada uno de los animales?

Las ecuaciones se aplican en nuestra cotidianidad, como la planificación de gastos que realizamos al mes o semanalmente, es decir, forman parte de la vida diaria, mencionamos:

- ¿En qué situaciones de tu región se pueden aplicar las ecuaciones?
- ¿En qué casos de tu vida aplicas las ecuaciones?

VALORACIÓN

PRODUCCIÓN

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Investigamos otras aplicaciones de las ecuaciones de primer grado y realizamos un esquema.
- Respondemos: ¿Qué es una ecuación y menciona algunos ejemplos?

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES APLICADOS AL DESARROLLO DE LA TECNOLOGÍA

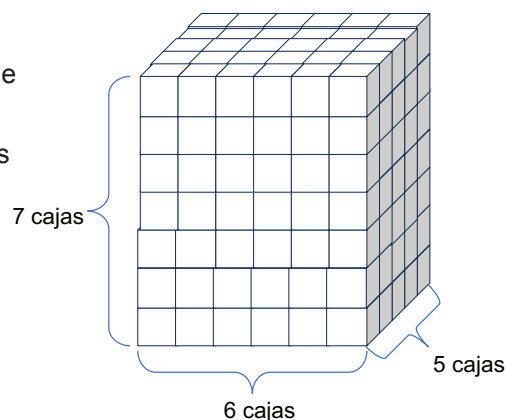
PRÁCTICA

Juan trabaja en una fábrica de cartones que elabora cajas, el dueño de la empresa le pide a Juan que cuente cuántas cajas hay en el bloque.

La organización del bloque es; 6 cajas de ancho, 7 cajas de alto y 5 cajas de profundidad, además, el bloque esta con las cajas completas.

A Juan, contar las cajas uno por uno, le llevará más tiempo.

Observa los bloques de cajas apilados en el mismo orden.



Actividad

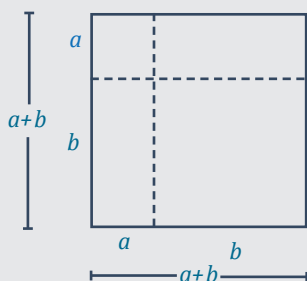
- ¿Podrías encontrar una mejor forma de saber cuántas cajas hay?
- Compartimos con la clase el procedimiento empleado para encontrar el total de las cajas.
- ¿Cuáles son las operaciones algebraicas básicas y en qué nos ayudan?

TEORÍA

EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

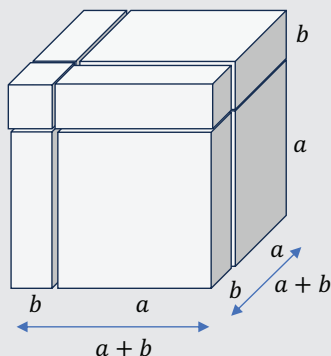
Se denomina así al resultado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



EL CUBO PERFECTO

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



A continuación, tenemos los productos notables que se obtienen con un simple desarrollo.

1. Productos notables (identidades algebraicas)

1.1. Cuadrado de un binomio

El cuadrado de una suma (o diferencia) de dos cantidades, es igual al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Se expresa con la fórmula:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

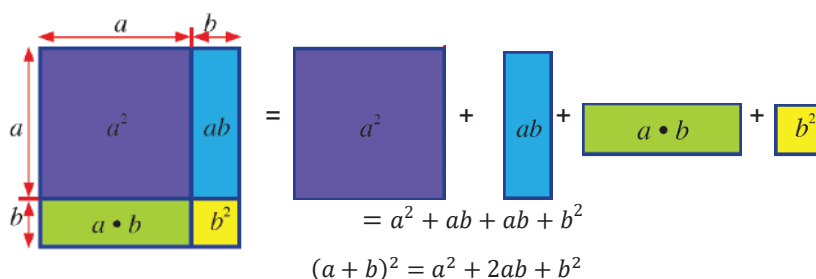
Demostración analítica

La expresión $(a + b)^2$ es iguala a $(a + b)(a + b)$, al realizar el producto, se tiene:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración gráfica



Ejemplo. Desarrollar $(a + 5)^2$.

Solución

Aplica la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(a)^2 = a^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(a)(5) = 10a$
- El cuadrado del segundo término: $(5)^2 = 25$

El resultado de la suma de los términos al cuadrado es:

$$(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$$

Ejemplo. Desarrollar $(-3a^2 + 2b)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula con $-3a^2$ como el primer término y $2b$ como el segundo término.

$$\begin{aligned} (-3a^2 + 2b)^2 &= (-3a^2)^2 + 2(-3a^2)(2b) + (2b)^2 \\ &= 9a^4 - 12a^2b + 4b^2 \end{aligned}$$

Ejemplo. Desarrollar $\left(\frac{2}{3}x + 3y\right)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula con $\frac{2}{3}x$ como el primer término y $3y$ como el segundo término.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}x + 3y\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}x\right)(3y) + (3y)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 + 4xy + 9y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo. Desarrollar $(5a^{2x+4} + b^{3x})^2$.

Solución

Se aplica la fórmula con $5a^{2x+4}$ como el primer término y b^{3x} como el segundo término.

$$\begin{aligned} (5a^{2x+4} + b^{3x})^2 &= (5a^{2x+4})^2 + 2(5a^{2x+4})(b^{3x}) + (b^{3x})^2 \\ &= 25a^{4x+8} + 10a^{2x+4}b^{3x} + b^{6x} \end{aligned}$$

El desarrollo del cuadrado de una diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo. Desarrollar $(2x^3 - 9y^5)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula con $2x^3$ como el primer término y $9y^5$ como el segundo término

$$\begin{aligned} (2x^3 - 9y^5)^2 &= (2x^3)^2 + 2(2x^3)(9y^5) + (9y^5)^2 \\ &= 4x^6 + 36x^3y^5 + 81y^{10} \end{aligned}$$

CUADRADO DE UN BINOMIO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} a - b \\ \underline{a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{-ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Desarrollamos las siguientes expresiones:

a. $(6mm^4 + 3m^5p)^2$

c. $\left(1 - \frac{3}{4}xy\right)^2$

d. $\left(\frac{1}{4}x - 2y^3\right)^2$

e. $\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{4y}\right)^2$

b. $(a^5 - b^5)^2$

BINOMIO CONJUGADO

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 - \cancel{ab} \\ - \cancel{ab} - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

1.2. Binomio conjugado

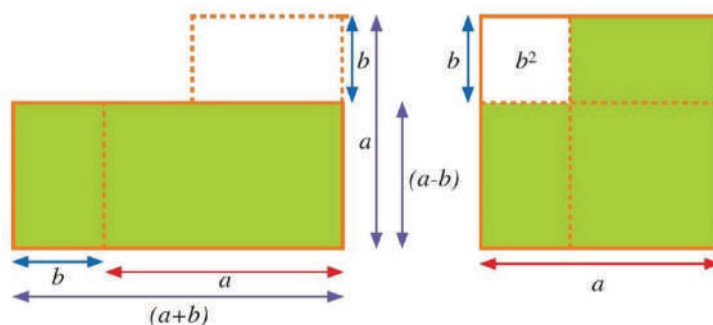
Una suma por una diferencia, o diferencia por una suma, su resultado es la diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Demostración analítica

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Demostración gráfica



$$A = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(a + 5)(a - 5)$.

Solución

$$(a + 5)(a - 5) = (a)^2 - (5)^2 = a^2 - 25$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(-2x^2 + 3y)(-2x^2 - 3y)$.

Solución

$$(-2x^2 + 3y)(-2x^2 - 3y) = (-2x^2)^2 - (3y)^2 = 4x^4 - 9y^2$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $\left(\frac{5}{3} - \frac{3a^4}{2}\right)\left(\frac{5}{3} + \frac{3a^4}{2}\right)$.

Solución

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{3a^4}{2}\right)\left(\frac{5}{3} + \frac{3a^4}{2}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{3a^4}{2}\right)^2 = \frac{25}{9} - \frac{9a^8}{4}$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(3x^{2a+3} + y^{4b})(3x^{2a+3} - y^{4b})$.

Solución

$$(3x^{2a+3} + y^{4b})(3x^{2a+3} - y^{4b}) = (3x^{2a+3})^2 - (y^{4b})^2 = 9x^{4a+6} - y^{8b}$$

Expresiones donde se aplica el binomio conjugado.

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(a + b + c)(a + b - c)$.

Solución

Los términos se agrupan de la siguiente forma:

$$(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c][(a + b) - c]$$

Se aplica la fórmula del binomio conjugado:

$$[(a + b) + c][(a + b) - c] = (a + b)^2 - c^2$$

Se desarrolla el binomio y el resultado es:

$$(a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIA

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$1^n = 1$$

$$n^1 = n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(2a - 3b - c + 4)(2a - 3b + c - 4)$.

Solución

Los términos se agrupan y se aplica la fórmula para binomios conjugados:

$$\begin{aligned} & (2a - 3b - c + 4)(2a - 3b + c - 4) \\ &= [(2a - 3b) - (c - 4)][(2a - 3b) + (c - 4)] \\ &= (2a - 3b)^2 - (c - 4)^2 \end{aligned}$$

Se desarrolla el binomio y el resultado es:

$$\begin{aligned} (2a - 3b)^2 - (c - 4)^2 &= (4a^2 - 12ab + 9b^2) - (c^2 - 8c + 16) \\ &= 4a^2 - 12ab + 9b^2 - c^2 + 8c - 16 \\ &= 4a^2 + 9b^2 - c^2 - 12ab + 8c - 16 \end{aligned}$$

El resultado es: $4a^2 + 9b^2 - c^2 - 12ab + 8c - 16$

1.3. Producto de dos binomios

El producto de dos binomios $(x \pm a)(x \pm b)$ es igual al cuadrado del primer término más la suma algebraica de los dos términos por el primer término, más el producto de los segundos términos.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(x - 3)(x + 4)$.

Solución

Se desarrolla el binomio:

- El cuadrado del término común: $(x)^2 = x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común: $(-3 + 4)x = x$
- El producto de los términos no comunes: $(-3)(4) = -12$

Se obtiene el resultado:

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(a - 3)(a - 5)$.

Solución

$$(a - 3)(a - 5) = a^2 + (-3 - 5)a + (-3)(-5) = a^2 - 8a + 15$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(7 - a)(7 + 3a)$.

Solución

$$(7 - a)(7 + 3a) = 7^2 + (-a + 3a)7 + (-a)(3a) = 49 + 14a - 3a^2$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$.

Solución

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{4}$$

Producto de dos binomios

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

b	bx	ab
x	x ²	ax
	x	a

Ley de signos

El producto de signos iguales es positivo (+).

El producto de signos diferentes es negativo (-).

$$(+) \cdot (+) = (+)$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

$$(+) \cdot (-) = (-)$$

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

Desarrollamos las siguientes expresiones:

a) $(x + a)(x - a)$

c) $\left(\frac{1}{5}x + y\right)\left(\frac{1}{5}x - y\right)$

e) $(a - 3b)(a + 3b)$

g) $(2x - 1)(2x + 1)$

b) $(2y - a)(2y + a)$

d) $(3a + 2b)(3a - 2b)$

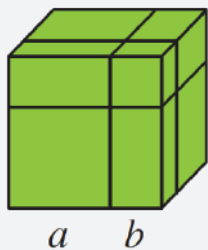
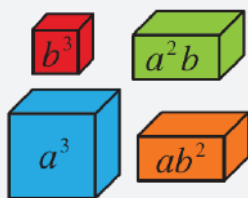
f) $(4x + 5)(4x - 5)$

h) $(x + 2)(x + 3)$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Descomposición volumétrica



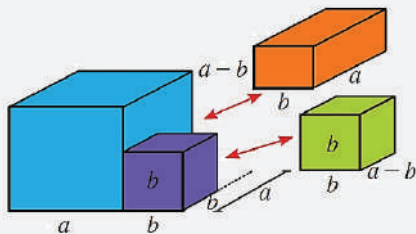
CUBO DE UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

CUBO DE LA DIFERENCIA

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

SUMA DE CUBOS



$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a+b \times \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad + b^3 \end{array}$$

1.4. Cubo de un binomio

Es la suma o diferencia de la forma $(a \pm b)^3$, se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo. Desarrolla la expresión $(x+5)^3$.

Solución

Se desarrolla el cubo del binomio:

$$\begin{aligned}(x+5)^3 &= x^3 + 3(x^2)(5) + 3(x)(5^2) + (5)^3 \\ &= x^3 + 15x^2 + 75x + 125\end{aligned}$$

Se obtiene el resultado:

$$(x+5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

Ejemplo. Desarrolla la expresión $(3a^4 - 2a^3)^3$.

Solución

$$\begin{aligned}(3a^4 - 2a^3)^3 &= (3a^4)^3 - 3(3a^4)^2(2b^3) + 3(3a^4)(2b^3)^2 - (2b^3)^3 \\ 27a^{12} - 3(9a^8)(2b^3) + 3(3a^4)(4b^6) - 8b^9 \\ &= 27a^{12} - 54a^8b^3 + 36a^4b^6 - 8b^9\end{aligned}$$

Ejemplo. Desarrolla la expresión $\left(0.3a^2 - \frac{2}{3}b^3\right)^3$.

Solución

$$\begin{aligned}(3a^4 - 2b^3)^3 &= (3a^4)^3 - 3(3a^4)^2(2b^3) + 3(3a^4)(2b^3)^2 - (2b^3)^3 \\ 27a^{12} - 3(9a^8)(2b^3) + 3(3a^4)(4b^6) - 8b^9 \\ &= 27a^{12} - 54a^8b^3 + 36a^4b^6 - 8b^9\end{aligned}$$

1.5. Suma de cubos

Es el producto que resulta de multiplicar el binomio de la forma:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Ejemplo. Encontrar el producto $(2x^a + y^{2a})(4x^{2b} - 2x^ay^{2x} + y^{4x})$

Solución

$$\begin{aligned}(2x^a + y^{2a})(4x^{2a} - 2x^ay^{2a} + y^{4a}) &= \\ (2x^a + y^{2a})[(2x^a)^2 - 2x^ay^{2a} + (y^{2a})^2] &= \\ (2x^a)^3 + (y^{2a})^3 &= 8x^{3a} + y^{6a}\end{aligned}$$

1.6. Diferencia de cubos

Es el producto que resulta de multiplicar el binomio de la forma:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Ejemplo. Encontrar el producto $(4a^3x - b^x)(16a^6x^2 + 4a^3b^xx + b^{2x})$

Solución

$$\begin{aligned}(4a^3x - b^x)(16a^6x^2 + 4a^3b^xx + b^{2x}) &= \\ (4a^3x - b^x)[(4a^3x)^2 + (4a^3x)(b^x) + (b^x)^2] &= \\ (4a^3x)^3 - (b^x)^3 &= 64a^9x^3 - b^{3x}\end{aligned}$$

1.7. Trinomio al cuadrado

El trinomio al cuadrado se expresa de la siguiente:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\text{ó } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Ejemplo. Desarrollar la expresión $(2a + b - c)^2$.

Solución

Se desarrolla el cubo del binomio:

$$\begin{aligned}(2a + b - 4c)^2 &= (2a)^2 + (b)^2 + (4c)^2 + 2(2a)(b) + 2(2a)(-4c) + 2(b)(-4c) \\ &= 4a^2 + b^2 + 16c^2 + 4ab - 16ac - 8bc\end{aligned}$$

1.8. Trinomio al cubo

Se expresa de la siguiente forma:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

2. Cocientes notables

Al igual que los productos notables, los cocientes notables pueden escribirse tomando casos particulares.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}; \frac{x^n + y^n}{x + y}; \frac{x^n - y^n}{x + y}; \frac{x^n + y^n}{x - y}$$

Cociente	$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$\frac{x^n + y^n}{x - y}$
Residuo	0	0	0	$R \neq 0$
¿Es cociente notable?	Si	Si	Si	No
Condición del exponente n	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ par o impar	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ par	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ impar	$n \in \mathbb{N}$

Para desarrollar las características del cociente.

1° El cociente tendrá n términos.

2° Si en el divisor hay diferencia, todos los términos son positivos. Si en el divisor hay suma, los signos de los términos se intercalan: +, -, +, -, ...

3° En cada término del cociente, los exponentes del 1er. monomio x disminuyen desde $n - 1$ hasta cero, mientras que los dos del 2do. monomio y aumentan desde cero hasta $n - 1$.

Por tanto, tendremos:

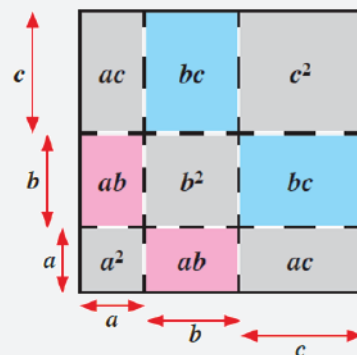
$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

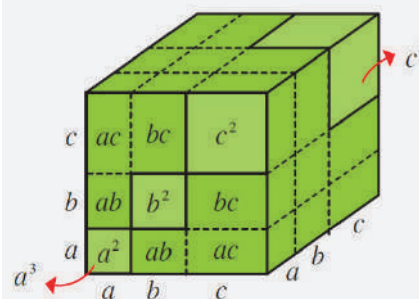
Ejemplo. Desarrollar el cociente.

$$\begin{aligned}\frac{16x^4 - 81y^8}{2x + 3y^2} &= \frac{(2x)^4 - (3y^2)^4}{2x + 3y^2} = (2x)^3 - (2x)^2(3y^2) + (2x)(3y^2)^2 - (3y^2)^3 \\ &= 8x^3 - 12x^2y^2 + 18xy^4 - 27y^6\end{aligned}$$

TRINOMIO CUADRADO INTERPRETADO GEOMÉTRICAMENTE



TRINOMIO AL CUBO



COCIENTE DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 9}{x + 3} &= \frac{x^2 - 3^2}{x + 3} \\ &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3\end{aligned}$$

Para $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, $n = 3$ (3 términos), en el divisor hay una resta, luego los signos son +.

El cociente quedará así:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Calcular el 4° término del desarrollo de

$$\frac{64x^6 - y^6}{2x - y}$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{64x^6 - y^6}{2x - y} &= \frac{(2x)^6 - y^6}{2x - y} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_4 &= (2x)^{6-4} \cdot (y)^{4-1} = \\ &= 4x^2 y^3\end{aligned}$$

Aquí se utiliza

$$T_k = \pm x^{n-k} y^{k-1}$$

con $k = 4$ y $n = 6$

TRIÁNGULO DE PASCAL

$$(a + b)^5$$

Los coeficientes son:

1, 5, 10, 10, 5, 1

Ejemplo. Desarrollar el cociente.

$$\begin{aligned}\frac{x^{10} + 32y^5}{x^2 + 2y} &= \frac{(x^2)^5 + (2y)^5}{x^2 + 2y} = (x^2)^4 - (x^2)^3(2y) + (x^2)^2(2y)^2 - (x^2)(2y)^3 + (2y)^4 \\ &= x^8 - 2x^6y + 4x^4y^2 - 8x^2y^3 + 16y^4\end{aligned}$$

2.1. Cociente de la diferencia de cuadrados

Es la suma o diferencia que se expresa de la siguiente forma:

$$a) \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

$$b) \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

Ejemplo

$$a) \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{x^2 - 3^2}{x + 3} = x - 3$$

$$b) \frac{4x^2 - 25}{2x - 5} = \frac{(2x)^2 - (5)^2}{2x - 5} = 2x + 5$$

2.2. Cociente de la suma o diferencia de cubos

Se expresa de la siguiente forma:

$$a) \frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$b) \frac{x^3 - l^3}{x - l} = x^2 + xy + y^2$$

Ejemplo

$$a) \frac{x^3 + 27}{x + 3} = \frac{x^3 - 3^3}{x + 3} = x^2 - x3 + 3^2 = x^2 - 3x + 9$$

$$b) \frac{64x^6y^3 + 8a^3b^9}{4x^2y + 2ab^3} = \frac{(4x^2y)^3 - (2ab^3)^3}{4x^2y + 2ab^3} =$$

$$(4x^2y)^2 - (4x^2y)(2ab^3) + (2ab^3)^2 = 4x^4y^2 - 8x^2yab^3 + 4a^2b^6$$

3. Triángulo de Pascal

Se obtiene sumando las dos cifras horizontales para desarrollar el binomio $(a + b)^n$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & (a+b)^0 = 1 \\ & & & 1 & & 1 & & (a+b)^1 = 1a + 1b \\ & & 1 & & 2 & & 1 & (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

El triángulo de Pascal es útil al momento de averiguar los coeficientes de los binomios con potencia n .

4. Deducción del binomio a la n-ésima potencia

Para un número n - ésima potencia se tiene:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

El procedimiento se llama el binomio de Newton.

Si n es natural, en el desarrollo de $(a + b)^n$, se tiene:

- El primer término es a^n y el último término es b^n .
- Desarrollando el binomio se tienen $(n + 1)$ términos.

- c) La potencia del primer término a disminuye en 1 y del segundo término b aumenta en 1.
 d) Para el i - ésimo término se utiliza la fórmula:

$$i - \text{ésimo} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-i+2)}{(i-1)!} a^{n-i+1} b^{i-1}$$

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Factorial de $n!$

$r! = r(r-1)(r-2) \dots 1$ con $r > 0$

Si $r = 0$, entonces $0! = 1$

Ejemplo. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Ejemplo. Desarrolla: $(2a^2 - 3b^2)^5$

$$\begin{aligned} (2a^2 - 3b^2)^5 &= (2a^2)^5 + 5(2a^2)^{5-1}(-3b^2)^1 + \frac{5(5-1)}{2!}(2a^2)^{5-2}(-3b^2)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2a^2)^{5-3}(-3b^2)^3 \\ &+ \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2a^2)^{5-4}(-3b^2)^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2a^2)^{5-5}(-3b^2)^5 \end{aligned}$$

Se simplifican las fracciones y se procede al desarrollo de las potencias:

$$\begin{aligned} &= (2a^2)^5 + 5(2a^2)^4(-3b^2)^1 + \frac{5(4)}{2 \cdot 1}(2a^2)^3(-3b^2)^2 + \frac{5(4)(3)}{3 \cdot 2 \cdot 1}(2a^2)^2(-3b^2)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(2a^2)^1(-3b^2)^4 \\ &+ \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(2a^2)^0(-3b^2)^5 \\ &= 32a^{10} + 5(16a^2)(-3b^2) + 10(8a^6)(9b^4) + 10(4a^4)(-27b^6) + 5(2a^2)(81b^8) + (2a^2)^0(-243b^{10}) \end{aligned}$$

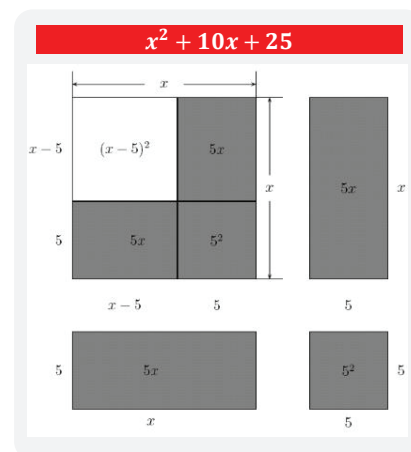
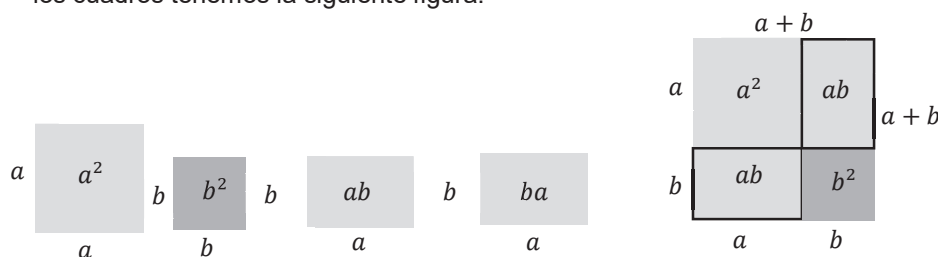
Por último, se obtiene el resultado:

$$= 32a^{10} - 240a^8b^2 + 720a^6b^4 - 1080a^4b^6 + 810a^2b^8 - 243b^{10}$$

5. Relación de los productos y cocientes notables en la geometría y su aplicación en el contexto

Podemos representar gráficamente:

Dos cuadrados de lados a y b , dos rectángulos de largo a y ancho b , uniendo los cuadros tenemos la siguiente figura:



VALORACIÓN



Se puede entender que en las actividades cotidianas se realiza operaciones de cálculo de dimensiones, razones, distancias, sumas y uso de variables, en tal sentido las ecuaciones del primer grado están presentes en nuestras vidas, analizamos y respondemos las preguntas:

- ¿Cuál es la finalidad del lenguaje matemático?
- ¿Por qué es importante la abstracción matemática de nuestro entorno?
- ¿Crees que aplicas las ecuaciones de primer grado en las actividades cotidianas?

PRODUCCIÓN

Actividad

Desarrollamos las siguientes actividades:

- Investigamos si existen aplicaciones que permitan resolver ecuaciones de primer grado.
- Mencionamos 5 ejemplos de las ecuaciones que se utilizan en la vida cotidiana.
- Realizamos una infografía de los cocientes notables.

FACTORIZACIÓN

PRÁCTICA

La matemática están presentes y vinculadas a la vida cotidiana, es importante reconocer que juegan un papel fundamental en la sociedad, están presentes en cualquier faceta de la vida diaria, por ejemplo, el uso del celular, el pronóstico del tiempo, el uso de las tecnologías, el cine, el arte, la música y hasta la publicidad, además del entretenimiento, su aplicación y utilidad sirve para detectar mentiras y engaños y se usa la lógica como un argumento válido.

Algo que realizas o te señalan que hagas, es que ayudes en el mercado para hacer las compras, cuando se tienen los productos, de manera consciente o inconsciente ordenamos la compra por las características que presenta lo comprado, por ejemplo, ordenas, los tomates agrupados con tomates, la carne la separas de las verduras, en el fondo lo que se está realizando es el orden en función a un factor.



Actividad

- ¿Qué factores intervienen al momento de ordenar los objetos?
- Menciona en qué etapas de tu vida utilizas las matemáticas.
- ¿Consideras que las matemáticas son útiles a la tarea cotidiana?

TEORÍA

PROPIEDAD DE EXPONENTES

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

FACTOR COMÚN

La propiedad distributiva escrita al revés es una herramienta para extraer el factor común.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Factor común



1. Factorización

Factorizar, significa escribir una expresión como multiplicación, por ejemplo, $48 = 2^4 \cdot 3$, donde 2 y 3 son factores primos y 48 resulta de la multiplicación.

Así en $49 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$ se descompuso el binomio en el producto de dos factores.

Factorizar es un procedimiento mediante el cual se transforma un polinomio en el producto de sus factores

Ejemplo

Factoriza: $P(x) = x^2 - 4$

Solución. El polinomio es de grado 2: $P(x) = x^2 - 4$, se puede descomponerse en dos polinomios de grado 1:

$$P(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

Polinomio compuesto Polinomio primos

Un polinomio $P(x)$ se llama primo o irreducible, cuando no se puede descomponer en un producto de polinomios de grado positivo, menos que el grado de P . En caso contrario se dice que el polinomio es compuesto o reducible.

La factorización puede ser; una suma, un polinomio, un número, etc. El objetivo es simplificar una expresión y para realizar la operación de simplificación se debe identificar a qué tipo de factorización pertenece.

1.1. Factor común monomio

Se procede a extraer aquel monomio común entre los términos de un polinomio.

Ejemplo. Factoriza: $x^6 - x^5 + x^2$

Solución

Para encontrar el factor común, identifica la letra de menor exponente (x^2), a continuación, se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^4 \quad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \quad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

El resultado se expresa de la forma:

$$x^6 - x^5 + x^2 = x^2(x^4 - x^3 + 1)$$

Ejemplo. Factoriza: $16x^6y^7z - 12x^5y^2z^3 + 20x^3y^{10}$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes:

$$MCD(16, 12, 20) = 4 \quad \text{Factor común literal: } x^3y^2$$

Se realiza la división de cada término y el resultado es:

$$16x^6y^7z - 12x^5y^2z^3 + 20x^3y^{10} = 4x^3y^2(4x^3y^5z - 3x^2z^3 + 5y^8)$$

Ejemplo. Factoriza: $x^{m+n}y^n + x^{2n}y^{m+n} - x^n y^{2n}$

Solución

Utilizando la propiedad de los exponentes tenemos:

$$\begin{aligned} & x^{m+n}y^n + x^{2n}y^{m+n} - x^n y^{2n} \\ &= x^m \cdot x^n y^n + x^n \cdot x^n y^m y^n - x^n y^n \cdot y^n \end{aligned}$$

Se halla el factor común literal: $x^n y^n$

Se realiza la división de cada término y el resultado es:

$$x^{m+n}y^n + x^{2n}y^{m+n} - x^n y^{2n} = x^n y^n (x^m + x^n y^m - y^n)$$

Ejemplo. Factoriza: $18a^2 - 12a + 54$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes:

$$MCD(18, 12, 54) = 6$$

Se expresa de la siguiente manera:

$$18a^2 - 12a + 54 = 6(3a^2 - 2a + 9)$$

PROPIEDAD DE EXPONENTES

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

FACTOR COMÚN

La propiedad distributiva escrita al revés es una herramienta para extraer el factor común.

MCD

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

M.C.D. (24, 15, 36) = 3, factores literales de menor exponente: y^2z

Factorizamos las siguientes expresiones:

- $x^2 + x$
- $x^3y^2 - 2x^3y$
- $x^4 + x^3 - x^2$
- $18a^5 + 30a^4$
- $48a^2 - 12a^3 - 24a^4$
- $25m^2 + 35m^4 - 45m^5$
- $11xy - 121x^2y + 33x^3$
- $9x^2y - 12x^2y^3 + 15xy^2 - 18x^3y^4$

FACTORIZAR EL SIGNO

$$a - b = -(-a + b)$$

$$a + b = -(-a - b)$$

$$-a - b = -(a + b)$$

$$-a + b = -(a - b)$$

MÉTODO GRÁFICO

x	x^2	xy	xz
y	xy	y^2	yz
	x	y	z

$$x^2 + y^2 + 2xy + xz + yz$$

$$= (x + y)(x + y + z)$$

1	x	1	1
+			
x	x^2	x	x
		x + 1 + 1	

$$x^2 + 3x + 2$$

$$= (x + 1)(x + 2)$$

1.2. Factor común polinomio

Se procede a extraer un polinomio común de otro polinomio.

Ejemplo. Factoriza: $5a(x + y) + 10b^2(x + y)$

Solución

Se halla el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes:

$$MCD(5, 10) = 5 \quad \text{Factor común literal: } (x + y)$$

Se realiza la división de cada término y el resultado es:

$$5a(x + y) + 10b^2(x + y) = 5(x + y) \cdot (a + 2b^2)$$

Ejemplo. Factoriza: $(a + b)(a - b) + (a + b)^2$

Solución

Factor común literal: $(a + b)$

Se realiza la división de cada término y el resultado es:

$$(a + b)[(a - b) + (a + b)]$$

$$(a + b)[a - b + a + b] = (a + b)2a = 2a(a + b)$$

Ejemplo. Factoriza: $3m(5x + 2) - n(5x + 2) + (5x + 2)$

Solución

Factor común literal: $(5x + 2)$

Se realiza la división de cada término y el resultado es:

$$3m(5x + 2) - n(5x + 2) + (5x + 2) = (5x + 2)(3m - n + 1)$$

El resultado de la expresión es: $(5x + 2)(3m - n + 1)$

Ejemplo. Factoriza: $(2a - 3b)^2(5a - 7b)^3 - (2a - 3b)^3(5a - 7b)^2$

Solución

La expresión está compuesta por binomios y se factoriza de la siguiente manera:

$$(2a - 3b)^2(5a - 7b)^3 - (2a - 3b)^3(5a - 7b)^2$$

$$= (2a - 3b)^2(5a - 7b)^2[(5a - 7b) - (2a - 3b)]$$

$$= (2a - 3b)^2(5a - 7b)^2[3a - 4b]$$

El resultado de la expresión es: $(2a - 3b)^2(5a - 7b)^2[3a - 4b]$

Factorizamos las siguientes expresiones:

- $4(x + y) + 5(x + y)$
- $(a + b)x + (a + b)y$
- $3(a + b) - 7y(a + b)$

Factorizamos los siguientes polinomios:

- $\sqrt{2}mz - \sqrt{2}m - z + 1$
- $2x^3 + 6 - 3x^2 - 4x$
- $14x^2 - 18x^3 - 16x + 28$

2. Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan un factor común.

Ejemplo. Factoriza: $ac + bc + ad + bd$

Solución. Se agrupan los términos, "c" y "d".

$$ac + bc + ad + bd = (ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b)$$

La última expresión se factoriza $a + b$

$$c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$$

Ejemplo. Factoriza: $6mx + 3m^2 - 4bx - 2mb$

Solución. Se agrupan los términos, "m" y "b".

$$\begin{aligned} &= 6mx + 3m^2 - 4bx - 2mb \\ &= (6mx + 3m^2) + (-4bx - 2mb) \\ &= 3m(2x + m) - 2b(2x + m) \\ &= (2x + m)(3m - 2b) \end{aligned}$$

Ejemplo. Factoriza: $x^2 + 3x + 2$

Solución. $x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2$

Se agrupan los términos, "x" y "2".

$$\begin{aligned} &= x^2 + x + 2x + 2 \\ &= (x^2 + x) + (2x + 2) = x(x + 1) + 2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Ejemplo. Factoriza: $6x^2y + 4xz + 2x - 3xyz - 2z^2 - z$

Solución.

$$\begin{aligned} &6x^2y + 4xz + 2x - 3xyz - 2z^2 - z \\ &= (6x^2y + 4xz + 2x) - (3xyz + 2z^2 + z) \\ &= 2x(3xy + 2z + 1) - z(3xy + 2z + 1) \\ &= (3xy + 2z + 1)(2x - z) \end{aligned}$$

MÉTODO GRÁFICO

Agrupación de términos

x	x^2	xy	xz
y	xy	y^2	yz
	x	y	z

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + 2xy + xz + yz \\ &= (x + y)(x + y + z) \end{aligned}$$

VALORACIÓN

En la cotidianidad de la vida, las personas clasifican, agrupan diferentes objetos.

- ¿Crees que agrupar los objetos facilita nuestra tarea?
- ¿Cómo calificarías el tema de factorización?
- ¿Cómo crees que se aplica el factor común en nuestras vidas?

PRODUCCIÓN

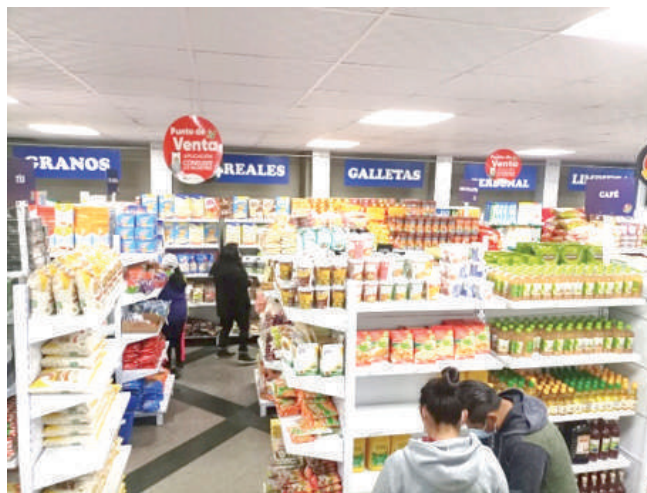
Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Realiza un cuadro sinóptico del tema de factorización.
- Menciona tres ejemplos en los que utilizas la factorización.

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

PRÁCTICA



Actividad

- ¿Qué se observa en las fotografías con respecto a los productos de venta?
- ¿Por qué ordenamos los objetos?
- ¿Cuál es el criterio para distinguir objetos?
- ¿Consideras que la semejanza es un criterio de orden? ¿Por qué?

TEORÍA

FACTORIZACIÓN

Es la misma expresión algebraica escrita como:

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

RECORDAR

Un binomio está conformado por dos monomios o por dos términos.

$$a^2 - b^2$$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

Es posible cuando la expresión tiene la forma

$$x^2 - y^2 : \text{Diferencia de cuadrados}$$

$$x^3 - y^3 : \text{Diferencia de cubos}$$

$$x^3 + y^3 : \text{Suma de cubos}$$

1. Método de identidades algebraicas

Se basa en los productos notables y consiste en desarrollarlo en forma inversa.

Ejemplo. Expresar como cuadrado: $4m^2 + 4m + 1$

Solución

Se aplica identidades, $4m^2 + 4m + 1$

$$= (2m)^2 + 2(2m) + (1)^2$$

$$= (2m + 1)^2$$

Prueba: $(2m + 1)^2 = (2m + 1)(2m + 1)$

$$= (2m)^2 + (2m) + (2m) + (1)^2$$

$$= 4m^2 + 4m + 1^2$$

Para escribir una expresión algebraica de forma más simplificada, se utiliza diferentes métodos.

2. Factorización de Binomios

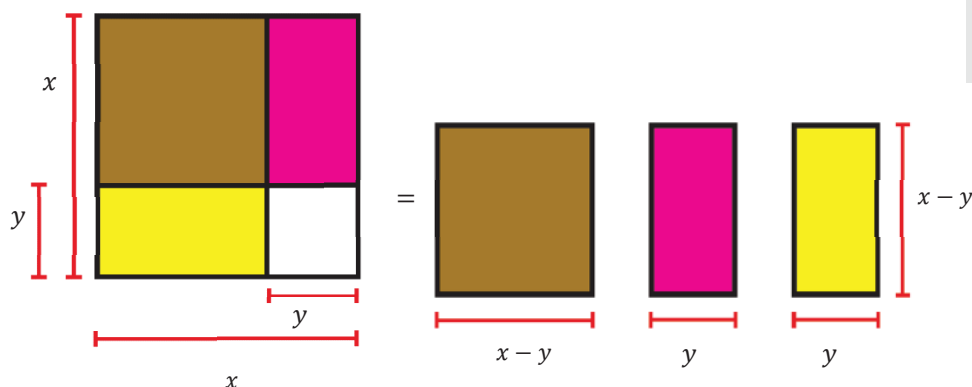
2.1. Diferencia de cuadrados

Es el resultado de multiplicar la suma de un binomio por su diferencia y es de la forma:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

El resultado es un binomio conjugado.

Geométricamente se expresa del siguiente modo:



$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

RECUERDA

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x - y)(x - y) + y(x - y) + y(x - y) \\ &= (x - y)(x - y) + 2y(x - y) \\ &= (x - y)(x - y + 2y) \\ &= (x - y)(x + y) \end{aligned}$$

Para factorizar la diferencia de dos cuadrados se multiplica la suma de sus raíces cuadradas por la diferencia de las mismas.

Ejemplo. Factoriza la expresión: $x^2 - 25$

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de los términos, x^2 y 25.

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} \text{Finalmente, se factoriza:} \quad &= x^2 - 25 \\ &= x^2 - 5^2 \\ &= (x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

Ejemplo. Factoriza: $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{36}$

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de los términos, $\frac{9}{16}x^2$ y $\frac{1}{36}$.

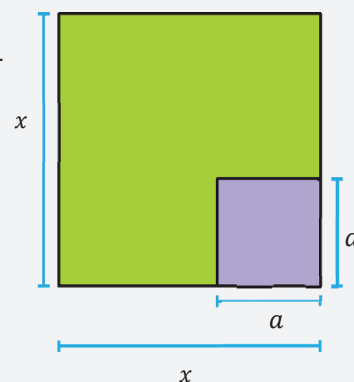
$$\sqrt{\frac{9}{16}x^2} = \frac{3}{4}x \quad \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$$

Aplicando la fórmula, se factoriza:

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{36} \\ &= \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Representación gráfica.



$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

EXPONENTES

Propiedades:

Producto de bases iguales

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cociente de bases iguales

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exponente cero

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

Potencia de otra potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo. Factoriza la expresión: $a^{2x-4} \cdot b^6$

Solución

Los exponentes se expresan de la siguiente forma:

$$a^{2x-4} = a^{2(x-2)} \quad b^6 = b^{2(3y)}$$

Las raíces de ambos términos:

$$\sqrt{(a^{2(x-2)})^2} = a^{x-2} \quad \sqrt{(b^{2(3y)})^2} = b^{3y}$$

Finalmente, se tiene:

$$\begin{aligned} &= a^{2x-4} - b^{6y} \\ &= a^{2(x-2)} - b^{2(3y)} \\ &= (a^{(x-2)})^2 - (b^{(3y)})^2 = (a^{x-2} + b^{3y})(a^{x-2} - b^{3y}) \end{aligned}$$

Ejemplo. Factoriza: $(2a + 3)^2 - (a - 1)^2$

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de los términos:

$$\sqrt{(2a + 3)^2} = 2a + 3 \quad \sqrt{(a - 1)^2} = a - 1$$

Aplicando la fórmula, se factoriza:

$$\begin{aligned} &= (2a + 3)^2 - (a - 1)^2 \\ &= [(2a + 3) + (a - 1)][(2a + 3) - (a - 1)] \end{aligned}$$

Se reducen los términos semejantes y se obtiene:

$$\begin{aligned} &= [2a + 3 + a - 1][2a + 3 - a + 1] \\ &= [3a + 2][a + 4] \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado es:

$$(2a + 3)^2 - (a - 1)^2 = (3a + 2)(a + 4)$$

Ejemplo. Factoriza: $25x^{2m} - 100x^{2n}$

Solución

Se extrae la raíz cuadrada de los términos:

$$\sqrt{(5x^m)^2} = 5x^m \quad \sqrt{(10x^n)^2} = 10x^n$$

Aplicando la fórmula, se factoriza:

$$\begin{aligned} &= (5x^m)^2 - (10x^n)^2 \\ &= (5x^m + 10x^n)(5x^m - 10x^n) \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado es:

$$\begin{aligned} &25x^{2m} - 100x^{2n} \\ &= (5x^m)^2 - (10x^n)^2 = (5x^m + 10x^n)(5x^m - 10x^n) \end{aligned}$$

Reduciendo al factor común:

$$5(x^m + 2x^n) \cdot 5(x^m - 2x^n) = 25(x^m + 2x^n)(x^m - 2x^n)$$

2.2. Suma y diferencia de cubos

Si un binomio tiene la forma $a^3 \pm b^3$, se aplica la fórmula correspondiente:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar la suma de los cubos de dos números se escribe en el primer paréntesis la suma de las raíces cúbicas de cada término y en el segundo paréntesis la suma de los cuadrados de dichas raíces menos el producto de las mismas.

Ejemplo. Factoriza: $64a^3 + 8$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de los términos:

$$\sqrt[3]{64a^3} = 4a \qquad \sqrt[3]{8} = 2$$

Aplica la fórmula correspondiente para desarrollar la factorización.

$$\begin{aligned} 64a^3 + 8 &= (4a)^3 + (2)^3 \\ &= (4a + 2)((4a)^2 - (4a) \cdot (2) + (2)^2) \\ &= (4a + 2)(16a^2 - 8a + 4) \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado es: $64a^3 + 8 = (4a + 2)(16a^2 - 8a + 4)$

Ejemplo. Factoriza la siguiente expresión: $a^6 - 216$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de los términos:

$$\sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2 \qquad \sqrt[3]{(6)^3} = 6$$

Aplica la fórmula correspondiente para desarrollar la factorización.

$$\begin{aligned} a^6 - 216 &= (a^2)^3 - (6)^3 \\ &= (a^2 - 6)((a^2)^2 + (a^2) \cdot (6) + (6)^2) \\ &= (a^2 - 6)(a^4 + 6a^2 + 36) \end{aligned}$$

El resultado es: $a^6 - 216 = (a^2 - 6)(a^4 + 6a^2 + 36)$

Ejemplo. Factoriza: $m^{15} + 64a^3$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de los términos:

$$\sqrt[3]{(m^5)^3} = m^5 \qquad \sqrt[3]{(4a)^3} = 4a$$

Aplica la fórmula correspondiente para desarrollar la factorización.

$$\begin{aligned} m^{15} + 64a^3 &= (m^5)^3 + (4a)^3 \\ &= (m^5 + 4a)((m^5)^2 - (m^5) \cdot (4a) + (4a)^2) \\ &= (m^5 + 4a)(m^{10} - 4m^5a + 16a^2) \end{aligned}$$

El resultado es: $m^{15} + 64a^3 = (m^5 + 4a)(m^{10} - 4m^5a + 16a^2)$

EXPONENTES

Propiedades:

Producto de bases iguales

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cociente de bases iguales

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exponente cero

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

Potencia de otra potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

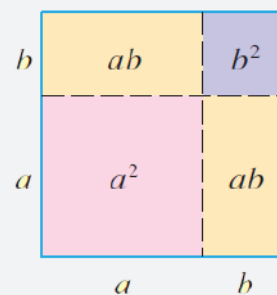
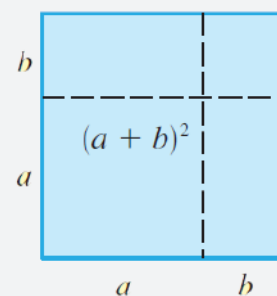
Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

GEOMÉTRICAMENTE



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

RADICALES

Propiedades:

Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Índice y exponentes iguales

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Raíz de una potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Raíz de una raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Índices par o impar

$$\sqrt[n]{a} = \pm, n \text{ par}, a > 0$$

$$\sqrt[n]{a} > 0, n \text{ impar}, a > 0$$

$$\sqrt[n]{a} < 0, n \text{ impar}, a < 0$$

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}, \text{ si } n \text{ par}, a < 0$$

Ejemplo. Factoriza la siguiente expresión: $(a + b)^3 + (a - b)^3$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de los términos:

$$\sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b \quad \sqrt[3]{(a - b)^3} = a - b$$

Aplica la fórmula correspondiente para desarrollar la factorización.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 + (a - b)^3 &= \\ &= ((a + b) + (a - b))((a + b)^2 - (a + b) \cdot (a - b) + (a - b)^2) \\ &= (a + b + a - b)(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (2a)(a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

El resultado es: $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Ejemplo. Factoriza: $(x - 2)^3 + 8y^3$

Solución

Se extrae la raíz cúbica de los términos:

$$\sqrt[3]{(x - 2)^3} = x - 2 \quad \sqrt[3]{(2y)^3} = 2y$$

Aplica la fórmula correspondiente para desarrollar la factorización.

$$\begin{aligned} (x - 2)^3 + 8y^3 &= (x - 2)^3 + (2y)^3 \\ &= (x - 2 + 2y) \cdot ((x - 2)^2 - (x - 2) \cdot 2y + (2y)^2) \\ &= (x + 2y - 2) \cdot (x^2 - 4x + 4 - 2xy + 4y + 4y^2) \end{aligned}$$

El resultado es: $(x + 2y - 2) \cdot (x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 4y + 4)$

Ejemplo. Factoriza: $8x^{\frac{3}{2}} + 64y^{\frac{6}{5}}$

Solución

Se extrae la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{8x^{\frac{3}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{64y^{\frac{6}{5}}} = 4y^{\frac{2}{5}} = 4y^{\frac{2}{5}}$$

Aplica la formula correspondiente:

$$\begin{aligned} 8x^{\frac{3}{2}} + 64y^{\frac{6}{5}} &= \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(4y^{\frac{2}{5}}\right)^3 \\ &= \left(2x^{\frac{1}{2}} + 4y^{\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(2x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(4y^{\frac{2}{5}}\right) + \left(4y^{\frac{2}{5}}\right)^2\right) \\ &= \left(2x^{\frac{1}{2}} + 4y^{\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(4x - 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{5}} + 16y^{\frac{4}{5}}\right) \end{aligned}$$

El resultado es: $\left(2x^{\frac{1}{2}} + 4y^{\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(4x - 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{5}} + 16y^{\frac{4}{5}}\right)$

Actividad

Diferencia de cuadrados.

- $x^2 - 1$
- $16m^2 - 36$
- $169 - m^{12}$
- $x^3 - xy^2$
- $(a + 1)^2 - 25$
- $25a^2 - (c - d)^2$

Diferencia de cubos.

- $x^3 - 8$
- $m^3 - 64$
- $ab^3 - 27a$
- $x^3 - y^3$
- $am^3 - a$
- $a^6 + 64$

Ejemplo. Factoriza: $(x + y)^3 - (2x + 3y)^3$

Solución

Se extrae la raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{(x + y)^3} = x + y$$

$$\sqrt[3]{(2x + 3y)^3} = 2x + 3y$$

Aplica la fórmula correspondiente:

$$= (x + y)^3 - (2x + 3y)^3$$

$$= ((x + y) - (2x + 3y)) \cdot ((x + y)^2 + (x + y) \cdot (2x + 3y) + (2x + 3y)^2)$$

$$= (x + y - 2x - 3y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 + (2x^2 + 3xy + 2xy + 3y^2) + (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2)$$

$$= -(x + 2y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 + 3xy + 2xy + 3y^2 + 4x^2 + 12xy + 9y^2)$$

$$= -(x + 2y) \cdot (7x^2 + 19xy + 13y^2)$$

El resultado es: $-(x + 2y) \cdot (7x^2 + 19xy + 13y^2)$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Actividad

Realizamos la demostración de la suma y diferencia de cubos:

- $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

La factorización significa descomponer en factores cualquier expresión matemática, para esto existen variados métodos que se consideran casos de factorización.

- ¿Puedes mencionar las aplicaciones prácticas de la factorización?
- Menciona. ¿Para qué sirve la factorización?
- ¿Dónde se aplica la factorización?
- ¿Por qué es importante armar rompecabezas?



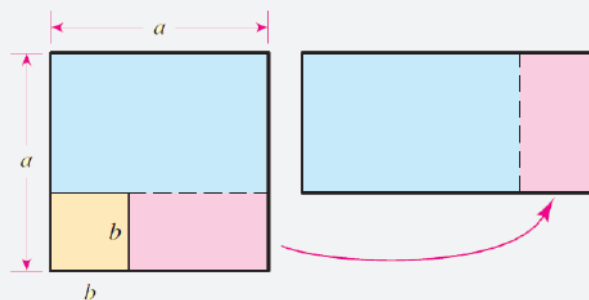
VALORACIÓN

PRODUCCIÓN

Actividad

Realizamos con materiales del contexto la siguiente actividad:

- Representemos geoméricamente la diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$



FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

PRÁCTICA

Observamos la imagen, es un escritorio con varios objetos organizados por una persona.



Actividad

- ¿Qué factores intervienen al momento de ordenar los objetos? ¿por qué tienen ése orden?
- Menciona en qué etapas de tu vida utilizas las matemáticas.
- ¿Consideras que las matemáticas son útiles en tareas cotidianas?

TEORÍA

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se escribe dentro del paréntesis la raíz cuadrada del primer y tercer término, con el mismo signo que tenga el término que no es cuadrado perfecto del trinomio; luego este paréntesis se eleva al cuadrado o se multiplica por sí mismo.

1. Factorización de trinomios

1.1. Trinomio cuadrado perfecto

En el estudio de los productos notables, tanto para el cuadrado de la suma como para el cuadrado de la diferencia de dos monomios, se pudo establecer que el producto daba como resultado un trinomio cuadrado perfecto.

Se expresa de la forma:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Los pasos para factorizar:

Paso 1. Verifica que este ordenado con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente.

Paso 2. Se extrae las raíces cuadradas del primer término y último término.

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

Paso 3. Se realiza el doble del producto de las raíces.

$$\text{Comprobando: } = 2ab$$

Paso 4. El segundo término del trinomio es resultado del producto de los términos y es igual a la suma o diferencia de las raíces.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplo. Factoriza: $a^2 + 12ab + 36b^2$

Solución

Se verifica el orden de exponentes.

Se extrae la raíz cuadrada:

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{36b^2} = \sqrt{(6b)^2} = 6b$$

Doble producto de raíces:

$$\text{Comprobado: } 2ab = 2 \cdot a \cdot 6b = 12ab$$

Al tomar el signo del segundo término y se aplica la suma o diferencia de raíces:

$$a^2 + 12ab + 36b^2 = (a + 6b)^2$$

El resultado es: $a^2 + 12ab + 36b^2 = (a + 6b)^2$

Ejemplo. Factoriza: $a^2 + 6a + 9$

Solución

Se verifica el orden de exponentes.

Se extrae la raíz cuadrada:

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{9} = \sqrt{(3)^2} = 3$$

Doble producto de raíces:

$$\text{Comprobado: } 2ab = 2 \cdot a \cdot 3 = 6a$$

Al tomar el signo del segundo término y se aplica la suma o diferencia de raíces:

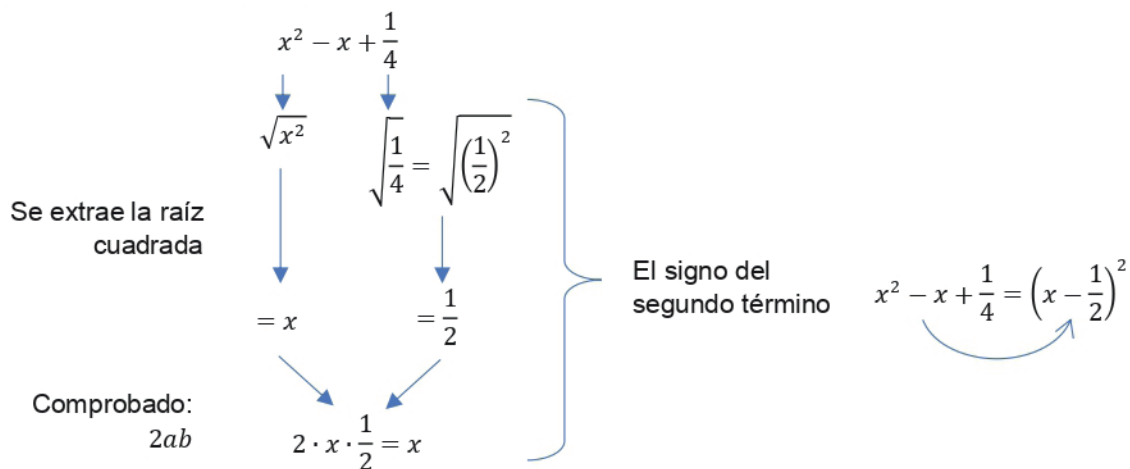
$$a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$$

El resultado es: $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$

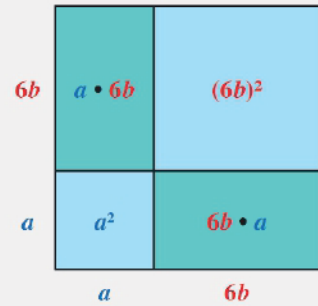
Ejemplo. Factoriza: $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Solución

Se verifica el orden de exponentes.



GRÁFICAMENTE



$$a^2 + 12ab + 36b^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a \quad 6b$$

$$2[(a)(6b)] = 12ab$$

$$a^2 + 12ab + 36b^2$$

$$\downarrow$$

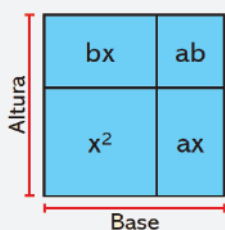
$$(a + 6b)^2$$

El trinomio factorizado

$$a^2 + 12ab + 36b^2 =$$

$$= (a + 6b) \cdot (a + 6b)$$

GRÁFICAMENTE



$$\begin{aligned} x^2 + ax + bx + ab &= \\ &= (x^2 + ax) + (bx + ab) = \\ &= x(x + a) + b(x + a) = \\ &= \underbrace{(x + a)}_{\text{Base}} \underbrace{(x + b)}_{\text{Altura}} \end{aligned}$$

SIGNOS DE LA MULTIPLICACIÓN

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= + \\ (+) \cdot (-) &= - \\ (-) \cdot (+) &= - \\ (-) \cdot (-) &= + \end{aligned}$$

Ejemplo. Factoriza: $3x - 2\sqrt{12xy} + 4y$

Solución

Se extrae las raíces: $\sqrt{3x}$; $\sqrt{4y}$

Doble producto de raíces, comprobando: $2ab = 2 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{4y} = 2\sqrt{12xy}$

Al tomar el signo del segundo término, el resultado es:

$$3x - 2\sqrt{12xy} + 4y = (\sqrt{3x} - \sqrt{4y})^2$$

Ejemplo. Factoriza: $a^{\frac{1}{4}} + 6a^{\frac{1}{8}} + 9$

Solución

Se extrae las raíces: $\sqrt{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{1}{8}}$; $\sqrt{9} = 3$

Doble producto de raíces, comprobando: $2ab = 2 \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot 3 = 6a^{\frac{1}{8}}$

Al tomar el signo del segundo término, el resultado es:

$$a^{\frac{1}{4}} + 6a^{\frac{1}{8}} + 9 = \left(a^{\frac{1}{8}} + 3\right)^2$$

1.2. Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$

Resulta del producto de binomios: $(x + m) \cdot (x + n) = x^2 + (m + n)x + m \cdot n$

Para que el trinomio tenga la forma: $x^2 + bx + c$, es indicar que:

$$b = m + n \quad y \quad c = m \cdot n$$

m y n sumados dan b m y n multiplicados dan c

Ejemplo. Factoriza: $x^2 + 22x - 48$

Solución

- a) Se escriben **dos binomios** cuyo primer término debe ser “ x ”, es decir que es la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$= (x \quad)(x \quad)$$

- b) Luego, se anota el **signo del segundo término**, en el primer factor:

$$= (x + \quad)(x \quad)$$

- c) El signo del segundo factor se determina multiplicando el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio:

$$= (x + \quad)(x - \quad)$$

- d1) Si los signos después de cada **x son iguales**, se buscan dos números cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término y cuyo producto sea el valor del tercer término del trinomio:

$$= (x + \quad)(x - \quad)$$

- d2) Si los signos después de cada **x son distintos**, se buscan dos números cuya diferencia sea igual al coeficiente del segundo término y cuyo producto sea igual al valor del tercer término del trinomio. El número mayor va al segundo término del primer factor y el número menor va al segundo término del segundo factor.

$$= (x + 24)(x - 2)$$

El resultado es: $x^2 + 22x - 48 = (x + 24)(x - 2)$

Ejemplo. Factoriza: $x^2 + 2x - 15$

Solución

- a) $(x \quad)(x \quad)$ Raíz cuadrada de x^2
- b) $(x + \quad)(x \quad)$ Signo de $2x$
- c) $(x + \quad)(x - \quad)$ Signo de $2x$ por el signo de 15 : $(+) \cdot (-) = (-)$
- d) $(x + 5)(x - 3)$ Dos números que multiplicados dan 15 y restados 2

El resultado es: $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

Ejemplo. Factoriza: $m^2 - 18 - 7m$

Solución

Se ordena de forma descendente cada término y se procede: $m^2 - 7m - 18$

- a) $(x \quad)(x \quad)$ Raíz cuadrada de m^2
- b) $(x - \quad)(x \quad)$ Signo de $7m$
- c) $(x - \quad)(x + \quad)$ Signo de $7m$ por el signo de -18 : $(-) \cdot (-) = (+)$
- d) $(x - 9)(x + 2)$ Dos números que multiplicados dan 18 y restados -7

El resultado es: $m^2 - 18 - 7m = m^2 - 7m - 18 = (x - 9)(x + 2)$

Ejemplo. Factoriza: $a^4 - a^2 - 6$

Solución

- a) $(a^2 \quad)(a^2 \quad)$ Raíz cuadrada de $a^4 = (a^2)^2 = a^2$
- b) $(a^2 - \quad)(a^2 \quad)$ Signo de $-a^2$
- c) $(a^2 - \quad)(a^2 + \quad)$ Signo de $-a^2$ por el signo de -6 : $(-) \cdot (-) = (+)$
- d) $(a^2 - 3)(a^2 + 2)$ Dos números que multiplicados dan 6 y restados -1

El resultado es: $a^4 - a^2 - 6 = (a^2 - 3)(a^2 + 2)$

Ejemplo. Factoriza: $5 + 4x^{3n} - x^{6n}$

Solución

Se ordena los términos, se extrae las raíces y se procede a la factorización:

$$5 + 4x^{3n} - x^{6n} = -x^{6n} + 4x^{3n} + 5 = -(x^{6n} - 4x^{3n} - 5)$$

La expresión entre paréntesis se factoriza:

$$\begin{aligned} &= -(x^{6n} - 4x^{3n} - 5) \\ &= -(x^{3n} - 5)(x^{3n} + 1) \end{aligned}$$

Multiplicando el signo, tenemos:

$$= -(x^{3n} - 5)(x^{3n} + 1) = (5 - x^{3n})(x^{3n} + 1)$$

El resultado es: $5 + 4x^{3n} - x^{6n} = (5 - x^{3n})(x^{3n} + 1)$

RECUERDA

$(x + 3)(x + 2)$



Ejemplo. Factoriza: $(2a + 3)^2 - 3(2a + 3) - 28$

Solución

Se extrae las raíces y se procede a la factorización.

$$\begin{aligned} &= (2a + 3)^2 - 3(2a + 3) - 28 \\ &= ((2a + 3) - 7)((2a + 3) + 4) \\ &= (2a + 3 - 7)(2a + 3 + 4) \\ &= (2a - 4)(2a + 7) \\ &= 2(a - 2)(2a + 7) \end{aligned}$$

El resultado es: $(2a + 3)^2 - 3(2a + 3) - 28 = 2(a - 2)(2a + 7)$

1.3. Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$

El coeficiente del trinomio es diferente de uno.

Recordando la multiplicación:

$$(ax + b)(cx + d) = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Para factorizar el trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$. Se toma en cuenta lo siguiente:

$$ax^2 + bx + c = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Cuando el coeficiente del primer término de un trinomio no es la unidad, para factorizarlo se recurre a los pasos explicados en el ejemplo.

Ejemplo. Factoriza el trinomio: $2x^2 + 7x + 3$

Solución

1° Se multiplica y divide todo el trinomio por el coeficiente del primer término, conservándolo en el segundo término:

$$\frac{2 \cdot (\widehat{2x^2} + \widehat{7x} + \widehat{3})}{2} = \frac{\widehat{2^2x^2} + \widehat{2 \cdot 7x} + \widehat{6}}{2} = \frac{(\widehat{2x})^2 + \widehat{7 \cdot (2x)} + \widehat{6}}{2}$$

2° El numerador se factoriza siguiendo los pasos del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, visto en páginas anteriores:

$(2x)^2 + 7 \cdot (2x) + 6$	Pasos: a, b, c, d.	Piénsese en un trinomio como $u^2 + 7u + 6$
$(2x) \quad (2x) \quad$	Raíz cuadrada de $(2x)^2$	$(u) \quad (u) \quad$
$(2x +) \quad (2x) \quad$	Signo del 2° término	$(u +) \quad (u) \quad$
$(2x +) \quad (2x +) \quad$	Signos multiplicados	$(u +) \quad (u +) \quad$
$(2x + 6) \quad (2x + 1) \quad$	$6 \cdot 1 = 6 \wedge 6 + 1 = 7$	$(u + 6) \quad (u + 1) \quad$

3° Ya factorizado el numerador, se busca el factor común en uno de los factores hallados y se simplifica con el denominador en caso necesario:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 6 &= \frac{(2x)^2 + 7(2x) + 6}{2} = \frac{(2x + 6)(2x + 1)}{2} = \\ &= \frac{\cancel{2}(x + 3)(2x + 1)}{\cancel{2}} = (x + 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

El resultado es: $2x^2 + 7x + 3 = (x - 3)(2x + 1)$

Ejemplo. Factoriza el trinomio: $6a^2 - 7a - 3$

Solución

Se ordena los términos a la forma $ax^2 + bx + c$, multiplica y divide el coeficiente del primer término, el segundo término se indica la multiplicación.

$$6a^2 - 7a - 3 = \frac{6 \cdot (6a^2 - 7a - 3)}{6}$$

$$= \frac{(6a)^2 - 6 \cdot 7a - 6 \cdot 3}{6} = \frac{(6a)^2 - 7 \cdot (6a) - 18}{6}$$

El numerador se factoriza como el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, consiste en encontrar $(x^2 + \quad)(x^2 + \quad)$ un valor que multiplicados de un valor de **18** y sumandos **7**

Sumados: -7
Multiplicados de: 18

$$\frac{(6a)^2 - 7 \cdot (6a) - 18}{6} = \frac{(6a - 9)(6a + 2)}{6}$$

Se extrae el *factor común* de los binomios y después simplifica la fracción.

$$= \frac{(6a - 9)(6a + 2)}{6} = \frac{3(2a - 3)2(3a + 1)}{6} = (2a - 3)(3a + 1)$$

El resultado es: $6a^2 - 7a - 3 = (2a - 3)(3a + 1)$

Ejemplo. Factoriza el trinomio: $3x^2 + 19x - 14$

Solución

Se multiplica y divide por el coeficiente 3 del primer término para que el numerador tenga la forma $ax^2 + bx + c$

$$3x^2 + 19x - 14 = \frac{3 \cdot (3x^2 + 19x - 14)}{3}$$

$$= \frac{(3x)^2 + 3 \cdot 19x - 3 \cdot 14}{3} = \frac{(3x)^2 + 19 \cdot (3x) - 42}{3}$$

Se extrae el *factor común* de los binomios y después simplifica la fracción.

Sumados: +19
Multiplicados de: 42

$$= \frac{(3x)^2 + 19 \cdot (3x) - 42}{3} = \frac{(3x + 21)(3x - 2)}{3} = \frac{3(x + 7)(3x - 2)}{3}$$

$$= (x + 7)(3x - 2)$$

El resultado es: $3x^2 + 19x - 14 = (x + 7)(3x - 2)$

NOTA

$$\left. \begin{array}{r} 42 \overline{) 2} \\ 21 \overline{) 3} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array} \right\} 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Así $21 \cdot 2 = 42$
y $21 - 2 = 19$

Factorizamos las expresiones:

· $5m^2 + 13m - 6$

· $2x^2 + 3x - 2$

· $7a^2 - 44a - 35$

· $44z + 20z^2 - 15$

· $3a^2 - 5a - 2$

· $4n^2 + 15n + 9$

· $2y^2 + 5y + 2$

· $2b^2 + 29b + 90$

· $6y^2 + 7y + 2$

· $20x^2 + x - 1$

· $20x^2 + 13x + 2$

· $6y^4 + 5y^2 - 6$

ASPA SIMPLE

$$\begin{array}{c} x^2 + 7x + 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 \Rightarrow 6x \\ 2 \Rightarrow 2x \\ + 8x \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} x^2 + 7x + 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \end{array}} \right\} +$$

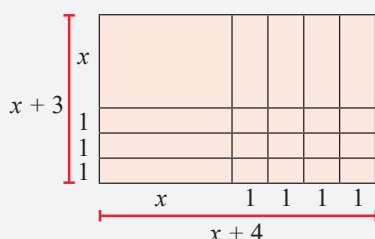
No cumple

Si es así se buscan otros factores para los extremos.

$$\begin{array}{c} x^2 + 7x + 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \Rightarrow 3x \\ 4 \Rightarrow 4x \\ + 7x \end{array}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= \\ &= (x + 3)(x + 4) \end{aligned}$$



NOTA

Cuando 2 5 3 y 4 no cumplen la condición se buscan otros factores o se invierten éstos hasta factorizar la expresión.

1.4. Aspa simple

El método del aspa permite factorizar trinomios de la forma.

$$nx^2 + pxy + qy^2$$

Utiliza el siguiente proceso:

1º Dado el trinomio ordenado y completo.

$$nx^2 + pxy + qy^2$$

Se descomponen los términos de los extremos y se acomodan en el arreglo siguiente:

$$nx^2 + pxy + qy^2$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ ax \quad by \\ \cdot \quad \cdot \\ cx \quad dy \end{array}$$

En este arreglo se cumple:

$$nx^2 = ac \cdot cx \wedge qy^2 = by \cdot dy$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Son factores de: } nx^2} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Son factores de: } qy^2}$

2º Ubicados los factores de los extremos, se verifica que la suma del producto de diagonales determine el término central del trinomio. En caso de no cumplir la condición, se buscan otros factores o se cambian de posición los mismos.

$$\begin{array}{c} nx^2 + pxy + qy^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ ax \quad \cdot \quad by \\ \cdot \quad \cdot \quad dy \\ cx \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} by \Rightarrow cx \cdot by \\ dy \Rightarrow ax \cdot dy \end{array} \right\} \text{Suma} \quad \underbrace{(ad + bc)xy}$$

Se debe cumplir que $pxy = (ad + bc)xy$

3º Los factores de la primera fila por los de la segunda dan la factorización del trinomio.

$$nx^2 + pxy + qy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

Ejemplo. Factoriza el trinomio: $6x^2 + 23xy + 20y^2$

Solución

1º Buscamos los factores de $6x^2$ y $20y^2$

$$6x^2 = 2x \cdot 3x \quad y \quad 20y^2 = 5y \cdot 4y$$

Hacemos el arreglo del aspa.

$$\begin{array}{c} 6x^2 + 23xy + 20y^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2x \quad \cdot \quad 5y \\ \cdot \quad \cdot \quad 4y \\ 3x \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 5y \Rightarrow 3x \cdot 5y = 15xy \\ 4y \Rightarrow 2x \cdot 4y = 8xy \end{array} \right\} \text{Suma} \quad \underbrace{+ 23xy}$$

3º Los factores son $6x^2 + 23xy + 20y^2 = (2x + 5y)(3x + 4y)$

2. Trinomio por adición y sustracción

Este método completa una expresión a trinomio cuadrado perfecto.

Consiste en sumar y restar una misma cantidad con la intención de formar una diferencia de cuadrados.

Ejemplo. Factoriza el trinomio: $25x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4$

Solución

1° Se ordena con relación a una variable.

$$\begin{array}{ccc} 25x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{25x^4} & & \sqrt{4y^4} \\ = & & = \\ 5x^2 & & 2y^2 \end{array}$$

2° Extraemos las raíces cuadradas de los términos en los extremos.

3° Calculamos el doble producto de las raíces encontradas y lo comparamos con el término central.

4° Hallamos la diferencia
 $2 \cdot 5x^2 \cdot 2y^2 = 20x^2y^2$
 Esta diferencia es la que se suma y resta a la expresión principal

$$25x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4 = 25x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4 + 9x^2y^2 - 9x^2y^2 =$$

$$\begin{aligned} 5^\circ \text{ Ordenando y factorizando el trinomio cuadrado perfecto: se encuentra la diferencia de cuadrados} \\ &= (25x^4 + 20x^2y^2 + 4y^4) - 9x^2y^2 = \\ &= (5x^2 + 2y^2)^2 - (3xy)^2 = \\ &= (5x^2 + 2y^2 + 3xy) \cdot (5x^2 + 2y^2 - 3xy) \end{aligned}$$

Así queda la expresión factorizada

$$25x^4 + 11x^2y^2 + 4y^4 = (5x^2 + 3xy + 2y^2) \cdot (5x^2 - 3xy + 2y^2)$$

NOTA

$$\begin{aligned} x^4 + y^{12} &= \\ = x^4 \dots + y^{12} &= \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \sqrt{} & \quad \sqrt{} \\ \parallel & \quad \parallel \\ x^2 & \quad y^6 \\ & \downarrow \\ & 2x^2y^6 \\ & \downarrow \\ & = x^4 + 2x^2y^6 + y^{12} - 2x^2y^6 \\ & = (x^2 + y^6)^2 - (\sqrt{2}xy^3)^2 = \\ & = (x^2 + y^6 + \sqrt{2}xy^3) \cdot (x^2 + y^6 - \sqrt{2}xy^3) \end{aligned}$$



VALORACIÓN



La factorización se aplica en varios problemas analíticos y gráficos, analizamos la importancia en la cotidianidad.

- ¿Cuál crees que es la diferencia más relevante entre las operaciones fundamentales de la aritmética y las operaciones fundamentales del álgebra?
- ¿Cómo la factorización contribuyó al desarrollo de la ciencia y tecnología?
- ¿Cómo aplicamos la factorización en la resolución de problemas?

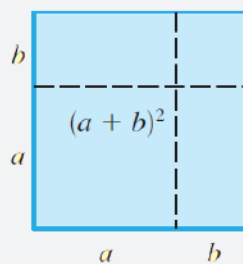
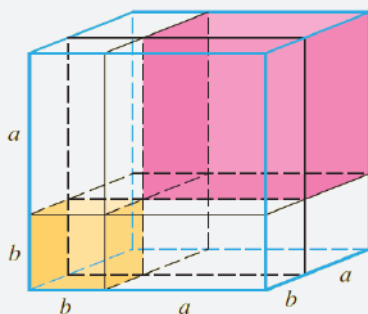


PRODUCCIÓN

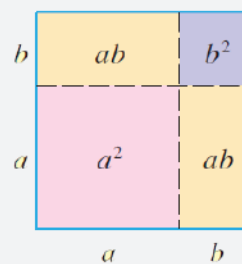


Realizamos materiales del contexto la siguiente actividad:

- Representamos geoméricamente la diferencia de cubos: $(a-b)^3$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ECUACIONES APLICADAS AL CONTEXTO Y LA TECNOLOGÍA

Términos semejantes y su relación con la producción

- $3a - 8a$
- $2x - 2y + 3x + y$
- $6a^2b + 7a^2b$
- $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$
- $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$
- $-2a^2b + 12a^2b$
- $-3a + 5a - 10a$
- $4x - 3x - 2x$
- $7ab + 4ab - 3ab$
- $5a^2 - 7a^2 + 3a^2 - 2a^2$
- $10. -m + n + m + n$
- $\frac{1}{4}a^3b - \frac{3}{5}a^3b + \frac{1}{6}a^3b$
- $-3a^{x+1} + 2a^{x+1} - a^{x+1} + 2a^{x+1}$
- $13. 0.25b - 0.4b + 0.2b$
- $\frac{1}{2}ab^3c - \frac{3}{2}ab^3c - ab^3c$
- $4m^{x-2} - 10m^{x-2} + 3m^{x-2}$
- $8x - 3y - 9x + 5y - 2x + y$
- $10a - 7b + 4a + 5b - 14a + 3b$
- $-12m + 3n - 4m - 10n + 5m - n$
- $12a^2b + 3ab^2 - 8a^2b - 10ab^2 - 3a^2b + 6ab^2$
- $9a^3b^2c - 5a^2bc^2 - 12a^3b^2c + 3a^2bc^2 + 4a^3b^2c$
- $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$
- $-81m^2 - 17mn + 15n^2 + 20m^2 + 3mn - 17n^2 + 53m^2 + 18mn + 7n^2$
- $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$
- $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$
- $0.5x - 2.5y + 0.4x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x$

Operaciones con expresiones algebraicas

Suma de polinomios

- Suma los polinomios $3x - 8y - 2z$; $7x + 3y + z$
- ¿Cuál es la suma de $-5m - 3n + 6$ con $2m + 2n - 8$?
- Realiza $(11a - b + c) + (-8a - c)$
- Efectúa $(3p - 5q - 6r) + (2p + 3q - 2r) + (-12p + 4q + r)$
- Suma $6x^2 + 3x - 2$ con $-x^2 + 7x + 4$
- $(8a^2 - 6a^3 + 4a) + (4a^3 + a^2 - 4a - 5)$
- $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 3) + (-3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
- De $5a^2 - 3a + 2$ resta $8a^2 - 5a + 7$
- ¿Cuál es el resultado de $(3x^3 - 5x^2 - 6x + 3) - (2x^3 + 4x - 8)$?
- De $4a^4 - 10a^3 + 2a^2 - 3a - 4$ resta $5a^5 - 3a^3 + 6a - 3$
- Efectúa $(4x^3y^2 - 5x^2y^3 + 6x^4y - 8xy^4) - (12x^2y^3 - 3xy^4 + 4x^3y^2 - 9x^4y)$
- De $7 - 8a^5b + 3a^3b^3 - 6a^4b^2 + 2ab^5$ resta $5a^3b^3 - 3ab^5 + 8 - 7a^5b - 2a^4b^2$
- Realiza $(3x^{a+2} - 7x^{a+1} - 8x^a + 3x^{a-1}) - (4x^{a+2} + 6x^{a+1} - 7x^a - 9x^{a-1})$
- De $5a^{2m-1} + 6a^{2m} - 8a^{m+1} - 3a^{m-3}$ resta $12a^{2m} - 5a^{2m-1} - 3a^{m+1} - 4a^{m-3}$
- ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)$?

Producto

- $(4a^2 - 7ab)(2a^3b)$
- $(-3m)(5m^4 - 3m^3 + 6m - 3)$
- $(3x^3 - 7x^2 - 2x)(xy)$
- $(-3ab)(2a^2 - 7ab + 8b^2)$
- $(6a^3b^2 - 7a^2b^3 + 4ab^5)(4a^5b^2)$
- $(-5xy^2z)(7x^6y^2z - 3x^5y - 4xz)$
- $(5m^3n - 3m^4p + 6m^2)(8mp^3)$
- $(4a^3c - 7a^2b - 2c)(-3ac^4)$
- $(5m^6n - 3mn^4 + 2mn)(3m^{x+1}n^{2x})$
- $(-2x^{a-2})(7x^5 - 8x^2 + 6x^3 - 9x + 2)$
- $(3a^{2x+1}b^{4x} - 7a^{2x}b^{4x+1} - 4a^xb^{3x+1})(-3a^{x+1}b^{1-x})$
- $(-5x^{2m}y^{n+1})(5x^{3m}y^{2n} - 2x^{3m+1}y^{2n+1} - 4x^{3m+2}y^{2n+2})$
- $(3a^{x+2}b^yc^m - 3a^{x+1}b^{y+1}c^2 + 2a^{x-3}b^{y-1}c)(-4a^3b^2c^5)$

División

a) $\frac{9a^6b^{10}}{3a^2b^5}$

h) $\frac{x^2+2x}{x}$

n) $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$

t) $\frac{x^3+48x-64-12x^2}{x^2+16-8x}$

b) $\frac{42x^9y^2}{-7x^5y^2}$

i) $\frac{4x^3+2x^2}{2x^2}$

o) $\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

u) $\frac{4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4}{2x^2-xy-2y^2}$

c) $\frac{-26a^5b^6}{-13b^3}$

j) $\frac{8x^2y-20x^3}{4x^2}$

p) $\frac{x^2+5xy+6y^2}{x+2y}$

v) $\frac{6x^4-8x^2-x^3+x+2}{2x^2-x-1}$

d) $\frac{32p^5q^6}{-8p^3q^2}$

k) $\frac{2x^3-x^2+x}{x}$

q) $\frac{x^2+7x+12}{x+4}$

w) $\frac{3x^4+2x^3+3x-6x^2-2}{x^2+x-2}$

e) $\frac{36a^{10}b^8}{-12a^2b^7}$

l) $\frac{2x^4+6x^3-8x^2}{2x^2}$

r) $\frac{x^2-4x-12}{x+2}$

x) $\frac{4x^4-4x^3-13x^2+11x+4}{2x^2-4+x}$

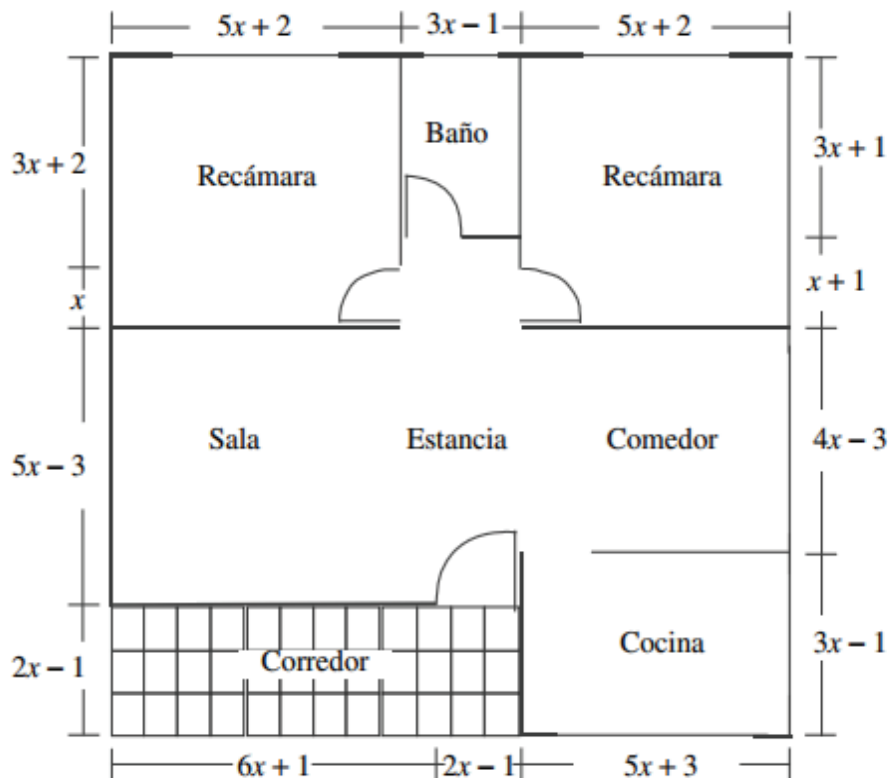
f) $\frac{-25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$

m) $\frac{8x^6-10x^4-12x^3}{-4x^2}$

s) $\frac{x^2+3x-18}{x-3}$

y) $\frac{6x^4-19x^3-12x^2+43x+30}{3x^2-5x-6}$

Observa el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular.



De acuerdo con él, calcula la superficie que abarca la construcción, exento el corredor.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Resuelve las siguientes ecuaciones

- | | | |
|------------------|------------------------------|---|
| a) $x + 2 = 5$ | j) $2 - 7z = 13$ | s) $10z - 5 + 7z - 10 + 8z = 2z - 6 + 4z - 8$ |
| b) $y - 4 = 6$ | k) $8x - 6 = 6x + 4$ | t) $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$ |
| c) $8 - z = 9$ | l) $12 + 7x = 2x + 22$ | u) $14 - 12x + 39x - 18x = 239 - 60x - 6x$ |
| d) $10 - x = 12$ | m) $9 - 8y = 27 - 2y$ | v) $-8x + 48 - 30x - 51x = 3x - 31x + 170$ |
| e) $2x - 3 = 5$ | n) $2z + 9 = z + 1$ | w) $7x + 5 - 2x + 9x = 14x - 9 + 2x - 11x + 8$ |
| f) $3y + 2 = 11$ | o) $3w - 3 = 4w + 11$ | x) $3w + 5 - 7w + 9w - 11w + 13 = 16 - 8w$ |
| g) $9x - 6 = 18$ | p) $10x + 21 = 15 - 2x$ | y) $6z + 12z - 18 - 5z = -12z + 4z - 11 + z$ |
| h) $5x + 7 = 3$ | q) $21x - 3 = 3x + 6$ | z) $10x - 8 + 3x - 7 + x = 20x - 10 - 6x$ |
| i) $1 - 4w = 9$ | r) $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$ | aa) $5x - 8 - 8x + 10 - 3x = 9 - x + 6 - 5x - 13$ |

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Productos notables

- | | | | | |
|-----------------|--|--|------------------------|--|
| a) $(x + 8)^2$ | j) $(4 - m)^2$ | s) $(2x + 3y)^2$ | ab) $(x + 3)(x - 3)$ | ai) $\left(\frac{3}{5}m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m - \frac{1}{2}\right)$ |
| b) $(m - 10)^2$ | k) $(y + 9)^2$ | t) $(x + 0.2)^2$ | | |
| c) $(a - 3)^2$ | l) $(x - 12)^2$ | u) $(4x^3 + 5y)^2$ | ac) $(a - 1)(a + 1)$ | aj) $\left(\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}\right)$ |
| d) $(y + 1)^2$ | m) $(p + 15)^2$ | v) $(9a^3 - a^2b)^2$ | | |
| e) $(y + 5)^2$ | n) $(2a - 1)^2$ | w) $(6mn^4 + 3m^5p)^2$ | ad) $(b + 2)(b - 2)$ | ak) $\left(\frac{1}{3}xy - z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy + z^6\right)$ |
| f) $(p - 6)^2$ | o) $\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2$ | x) $(a^5 - b^5)^2$ | | |
| g) $(1 - b)^2$ | p) $(3ax - 1)^2$ | y) $\left(1 - \frac{3}{4}xy\right)^2$ | af) $(k - 8)(k + 8)$ | al) $\left(3x^2 - \frac{1}{10}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{10}\right)$ |
| h) $(x - 5)^2$ | q) $(mn + 8a)^2$ | z) $\left(\frac{1}{4}x - 2y^3\right)^2$ | ag) $(5 - y)(5 + y)$ | am) $(3a^{x-4} + b^{3x})(3a^{x-4} - b^{3x})$ |
| i) $(2 + n)^2$ | r) $(7a - 3b)^2$ | aa) $\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{4y}\right)^2$ | ah) $(9 - a)(9 + a)$ | an) $(8y^{2a-3} - 4x^{4a})(4x^{4a} + 8y^{2a-3})$ |
| | | | aj) $(m - n)(m + n)$ | ao) $(a + b - c)(a + b + c)$ |
| | | | ak) $(xy - z)(xy + z)$ | aq) $(a - b + c)(a + b - c)$ |

Cocientes notables

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\frac{ax^2 - 4}{3x + 2}$ | e) $\frac{x^2y^2 - x^6}{xy + x^3}$ | h) $\frac{\frac{1}{81}x - \frac{4}{169}y^6}{\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{13}y^3}$ |
| b) $\frac{a^2 - 25}{x - 5}$ | f) $\frac{100a^2 - 4a^2b^2}{30a^2 - 6a^2y}$ | |
| c) $\frac{9x^4 - 4}{3x^2 + 2}$ | g) $\frac{a^{4n}b^{8n} - c^{8n}d^{4n}}{a^{2n}b^{4n} + c^{4n}d^{2n}}$ | i) $\frac{\frac{16}{25}a^8b^4 - \frac{9}{49}c^{16}d^{12}}{\frac{4}{5}a^4b^2 + \frac{3}{7}c^8d^6}$ |
| d) $\frac{25a^2 - 49b^2c^4}{5a + 7bc^2}$ | | |

FACTORIZACIÓN

Factoriza las siguientes expresiones

a) $a^2 + a$

e) $48x^2 - 12x^3 - 24x^4$

i) $9x^2 + 6x + 3$

b) $a^3b^2 - 2a^3b$

f) $25b^2 + 35b^4 - 45b^5$

j) $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$

c) $a^4 + a^3 - a^2$

g) $11ax - 121a^2x + 33a^3$

k) $6x^2 - 6xy - 6x$

d) $18x^5 + 30x^4$

h) $9a^5b - 12a^2b^3 + 15ab^2 - 18a^3b^4$

l) $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$

Factorización de binomios

a) $x^2 - 1$

d) $16x^2 - 9$

f) $x^4 - 64$

h) $36x^2 - 1$

k) $x^6 - 36$

n) $x^2 - \frac{4}{81}$

p) $x^4 - \frac{1}{16}$

b) $x^2 - 49$

i) $4 - 25x^2$

l) $16a^4b^6 - c^6$

c) $81 - x^2$

e) $a^4 - b^4$

g) $100 - 16x^2$

j) $4a^4 - 9b^2c^2$

m) $x^2 - \frac{1}{4}$

o) $x^2 - \frac{16}{49}$

q) $49x^2 - \frac{16}{25}$

Factorización de trinomios

a) $a^2 + 8a + 16$

i) $4a^2 - 20ab + 25b^2$

r) $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$

b) $m^2 - 10m + 25$

j) $9a^2 + 6ab + b^2$

s) $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$

k) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

c) $n^2 - 8n + 16$

l) $a^2 - 24x^2a^3 + 144x^4a^4$

t) $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$

d) $x^2 - 6x + 9$

m) $100a^4 - 60a^2b + 9b^2$

u) $\frac{1}{25} + \frac{25}{36}b^4 - \frac{b^2}{3}$

e) $x^2 + 12x + 36$

n) $a^8 + 36b^2c^2 + 12a^4bc$

v) $16m^6 - 2m^3n^2 + \frac{n^4}{16}$

f) $9a^2 - 30a + 25$

o) $121 + 198a^6 + 81a^{12}$

w) $9(a+x)^2 - 12(a+x) + 4$

g) $36 + 121c^2 - 132c$

p) $49x^6 - 70ax^3y^2 + 25a^2y^4$

x) $4(1+m)^2 - 4(1+m)(n-1) + (n-1)^2$

h) $16a^2 + 24ab + 9b^2$

q) $400a^{10} + 40a^5 + 1$

y) $9(a-b)^2 + 12(a-b)(a+b) + 4(a+b)^2$

(Ejercicios recopilados)

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (RUFFINI)

PRÁCTICA

De manera general, la factorización consiste en transformar un polinomio como el producto de sus factores primos, factores que deben tener menor grado que el polinomio original, para ello existen variados métodos, uno de ellos es el método de Ruffini.

Imagina que estudias economía y debes resolver un problema que involucra el cálculo de los ingresos de una empresa en función del precio de venta de su producto. La situación se podría presentar de la siguiente manera:

Una empresa manufacturera produce y vende un producto a un precio de P bolivianos por unidad. La relación entre la cantidad vendida (Q) y el precio de venta (P) está modelada por la ecuación polinómica:

$$Q(P) = 2P^3 - 5P^2 - 3P + 6$$



Fuente: <https://www.eba.com.bo/>

El objetivo es determinar los puntos críticos de esta función, es decir, los valores de P para los cuales la tasa de cambio de Q con respecto a P es cero. Estos puntos críticos son importantes para entender cómo la cantidad vendida varía en función del precio y para maximizar los ingresos de la empresa.

La factorización por el método de Ruffini puede ser extremadamente útil en esta situación para encontrar las raíces de la ecuación $Q(P) = 0$, que corresponden a los valores de P donde la cantidad vendida es cero o alcanza un mínimo o máximo local.

Actividad Investigamos ejemplos sobre cómo la factorización de polinomios puede ser una herramienta valiosa en la resolución de problemas del mundo real en diversas áreas, como la economía, la ingeniería y la física.

TEORÍA

QUÉ ES Y PARA QUÉ SE UTILIZA EL MÉTODO DE RUFFINI

El método de Ruffini, también conocido como división sintética, es una técnica utilizada para encontrar los factores de un polinomio y, en particular, para verificar si un número dado es una raíz del polinomio.

La regla de Ruffini es un método que permite:

- Resolver ecuaciones de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado ...)
- Dividir un polinomio entre un binomio que sea de la forma $x - a$
- Factorizar polinomios de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado ...)
- Calcular las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3.

1. El método de Ruffini

Este método consiste en aplicar la división sintética o propiedad de la divisibilidad entre polinomio.

Si para un polinomio $P(x)$ de grado n existe un $\pm a \in \mathbb{R}$ tal que $P(\pm a) = 0$ entonces un factor de $P(x)$ será el binomio $(x \mp a)$.

Existen polinomios que no tienen raíces reales, por ejemplo, $x^2 + 1$ no tiene raíces reales. Estos polinomios no se pueden factorizar.

2. Aplicación del método de Ruffini para factorizar polinomios

Al utilizar la regla de Ruffini para factorizar un polinomio, se debe considerar que el polinomio debe tener coeficiente independiente y debe estar completo y ordenado descendientemente.

Para realizar la factorización con la regla de Ruffini, se siguen los pasos:

- 1 Se debe ordenar el polinomio a factorizar decrecientemente, en forma descendente, y si falta algún término se deja un espacio, comprendiendo que el coeficiente del término que falta es cero, se hace esto para que el polinomio debe esté completo.
- 2 Hay que precisar que el polinomio deba tener término independiente y si no lo tiene se debe extraer el factor común hasta obtener el término independiente.

- 3 Elaborar el esquema de factorización en una tabla donde se acomodan los coeficientes del polinomio.
- 4 Anotar un divisor del término independiente en la esquina inferior izquierda, bajar el primer coeficiente del polinomio. Se anota el producto de estos dos debajo del segundo coeficiente del polinomio, se suma (o resta) en vertical, se procede de la misma forma: multiplicando y sumando en vertical, hasta obtener cero "0" en la última suma vertical, considerando que, si no resulta cero, se puede reiniciar el proceso anotando otro divisor del término independiente del polinomio. Nota: La manera más fácil de seleccionar el divisor adecuado es reemplazando éste en el polinomio original, en lugar de la variable principal, si resulta cero, es el adecuado.
- 5 Ya con el primer divisor, que conformará luego el primer factor, se repite el procedimiento con los nuevos coeficientes hasta dejar un solo coeficiente.

Ejemplos

1) Factorizar $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- 1 Ordenamos el polinomio en forma descendente. El polinomio está completo:
- 2 El término independiente del polinomio es 2, sus divisores son: **+1, -1, +2, -2**
- 3 Formamos una tabla con los coeficientes del polinomio, trazamos dos líneas perpendiculares:

4 Escribimos un número a la izquierda de la línea vertical. Este número es uno de los **divisores** del término independiente.

La manera sencilla de conocer qué factor del término independiente elegir, es evaluar el polinomio para cada divisor:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$P(1) = 0; P(-1) = 0$$

$$P(2) = 12; P(-2) = 0$$

Por tanto, los valores indicados son:

$$a = 1; a = -1 \text{ y } a = -2$$

	1	2	-1	-2
1	↓	+	+	+
1	↓	1	3	2
-1	↓	1	3	2
-1	↓	-1	-2	0 ✓
-2	↓	1	2	0 ✓
-2	↓	1	2	0 ✓
	1	2	0	✓
	1	2	0	✓
	1	2	0	✓

Divisores del término independiente.

RECUERDA

Un polinomio ordenado es un polinomio cuyos términos están organizados en orden descendente según las potencias de la variable. La forma general de un polinomio ordenado es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde:

n es el grado del polinomio, que es el exponente más alto de la variable en el polinomio.

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$$

son coeficientes numéricos.

5 Se baja el 1º coeficiente, se multiplica el divisor 1 por el 1º coeficiente, el resultado se escribe en la siguiente columna para sumar en vertical.

Repetimos el proceso hasta simplificar los coeficientes. El divisor que se escoja debe ser un número que haga que al final nos dé resto cero.

Como nos queda un solo coeficiente; entonces, hemos terminado de factorizar.

El resultado de la factorización por el método de Ruffini es:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

Se puede ver, claramente, que el polinomio original se transformó en el producto de tres factores de menor grado, cada uno de primer grado, como son tres, sumarán el grado del polinomio original. Puede suceder que un polinomio de grado tres se factorice en dos factores, uno de grado uno y el otro de grado dos, es decir que no todos los polinomios se factorizan en factores de grado uno, pero la suma de los grados de los factores siempre será igual al grado del polinomio original.

PAOLO RUFFINI



1765 – 1822

Matemático, filósofo y
médico italiano.

2) Factorizar $Q(a) = a^5 - 21a^3 + 16a^2 + 108a - 144$

- 1 Ordenamos el polinomio en forma descendente. Observamos que falta el término de grado 4:
- 2 El término independiente del polinomio es 144, sus divisores son: +1, -1, +2, -2, +3, -3, ...
- 3 Formamos una tabla con los coeficientes del polinomio, debemos completar los espacios de los términos faltantes con ceros. Trazamos dos líneas perpendiculares.

4

	1	0	-21	16	108	-144
		+	+	+	+	+
	2		4	-34	-36	144
$(a-2)$ es factor ← 2	1	2	-17	-18	72	0 ✓
$(a-2)$ es factor ← 2	1	2	8	-18	-72	
$(a-3)$ es factor ← 3	1	4	-9	-36	0 ✓	
$(a-3)$ es factor ← 3	1	3	21	36		
$(a+3)$ es factor ← -3	1	7	12	0 ✓		
$(a+3)$ es factor ← -3	1	-3	-12			
$(a+4)$ es factor ← -4	1	4	0 ✓			
$(a+4)$ es factor ← -4	1	-4				
	1	0	✓			

5

Como nos queda un solo coeficiente; entonces, hemos terminado de factorizar.

Divisores del término independiente.

El resultado de la factorización por el método de Ruffini es:

$$Q(a) = a^5 - 21a^3 + 16a^2 + 108a - 144 = (a-2)(a-2)(a-3)(a+3)(a+4)$$

3) Factorizar $R(x) = 3x^2 + 9x + 6$

- 1 Ordenamos el polinomio en forma descendente.
- 2 El término independiente del polinomio es 6, sus divisores son: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6.
- 3 Formamos una tabla con los coeficientes del polinomio, trazamos dos líneas perpendiculares:

		3	9	6	
		↓			
$(x+1)$ es factor	← -1		-3	-6	
		3	6	0	✓
		↓			
$(x+2)$ es factor	← -2		-6		
		3	0		✓

El resultado de la factorización por el método de Ruffini es: $R(x) = 3x^2 + 9x + 6 = 3 \cdot (x+1)(x+2)$

En este caso, se puede haber extraído el factor común "3", quedaría así: $R(x) = 3x^2 + 9x + 6 = 3 \cdot (x^2 + 3x + 2)$ y al polinomio dentro del paréntesis se puede aplicar algún método de factorización para llegar al mismo resultado.

4) Factorizar $S(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

El polinomio está ordenado en forma descendente: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

El término independiente del polinomio es 6, sus divisores son: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6.

Formamos una tabla con los coeficientes del polinomio:

		2	1	-8	-1	6	
		↓					
$(x-1)$ es factor	← 1		2	3	-5	-6	
		2	3	-5	-6	0	✓
		↓					
$(x+1)$ es factor	← -1		-2	-1	6		
		2	1	-6	0		✓
		↓					
$(x+2)$ es factor	← -2		-4	6			
		2	-3	0			✓

$(2x-3)$ es factor

El resultado de la factorización por el método de Ruffini es:

$$S(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = (2x-3) \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

HISTORIA

Paolo Ruffini, matemático italiano conocido por su contribución al campo del álgebra y la división de polinomios, a pesar de su importante trabajo en matemáticas, su trabajo no fue ampliamente reconocido durante su vida.

Ruffini publicó su método de división de polinomios, ahora conocido como el "método de Ruffini", en 1804 en su obra "Teoria Generale delle Equazioni". Sin embargo, su trabajo no fue ampliamente aceptado ni comprendido por la comunidad matemática de su época.

INTERESANTE

Curiosamente, en 1813, otro matemático noruego llamado Niels Henrik Abel desarrolló un enfoque similar pero más general para resolver ecuaciones polinómicas, que hoy en día se conoce como el "teorema de Abel-Ruffini". A pesar de que Ruffini ya había trabajado en esta área, la falta de reconocimiento y comprensión de su trabajo anteriormente limitó su contribución a los desarrollos posteriores en la teoría de ecuaciones algebraicas.

Con el tiempo, se reconoció la importancia del trabajo de Ruffini en la historia de las matemáticas y su contribución al desarrollo de métodos para resolver ecuaciones polinómicas.

Determinamos los factores de los siguientes polinomios aplicando el método de Ruffini:

$$\bullet P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$\bullet Q(x) = x^4 - 11x^2 - 18x - 8$$

$$\bullet R(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\bullet S(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$\bullet T(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 4$$

$$\bullet U(a) = a^4 - 15a^2 - 10a + 24$$

$$\bullet V(m) = m^5 + 2m^4 - 3m^3 - 8m^2 - 4m$$

$$\bullet W(y) = y^4 - 2y^2 + 1$$

$$\bullet M(x) = x^3 + 5x^2 + 8x - 4$$

3. Casos combinados de factorización

La factorización de polinomios puede implicar la combinación de varios métodos para llegar a una expresión completamente factorizada. Algunos casos comunes de factorización que combinan diferentes técnicas incluyen:

Factorización por agrupación y luego por factor común:

En algunos casos, puedes agrupar términos dentro del polinomio y luego factorizar por factor común. Por ejemplo:

Factorizar $ab + ac + xb + xc$

$$ab + ac + xb + xc = (ab + ac) + (xb + xc)$$

$$= a(b + c) + x(b + c)$$

$$= (a + x)(b + c)$$

Agrupamos el 1º con el 2º término y el 3º con el 4º término.

Extraemos el factor común monomio en cada paréntesis.

Aplicamos el factor común polinomio.

Factorización por factor común y trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

A veces, extraemos el factor común del polinomio y luego aplicamos la factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$. Por ejemplo:

Factorizar $2x^3 + 6x^2 - 8x$

$$2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4)$$

$$= 2x(x + 4)(x - 1)$$

Extraemos el factor común $2x$.

Factorizamos el trinomio contenido en el paréntesis.

Factorización por factor común y diferencia de cuadrados:

También podemos combinar el factor común con la diferencia de cuadrados. Por ejemplo:

Factorizar $3x^4 - 243$

$$3x^4 - 243 = 3(x^4 - 81)$$

$$= 3(x^2 + 9)(x^2 - 9)$$

$$= 3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$$

Extraemos el factor común 3 .

Factorizamos la diferencia de cuadrados $(x^4 - 81)$.

Factorizamos la diferencia de cuadrados $(x^2 - 9)$.

Factorización por trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados:

A veces es posible utilizar dos métodos para factorizar un polinomio, en este caso, se utiliza la factorización por trinomio cuadrado perfecto con la diferencia de cuadrados.

Factorizar $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a^2 + 2ab + b^2) - 1$$

$$= (a + b)^2 - 1$$

$$= (a + b + 1)(a + b - 1)$$

Asociamos los tres primeros términos.

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto.

Factorizamos la diferencia de cuadrados resultante.

Recuerda que la factorización de polinomios puede involucrar la combinación de varias técnicas, y es importante considerar las características particulares de cada polinomio para aplicar la estrategia de factorización adecuada.

Actividad

Se pide factorizar los siguientes polinomios aplicando métodos de factorización combinados:

- 1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 4$
- $9x^4 - 16y^2$
- $3x^3 - 3x^2 + 6x - 6$
- 4) $64x^3 - 125$
- $x^4 - 16x^2$
- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

VALORACIÓN

La idea principal de la factorización, que aprendimos, es transformar cualquier polinomio en el producto de sus factores primos.

Se debe considerar que los polinomios pueden tener más variables, no solo una, y que los ejercicios resueltos son ejemplos de ejercicios con una variable.



Actividad

En base a lo aprendido, luego de una reflexión, respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la importancia de la factorización de polinomios en matemáticas y en otras áreas de la vida real?
- ¿En qué situaciones es más eficaz utilizar la factorización por el método de Ruffini en lugar de otras técnicas de factorización?

PRODUCCIÓN

Explorando la Factorización por el Método de Ruffini

Para promover la comprensión y aplicación del método de Ruffini para la factorización de polinomios, se debe organizar a todos los compañeros en grupos, de acuerdo a lo que disponga la maestra o maestro.

Materiales:

Hojas de papel para cada estudiante.
Lápices.

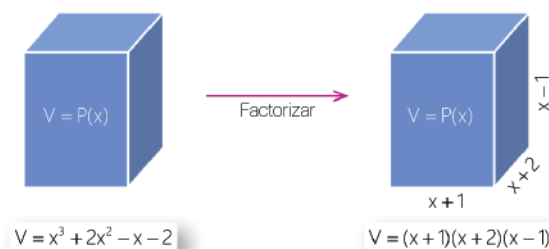
Instrucciones:

1. Cada grupo resolverá un ejercicio propuesto por el maestro, mostrando todos los pasos de la factorización en las hojas de papel.
2. Un representante del grupo comparte la solución en el pizarrón o mediante una presentación al resto de los compañeros.
3. Los demás compañeros deben resaltar cómo el método de Ruffini puede simplificar la factorización de polinomios y cómo se puede aplicar en situaciones del mundo real.
4. Al terminar la participación del grupo, el representante hará una breve reflexión sobre la experiencia al utilizar el método de Ruffini y cómo creen que esta habilidad podría ser útil en el aprendizaje y en situaciones prácticas.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y APLICACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN

PRÁCTICA

La siguiente actividad pide factorizar un polinomio que expresa el volumen de un prisma:



Como podemos observar, la factorización del volumen de un prisma consiste en expresar el volumen en el producto indicado del área de la base por la altura.

Podemos afirmar que la factorización es operación inversa de la multiplicación, porque al desarrollar el producto obtenemos el polinomio que representa al volumen del prisma.

Geoméricamente, podemos afirmar que al factorizar el volumen del prisma calculamos sus lados: ancho, largo y alto; esto con el proceso de factorización.

Del modo inverso, podemos afirmar que dadas las dimensiones del prisma siempre es posible calcular su volumen; esto con el proceso de multiplicación.

De este modo, podemos representar términos algebraicos como figuras o cuerpos geométricos.

Actividad

- Investigamos las fórmulas de área de un cuadrado y rectángulo en función de una variable. Realizamos el gráfico de 3 ejemplos propuestos de la investigación.

TEORÍA

1. Interpretación geométrica

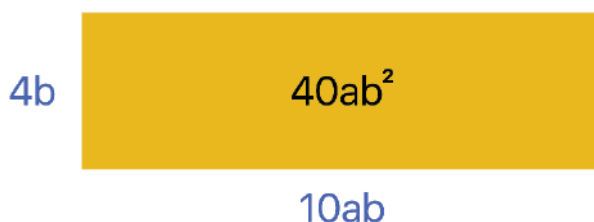
La interpretación geométrica de la factorización se refiere a la representación visual de expresiones algebraicas factorizadas en términos de formas geométricas. Esta interpretación permite comprender mejor las relaciones entre las variables y cómo se relacionan con las propiedades de las figuras geométricas.

En esencia, la interpretación geométrica de la factorización implica considerar las expresiones algebraicas como áreas o dimensiones de formas geométricas específicas. Al factorizar una expresión algebraica, se busca descomponerla en factores más simples, lo que puede corresponder a descomponer una figura geométrica en partes más manejables y fáciles de entender.

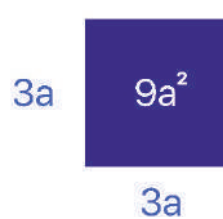
Por ejemplo, la representación gráfica del **factor común monomio** se puede hacer utilizando bloques rectangulares o cuadrados que representen cada uno de los términos del polinomio en función de las longitudes de sus base, altura y área para luego identificar el término que es común a todos los términos del polinomio. Por ejemplo:



Base: $3a$
Altura: $2a$
Área: $3a \cdot 2a = 6a^2$



Base: $10ab$
Altura: $4b$
Área: $10ab \cdot 4b = 40ab^2$

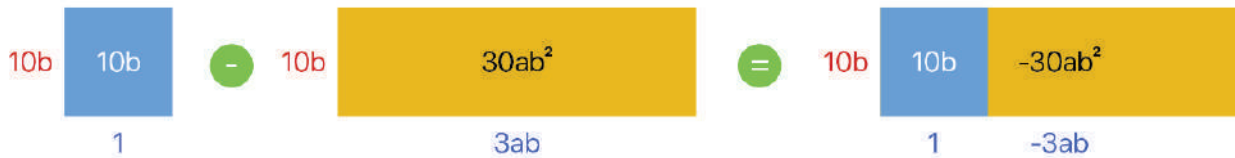


Base: $3a$
Altura: $3a$
Área: $3a \cdot 3a = 9a^2$

Ejemplos

Representar geoméricamente la factorización de:

1) Factorizar $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$



Geoméricamente, el factor común monomio es la altura de los bloques rectangulares. La factorización es el producto indicado de la base por la altura.

2) Factorizar $10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2)$

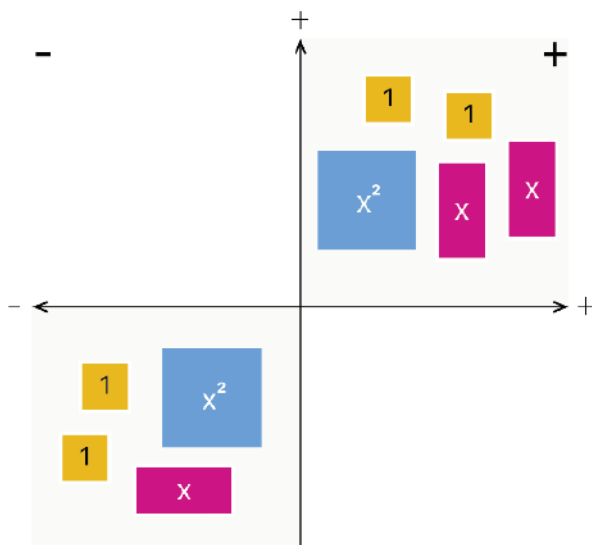


Geoméricamente, el factor común monomio es la altura de los bloques rectangulares. La factorización es el producto indicado de la base por la altura.

2.1 Caja de polinomios

Llamaremos Caja o Cajón de Polinomios a un conjunto de piezas rectangulares que representan términos algebraicos y que ubicadas en una superficie o tablero orientado nos permiten determinar las dimensiones de la base y altura de áreas. De este modo, se puede relacionar la geometría con el álgebra y comprender de mejor manera la factorización.

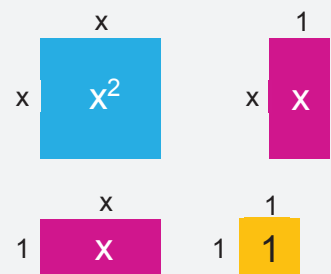
Con la Caja de Polinomios representamos polinomios de grado 2 con coeficientes enteros positivos y negativos haciendo uso del plano cartesiano. En él, los rectángulos básicos de dimensión 2, que llamaremos fichas, se ubican en el primer o tercer cuadrante si representan términos con coeficientes positivos y se ubican en el segundo o cuarto cuadrante si tienen coeficientes negativos. Así, el polinomio $2x^2 + 3x + 4$ se representa:



CAJA DE POLINOMIOS

Las piezas:

Se construyen rectángulos básicos fundamentales representados de la siguiente manera y con la siguiente denotación:



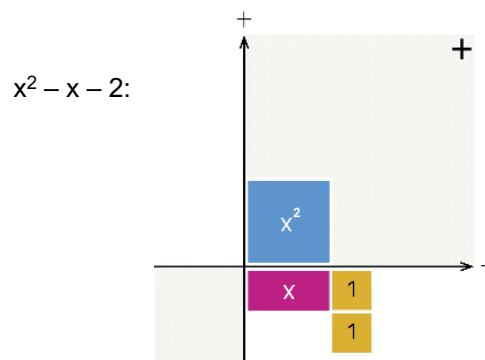
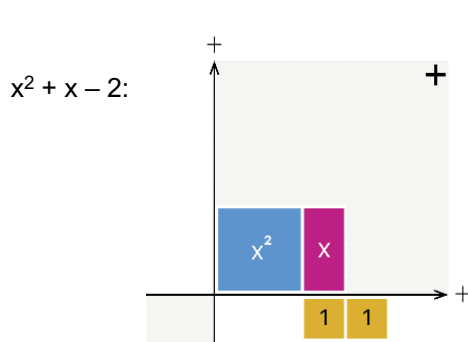
El tablero:

El tablero consiste en representar el plano cartesiano donde se ubicarán las piezas en los cuadrantes tomando en cuenta los signos de los coeficientes de los términos que representan. El plano cartesiano se traduce en un contexto que posibilita la operatoria algebraica con polinomios de coeficientes enteros y por ello se necesita de su correcta utilización.

3. ¿Cómo factorizar con la Caja de Polinomios?

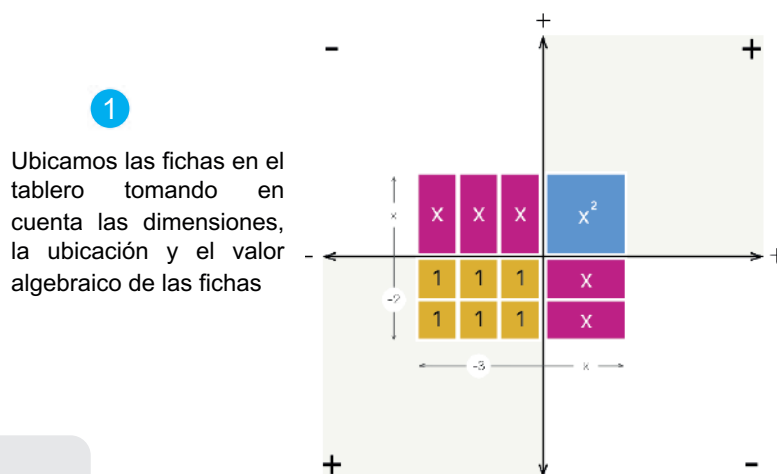
Según el tutorial de la aplicación “Cajón de polinomios”, un encuadre minimal para un polinomio cuadrático será su representación en el plano cartesiano desde la cual se puede completar un rectángulo por agregación del mínimo número de parejas de fichas que algebraicamente suman cero. La factorización en el Cajón de Polinomios consiste en construir un rectángulo a partir de su encuadre minimal.

Las siguientes figuras presentan el encuadre minimal para los polinomios $x^2 + x - 2$ y $x^2 - x - 2$:



Ejemplos:

1) Factorizar $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$



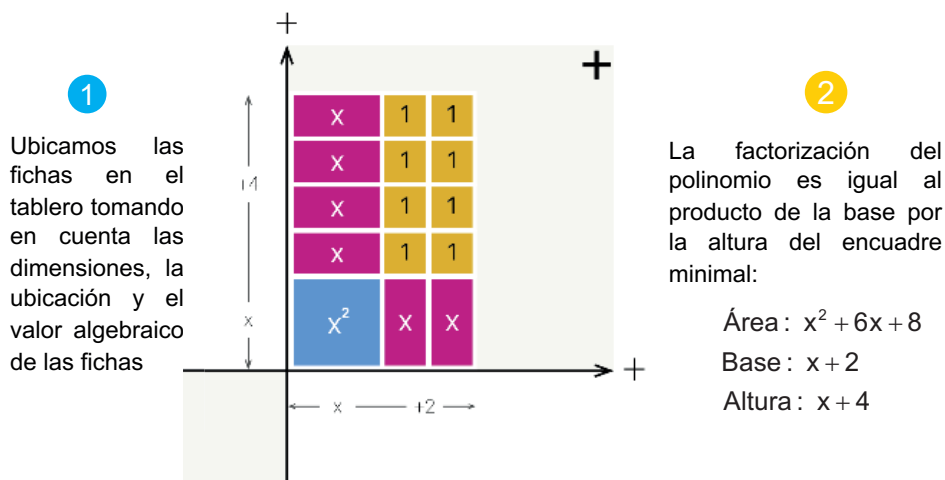
CAJÓN DE POLINOMIOS

Puedes descargar la aplicación gratuita para dispositivos Android desde Play Store a través del siguiente enlace:

https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_rireto.cajapolinomios_2_3



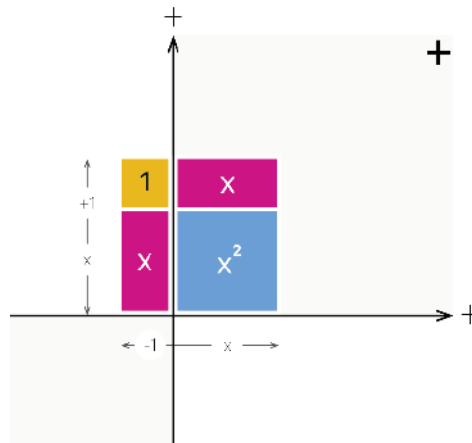
2) Factorizar $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$



3) Factorizar $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

1

Ubicamos las fichas en el tablero tomando en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas



2

La factorización del polinomio es igual al producto de la base por la altura del encuadre minimal:

Área: $x^2 - 1$

Base: $x + 1$

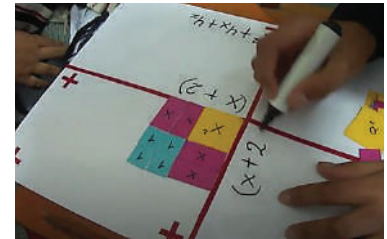
Altura: $x - 1$

Aplicaciones de la factorización

La factorización tiene una amplia gama de aplicaciones en matemáticas y en varios campos de la ciencia y la ingeniería. Algunas de las aplicaciones más comunes de la factorización son las siguientes:

- Interpretación geométrica: Como se mencionó anteriormente, la factorización puede tener una interpretación geométrica, lo que permite representar expresiones algebraicas en términos de áreas y dimensiones de formas geométricas.
- Cálculo de áreas y volúmenes: En geometría, la factorización puede ser útil para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas mediante la descomposición en formas más simples cuyas áreas o volúmenes son conocidos.

VALORACIÓN



Actividad

- En un espacio de dialogo con la clase, a través de una lluvia de ideas, mencionamos más situaciones donde se pueden aplicar la factorización desde el punto de vista geométrico.

PRODUCCIÓN

Caja de Polinomios

Elaboramos la Caja de Polinomios con materiales de escritorio de nuestro entorno, para realizar la interpretación geométrica en la factorización:

Materiales:

Dos papeles de cartulina tamaño oficio.
4 cuadrados de cartulina de 4 x 4 cm.
10 rectángulos de cartulina de 4 x 2 cm.
16 cuadrados de cartulina de 2 x 2 cm.
Cinta de embalaje, marcadores de agua, tijeras, regla.

Instrucciones:

Unir los dos papeles de cartulina y dibujar el plano cartesiano con los signos respectivos (tablero). Plastificar con cinta de embalaje.

En los rectángulos y cuadrados escribir su área: x^2 , x y 1

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas en la Caja de Polinomios y escribir los factores sobre el tablero con el marcador de agua.

1) $x^2 - 7x + 6$

2) $x^2 - 16$

3) $x^2 + 2x + 1$

4) $x^2 - 5x - 6$

5) $x^2 - 9$

6) $x^2 - 6x - 7$



FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

PRÁCTICA

Imagina que estás modelando el ahorro de una familia a lo largo del tiempo. Quieres entender cómo el ahorro acumulado cambia a medida que pasan los meses, considerando que se realiza un depósito mensual constante. Puedes utilizar una fracción algebraica para describir este proceso. Supongamos que el ahorro acumulado S en función del número de meses “ n ” se puede modelar con la siguiente expresión algebraica:

$$S(n) = P \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Donde:

- $S(n)$ es el ahorro acumulado después de “ n ” meses.
- P es el depósito (ingreso) mensual constante.
- r es la tasa de interés mensual.



En este modelo, la fracción algebraica describe cómo el ahorro acumulado cambia a medida que pasan los meses. El término $(1+r)^n - 1$ representa cómo el dinero aumenta con la tasa de interés compuesta, y dividirlo por “ r ” ajusta el cálculo para el depósito mensual.

Actividad

Respondamos la pregunta ¿Cuál es el papel fundamental de las fracciones algebraicas en la representación de proporciones, tasas de cambio y divisiones equitativas, y cómo su uso permite abordar con mayor eficacia situaciones del mundo real que requieren divisiones no completas o reparticiones proporcionales de recursos limitados?

TEORÍA

RECUERDA

Fracciones algebraicas impropias

Cuando el numerador de una fracción es de mayor grado al del denominador de ésta:

$$\frac{x^3 + x^2 - 6}{x^2 - 5}$$

Fracciones algebraicas propias

Cuando el numerador de una fracción es de menor grado al del denominador de ésta:

$$\frac{3x}{x^2 + 2}$$

1. Fracción algebraica

Fracción algebraica es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas. El dividendo se llama numerador de la fracción algebraica, y el divisor, denominador; el denominador es distinto de cero. Son ejemplos de fracciones algebraicas:

$$\frac{5xy^2}{3z}; \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 + 4}; \frac{a}{a - 9}$$

El numerador y el denominador son los términos de la fracción.

2. Equivalencia de fracciones algebraicas

Dos fracciones algebraicas son iguales o equivalentes si se cumple el producto en cruz de sus términos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad b \neq 0; d \neq 0$$

Si se tiene una fracción algebraica y se multiplica el numerador y el denominador por otra expresión, se obtiene otra fracción equivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c \quad b \neq 0; d \neq 0; c \neq 0$$

3. Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (M. C. M.) de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

a) M. C. M. de monomios

Se halla el M. C. M. de los coeficientes y a continuación de éste se escriben todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplo

Hallar el M. C. M. de $10a^3x$; $36a^2mx^2$; $24b^2m^4$

Calculamos el M.C.M. de los coeficientes:

1 Calculamos el M.C.M. de los coeficientes:

10	2	36	2	24	2
5	5	18	2	12	2
1		9	3	6	2
		3	3	3	3
		1		1	

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\text{el M. C. M. } (10, 36, 24) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

2 Se toman los factores literales comunes y no comunes con el mayor exponente:

$$\text{el M. C. M.} = a^3b^2m^4x^2$$

3 Finalmente, el M.C.M. es:

$$\text{M.C.M.} = 360a^3b^2m^4x^2$$

b) M. C. M. de polinomios

El M. C. M. de dos o más polinomios es el producto de los factores primos, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el M. C. M. de $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$; $6b^2x - 6b^2y$

1 Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 4a(x^2 - 2xy + y^2) = 2^2 \cdot a \cdot (x - y)^2$$

$$6b^2x - 6b^2y = 6b^2 \cdot (x - y) = 2 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot (x - y)$$

2 Finalmente, el M.C.M. es:

$$\text{M.C.M.} = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \cdot (x - y)^2 = 12ab^2(x - y)^2$$

RECUERDA

Fraciones algebraicas Homogéneas

Son aquellas cuyos denominadores son polinomios idénticos:

$$\frac{x+6}{x^2+1}; \frac{x^4-7}{x^2+1}$$

Fraciones algebraicas Heterogéneas

Son aquellas cuyos denominadores son polinomios diferentes:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x}; \frac{4x+2}{x^5+3x^2-8}$$

Fración algebraica Irreducible

Una fracción algebraica es irreducible si sus términos son polinomios primos entre sí:

$$\frac{x+1}{x-2}; \frac{4x+2}{x^5+9x^2-13}$$

PUEDES RESOLVERLO

"Dos grupos están enfrentados, pero no se dan cancha. Gambetea de escándalo y no hablan. Uno visita un lugar cada 15 días y, el otro, cada 45. ¿Cuándo tendrán la oportunidad de reunirse el mismo día y de resolver sus diferencias?"

Para responder, tenemos que calcular el M.C.M. de 15 y 45:

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

$$\text{M.C.M.}(15, 45) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

Por lo tanto, se volverán a ver en 45 días.

PUEDES RESOLVERLO:

Pónganse en esta situación: están en clase de Educación Física y la profesora les dice a los paralelos A y B que tienen que hacer grupos para una competencia divertida. Cada grupo debe estar formado por el mismo número de personas para evitar que un grupo tenga más ventaja que otro. Además, no se pueden mezclar estudiantes de los dos paralelos. Sabiendo que en el paralelo A son 18 estudiantes y en el paralelo B, 12, ¿cuántos estudiantes tienen que estar en cada grupo para que en ninguno haya más personas que en otro?

Para responder, calculamos el M.C.D.:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{M.C.D.}(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por tanto, cada grupo estará conformado por 6 estudiantes

2) Hallar el M. C. M. de M. de $x^3 + 2bx^2$, $x^3y - 4b^2xy$, $x^2y^2 + 4bxy^2 + 4b^2y^2$

- 1 Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$x^3 + 2bx^2 = x^2 \cdot (x + 2b)$$

$$x^3y - 4b^2xy = xy \cdot (x^2 - 4b^2) = xy \cdot (x + 2b)(x - 2b)$$

$$x^2y^2 + 4bxy^2 + 4b^2y^2 = y^2 \cdot (x^2 + 4bx + 4b^2) = y^2 \cdot (x + 2b)^2$$

- 2 Finalmente, el M.C.M. es:

$$\text{M.C.M.} = x^2y^2(x + 2b)^2(x - 2b)$$

3) Hallar el M. C. M. de $m^2 - mn$, $mn + n^2$, $m^2 - n^2$

- 1 Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$m^2 - mn = m \cdot (m - n)$$

$$mn + n^2 = n \cdot (m + n)$$

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

- 2 Finalmente, el M.C.M. es:

$$\text{M.C.M.} = m \cdot n \cdot (m + n)(m - n) = mn(m^2 - n^2)$$

Actividad

Determinamos el M. C. M. de las siguientes expresiones algebraicas:

• $2a^2 + 2ab$; $4a^2 - 4ab$

• $12a^2b^3$; $4a^3b^2 - 8a^2b^3$

• $18a^2x^3y^4$; $6a^2x^2y^4 - 18a^2xy^4$

• $x^2 - x$; $x^3 - x^2$

• $x^3 + 2x^2y$; $x^2 - 4y^2$

• $3a^2x - 9a^2$; $x^2 - 6x + 9$

4. Máximo Común Divisor

El máximo común divisor (M. C. D.) de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que está contenida exactamente en cada una de ellas.

a) M. C. D. de monomios

Se halla el M. C. D. de los coeficientes y a continuación de éste se escriben las letras comunes, dando a cada letra el menor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplo

Hallar el M. C. D. de

- 1 Calculamos el M.C.D. de los coeficientes:

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	3
3	4	5	

el M. C. D. $(36, 48, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

- 2 Se toman los factores literales comunes con el menor exponente:

$$\text{el M. C. D.} = a^2 b^3$$

- 3 Finalmente, el M.C.D. es:

$$\text{M.C.D.} = 12a^2 b^3$$

¿POR QUÉ EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR CONSISTE EN BUSCAR EL MÁXIMO Y NO EL MÍNIMO?

El término “mínimo común múltiplo” (m.c.m.) puede resultar un poco confuso debido a la palabra “mínimo”, ya que podría dar la impresión de que se trata de encontrar el número más pequeño que sea múltiplo común de dos o más números. Sin embargo, en realidad, el m.c.m. se define como el número más pequeño que es un múltiplo común de dos o más números enteros.

La razón por la que se busca el número más pequeño en lugar del más grande es que el m.c.m. se utiliza en muchas aplicaciones prácticas, como aritmética, fracciones y álgebra, donde es útil encontrar un múltiplo común para realizar operaciones y simplificar problemas.

Cuando se busca el mínimo común múltiplo de dos números, se busca un número que sea un múltiplo de ambos números y que sea lo más pequeño posible. Esto garantiza que, al usar el m.c.m. en cálculos o problemas matemáticos, se obtengan resultados más sencillos y se evite trabajar con números innecesariamente grandes. En otras palabras, el m.c.m. se utiliza para simplificar las operaciones matemáticas, y encontrar el número más pequeño que cumple con esa condición es lo más eficiente.

b) M. C. D. de polinomios

Para determinar el M. C. D. de dos o más polinomios, se descomponen los polinomios dados en sus factores primos (factorizar). El M. C. D. es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el M. C. D. de

$$9a^3x^2 + 9x^2, 6a^3x^2 - 12a^2x^2 - 18ax^2, 6a^4x + 21a^3x + 15a^2x$$

- 1 Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes con su menor exponente:

$$9a^3x^2 + 9x^2 = 9x^2(a^3 + 1) = 3^2 \cdot x^2 \cdot (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$6a^3x^2 - 12a^2x^2 - 18ax^2 = 6ax^2(a^2 - 2a - 3) = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot x^2 \cdot (a-3)(a+1)$$

$$6a^4x + 21a^3x + 15a^2x = 3a^2x(2a^2 + 7a + 5) = 3 \cdot a^2 \cdot x \cdot (2a+5)(a+1)$$

- 2 Finalmente, el M.C.D. es: $\text{M.C.D.} = 3x(a+1)$

2) Hallar el M. C. D. de $x^2 - 4$; $x^2 - x - 6$; $x^2 + 4x + 4$

Factorizamos cada polinomio e identificamos los factores comunes con su menor exponente:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \quad \text{Finalmente, el M.C.D. es: } \text{M.C.D.} = (x+2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Actividad

Determinamos el M. C. D. de las siguientes expresiones algebraicas:

- a^2x ; ax^2
- $8am^3n$; $20x^2m^2$
- $2a^2 + 2ab$; $4a^2 - 4ab$
- $6x^3y - 6x^2y$; $9x^3y^2 + 18x^2y^2$
- $x^2 - x$; $x^3 - x^2$
- $a^2 - b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$

RECUERDA

Signos de las fracciones algebraicas

Hay tres signos: el signo de la fracción, el signo del numerador y el signo del denominador.

El signo de la fracción es el "+" o el "-" escrito antes de la línea de fracción, si no se escribe ninguno se sobreentiende que es positivo.

$$-\frac{x}{-y}$$

- Si se cambia el signo del denominador y el signo del numerador, la fracción no se altera.
- Si se cambia el signo del numerador y el signo de la fracción, la fracción no se altera.
- Si se cambia el signo del denominador y el signo de la fracción, la fracción no se altera.

5. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí.

Para simplificar, primero se factoriza el numerador y denominador, luego se divide el numerador y denominador por las expresiones algebraicas iguales.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{x^3 - 25x}{2x^2 - 20x + 50}$

$$\frac{x^3 - 25x}{2x^2 - 20x + 50} = \frac{\overbrace{x(x^2 - 25)}^{\text{Factor común}}}{\underbrace{2(x^2 - 10x + 5)}_{\text{Factorizando el coeficiente}}} = \frac{\overbrace{x(x+5)(x-5)}^{\text{Diferencia de cuadrados}}}{\underbrace{2(x-5)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}} = \frac{x(x+5)}{2(x-5)} \quad \text{Simplificando}$$

2) Simplificar $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9}$

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9} = \frac{\overbrace{(x-1)(x-1)(x+3)}^{\text{Factorizando por Ruffini}}}{\underbrace{(x-1)(x+3)(x^2 - x + 3)}_{\text{Factorizando por Ruffini}}} = \frac{x-1}{x^2 - x + 3} \quad \text{Simplificando}$$

3) Simplificar $\frac{x^2 + xy}{x^2 + xy - 2x - 2y}$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 + xy - 2x - 2y} = \frac{\overbrace{x(x+y)}^{\text{Factor común}}}{\underbrace{(x^2 + xy) - (2x + 2y)}_{\text{Agrupando términos}}} = \frac{x(x+y)}{\underbrace{x(x+y) - 2(x+y)}_{\text{Factor común}}} = \frac{x(x+y)}{\underbrace{(x+y)(x-2)}_{\text{Factor común}}} = \frac{x}{x-2} \quad \text{Simplificando}$$

Simplificamos:

• $\frac{2a^2}{4a^2 - 4ab}$	• $\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3 - 36x^3y^4}$	• $\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a}$	• $\frac{8a^3 + 27}{4a^2 + 12a + 9}$
• $\frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 8a^2 - 10a}$	• $\frac{2xy - 2x + 3 - 3y}{18a^3 + 15x^2 - 63x}$	• $\frac{(a^2 - 1)(a^2 + 2a - 3)}{(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 4a + 3)}$	

6. Operaciones básicas con fracciones algebraicas

a) Suma y resta

Para sumar o restar fracciones se procede de esta forma:

- 1 Se halla el denominador común (M.C.M.).
- 2 Dicho denominador se divide por el denominador de la primera fracción.
- 3 El resultado de la división se multiplica por el numerador de la fracción y así sucesivamente.
- 4 Si es posible, se simplifica la fracción resultante.

Ejemplos

1) Sumar $\frac{1}{5x^2} + \frac{5}{10x^3}$

1 $5x^2 = 5 \cdot x^2$
 $10x^3 = 2 \cdot 5 \cdot x^3$
 M.C.M. = $2 \cdot 5 \cdot x^3 = 10x^3$

2 $\frac{1}{5x^2} + \frac{5}{10x^3} = \frac{1 \cdot 2x + 5 \cdot 1}{10x^3} = \frac{2x + 5}{10x^3}$

2) Sumar $\frac{m+2}{1-m^2} + \frac{1}{m+m^2} + \frac{-1}{1-m}$

$1-m^2 = (1+m)(1-m)$
 $m+m^2 = m(1+m)$
 $1-m = 1-m$
 M.C.M. = $m(1+m)(1-m)$

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{1-m^2} + \frac{1}{m+m^2} + \frac{-1}{1-m} &= \frac{m \cdot (m+2) + (1-m) \cdot 1 + m(1+m) \cdot (-1)}{m(1+m)(1-m)} \\ &= \frac{\cancel{m^2} + 2\cancel{m} + 1 - \cancel{m} - \cancel{m^2} - \cancel{m} - \cancel{m^2}}{m(1+m)(1-m)} \\ &= \frac{1}{m(1-m^2)} \end{aligned}$$

2) Restar $\frac{5}{9a^2 - z^2} - \frac{z-a}{6a^2z + 2az^2}$

$9a^2 - z^2 = (3a+z)(3a-z)$
 $6a^2z + 2az^2 = 2az(3a+z)$
 M.C.M. = $2az(3a+z)(3a-z)$

$$\begin{aligned} \frac{5}{9a^2 - z^2} - \frac{z-a}{6a^2z + 2az^2} &= \frac{2az \cdot 5 - (3a-z) \cdot (z-a)}{2az(3a+z)(3a-z)} \\ &= \frac{10az - (3az - 3a^2 - z^2 + az)}{2az(3a+z)(3a-z)} \\ &= \frac{10az - 3az + 3a^2 + z^2 - az}{2az(3a+z)(3a-z)} \\ &= \frac{6az + 3a^2 + z^2}{2az(9a^2 - z^2)} \end{aligned}$$

MÉTODO DE LA MARIPOSA

El Método de la Mariposa se trata de un recurso visual para realizar operaciones de suma y resta de fracciones. Con este método se emplea la multiplicación diagonal y horizontal de los denominadores y los numeradores, así como las multiplicaciones de los denominadores para calcular la suma o resta de una manera visual fácil.

$$\begin{array}{c} 8 \quad 15 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \frac{8+15}{6} = \frac{23}{6}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \frac{30-14}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

INTERESANTE

En el siglo VI después de Cristo fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones en el siglo IV después de Cristo. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes, y después lo hizo Bramagupta, en el siglo VII.

Las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones fueron obra de Mahavira (en el siglo IX) y Bháskara (en el siglo XII).



4) Restar $\frac{2}{x+x^2} - \frac{1}{x-x^2} - \frac{1-3x}{x-x^3}$

$$x+x^2 = x \cdot (1+x)$$

$$x-x^2 = x \cdot (1-x)$$

$$x-x^3 = x \cdot (1-x^2) = x \cdot (1+x)(1-x)$$

$$\text{M.C.M.} = x(1+x)(1-x)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+x^2} - \frac{1}{x-x^2} - \frac{1-3x}{x-x^3} &= \frac{2 \cdot (1-x) - 1 \cdot (1+x) - (1-3x)}{x(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{1} - \cancel{2}x - \cancel{1} \cdot \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{3}x}{x(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{0}{x(1+x)(1-x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Actividad

Simplificamos:

$$\bullet \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$$

$$\bullet \frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y}$$

$$\bullet \frac{x-1}{4x-4} - \frac{x+2}{8x-8}$$

$$\bullet \frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$$

$$\bullet \frac{b}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2+ab}$$

$$\bullet \frac{x}{a^2-ax} + \frac{a+x}{ax} + \frac{a}{ax-x^2}$$

$$\bullet \frac{x+1}{10} + \frac{x-3}{5x-10} + \frac{x-2}{2}$$

INTERPRETACIÓN

La interpretación de la multiplicación de fracciones algebraicas puede variar según el contexto y la situación específica, pero en general, puedes pensar en la multiplicación de fracciones algebraicas de la siguiente manera:

La multiplicación de fracciones algebraicas se puede ver como la combinación de dos proporciones o relaciones entre cantidades. Cada fracción algebraica representa una relación entre variables o expresiones algebraicas, y al multiplicarlas, estás combinando estas relaciones para obtener una nueva relación.

b) Multiplicación

El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador y denominador son, respectivamente, el producto de los numeradores y el producto de los denominadores de las fracciones dadas:

- 1 Se descomponen en factores las expresiones algebraicas en el numerador y denominador.
- 2 Se simplifican los factores comunes en el numerador y denominador.
- 3 Se multiplican los factores restantes.

Ejemplos

1) Multiplicar $\frac{2a}{3b^3}, \frac{3b^2}{4x}, \frac{x^2}{2a^2}$

$$\frac{2a}{3b^3} \cdot \frac{3b^2}{4x} \cdot \frac{x^2}{2a^2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{b^2} \cdot x^2}{\cancel{3} \cdot \cancel{b^2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot a^2} = \frac{x}{4ab}$$

2) Multiplicar $\frac{2xp - bx^2}{(a+x)^2} \cdot \frac{xa + x^2}{2p - bx}$

$$\frac{2xp - bx^2}{(a+x)^2} \cdot \frac{xa + x^2}{2p - bx} = \frac{\overset{1}{x} \cancel{(2p - bx)}}{(a+x)^2} \cdot \frac{\overset{2}{x} \cancel{(a+x)}}{\cancel{2p - bx}} = \frac{x^2}{(a+x)^2} \quad \text{3}$$

3) Multiplicar $\frac{5x^2}{7y^3} \cdot \frac{4y^2}{7m^3} \cdot \frac{14m}{5x^4}$

$$\frac{5x^2}{7y^3} \cdot \frac{4y^2}{7m^3} \cdot \frac{14m}{5x^4} = \frac{\cancel{5} \cancel{x^2} \cdot 4 \cancel{y^2} \cdot \overset{2}{\cancel{14}} \cancel{m}}{\cancel{7} y^{\cancel{3}} \cdot \cancel{7} m^{\cancel{3}} \cdot \cancel{5} x^{\cancel{4}}} = \frac{8}{7m^2 x^2 y}$$

4) Multiplicar $\frac{a^2 - 6a + 9}{3} \cdot \frac{6}{a^3 - 27} \cdot \frac{1}{2a - 6}$

$$\frac{a^2 - 6a + 9}{3} \cdot \frac{6}{a^3 - 27} \cdot \frac{1}{2a - 6} = \frac{\cancel{(a-3)^2} \cdot \cancel{6} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{(a-3)} \cdot (a^2 + 3a + 9) \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(a-3)}} = \frac{1}{a^2 + 3a + 9}$$

4) Multiplicar $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x} \cdot \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15}$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x} \cdot \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x-4) \cancel{(x+3)}}{x \cancel{(x-5)}} \cdot \frac{\cancel{(x+5)} \cancel{(x-5)}}{\cancel{(x+5)} \cancel{(x+3)}} = \frac{x-4}{x}$$

RAZONES Y PROPORCIONES

Las razones o proporciones están estrechamente relacionadas con las fracciones algebraicas.

Definición de Razón o Proporción

Una razón o proporción es simplemente una comparación de dos cantidades, números o expresiones. Por ejemplo, si tienes dos cantidades "a" y "b", la razón entre "a" y "b" se expresa como a/b. Esta expresión indica cuántas veces es mayor o menor "a" en relación con "b".

Fracciones Algebraicas como Razones o Proporciones

Las fracciones algebraicas son una forma específica de expresar razones o proporciones cuando las cantidades que se están comparando son expresiones algebraicas. Por ejemplo, si tienes dos expresiones algebraicas P(x) y Q(x), una fracción algebraica sería P(x)/Q(x). Esta fracción representa la razón o proporción de P(x) en relación con Q(x) en función de la variable x.

En resumen, las razones o proporciones y las fracciones algebraicas están relacionadas en la medida en que ambas implican la comparación de cantidades o expresiones, de una forma más generalizada.

Multiplicamos las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2 + x}{6} \cdot \frac{8}{4x + 2}$

c) $\frac{m+n}{mn-n^2} \cdot \frac{n^2}{m^2-n^2}$

e) $\frac{2x^2 + 2x}{2x^2} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$

g) $\frac{2a-2}{2a^2-50} \cdot \frac{a^2-4a-5}{3a+3}$

b) $\frac{7a}{6m^2} \cdot \frac{3m}{10n^2} \cdot \frac{5n^4}{14ax}$

d) $\frac{2a-2}{2a^2-50} \cdot \frac{a^2-4a-5}{3a+3}$

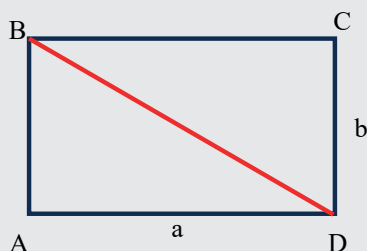
f) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 16} \cdot \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + x^2} \cdot \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$

FRACCIONES Y GEOMETRÍA

Las fracciones algebraicas pueden estar relacionadas con el cálculo de áreas en geometría cuando se trabaja con figuras geométricas y problemas que involucran divisiones de áreas.

División de áreas con fracciones algebraicas

Cuando se trata de dividir una figura geométrica en partes desiguales o calcular la proporción de áreas, es posible que las fracciones algebraicas entren en juego. Por ejemplo, considera un rectángulo que se divide en dos partes desiguales mediante una línea diagonal. Si quieres calcular el área de una de las partes en relación con el área total del rectángulo, puedes utilizar una fracción algebraica. Supongamos que la longitud de la diagonal es "d" y las longitudes de los lados del rectángulo son "a" y "b". Entonces, el área de una de las partes divididas podría expresarse como $\frac{1}{2}ab$, que es una fracción algebraica.



$$A_{ABD} = \frac{1}{2}ab$$

c) División

El cociente de dos fracciones algebraicas puede obtenerse convirtiendo la división en una multiplicación, multiplicando el dividendo por el divisor invertido.

Ejemplos

1) Dividir $\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3}$

$$\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3} = \frac{4a^2}{3b^2} \cdot \frac{9b^3}{2ax} = \frac{\cancel{4}^2 a^{\cancel{2}} \cdot \cancel{9}^3 b^{\cancel{3}}}{\cancel{3} b^{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} ax} = \frac{6ab}{x}$$

2) Dividir $\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3$

$$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \frac{3a^2b}{5x^2} \cdot \frac{1}{a^2b^3} = \frac{\cancel{3} a^{\cancel{2}} b}{5x^2 \cdot \cancel{a}^2 \cancel{b}^3} = \frac{3}{5b^2x^2}$$

3) Dividir $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \div \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \div \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} &= \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \\ &= \frac{(a^3 - b^3) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)}{(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + ab + b^2)} \\ &= \frac{(\cancel{a} - \cancel{b}) (\cancel{a^2} + \cancel{ab} + \cancel{b^2}) \cdot (a + b)^2}{(\cancel{a} + \cancel{b}) (\cancel{a} - \cancel{b}) \cdot (\cancel{a^2} + \cancel{ab} + \cancel{b^2})} \\ &= a + b \end{aligned}$$

Dividimos las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3a^2}{a^2 + 6ab + 9b^2} \div \frac{5a^3}{a^2b + 3ab^2}$

c) $\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$

e) $\frac{1}{a^2 - a - 30} \div \frac{2}{a^2 + a - 42}$

b) $\frac{20x^2 - 30x}{15x^3 + 15x^2} \div \frac{4x - 6}{x + 1}$

d) $\frac{ax^2 + 5}{4a^2 - 1} \div \frac{a^3x^2 + 5a^2}{2a - 1}$

f) $\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \div \frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24}$

d) Fracciones complejas

Fracción compleja es una fracción en la cual el numerador o el denominador, o ambos, son fracciones algebraicas o expresiones mixtas.

Para simplificar fracciones complejas sigue estos pasos:

- 1 Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y denominador de la fracción compleja.
- 2 Se divide el resultado que se obtenga en el numerador entre el resultado que se obtenga en el denominador.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{a}{x}}$

$$\frac{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{a}{x}} = \frac{\frac{a^2 - x^2}{ax}}{\frac{x+a}{x}} = \frac{(a^2 - x^2) \cdot x}{ax \cdot (x+a)} = \frac{\cancel{(a+x)}(a-x) \cdot \cancel{x}}{a \cancel{x} \cdot (x+a)} = \frac{a-x}{a}$$

2) Simplificar $\frac{x-1-\frac{12}{x-2}}{x+6+\frac{16}{x-2}}$

$$\begin{aligned} \frac{x-1-\frac{12}{x-2}}{x+6+\frac{16}{x-2}} &= \frac{(x-1) \cdot (x-2) - 12 \cdot 1}{(x+6)(x-2) + 16 \cdot 1} = \frac{x^2 - 3x + 2 - 12}{x^2 + 4x - 12 + 16} = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 4x + 4} \\ &= \frac{(x^2 - 3x - 10) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 4x + 4)} = \frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-5}{x+2} \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN:

Fracción $\frac{0}{a}$

La fracción $0/a$ que representa una fracción cuyo numerador es cero y cuyo denominador "a" es una cantidad finita cualquiera, se interpreta así:

$$\frac{0}{a} = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

Fracción $\frac{a}{0}$

Sea la fracción a/x donde "a" es una cantidad constante y "x" es una variable. Cuanto menor sea x, mayor es el valor de la fracción. A medida que el denominador "x" se aproxima al límite 0 el valor de la fracción aumenta indefinidamente. Este principio se expresa de este modo:

$$\frac{a}{0} = \infty$$

Fracción $\frac{a}{\infty}$

Consideremos la fracción a/x donde "a" es constante y "x" una variable. Cuanto mayor sea "x", menor será el valor de la fracción. A medida que el denominador aumenta indefinidamente, el valor de la fracción disminuye indefinidamente, acercándose al límite 0, pero sin llegar a valer 0. Este principio se expresa como:

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

Actividad

Simplificamos las siguientes fracciones:

a) $\frac{a - \frac{a}{b}}{b - \frac{1}{b}}$

b) $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

c) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}$

d) $\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$

e) $\frac{x+4+\frac{3}{x}}{x-4-\frac{5}{x}}$

f) $\frac{\frac{2a^2 - b^2}{4a^2 + b^2} - b}{4ab + 1}$

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y GEOMETRÍA I

Imagina que tienes un jardín rectangular y deseas calcular el área total de dos áreas separadas en el jardín: un césped rectangular y una piscina circular.

El área del césped rectangular se puede representar como una fracción

algebraica: $\frac{3x}{2x+1} m^2$

El área de la piscina circular se puede representar como otra fracción

algebraica: $\frac{2x^2}{x^2+1} m^2$

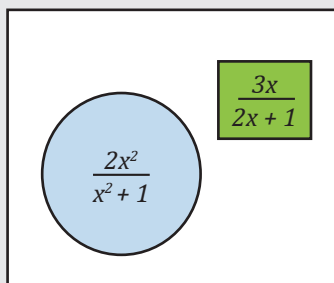
Ahora, deseas calcular el área total del jardín, que es la suma del área del césped y el área de la piscina, menos una pequeña zona rectangular (que es la resta de un área rectangular más grande y el área de la piscina).

El área la zona rectangular se representa como $\frac{2x}{x+1} m^2$

Entonces, el área total del jardín se puede expresar como la siguiente fracción algebraica:

$$\text{Área total} = \left(\frac{3x}{2x+1} + \frac{2x^2}{x^2+1} \right) - \frac{2x}{x+1}$$

Para calcular el área total del jardín, puedes evaluar esta expresión para diferentes valores de "x" y obtener el área total en función de la longitud del jardín.



7. Operaciones combinadas

a) Suma y resta, combinadas

La suma y resta combinadas de fracciones algebraicas sigue una serie de pasos similares a la regla básica de suma y resta de fracciones.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{1}{a^2-ab} + \frac{1}{ab} - \frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$

$$a^2-ab = a(a-b)$$

$$ab = ab$$

$$a^3b-ab^3 = ab(a^2-b^2) = ab(a+b)(a-b)$$

$$\text{M.C.M.} = ab(a+b)(a-b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2-ab} + \frac{1}{ab} - \frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3} &= \frac{b(a+b) + (a+b)(a-b) - (a^2+b^2)}{ab(a+b)(a-b)} && \text{Sumando fracciones} \\ &= \frac{ab + \cancel{b^2} + \cancel{a^2} - \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - b^2}{ab(a+b)(a-b)} && \text{Multiplicando, luego reduciendo términos semejantes.} \\ &= \frac{ab - b^2}{ab(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{b(a-b)}{ab(a+b)(a-b)} && \text{Factorizando.} \\ &= \frac{1}{a(a+b)} && \text{Simplificando.} \end{aligned}$$

2) Simplificar $\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+3x-4} + \frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

$$x^2-x = x(x-1)$$

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$$

$$x^4+3x^3-4x^2 = x^2(x^2+3x-4) = x^2(x+4)(x-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+3x-4} + \frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2} &= \frac{x(x+4)(x-2) - x^2(x+3) + x^2+12x+16}{x^2(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{\cancel{x^3} + \cancel{4x^2} - 8x - \cancel{3x^2} - \cancel{3x} + 12x + 16}{x^2(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{4x+16}{x^2(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{4(x+4)}{x^2(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{4}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

3) Simplificar $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{x+5}{1-x^2}$

$$x+1 = x+1$$

$$x-1 = x-1$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$\text{M.C.M.} = (x+1)(x-1)$$

$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{x+5}{1-x^2}$ Cambiamos de signo a la última fracción.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} + \frac{x+5}{x^2-1} &= \frac{2(x-1) + 3(x+1) + x+5}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{2x-2+3x+3+x+5}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{6x+6}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{6(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{6}{x-1} \end{aligned}$$

4) Simplificar $\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2-x} - \frac{2x}{(3-x)(1-x)}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$x+2 = x+2$$

$$(x-3)(x-1) = (x-3)(x-1)$$

$$\text{M.C.M.} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2-x} - \frac{2x}{(3-x)(1-x)}$ Cambiamos de signo al 2º y 3º término.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{(x-3)(x-1)} &= \frac{x(x-1) + (x-1)(x-3) - 2x(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{\cancel{x^2} - x + \cancel{x^2} - 4x + 3 - 2x^2 + 4x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{x-3}{(1-x)(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{1}{(1-x)(x-2)} \end{aligned}$$

CONSEJOS ÚTILES

Aquí tienes algunos consejos para realizar estas operaciones con éxito:

Encuentra un común denominador: Antes de sumar o restar fracciones algebraicas, asegúrate de que todas las fracciones tengan el mismo denominador.

Factoriza y simplifica: Factoriza los polinomios en los numeradores y denominadores y simplifica cuando sea posible. Esto puede reducir la complejidad de las fracciones antes de realizar las operaciones.

Usa paréntesis: Para evitar errores, coloca paréntesis alrededor de cada fracción antes de sumar o restar.

Ten cuidado con los signos: Presta mucha atención a los signos de las fracciones. Es fácil cometer errores al aplicar signos negativos o positivos, así que asegúrate de aplicar los signos correctamente en cada término de la expresión.

Factoriza el resultado final: Después de realizar las operaciones de suma y resta, factoriza el resultado final y simplifica si es posible. Esto puede ayudarte a expresar la fracción de la manera más simple posible.

Operamos:

a) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6}$

c) $\frac{a}{3a+6} - \frac{1}{6a+12} + \frac{a+12}{12a+24}$

e) $\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}$

b) $\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{ab} - \frac{a}{ab+b^2}$

d) $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{4x^2}{x^2-y^2}$

f) $\frac{x+1}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-4x-5} + \frac{x+5}{x^2+5x+4}$

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y GEOMETRÍA II

Imagina que tienes un terreno rectangular con un lago circular en medio, y deseas calcular el área de terreno disponible. El área del terreno rectangular es:

$$\frac{4x^2 + 3x}{2x} \text{ m}^2, \text{ y el área del lago circular es:}$$

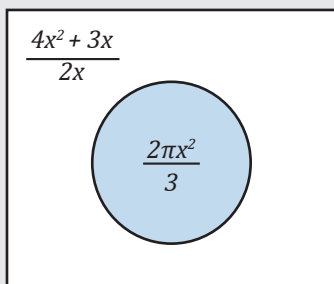
$$\frac{2\pi x^2}{3} \text{ m}^2.$$

Quieres encontrar el área de la sección rectangular que queda después de restar el área del lago al área del terreno original.

Para hacerlo, puedes usar la siguiente expresión de fracción algebraica:

$$A = \frac{4x^2 + 3x}{2x} - \frac{2\pi x^2}{3}$$

Esta expresión representa el área disponible del terreno después de restar el área del lago circular. Puedes evaluarla para diferentes valores de "x" para obtener el área en función de la longitud del terreno.



b) Multiplicación y división combinadas

Para simplificar operaciones en las que combinen multiplicaciones y divisiones se procederá a convertir los divisores en factores, invirtiéndolos, y procediendo según la regla de multiplicación.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} \div \frac{a^2-16}{2a^2-2a}$

$$\begin{aligned} \frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} \div \frac{a^2-16}{2a^2-2a} &= \frac{a-3}{4a-4} \cdot \frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9} \cdot \frac{2a^2-2a}{a^2-16} \\ &= \frac{a-3}{4(a-1)} \cdot \frac{(a+5)(a+4)}{(a-3)^2} \cdot \frac{2a(a-1)}{(a+4)(a-4)} \\ &= \frac{a(a+5)}{2(a-3)(a-4)} \\ &= \frac{a^2+5a}{2a^2-14a+24} \end{aligned}$$

2) Simplificar $\frac{64a^2-81b^2}{x^2-81} \cdot \frac{(x-9)^2}{8a-9b} \div \frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{64a^2-81b^2}{x^2-81} \cdot \frac{(x-9)^2}{8a-9b} \div \frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2} &= \frac{64a^2-81b^2}{x^2-81} \cdot \frac{(x-9)^2}{8a-9b} \cdot \frac{(x+9)^2}{8a^2+9ab} \\ &= \frac{(8a+9b)(8a-9b)}{(x+9)(x-9)} \cdot \frac{(x-9)^2}{8a-9b} \cdot \frac{(x+9)^2}{a(8a+9b)} \\ &= \frac{(x-9)(x+9)}{a} \\ &= \frac{x^2-81}{a} \end{aligned}$$

3) Simplificar $\frac{5a}{b} \div \left(\frac{2a}{b^2} \cdot \frac{5x}{4a^2} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{5a}{b} \div \left(\frac{2a}{b^2} \cdot \frac{5x}{4a^2} \right) &= \frac{5a}{b} \div \left(\frac{\cancel{2}^1 \cancel{a}^1}{b^2} \cdot \frac{5x}{\cancel{4}^2 \cancel{a}^2} \right) \\ &= \frac{5a}{b} \div \left(\frac{5x}{2ab^2} \right) \\ &= \frac{\cancel{5}^1 a}{\cancel{b}^1} \cdot \frac{2ab^2}{\cancel{5}^1 x} \\ &= \frac{2a^2b}{x} \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$a) \frac{3x}{4y} \cdot \frac{8y}{9x} \div \frac{z^2}{3x^2}$$

$$c) \frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{3a-3}{2a+2} \div \frac{a^2+a}{a^2+a-2}$$

$$d) \frac{x^2-x-12}{x^2-49} \cdot \frac{x^2-x-56}{x^2+x-20} \div \frac{x^2-5x-24}{x+5}$$

$$b) \frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30} \cdot \frac{a^2-36}{a^2-1} \div \frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$$

$$e) \frac{(a+b)^2-c^2}{(a-b)^2-c^2} \cdot \frac{(a+c)^2-b^2}{a^2+ab-ac} \div \frac{a+b+c}{a^2}$$

c) Descomposición de una fracción en fracciones simples

La descomposición de una fracción en fracciones simples es un proceso matemático que consiste en expresar una fracción como la suma de varias fracciones más simples, llamadas fracciones simples o fracciones parciales. Este proceso es útil en diversas áreas de las matemáticas, como el cálculo y el álgebra, así como en la resolución de ecuaciones racionales.

Ejemplo

Dada la fracción $\frac{3}{(x+1)(x-2)}$, descomponerla en fracciones simples

Como el denominador tiene dos factores, descomponemos en dos fracciones. Cada término es lineal, por lo que cada una de las nuevas fracciones tendrá un numerador constante. Usaremos A y B como los numeradores por ahora:

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $(x+1)(x-2)$:

$$\frac{3}{\cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)}} \cdot \cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)} = \frac{A}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)} + \frac{B}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)}$$

$$3 = A(x-2) + B(x+1)$$

Para determinar los valores de A y B, buscaremos un valor de x para que A sea 0 y B sea también sea 0. Como A esta multiplicado por x-2, usaremos x=2 y como B esta multiplicado por x+1, usaremos x=-1.

$$\forall x=2$$

$$3 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$3 = A(2-2) + B(2+1)$$

$$3 = 3B$$

$$1 = B$$

$$\forall x=-1$$

$$3 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$3 = A(-1-2) + B(-1+1)$$

$$3 = A(-3)$$

$$-1 = A$$

Ahora que tenemos los valores de A y B, podemos completar la descomposición:

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

IMPORTANTE

La descomposición de una fracción en fracciones simples se utiliza en varios contextos matemáticos y científicos para resolver problemas que involucran fracciones algebraicas. Aquí hay algunas áreas y situaciones donde se aplica esta técnica:

1. Cálculo Integral.
2. Teoría de Control.
3. Resolución de Ecuaciones Diferenciales.
4. Análisis de Circuitos Eléctricos.
5. Teoría de Probabilidad.
6. Finanzas.
7. Química.
8. Economía.

Estos son solo algunos ejemplos de dónde se utiliza la descomposición de fracciones en fracciones simples en diversos campos. Es una herramienta matemática esencial para resolver problemas en los que se manejan fracciones algebraicas y transformaciones de Laplace.

OTRO MODO

Retomando el ejemplo, cuando

$$3 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$\rightarrow 0x + 3 = (A+B)x + (-2A+B)$$

Igualando, se obtiene el Sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B=3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

d) Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

La aplicación de las fracciones algebraicas es variada, a continuación, se muestran algunos ejemplos.

PARA PENSAR:

Si: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = ?$$

Resolución:

Partimos de la siguiente expresión:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

Luego, reordenamos los términos tomando en cuenta el denominador común:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Realizamos las sumas parciales:

$$S = \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c}$$

Sumamos la unidad a cada término expresada como fracción:

$$S+3 = \frac{a+c}{b} + \frac{b}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a}{a} + \frac{a+b}{c} + \frac{c}{c}$$

Realizamos las sumas parciales:

$$S+3 = \frac{a+c+b}{b} + \frac{b+c+a}{a} + \frac{a+b+c}{c}$$

Factorizamos el numerador del segundo miembro:

$$S+3 = (a+c+b) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$$

Sabiendo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

reemplazamos y resolvemos:

$$S+3 = (a+c+b)(0)$$

$$S+3 = 0$$

$$S = -3$$

Finalmente, respondemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3$$

Ejemplos

1) Supongamos que se tiene $\frac{3}{x}$ de una caja de galletas y queremos repartirla entre 4 amigos. ¿Cuántas galletas recibirá cada amigo?

Para repartir las galletas igualmente entre los 4 amigos, simplemente se divide la cantidad total de galletas $\frac{3}{x}$ entre el número de amigos:

$$\frac{3}{x} \div 4 = \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4x}$$

R.- Cada amigo recibirá $\frac{3}{4x}$ galletas.

2) Un tanque de agua se llena a una velocidad de $\frac{5}{2x}$ litros por minuto, y otro tanque se llena a una velocidad de $\frac{3}{2}$ litros por minuto. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar ambos tanques juntos?

Para encontrar el tiempo que tomará llenar ambos tanques juntos, sumamos las tasas de llenado de ambos tanques:

$$\text{Tasa de llenado total: } \frac{5}{2x} + \frac{3}{x} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{2x} = \frac{5+6}{2x} = \frac{11}{2x}$$

Luego, para encontrar el tiempo, tomamos el recíproco de la tasa de llenado total:

$$\text{Tiempo de llenado: } \frac{1}{\frac{11}{2x}} = \frac{2x}{11}$$

R.- Se tardará $\frac{2x}{11}$ minutos llenar ambos tanques de agua juntos.

3) Para hacer un color de pintura específico, se mezcla $\frac{x}{3}$ litros de pintura azul, y $\frac{2x}{5}$ litros de pintura roja. ¿Cuál es la fracción resultante de pintura violeta?

La fracción resultante de pintura violeta es la suma de las fracciones de pintura azul y roja:

$$\text{Fracción de pintura violeta: } \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{x \cdot 5 + 2x \cdot 3}{15} = \frac{5x+6x}{15} = \frac{11x}{15}$$

R.- La fracción resultante de pintura violeta es $\frac{11x}{15}$

Actividad

Respondemos:

- El área de un rectángulo es $xy+2x+y+2 m^2$ y uno de sus lados mide $x+1 m$. ¿Cuál es la medida del otro lado?
- La velocidad promedio es la razón entre la distancia recorrida y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 6 horas en recorrer una distancia de 300 km. ¿Cuál es la velocidad promedio?



El estudio de las fracciones algebraicas es importante por varias razones:

- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones: Las fracciones algebraicas se utilizan para resolver una amplia variedad de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en álgebra y cálculo. Permiten encontrar soluciones precisas a problemas matemáticos y científicos.
- Modelado de situaciones del mundo real: En muchas aplicaciones del mundo real, las cantidades involucradas dependen de una variable algebraica. Las fracciones algebraicas son útiles para modelar y resolver problemas en campos como la física, la economía, la ingeniería y la biología.

En resumen, el estudio de las fracciones algebraicas es esencial en matemáticas y en muchas aplicaciones prácticas. Proporciona herramientas y habilidades fundamentales para resolver problemas, modelar situaciones del mundo real y avanzar en diversos campos académicos y profesionales.

Actividad

En base a lo aprendido, luego de una reflexión, respondemos:

- ¿En qué situaciones se aplican las fracciones algebraicas?



“Cadena de dominós de fracciones algebraicas”

Materiales:

12 fichas de dominó de cartulina o papel bond.

1 hoja para rellenar los resultados.

Tijeras, pegamento, etc.

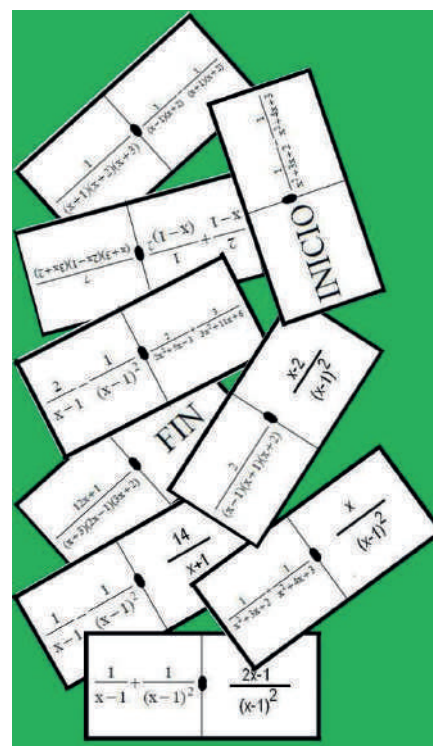
Instrucciones:

Con las 12 fichas del juego, se debe formar una cadena que relacionen unas operaciones entre fracciones algebraicas y el resultado de esas operaciones. Para ello, escribe fracciones algebraicas en las fichas de dominó.

Efectúa las operaciones entre fracciones planteadas y rellena

una tabla con tus resultados. Comprueba con algún compañero que tus resultados son correctos.

Después de recortar las fichas, se debe hacer una cadena con todas las fichas, utilizando sus resultados de la tabla rellena, empezando con INICIO y acabando con FINAL.



REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)

Determinar el M.C.M. de las siguientes expresiones algébricas:

- 1) $3x+3$; $6x-6$
- 2) $5x+10$; $10x^2-40$
- 3) x^3+2x^2y ; x^2-4y^2
- 4) $3a^2x-9a^2$; x^2-6x+9
- 5) $4a^2-9b^2$; $4a^2-12ab+9b^2$
- 6) a^3+a^2b ; $a^3+2a^2b+ab^2$
- 7) $3ax+12a$; $2bx^2+6bx-8b$
- 8) x^3-25x ; $x^2+2x-15$
- 9) $(x-1)^2$; x^2-1
- 10) $(x+1)^2$; x^2+1
- 11) x^3+y^3 ; $(x+y)^3$
- 12) x^3-y^3 ; $(x-y)^3$
- 13) $x^2+3x-10$; $4x^2-7x-2$
- 14) a^2+a-30 ; $a^2+3a-18$
- 15) $x^3-9x+5x^2-45$; $x^4+2x^3-15x^2$
- 16) x^6-4x^3-32 ; $ax^4+2ax^3+4ax^2$
- 17) $8(x-y)^2$; $12(x^2-y^2)$
- 18) $5(x+y)^2$; $10(x^2+y^2)$
- 19) $6a(m+n)^3$; $4a^2b(m^3+n^3)$
- 20) $ax(m-n)^3$; $x^3(m^3-n^3)$
- 21) $2a^2+2a$; $3a^2-4a$; a^4-a^2
- 22) x^2+2x ; x^3-2x^2 ; x^2-4
- 23) x^2+x-2 ; x^2-4x+3 ; x^2-x-6
- 24) $6a^2+13a+6$; $3a^2+14a+8$; $4+12a+9a^2$

Máximo Común Divisor (M.C.D.)

Determinar el M.C.D. de las siguientes expresiones algébricas:

- 1) $3a^2+3ab$; $5a^2-5ab$
- 2) $6x^3y-6x^2y$; $9x^3y^2+18x^2y^2$
- 3) $4x^3y^2-8x^2y^3$; $12x^2y^3$
- 4) $ab+b$; a^2+a
- 5) a^2-a ; $3a^3-3a^2$
- 6) $30ax^2-15x^3$; $10axy^2-20x^2y^2$
- 7) $9ax^3y^4$; $3a^2x^2y^4-9a^2x^2y^4$
- 8) $5a^2-15a$; a^3-3a^2
- 9) $3x^3+15x^2$; ax^2+5ax
- 10) a^2-b^2 ; $a^2-2ab+b^2$
- 11) m^3+n^3 ; $3am+3an$
- 12) x^2-4 ; x^3-8
- 13) $2ax^2+4ax$; x^3-x^2-6x
- 14) $9x^2-1$; $9x^2-6x+1$
- 15) $4a^2+4ab+b^2$; $2a^2-2ab+ab-b^2$
- 16) $3x^2+3x-60$; $6x^2-18x-24$
- 17) $8x^3+y^3$; $4ax^2-ay^2$
- 18) $2a^3-12a^2b+18ab^2$; a^3x-9ab^2x
- 19) $ac+ad-2bc-2bd$; $2c^2+4cd+2d^2$
- 20) $3a^2m^2+6a^2m-45a^2$; $6am^2x+24amx-30ax$
- 21) $4x^4-y^2$; $(2x^2-y)^2$
- 22) $3x^5-3x$; $9x^3-9x$
- 23) a^2+ab ; $ab+b^2$; a^3+a^2b
- 24) $2x^3-2x^2$; $3x^2-3x$; $4x^3-4x^2$

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

- 1) $\frac{3ab}{2a^2x + 2a^3}$
- 2) $\frac{xy}{3x^2y - 3xy^2}$
- 3) $\frac{2ax + 4bx}{3ay + 6by}$
- 4) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
- 5) $\frac{10a^2b^3c}{80(a^3 - a^2b)}$
- 6) $\frac{x^2 - 4}{5ax + 10a}$
- 7) $\frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6}$
- 8) $\frac{15a^2bn - 45a^2bm}{10a^2b^2n - 30a^2b^2m}$
- 9) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$
- 10) $\frac{3x^2y + 15xy}{x^2 - 25}$
- 11) $\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3}$
- 12) $\frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$
- 13) $\frac{6x^2 + 5x - 6}{15x^2 - 7x - 2}$
- 14) $\frac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1}$
- 15) $\frac{2ax + ay - 4bx - 2by}{ax - 4a - 2bx + 8b}$

Operaciones básicas con fracciones algebraicas

Sumar:

- 1) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$
- 2) $\frac{2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$
- 3) $\frac{3}{1+x} + \frac{6}{2x+5}$
- 4) $\frac{m}{m-n} + \frac{m}{m+n}$
- 5) $\frac{m+3}{m-3} + \frac{m+2}{m-2}$
- 6) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$
- 7) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x+1}{(x-1)^2}$
- 8) $\frac{2}{x-5} + \frac{3x}{x^2-25}$
- 9) $\frac{1}{3x-2y} + \frac{x-y}{9x^2-4y^2}$
- 10) $\frac{x+a}{x+3a} + \frac{3a^2-x^2}{x^2-9a^2}$
- 11) $\frac{m}{a^2-am} + \frac{a}{am-m^2} + \frac{a+m}{am}$
- 12) $\frac{3}{2x+4} + \frac{x-1}{2x-4} + \frac{x+8}{x^2-4}$
- 13) $\frac{1}{x+x^2} + \frac{1}{x-x^2} + \frac{x+3}{1-x^2}$
- 14) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + \frac{4xy}{x^2-y^2}$
- 15) $\frac{1}{a-5} + \frac{a}{a^2-4a-5} + \frac{a+5}{a^2+2a+1}$

Restar:

- 1) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}$
- 2) $\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}$
- 3) $\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}$
- 4) $\frac{a+b}{a^2+ab} - \frac{b-a}{ab+b^2}$
- 5) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} - \frac{m+n}{m-n}$
- 6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2}$
- 7) $\frac{1}{a^3-b^3} - \frac{1}{(a-b)^3}$
- 8) $\frac{x+2}{8x-8} - \frac{x-1}{4x+4}$
- 9) $\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{y}$
- 10) $\frac{a-1}{a^2+a} - \frac{1}{2a-2} - \frac{1}{2a+2}$
- 11) $\frac{1}{4a+4} - \frac{1}{8a-8} - \frac{1}{12a^2+12}$
- 12) $\frac{y}{x^2-xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}$
- 13) $\frac{a}{a^2+ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$
- 14) $\frac{1}{x^2-xy} - \frac{1}{x^2+xy} - \frac{2y}{x^3-xy^2}$
- 15) $\frac{2a^2-3}{10a+10} - \frac{a+1}{50} - \frac{9a^2-14}{50a+50}$

Multiplicar:

- 1) $\frac{4y^2}{7a^3} \cdot \frac{21a}{5x^4} \cdot \frac{5x^2}{7y^3}$
- 2) $\frac{5}{a} \cdot \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{3b}{10}$
- 3) $\frac{2x^2+x}{6} \cdot \frac{4}{8x+4}$
- 4) $\frac{5x+25}{14} \cdot \frac{7x+7}{10x+50}$
- 5) $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}$
- 6) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy} \cdot \frac{x^2}{x^2-4y^2}$
- 7) $\frac{a-1}{2a^2-50} \cdot \frac{a^2-4a-5}{6a+6}$
- 8) $\frac{x^3-27}{a^3-1} \cdot \frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$

Dividir:

- 1) $\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4}$
- 2) $\frac{11x^2y^3}{7m^2} \div 22y^4$
- 3) $\frac{5a^3}{a^2b+3ab^2} \div \frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2}$
- 4) $\frac{2x^3-2x}{2x^2+6x} \div \frac{x^2-x}{2x+6}$
- 5) $\frac{1}{x^2-x-30} \div \frac{2}{x^2+x-42}$
- 6) $\frac{4x-6}{x+1} \div \frac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2}$
- 7) $\frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24} \div \frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56}$

Fracciones complejas

Simplificar:

$$1) \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

$$2) \frac{a + 4 + \frac{4}{a}}{1 - \frac{2}{a}}$$

$$3) \frac{2 + \frac{3a}{5b}}{a + \frac{10b}{3}}$$

$$4) \frac{a - x + \frac{x^2}{a+x}}{a^2 - \frac{a^2}{a+x}}$$

$$5) \frac{\frac{20x^2 + 7x - 6}{x}}{\frac{4}{x^2} - 25}$$

Operaciones combinadas

Suma y resta, combinadas

Simplificar:

$$1) \frac{2x+1}{12x+8} - \frac{x^2}{6x^2+x-2} + \frac{2x}{16x-8}$$

$$2) \frac{1}{ax} - \frac{1}{a^2+ax} + \frac{1}{a+x}$$

$$3) \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$4) \frac{a-1}{3a+3} - \frac{a-2}{6a-6} + \frac{a^2+2a-6}{9a^2-9}$$

$$5) \frac{1}{a^2+2a-24} + \frac{2}{a^2-2a-8} - \frac{3}{a^2+8a+12}$$

$$6) \frac{x+y}{xy} - \frac{x+2y}{xy+y^2} + \frac{y}{x^2+xy}$$

$$7) \frac{a^3}{a^3+1} + \frac{a+3}{a^2-a+1} - \frac{a-1}{a+1}$$

Multiplicación y división combinadas

Simplificar:

$$1) \frac{(a^2-3a)^2}{9-a^2} \cdot \frac{27-a^3}{(a+3)^2-3a} \div \frac{a^4-9a^2}{(a^2+3a)^2}$$

$$2) \frac{a^2-5a}{b+b^2} \div \left(\frac{a^2+6a-55}{b^2-1} \cdot \frac{ax+3a}{ab^2+11b^2} \right)$$

$$3) \frac{1}{a^3+a^2x} \div \left(\frac{a^3-a^2x}{a^2+2ax+x^2} \cdot \frac{a^2-x^2}{a^3+ax^2} \right)$$

$$4) \left(\frac{2}{x^2+x-42} \div \frac{1}{x^2+x-42} \right) \cdot \frac{(x+7)}{4}$$

$$5) \left(\frac{4m-6}{m+1} \div \frac{20m^2-30m}{15m^3+15m^2} \right) \cdot \frac{4}{m-1}$$

Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

Responde:

1) El área de un rectángulo es $2xy + 4x + 2y + 4$ m² y uno de sus lados mide $x+1$ m. ¿Cuál es la longitud del otro lado?

2) La velocidad promedio es la razón entre una distancia recorrida, y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 8 horas en recorrer una distancia de 1600 kilómetros. ¿Cuál es la velocidad promedio del móvil?

3) Tú y tu amigo ganaron un premio de $\frac{7}{2x}$ Bs. Si deciden dividirlo de manera justa y equitativa, ¿cuántos bolivianos recibirá cada uno?

4) Tienes dos recipientes de jugo. El primer recipiente contiene $\frac{2x}{x+3}$ litros de jugo de naranja y el segundo

recipiente contiene $\frac{3}{2x}$ litros de jugo de maracuyá. Si decides mezclar ambos jugos en un tercer recipiente, ¿cuántos litros de jugo obtendrás?

5) Se tiene $\frac{2}{x}$ de un pan de Arani con queso y $\frac{3}{x}$ de un pan "chamillo". Si se decide compartir estos panes equitativamente, ¿cuántas personas pueden recibir un pedazo de pan si cada persona recibe la misma cantidad de pan?

(Ejercicios y problemas recopilados)

Propiedades de exponentes

N°	PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
1	Producto de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se suman los exponentes	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2a)^5 \cdot (2a)^6 = (2a)^{11}$
2	Cociente de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se restan los exponentes	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{(2x)^{8m}}{(2x)^{2m}} = (2x)^{8m-2m} = (2x)^{6m}$
3	Exponente cero: cualquier expresión algebraica distinta de 0 elevada a cero es igual a 1.	$a^0 = 1$	$(10x)^0 = 1$
4	Potencia de otra potencia: si el exponente de una expresión algebraica está elevada a otra potencia, se copia la base y se multiplican los exponentes:	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(11x)^3]^4 = (11x)^{12}$
5	Exponente negativo: si el exponente es negativo, se invierte la base con su exponente, donde el exponente cambia de signo.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(6x)^{-2} = \frac{1}{(6x)^2}$
6	Potencia de un producto: la potencia de un producto de una expresión algebraica es igual a cada uno de los factores elevados al mismo exponente.	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$[(2x)(8y)]^5 = (2x)^5 \cdot (8y)^5$
7	Potencia de un cociente: la potencia de un cociente de una expresión algebraica es igual al cociente de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{100xy}{5ab}\right)^6 = \frac{(100xy)^6}{(5ab)^6}$

Ejemplos. Aplicar las propiedades adecuadas en cada ejercicio:

$$1) x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^{2+2+2}$$

$$= x^6$$

$$x^{100} \cdot x^{100} \cdot x^{100} = x^{100+100+100}$$

$$= x^{300}$$

$$a^n \cdot a^n = a^{n+n}$$

$$= a^{2n}$$

$$m^{2a+b} \cdot m^{a-3b} = m^{2a+b+a-3b}$$

$$= a^{3a-2b}$$

$$2) \frac{3^6}{3^5} = 3^{6-5}$$

$$= 3^1 = 3$$

$$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2}$$

$$= x^4$$

$$\frac{x^{2024}}{x^{2022}} = x^{2024-2022}$$

$$= x^2$$

$$\frac{x^{2m-4}}{x^{m-6}} = x^{2m-4-(m-6)}$$

$$= x^{2m-4-m+6}$$

$$= x^{m+2}$$

$$3) (a+b)^0 = 1$$

$$\left(\frac{2a}{3}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{x+y}{3} + \sqrt{2}\right)^0 = 1$$

$$4) (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3}$$

$$= 2^6$$

$$= 64$$

$$5) 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{1}{81}$$

$$3^{-3} + 3^{-2} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2}$$

$$= \frac{4}{27}$$

$$6) (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$= 4 \cdot 9 = 36$$

$$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$$

$$= 125 \cdot 8 = 1024$$

$$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$$

$$(x \cdot y \cdot z)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$$

$$7) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{2a}{4}\right)^4 = \frac{(2a)^4}{4^4} = \frac{16a^4}{256}$$

$$\left(-\frac{x}{2y}\right)^{10} = \frac{x^{10}}{(2y)^{10}} = \frac{1}{1024}$$

Actividad

Aplicamos las propiedades de potenciación:

$$(a) a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$$

$$(d) a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n$$

$$(g) \frac{2^3}{2^2} + \frac{2^4}{2^3} + \frac{2^5}{2^4}$$

$$(b) (-a)^2 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^2$$

$$(e) (-5a)^3 \cdot (-5a)^3 \cdot (-5a)^3$$

$$(h) \frac{a^{20}}{a^{20}} - \frac{a^{21}}{a^{19}} + \frac{a^{2024}}{a^{2024}}$$

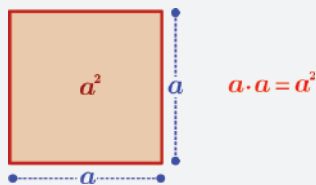
$$(c) (2a)^2 \cdot (2a)^2 \cdot (2a)^2$$

$$(f) 2x^2 \cdot 2x^2 \cdot 2x^2 \cdot 2x^2$$

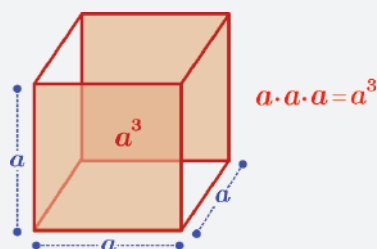
2. Reducción de expresiones algebraicas aplicando las diferentes propiedades de potenciación

A continuación, se simplifican expresiones algebraicas aplicando distintas propiedades de exponentes:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS POTENCIAS



El producto de los lados de un cuadrado genera un área de $a \cdot a = a^2$



El producto de los lados de un cubo genera un área de $a \cdot a \cdot a = a^3$

Ejemplo. Simplificar:

$$C = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{20 - \text{veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{12 - \text{veces}}}$$

Utilizando la propiedad de producto de bases iguales tenemos:

$$C = \frac{a^{20}}{a^{12}}$$

Finalmente, por la potencia de un cociente:

$$C = a^{20-12}$$

$$C = a^8$$

Ejemplo. Simplificar:

$$O = \frac{\overbrace{x^{50} + x^{50} + x^{50} + \cdots + x^{50}}^{50 - \text{veces}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots x}_{50 - \text{veces}}}$$

En el numerador x^{50} se repite 50 veces; en el denominador la suma de sus exponentes es 50

$$O = \frac{x^{50} + x^{50} + x^{50} + \cdots + x^{50}}{x^{50} \cdot x^{50} \cdot x^{50} \cdots x^{50}}$$

Por tanto

$$O = \frac{50 x^{50}}{x^{50}}$$

$$O = \frac{50 x^{50}}{x^{50}}$$

$$O = 50$$

TOMA NOTA

En general todo número elevado a un exponente cero es uno:

$$2^0 = 1; 100^0 = 1; a^0 = 1$$

Pero no sucede con:

$$0^0 = ?$$

Muchas veces aplicamos:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Pero en la suma como resta no se debe aplicar:

$$(a + b)^m \neq a^m + b^m$$

$$(a - b)^m \neq a^m - b^m$$

Ejemplo. Simplificar:

$$N = \frac{2^{a+3} \cdot (3a^{-1})^a}{6^a \cdot a^{-a}}$$

Notemos lo siguiente:

$$2^{a+3} = 2^a \cdot 2^3$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$6^a = (3 \cdot 2)^a$$

$$a^{-a} = \frac{1}{a^a}$$

$$N = \frac{2^{a+3} \cdot (3a^{-1})^a}{6^a \cdot a^{-a}}$$

$$N = \frac{2^a \cdot 2^3 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{a}\right)^a}{(3 \cdot 2)^a \cdot \frac{1}{a^a}}$$

$$N = \frac{2^a \cdot 2^3 \cdot 3^a \cdot \frac{1}{a^a}}{3^a \cdot 2^a \cdot \frac{1}{a^a}}$$

$$N = \frac{2^a \cdot 2^3 \cdot 3^a \cdot \frac{1}{a^a}}{3^a \cdot 2^a \cdot \frac{1}{a^a}}$$

Finalmente simplificando:

$$N = 2^3$$

$$N = 8$$

Ejemplo. Simplificar

$$V = \frac{2^{a+3} + 2^{a+1} - 2^a}{2^{a+1} + 2^a}$$

Aplicando el producto de potencias de igual base:

$$V = \frac{2^a \cdot 2^3 + 2^a \cdot 2^1 - 2^a}{2^a \cdot 2^1 + 2^a}$$

Factorizando

$$V = \frac{2^a(2^3 + 2 - 1)}{2^a(2 + 1)}$$

$$V = \frac{2^a(8 + 2 - 1)}{2^a(2 + 1)}$$

Finalmente, simplificando:

$$V = \frac{2^a(9)}{2^a(3)}$$

$$V = \frac{9}{3}$$

$$V = 3$$

Actividad

Aplicamos las propiedades de potenciación:

(a) $R = a^{2+x} \cdot a^{3-x} \cdot a^{4+x}$

(b) $E = 2^{2+x} \cdot 2^{3-x} \cdot 2^{4-x} \cdot 2^x$

(c) $I = 2^{2^0} + 2^{0^2}$

(d) $D = 2^{2^2} + 2^{1^2}$

(e) $S = (2a)^0 \cdot (2a)^3 + (-2024)^0$

(f) $H = 2^2 + 2^{-2}$

(g) $E = \frac{2^{a+3} - 2^{a+1} - 2^a}{2^{a+1} - 2^a}$

(h) $P = \frac{3^{a+3} - 3^{a+1} - 3^a}{3^a}$

Ejemplo. Simplificar:

$$I = \frac{2^{a+3} \cdot 4^{a+2b}}{8^{a-2} \cdot 16^{b+2}}$$

Aplicando el producto de potencias de igual base:

$$I = \frac{2^a \cdot 2^3 \cdot (2^2)^{a+2b}}{(2^3)^{a-2} \cdot (2^4)^{b+2}}$$

Utilizando la propiedad de potencia:

$$I = \frac{2^a \cdot 2^3 \cdot 2^{2a+4b}}{2^{3a-6} \cdot 2^{4b+8}}$$

$$I = \frac{2^{3a} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{4b} \cdot 2^8}{2^{a+2a} \cdot 2^3 \cdot 2^{4b}}$$

$$I = \frac{2^{3a} \cdot 2^{-6+8} \cdot 2^{4b}}{2^{3a} \cdot 2^3 \cdot 2^{4b}}$$

$$I = \frac{2^{3a} \cdot 2^2 \cdot 2^{4b}}{2^{3a} \cdot 2^3 \cdot 2^{4b}}$$

$$I = \frac{2^2}{2^3}$$

$$I = 2^{3-2}$$

$$I = 2^1$$

$$I = 2$$

Utilizando la propiedad (4)

Por la propiedad (1)

Agrupando términos del mismo exponente.

Sumando exponentes

Utilizando la propiedad (2)

Finalmente simplificando

Ejemplo. Simplificar:

$$F = \frac{2^{x-1} + 9 \cdot 2^x + \frac{3^x}{2} + 3^{x+2}}{\frac{2^x}{3} + 4 \cdot 3^x + 2^{x+2} + 3^{x-1}}$$

$$F = \frac{2^x \cdot 2^{-1} + 3^2 \cdot 2^x + \frac{3^x}{2} + 3^x \cdot 3^2}{\frac{2^x}{3} + 2^2 \cdot 3^x + 2^x \cdot 2^2 + 3^x \cdot 3^{-1}}$$

$$F = \frac{2^x \cdot 2^{-1} + 3^2 \cdot 2^x + 3^x \cdot 2^{-1} + 3^x \cdot 3^2}{2^x \cdot 3^{-1} + 2^2 \cdot 3^x + 2^x \cdot 2^2 + 3^x \cdot 3^{-1}}$$

$$F = \frac{2^x(2^{-1} + 3^2) + 3^x(2^{-1} + 3^2)}{2^x(3^{-1} + 2^2) + 3^x(2^2 + 3^{-1})}$$

$$F = \frac{(2^{-1} + 3^2)(2^x + 3^x)}{(3^{-1} + 2^2)(2^x + 3^x)}$$

$$F = \frac{2^{-1} + 3^2}{3^{-1} + 2^2}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} + 9}{\frac{1}{3} + 4}$$

$$F = \frac{\frac{19}{2}}{\frac{13}{3}}$$

$$F = \frac{\frac{19}{2}}{\frac{13}{3}}$$

$$F = \frac{57}{26}$$

Utilizando (1)

Utilizando (5)

Factorizando 2^x ; 3^x
Factorizando $2^x + 3^x$ y
simplificando

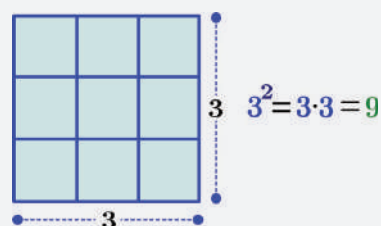
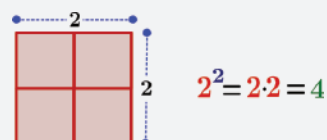
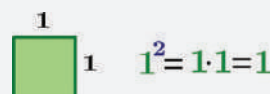
Utilizando la propiedad
(5)

Sumando

Dividiendo fracciones

ÁREAS Y CUADRADOS

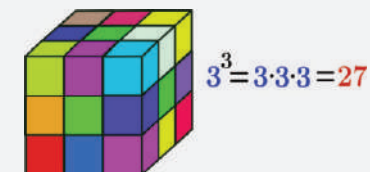
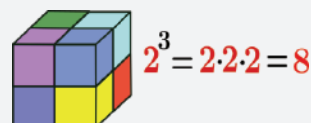
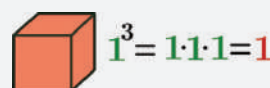
Las medidas de superficie o área siempre están elevadas a la segunda potencia, veamos un ejemplo



Cuadrado de base 1, 2 y 3; generando 1, 4 y 9 unidades cuadradas

VOLÚMENES Y CUBOS

Las medidas de volúmenes se relacionan cubos. Veamos algunos ejemplos:



Los cubos de lados 1, 2 y 3; generan 1, 8 y 27 unidades cúbicas. Toda potencia de exponente tres se denomina cubos perfectos.

TOMA NOTA

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} \\ &= \frac{b^n}{a^n} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n\end{aligned}$$

Segundo debemos recordar que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Además, decimos que el inverso de a^n es a^{-n}

Ejemplo. Simplificar:

$$A = -\left(\frac{2x}{3}\right)^0 \cdot x - 4x \cdot \left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot x + \left(\frac{8}{5}\right)^{-1} \cdot x$$

$$A = -\left(\frac{2x}{3}\right)^0 \cdot x - 4x \cdot \left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot x + \left(\frac{5}{8}\right)^1 \cdot x$$

Utilizando (1) y (5)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$A = -1 \cdot x - 4x \cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 x + \left(\frac{5}{8}\right)^1 x$$

$$A = -x - 4x + \frac{27}{8}x + \frac{5}{8}x$$

$$A = -x - 4x + \frac{32}{8}x$$

Sumando fracciones

$$A = -x - 4x + 4x$$

Simplificando

$$A = -x$$

SIGNOS DE LAS POTENCIAS

Base	Exponente	Signo del resultado
Positiva	Par	Positiva
	Impar	Positiva
Negativa	Par	Positiva
	Impar	Negativa

TOMA NOTA

Es un error muy común confundir expresiones como las que aparecen a continuación:

$$-2^3 \neq (-2)^3$$

Son parecidas, pero sus resultados son muy diferentes. La primera da un resultado negativo y la segunda positivo.

La razón de esta diferencia es sencilla: En la primera el signo no forma parte de la base y en la segunda sí.

$$\begin{aligned}2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8\end{aligned}$$

Signos de las potencias

Signos de potencia de cantidades positivas. Cualquier potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva, porque equivale a un producto en que todos los factores son positivos.

Ejemplos

$$(1) (2)^2 = 4$$

$$(2) (3x)^3 = 27x^3$$

$$(3) (5a^2b^3)^4 = 625a^8b^{12}$$

$$(4) (2m^5n^8)^6 = 64m^{30}n^{48}$$

Signos de potencia de cantidades negativas. En cuanto a las potencias de una cantidad negativa, existe dos posibilidades:

1. Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva.

2. Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa

Ejemplos

$$(1) (-2)^2 = 4$$

$$(2) (-3x)^2 = 9x^2$$

$$(3) (-5a^2b^3)^4 = 625a^8b^{12}$$

$$(4) (-2m^5n^8)^6 = 64m^{30}n^{48}$$

Ejemplos

$$(1) (-2)^3 = -8$$

$$(2) (-3x)^3 = -27x^3$$

$$(3) (-5a^2b^3)^5 = -3125a^{10}b^{15}$$

$$(4) (-2m^5n^8)^7 = -128m^{35}n^{56}$$

Potencia de un Monomio

Para calcular la potencia de un monomio se eleva al exponente el coeficiente del monomio y cada una de las variables de la parte literal (con sus respectivos exponentes)

Ejemplos

$$(1) (3a^2b^3)^2 = 9a^4b^6$$

$$(2) (-10x)^3 = -1000x^3$$

$$(3) (-8a^2b^3)^2 = 64a^4b^6$$

$$(4) (-2m^5n^8)^2 = 4m^{10}n^{16}$$

Simplificamos utilizando propiedades adecuadas:

$$(a) M = -(-10)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$(b) A = \frac{(-a)^2 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^2}{-2a^2}$$

$$(c) R = \left(\frac{x}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{x}{5}\right)^{-2} +$$

$$(d) I = \frac{2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3}}{2^{x-2}}$$

$$(e) A = \frac{5^{x+1} - 5^{x-1} + 5^{x-2024}}{5^{x-2023}}$$

$$(f) B = (2x+1)^0 + (2x+1)^0$$

$$(g) E = \frac{2^3 \cdot 2^6}{2^2 \cdot 16} + \frac{1}{2^0 \cdot 2} + \frac{2^0 \cdot 2^2}{2 \cdot 16} +$$

$$(h) N = \frac{4a^{20}}{a^{19}} - \frac{6a^{19}}{a^{18}} + \frac{a^{18}}{a^{17}}$$

Potencia de un Polinomio

Las potencias de un polinomio es elevar la expresión a un exponente natural. En el tema de productos notables se estudia con mayor detalle. Las potencias más utilizadas como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

VALORACIÓN

Los exponentes tienen varias aplicaciones. Algunos de ellos se mencionan a continuación:

- Las escalas científicas como la escala de Richter y la escala de pH se basan en exponentes.
- Se utilizan ampliamente para calcular volumen, área y problemas relacionados con mediciones.
- También se utilizan en juegos de computadora.

El crecimiento exponencial es un aspecto de importancia crítica en finanzas, demografía, biología, economía, recursos, electrónica y muchas otras áreas.

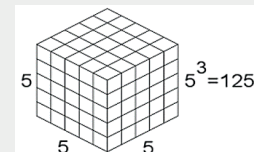
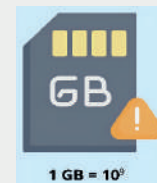
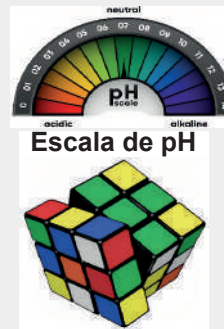
Ejemplos

$$(1) (a + 2b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 \\ = a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$(2) (3a + 2b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 \\ = 9a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$(3) (x - 5y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 \\ = x^2 - 10xy + 25y^2$$

$$(4) (x + 2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 \\ = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$



Cálculo de volúmenes y áreas

Actividad

Respondemos:

- ¿En qué situaciones más, observaste la aplicación de las potencias?
- Revisa las características de un equipo celular, ¿cuál es su capacidad?, ¿se puede escribir como potencia de un número entero?

PRODUCCIÓN

Las funciones exponenciales son una herramienta muy utilizada en el modelado matemático de distintas situaciones de la vida cotidiana, desde fenómenos de la naturaleza hasta problemas de las ciencias económicas. La siguiente ecuación:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

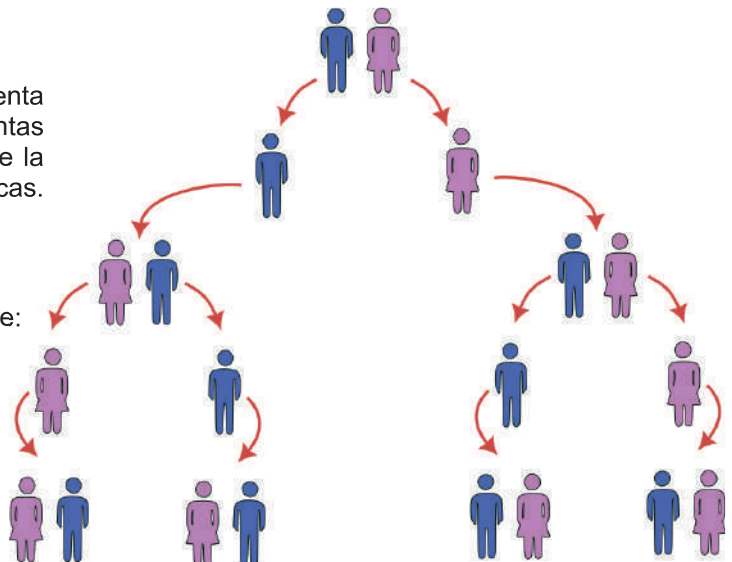
Expresa el crecimiento poblacional exponencial, donde:

P = Población

P_0 = Población Inicial

e = 2.71 Número irracional

r = Constante de crecimiento



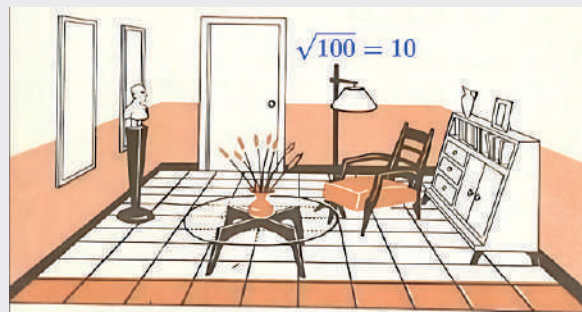
Actividad

- Utilizando el diagrama, calculemos la potencia que se genera en la décima generación. Suponiendo que 2^2 , es la segunda generación.
- Elaboramos un informe de lo realizado explicándolo en clase.

RADICACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

La raíz cuadrada es una operación sobre un número en la que se realiza la multiplicación para conocer qué otro número, multiplicado por sí mismo, da como resultado el número original. Un ejemplo práctico donde se observa raíces cuadradas es en superficies cuadradas. En la figura de la derecha vemos el suelo de una habitación cuadrada que tiene 100 azulejos. Una pregunta que se puede hacer es ¿Cuántos azulejos tendrá la habitación por cada lado? Para resolver este problema habrá que hallar un número que elevado al cuadrado sea 100. Ese número es 10 porque $10 \times 10 = 100$.



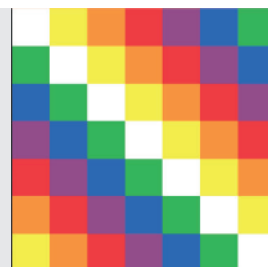
100 azulejos en la sala de un ambiente

Actividad



La Wiphala es una bandera cuadrangular de siete colores.

- La Wiphala está compuesta por 49 cuadrados. ¿Cómo podemos expresar estos cuadrados utilizando la raíz cuadrada?



TEORÍA

APROXIMACIÓN A LA RAÍZ CUADRADA DE 2 EN UNA TABLILLA BABILÓNICA



Las raíces cuadradas son expresiones matemáticas que surgieron al plantear diversos problemas geométricos como la longitud de la diagonal de un cuadrado. El Papiro de Ahmes datado hacia 1650 a. C, muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. Los babilonios aproximaban raíces cuadradas haciendo cálculos mediante la media aritmética.

1. Radicales (raíz de índice natural de una expresión algebraica)

Se denomina raíz a un cierto valor que debe ser multiplicado por sí mismo (ya sea en una o más oportunidades) para encontrar el valor inicial. La "raíz n-ésima" de un valor dado, es cuando se multiplica n veces y da el valor inicial. La radicación es la operación inversa a la potenciación.

En general se puede expresar:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

Los radicales tienen las siguientes partes:

$$\begin{array}{c} \text{índice} \swarrow \quad \searrow \text{raíz } n\text{-ésima de } a \\ \sqrt[n]{a} = b \\ \quad \quad \quad \nwarrow \text{radicando} \end{array}$$

Ejemplos. Calcular las siguientes raíces aplicando la definición:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \sqrt{36} = 6 \Leftrightarrow 6^2 = 36 & (d) \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25 & (g) \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = 100 \\
 (b) \sqrt{121} = 11 \Leftrightarrow 11^2 = 121 & (e) \sqrt{169} = 13 \Leftrightarrow 13^2 = 169 & (h) \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\
 (c) \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8 & (f) \sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27 & (i) \sqrt[3]{64} = 4 \Leftrightarrow (4)^3 = 64
 \end{array}$$

2. Propiedades de Radicales

N°	Propiedad	Forma General	Ejemplo
1	Potencia de una raíz y raíz de una potencia. Las raíces pueden expresadas como potencia	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 8^{\frac{2}{3}}$
2	Raíz de un producto. El producto de radicales de igual índice es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$
3	Raíz de un cociente. La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2$
4	Raíz de una raíz. Se multiplican los índices de los radicales y se copia la cantidad subradical.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[3 \cdot 5]{a} = \sqrt[15]{a}$

Ejemplos. Simplificar utilizando las propiedades de radicales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} & b) \sqrt{350} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot 7} & c) \sqrt{12b^2c^3d^4} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot c \cdot d^2 \cdot d^2} \\
 = \sqrt{2^2 \cdot 5} & = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} & = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d^2} \cdot \sqrt{d^2} \\
 = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} & = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} & = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot c \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{c} \\
 = 2\sqrt{5} & = 5\sqrt{5 \cdot 7} & = bcd^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{c} \\
 & = 5\sqrt{35} & = bcd^2\sqrt{3c}
 \end{array}$$

3. Introducción de factores en un radical

Se escribe el factor o factores que se quieren introducir dentro del radical, elevados al exponente que sea igual al índice del radical. Luego se simplifica realizando las operaciones dentro del radical.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

En general aplicamos:

Ejemplos. Introduce debajo del signo radical:

$$\begin{array}{ll}
 (a) 7\sqrt{2a} = \sqrt{7^2 \cdot 2a} & (d) \frac{3x}{x+y} \sqrt{\frac{x+y}{x^2}} = \sqrt{\frac{(3x)^2(x+y)}{x^2(x+y)^2}} \\
 = \sqrt{98a} & = \sqrt{\frac{(3x)^2(x+y)}{x^2(x+y)^2}} \\
 & = \sqrt{\frac{9x^2(x+y)}{x^2(x+y)(x+y)}} \\
 & = \sqrt{\frac{9}{x+y}} \\
 (b) 2a\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 3} & \\
 = \sqrt[3]{24a^3} & \\
 (c) \frac{3}{2}\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5} \cdot 2^6} & \\
 = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2} & \\
 = \sqrt[5]{486} &
 \end{array}$$

LA RAÍZ CUADRADA



La raíz cuadrada de un número x es aquel número y que al ser multiplicado por sí mismo da como resultado el valor x .

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x$$

Introducimos en el radical:

$$\begin{array}{llll}
 (a) 3\sqrt{2} & (c) 3\sqrt{2a} & (e) x\sqrt{2x} & (g) 7x\sqrt{5x} \\
 (b) 5\sqrt{7} & (d) 10\sqrt{a} & (f) 3x\sqrt{5x^5} & (h) 3\sqrt[3]{2} \\
 & & & (i) 2x\sqrt[3]{3x^2} \\
 & & & (j) 2\sqrt[5]{4a^2}
 \end{array}$$

EXPONENTES FRACCIONARIOS

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Los ejercicios de exponentes fraccionarios pueden ser resueltos usando la regla de exponentes fraccionarios. Esta regla indica la relación entre potencias y radicales. El denominador de un exponente fraccionario es escrito como el índice del radical de la expresión y el numerador es escrito como el exponente. Por ejemplo:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{m^3} = m^{\frac{3}{5}}$$

4. Reducción de radicales al mínimo común índice

Se determina el m.c.m. de los índices radicales (índice común), luego se debe elevar cada cantidad sub-radical a la potencia como se indica en el ejemplo a continuación:

Ejemplo. Igualar los índices de los siguientes radicales: $\sqrt{2a}$; $\sqrt[3]{4a^2}$, $\sqrt[6]{3m^2}$

Notemos el m.c.m. de los índices es 2,3,6 es 6, luego este debe ser dividido entre los índices, veamos:

$$6 \div 2 = 3; \text{ luego } \sqrt{2a} = {}^{2 \cdot 3}\sqrt{(2a)^3} = \sqrt[6]{(2a)^3}$$

$$6 \div 3 = 2; \text{ luego } \sqrt[3]{4a^2} = {}^{3 \cdot 2}\sqrt{(4a^2)^2} = \sqrt[6]{16a^4}$$

$$6 \div 6 = 1; \text{ luego } \sqrt[6]{3m^2} = {}^{6 \cdot 1}\sqrt{(3m^2)^1} = \sqrt[6]{3m^2}$$

Finalmente, los nuevos radicales son: $\sqrt[6]{(2a)^3}$; $\sqrt[6]{16a^4}$; $\sqrt[6]{3m^2}$

5. Operaciones con radicales. Estudiaremos la suma, resta multiplicación y división entre radicales

5.1. Suma y Resta con radicales Para realizar estas operaciones los radicales deben ser semejantes. Dos radicales son semejantes si tienen la misma cantidad sub radical y el mismo índice. Son ejemplos de radicales semejantes: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$.

Ejemplos. Sumar o restar los siguientes radicales:

EXPONENTES FRACCIONARIOS

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Los ejercicios de exponentes fraccionarios pueden ser resueltos usando la regla de exponentes fraccionarios. Esta regla indica la relación entre potencias y radicales. El denominador de un exponente fraccionario es escrito como el índice del radical de la expresión y el numerador es escrito como el exponente. Los ejemplos se citan a la derecha.

$$1) A = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$$

$$A = 3\sqrt{5} - 14\sqrt{5}$$

$$A = -11\sqrt{5}$$

$$2) E = 2\sqrt{\frac{a}{b}} - 3\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$E = 3\sqrt{\frac{a}{b}} - 7\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$E = -4\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$3) H = \sqrt{12} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{75}$$

$$H = \sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{25 \cdot 3}$$

$$H = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$$

$$H = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}$$

$$H = 2\sqrt{3} - 13\sqrt{3}$$

$$H = -11\sqrt{3}$$

$$4) D = 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$$

$$D = 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$$

$$D = -2\sqrt{x}$$

$$5) F = \sqrt{x+y} - 2\sqrt{x+y}$$

$$F = -\sqrt{x+y}$$

$$6) G = 3\sqrt{1-y} - 2\sqrt{1-y}$$

$$G = \sqrt{1-y}$$

$$7) I = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$$

$$I = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$$

$$I = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 2}$$

$$I = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 2}$$

$$I = 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$$

$$I = 7\sqrt[3]{2}$$

Igualamos los índices:

$$(a) \sqrt{2} ; \sqrt[3]{7}$$

$$(b) \sqrt{2} ; \sqrt[3]{2} ; \sqrt[5]{3}$$

$$(c) 2\sqrt{3} ; 4\sqrt[3]{2}$$

$$(d) 2a\sqrt{2} ; 5a\sqrt[5]{3}$$

$$(e) 2\sqrt{2x} ; \sqrt[3]{2x^3} ; \sqrt[5]{3x}$$

$$(f) 4\sqrt{\frac{a}{b}} ; 8\sqrt[3]{\frac{2a}{b}}$$

Sumamos restamos, según corresponde:

$$(a) B = 7\sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 10\sqrt{a} + 12\sqrt{a}$$

$$(b) E = 10\sqrt{x} + \sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 12\sqrt{x}$$

$$(c) L = 48\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{500}$$

$$(d) E = 8\sqrt{54} - 10\sqrt{12} - 20\sqrt{6}$$

5.2. Multiplicación con radicales. Dos radicales se pueden multiplicar o dividir si tienen los mismos índices. Si sus índices son distintos se deben igualar. Para la multiplicación de radicales utilizamos la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplos. Multiplicar los siguientes radicales:

$$\begin{aligned} 1) C &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \\ C &= \sqrt{5 \cdot 5} \\ C &= \sqrt{25} \\ C &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Otra forma sería:} \\ O &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \\ O &= \sqrt{5^2} \\ O &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) N &= \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3a} \cdot \sqrt{6} \\ N &= \sqrt{2a \cdot 3a \cdot 6} \\ N &= \sqrt{36a^2} \\ N &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) V &= 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7} \\ V &= 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7} \\ V &= 6\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) I &= 4\sqrt{a} \cdot 5\sqrt{a} \\ I &= 4 \cdot 5\sqrt{a \cdot a} \\ I &= 20\sqrt{a^2} \\ I &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) F &= (4\sqrt{a}) \cdot (3\sqrt{5a}) \cdot (2\sqrt{6a}) \\ F &= 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{a \cdot 5a \cdot 6a} \\ F &= 24\sqrt{30a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) A &= (\sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt{5}) \\ A &= \sqrt[3 \cdot 2]{2^2 \cdot 5^3} \\ A &= \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) C &= (\sqrt[5]{3a}) \cdot (\sqrt[3]{5b}) \\ C &= \sqrt[5 \cdot 3]{(3a)^3 \cdot (5b)^5} \\ C &= \sqrt[15]{(3a)^3 \cdot (5b)^5} \end{aligned}$$



CHRISTOPH RUDOLFF

El actual símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático Christoph Rudolff para representar esta operación, que aparece en su libro Coss. El signo no es más que una forma estilizada de la letra *r* minúscula para hacerla más elegante, alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina *radix*, que significa raíz.

5.3. División con radicales. Dos radicales se pueden dividir si tienen los mismos índices. Si sus índices son distintos se deben igualar. Para dividir radicales utilizamos la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos. Dividir los siguientes radicales:

$$\begin{aligned} 1) I &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} \\ I &= \sqrt{\frac{16}{4}} \\ I &= \frac{4}{2} \\ I &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) N &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{8}} \\ N &= \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{\sqrt{4 \cdot 2}} \\ N &= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ N &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) G &= \frac{8\sqrt{40}}{3\sqrt{12}} \\ G &= \frac{8\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 5}}{3\sqrt{4 \cdot 3}} \\ G &= \frac{8 \cdot 2\sqrt{10}}{3 \cdot 2\sqrt{3}} \\ G &= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) A &= \frac{3\sqrt{x}}{5\sqrt{2x}} \\ A &= \frac{3\sqrt{x}}{5\sqrt{2x}} \\ A &= \frac{3}{5} \sqrt{\frac{x}{2x}} \\ A &= \frac{3}{5} \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$5) G = \frac{x\sqrt{20x^3}}{x^2\sqrt{5}} = \frac{x\sqrt{2^2 \cdot 5x^2x}}{x^2\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot x \cdot x\sqrt{5x}}{x^2\sqrt{5}} = \frac{2x^2\sqrt{5x}}{x^2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5x}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{x}$$



RAÍZ CUADRADA ENTERA

Para hallar la raíz cuadrada de 46 debemos buscar los números cuadrados dentro los cuáles se ubica 46, en este caso 36 (6^2) y 49 (7^2) y luego notamos que la raíz de 46 tendrá una parte entera, 6 y una parte decimal.

Raíz cuadrada entera de un número es la raíz del mayor cuadrado perfecto contenido en él. En este caso al cuadrado de 6 (36) le faltan 10 para llegar a 46. $46 - 36 = 10$.

El número 10 se llama resto.

Actividad

Multiplicamos:

$$\begin{aligned} (a) B &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \\ (b) O &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \\ (c) L &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \\ (d) I &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) V &= (2\sqrt{3}) \cdot (5\sqrt{3}) \\ (e) I &= (2x\sqrt{5}) \cdot (3x\sqrt{5}) \\ (f) A &= 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{2a}{b}} \end{aligned}$$

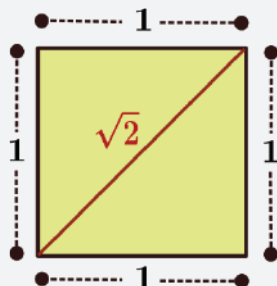
Dividimos:

$$\begin{aligned} (a) J &= \frac{8\sqrt{80}}{\sqrt{144}} \\ (b) E &= \frac{14\sqrt{100}}{3\sqrt{16}} \\ (c) R &= \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) U &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{2}} \\ (e) S &= \frac{\sqrt[3]{3ab}}{\sqrt[5]{2a^2b}} \\ (f) A &= \frac{4\sqrt[5]{32x}}{20\sqrt{144x}} \end{aligned}$$

LA RAÍZ CUADRADA DE DOS

La raíz cuadrada de 2 se define como el único número real positivo tal que, multiplicado por sí mismo, es igual a 2. La raíz cuadrada de 2 fue posiblemente el primer número irracional conocido.



Geométricamente equivale a la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad, lo cual se comprueba aplicando el teorema de Pitágoras, también conocida como constante pitagórica.

La raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Pero satisface la ecuación de segundo grado en una incógnita de coeficientes racionales

6. Radicales Dobles. Son radicales que se encuentran dentro de otro radical relacionados mediante sumas o restas. Convertirlo a un solo radical significa aplicar la siguiente ecuación:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}; \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

También podemos utilizar la regla:

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}; \quad x + y = A; \quad x \cdot y = B$$

Ejemplo. Descomponer usando $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$1) M = \sqrt{7 + \sqrt{40}} \\ \text{Luego } A = 7; B = 40$$

$$C = \sqrt{A^2 - B} \\ C = \sqrt{49 - 40} \\ C = \sqrt{9} \\ C = 3$$

$$M = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} \\ M = \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} \\ M = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$2) N = \sqrt{10 - \sqrt{75}} \\ \text{Luego } A = 10; B = 75$$

$$C = \sqrt{10^2 - 75} \\ C = \sqrt{100 - 75} \\ C = \sqrt{25} \\ C = 5$$

$$N = \sqrt{\frac{10+5}{2}} - \sqrt{\frac{10-5}{2}} \\ N = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Ejemplo. Descomponer los radicales utilizando $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

$$1) J = \sqrt{5 + \sqrt{24}} \\ \text{Luego } x = 2; y = 3$$

Pues se cumple:

$$J = \sqrt{(2+3) + \sqrt{4 \cdot (2 \cdot 3)}}$$

$$J = \sqrt{(2+3) + 2\sqrt{(2 \cdot 3)}} \\ \text{De ahí se cumple la condición:} \\ J = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$2) O = \sqrt{12 + \sqrt{140}} \\ \text{Luego } x = 5; y = 7$$

Pues se cumple:

$$O = \sqrt{(5+7) + \sqrt{4 \cdot (5 \cdot 7)}}$$

$$O = \sqrt{(5+7) + 2\sqrt{(5 \cdot 7)}} \\ \text{De ahí se cumple la condición:} \\ O = \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

$$3) S = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}} \\ \text{Factorizando y reordenando}$$

$$S = \sqrt{(3x+1) + (2x-3) + 2\sqrt{(3x+1)(2x-3)}} \\ \text{De ahí se cumple la condición:} \\ S = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-3}$$

$$4) U = \sqrt{2m - 1 + 2\sqrt{m^2 - m - 6}} \\ U = \sqrt{(m+2) + (m-3) + 2\sqrt{(m+2)(m-3)}} \\ U = \sqrt{m+2} + \sqrt{m-3}$$

• Descomponemos radicales simples:

(a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$
(b) $M = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$
(c) $E = \sqrt{3 + 2\sqrt{7}}$
(d) $N = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$

(e) $I = \sqrt{21 - 2\sqrt{20}}$
(f) $S = \sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$
(g) $A = \sqrt{33 + 2\sqrt{140}}$

(h) $C = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}}$
(e) $I = \sqrt{2x + 1 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}}$
(f) $S = \sqrt{8m + 1 - 2\sqrt{15m^2 + 7m - 2}}$



Muchas ecuaciones o fórmulas matemáticas, incluyendo a gran parte de aquellas que tiene que ver con situaciones o fenómenos en la vida real, incluyen fórmulas con radicales o raíces, mencionamos algunas:

Velocidad del sonido. Cuando el sonido recorre el aire (o cualquier gas), la velocidad de la onda sonora depende de la temperatura del aire (o gas). La velocidad, v , en metros por segundo, a la temperatura del aire, t , en grados Celsius, puede determinarse mediante la fórmula:

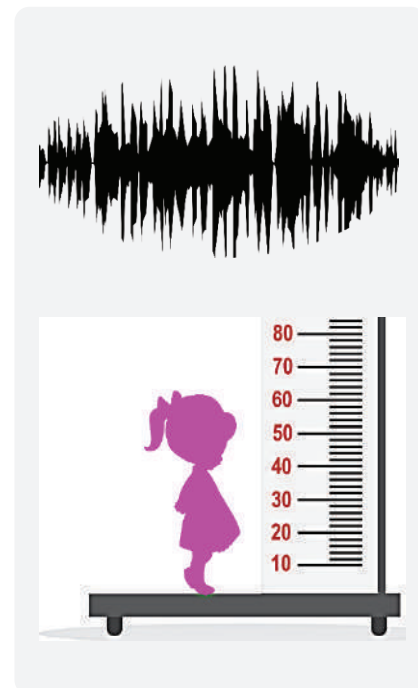
$$v = 331,3 \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

Altura de niñas. La función $f(t) = 3\sqrt{t} + 19$ puede usarse para calcular la altura media, $f(t)$, en pulgadas, de niñas de edad t , en meses, donde $1 \leq t \leq 60$.

Iluminación. La fórmula

$$d = \sqrt{\frac{72}{I}}$$

se usa para mostrar la relación entre la iluminación sobre un objeto I , en lúmenes por metro, y la distancia en metros, d , que hay entre el objeto y la fuente de luz.



Actividad

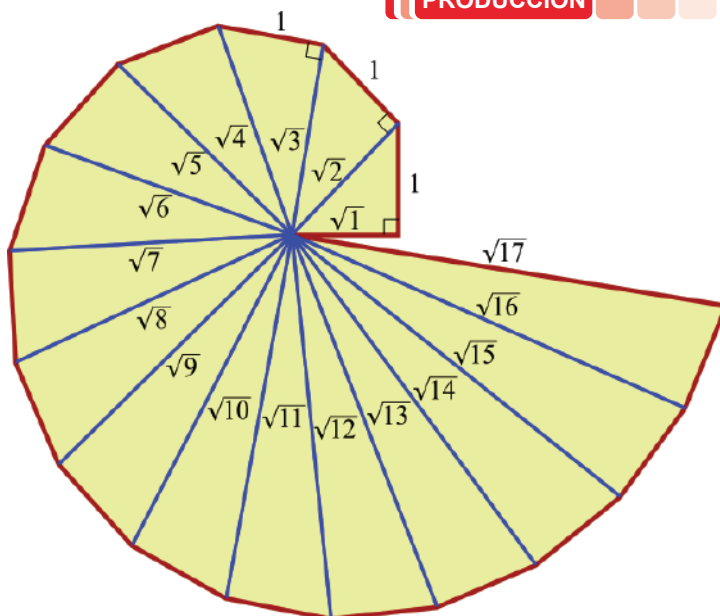
Dialogamos con las compañeras y compañeros, sobre las situaciones expuestas, en la lectura anterior.



La Espiral de Teodoro

También es llamada “caracola pitagórica”, se forma con triángulos rectángulos ubicados de forma contigua, formando una espiral de triángulos rectángulos adyacentes.

Las longitudes de las hipotenusas de esos triángulos toman, consecutivamente, los valores correspondientes a las raíces cuadradas de 1, 2, 3, 4, ... que son números naturales. Estas raíces cuadradas dan siempre valores irracionales o naturales.



Actividad

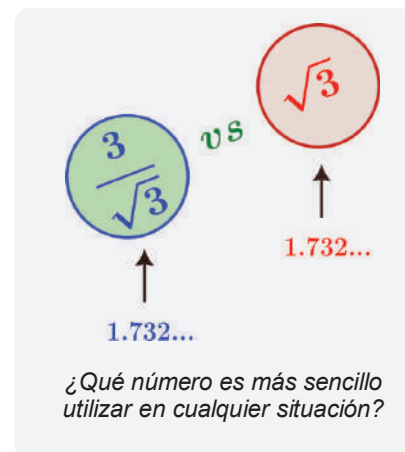
A partir de un triángulo de base 1 y altura 1, construyamos, en nuestro cuaderno, la espiral pitagórica.

RACIONALIZACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

En matemática muchas expresiones tienen el mismo valor que otras, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y $\frac{57}{114}$; en el caso anterior es conveniente operar mejor con la fracción simplificada $\frac{1}{2}$ que $\frac{57}{114}$; es así que en el caso del uso de radicales las siguientes expresiones, aunque se ven diferentes, tienen el mismo valor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para el manejo de ciertas operaciones es conveniente utilizar $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Actividad

$\frac{7}{14}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{7}{8}$

→

$\frac{84}{96}$
$\frac{30}{45}$
$\frac{4}{10}$
$\frac{1}{2}$

De los siguientes números, a pesar que se ven diferentes, existen pares que tienen el mismo valor. Marcar con una flecha aquellos que tienen el mismo valor:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{9}{\sqrt{3}}$

→

$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$3\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$

CHRISTOPH RUDOLFF

Christoph Rudolff, es el autor del primer libro alemán de álgebra.

Introdujo el uso del signo radical $\sqrt{x}$ en la raíz cuadrada. Se cree que se debió a que el símbolo se parecía a una *r* minúscula.

Rudolff, además, dio una definición comprensible de $x^0 = 1$.

1. Racionalización

La racionalización es una operación que permite eliminar raíces de numeradores o denominadores, aunque de manera general se racionaliza los denominadores.

1.1. Racionalización de fracciones de la forma $\frac{a}{b}$

Para racionalizar una fracción así, se multiplica el denominador por el radical de mismo denominador, para convertir el denominador en una potencia perfecta.

Notemos que cuando multiplicamos dos radicales con índice 2, en el producto desaparece el radical:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

Ejemplos. Hallar el producto, en cada caso:

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$

(b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

(c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$

(d) $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = (\sqrt{m})^2 = m$

(e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$

(f) $\sqrt{m+1} \cdot \sqrt{m+1} = (\sqrt{m+1})^2 = m+1$

Para racionalizar un monomio se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por la raíz del denominador.

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Ejemplos. Racionalizar:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{5}{\sqrt{7}} &= \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \frac{2}{2\sqrt{2}} &= \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} &= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6} \cdot (1+\sqrt{3})}{(\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{18}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{xy}}{x} \\ &= \frac{x + \sqrt{xy}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\ &= \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} &= \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}}{(\sqrt{x+y})^2} = \frac{\sqrt{(x-y)(x+y)}}{x+y} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y} \\ \text{j)} \quad \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{6-6y}} &= \frac{2}{3\sqrt{6-6y}} \cdot \frac{\sqrt{6-6y}}{\sqrt{6-6y}} = \frac{2\sqrt{6-6y}}{3(\sqrt{6-6y})^2} = \frac{2\sqrt{6-6y}}{3(6-6y)} = \frac{2\sqrt{6-6y}}{18-18y} \\ &= \frac{2\sqrt{6-6y}}{18(1-y)} = \frac{\sqrt{6-6y}}{9(1-y)} \end{aligned}$$

¿POR QUÉ RACIONALIZAR?

Una de las razones del porque racionalizar es que, si necesitamos sumar o restar fracciones con radicales, es más fácil calcular si hay números enteros en el denominador en lugar de números irracionales. Veamos:

Por ejemplo, sería más complicado sumar:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

En cambio, será más cómodo sumar:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

NÚMEROS CUADRADOS

En la parte superior observamos números cuadrados. Un número es un cuadrado perfecto si se puede ordenar en una figura cuadrada.

También se dice que un número cuadrado es el producto de dos enteros idénticos.

Los primeros números cuadrados perfectos son:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Racionalizamos:

$$\text{(a)} \quad N = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(b)} \quad A = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\text{(c)} \quad Z = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(a)} \quad R = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{(b)} \quad E = \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{(c)} \quad T = \frac{a}{\sqrt{a}}$$

$$\text{(a)} \quad Q = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{(b)} \quad R = \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{(c)} \quad S = \frac{a}{\sqrt{a}}$$

$$\text{(a)} \quad T = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{2x}}$$

$$\text{(b)} \quad U = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{(c)} \quad V = \frac{a^2}{2a\sqrt{a}}$$

Para racionalizar una fracción, donde el índice del radical sea diferente de 2, por ejemplo 3, multiplicamos por un radical de tal forma se convierta en un cubo perfecto para que pueda simplificarse. A continuación, racionalizamos radicales que tiene distintos índices.

Ejemplos. Racionalizar:

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{\sqrt[3]{a}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{a^3}} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{x^2}{\sqrt[7]{x^2}} &= \frac{x^2}{\sqrt[7]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^5}} \\ &= \frac{x^2}{\sqrt[7]{x^7}} \\ &= \frac{x^2}{x} = x \sqrt[7]{x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \frac{5}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt[3]{5^3}} \\ &= \frac{5}{5} = \sqrt[3]{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{x}{\sqrt[5]{x}} &= \frac{x}{\sqrt[5]{x}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt[5]{x^5}} \\ &= \frac{x}{x} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \frac{2x^5}{\sqrt[3]{5x^2}} &= \frac{2x^5}{\sqrt[3]{5x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2x}}{\sqrt[3]{5^2x}} \\ &= \frac{2x^5}{\sqrt[3]{5^3x^3}} \\ &= \frac{2x^5}{5x} = \frac{2x^4}{5} \end{aligned}$$

Actividad

Racionalizamos:

$$(a) R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

$$(b) E = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}$$

$$(c) I = \frac{8}{\sqrt[5]{2}}$$

$$(a) D = \frac{x}{2\sqrt[3]{x}}$$

$$(b) S = \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2}}$$

$$(c) A = \frac{x^{10}}{4\sqrt[7]{x}}$$

Hallamos el conjugado:

$$(a) a - b$$

$$(b) a - 2b$$

$$(c) 1 + 7x$$

$$(d) 3 + \sqrt{5}$$

$$(e) \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

$$(f) \sqrt{a} - b$$

$$(g) \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$(h) 2\sqrt{x} + \sqrt{y}$$

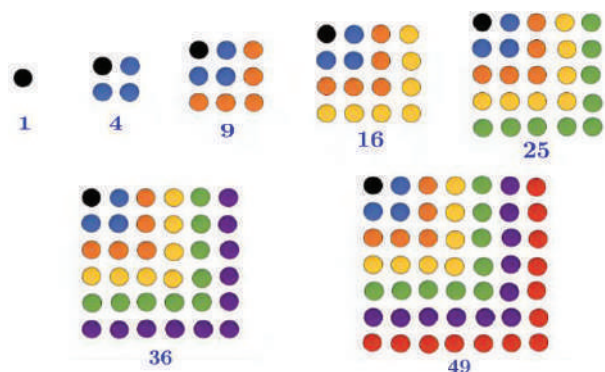
$$(i) 2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$$

$$(j) 7\sqrt{2x} + \sqrt{5}$$

1.2. Racionalización de fracciones de la forma $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}}$

Para racionalizar una fracción que contiene dos o más radicales debemos multiplicar por su conjugada. El **conjugado** de un binomio es el mismo binomio, pero con el signo del segundo término cambiado

Ejemplos. Halla el conjugado:



Expresión

$$a + b$$

$$\sqrt{2} + x$$

$$1 - 3x$$

$$10\sqrt{2} - 3$$

$$\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$$

$$5a + \sqrt{y}$$

$$a + bi$$

Conjugado

$$a - b$$

$$\sqrt{2} - x$$

$$1 + 3x$$

$$10\sqrt{2} + 3$$

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$$

$$5a - \sqrt{y}$$

$$a - bi$$

PRODUCTO DE UN CONJUGADO

El producto de binomios conjugados, es decir la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda. En otras palabras, se cumple la fórmula:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos. Racionalizar:

$$\begin{aligned} (a) \frac{1}{4 + \sqrt{3}} &= \frac{1}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{16 - 3} \\ &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2 - 3} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \frac{5(x-y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{5(x-y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{5(x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{5(x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} \\ &= 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} \end{aligned}$$

1.3. Racionalización de fracciones de la forma $\frac{C}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}}$

Para racionalizar una fracción que contiene dos o más radicales con índice 3 en el denominador, debemos multiplicar por la expresión tal que se pueda cumplir la suma o diferencia de cubos perfectos. Es decir, se debe aplicar el producto notable:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Ejemplos. Racionalizar:

$$(a) \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{3})^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2}}{2 + 3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{5}$$

$$(b) \frac{m^2 - n^2}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}}$$

$$= \frac{m^2 - n^2}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{m^2})^2 + \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{n^2} + (\sqrt[3]{n^2})^2}{(\sqrt[3]{m^2})^2 + \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{n^2} + (\sqrt[3]{n^2})^2}$$

$$= \frac{(m^2 - n^2) [(\sqrt[3]{m^2})^2 + \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{n^2} + (\sqrt[3]{n^2})^2]}{(\sqrt[3]{m^2})^3 - (\sqrt[3]{n^2})^3}$$

$$= \frac{(m^2 - n^2)(\sqrt[3]{m^4} - \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^4})}{m^2 - n^2}$$

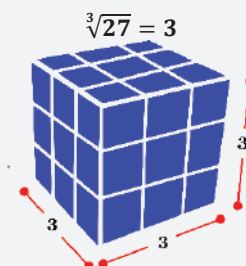
$$= m\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{n^2} + n\sqrt[3]{n}$$

RAÍZ CÚBICA

$$\sqrt[3]{x}$$

La raíz cúbica resuelve el problema de hallar un número cuyo cubo sea igual a un número dado de antemano.

Por ejemplo, hallemos la raíz cúbica de 27.



Un cubo de 27 cubos tiene lados de 3 unidades.

Actividad

• Racionalizamos

$$(a) I = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$(d) A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$(g) S = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$(j) S = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$$

$$(b) S = \frac{1}{\sqrt{3}-3}$$

$$(e) E = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$(h) H = \frac{x^2-y}{x+\sqrt{y}}$$

$$(k) H = \frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$$

$$(c) R = \frac{5}{1-\sqrt{6}}$$

$$(f) L = \frac{m-1}{1-\sqrt{m}}$$

$$(i) A = \frac{m^2-1}{1+\sqrt{m}}$$

$$(l) A = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}$$

2. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

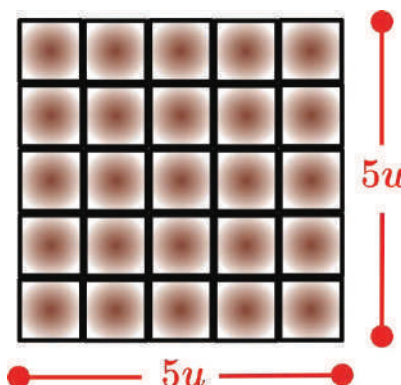
Algunos problemas relacionados con raíces cuadradas son:

Problema. Eynar tiene 25 azulejos cuadrados. Quiere formar un mosaico con el mismo número de azulejos en cada lado. ¿Cuántos azulejos debe colocar en cada fila?

Solución

Notemos que debemos acomodar 25 azulejos de tal forma que podamos formar un cuadrado perfecto, luego la operación requerida será extraer la raíz cuadrada de 25, veamos:

$$\sqrt{25} = 5$$



RAÍZ CUADRA DE UN NÚMERO NEGATIVO

La unidad imaginaria se denota por i y se define como la raíz cuadrada de -1

$$i = \sqrt{-1}$$

El cuadrado de la unidad imaginaria es -1 :

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Con la invención del número imaginario ya podemos trabajar con raíces cuadradas de números negativos, el cual estudiado por los números complejos.

RAÍCES EN MATEMÁTICA

Si se estudia a profundidad el cálculo de la raíz cuadrada descubriremos que está relacionado con diversas áreas de la matemática:

Ecuaciones de Segundo Grado
funciones y gráficos

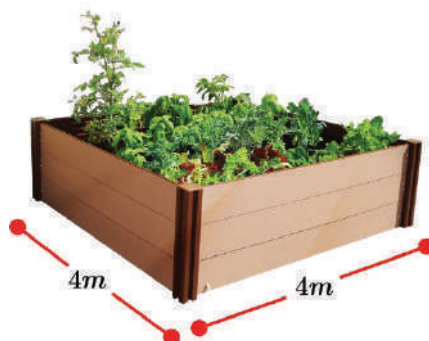
Teorema de pitágoras
Trigonometría

RAÍCES CUADRADA

Exponentes fraccionarios
Funciones y gráficos

Números irracionales
Números Reales

Problema. Un jardín cuadrado tiene una superficie de 16 metros cuadrados. Calcula el perímetro del jardín.



Solución

Primero establecemos la medida de los lados del cuadrado del jardín

$$\sqrt{16} = 4$$

Recordemos que el perímetro es la suma de los lados:

$$P = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

El perímetro es 16 m.

Problema. En un salón escolar se observa 2916 asientos en total, si el número de asientos en la fila es igual al número de asientos en las columnas. Calcule el número total de asientos seguidos.



Solución

De la condición que las columnas filas sean iguales, notamos que es un cuadrado, luego:

$$\sqrt{2916} = 24$$

De ahí el número de asientos seguidos sería 24.

Problema. Richard ha colocado 16 bombones en una caja cuadrada y ha puesto el mismo número de bombones en cada fila y columna. ¿Cuántos bombones ha colocado Andrés en cada lado?



Solución

De la condición que las columnas filas sean iguales, notamos que los bombones forman un cuadrado, pues:

$$\sqrt{16} = 4$$

De ahí el número de filas y columnas es de 4

Problema.

Problema. Un propietario tiene un plano 32m de largo por 8m de ancho, y quiere cambiarlo por un plano cuadrado de la misma superficie. ¿Cuál debe de ser el lado del plano cuadrado?



Solución

La superficie inicial del terreno será $32 \cdot 8 = 256$, luego distribuidos en un cuadrado tendremos

$$\sqrt{256} = 16$$

Luego el plano cuadrado será 16 metros de lado.

VALORACIÓN

Muchos problemas se resuelven utilizando raíces cuadradas, a continuación, se presentan algunos ejemplos donde podemos usar la raíz cuadrada en la vida cotidiana.

Las raíces cuadradas son una función matemática que nos permite encontrar un número que al multiplicarlo por sí mismo se obtiene el número original.

Las raíces cuadradas se pueden usar en diversas ocasiones, por ejemplo:

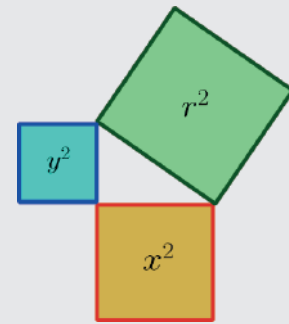
- Si tenemos un área cuadrada y queremos determinar un lado
- Al calcular intereses se pueden presentar raíces cuadradas
- Al calcular proporciones

La raíz cuadrada nos permite conocer la medida que tiene cada uno de los lados de una superficie.

Ejemplo. Si sabemos que el área de un terreno es igual a 16 m^2 entonces cada lado del terreno tendrá 4 metros.

Así mismo nos permite conocer la longitud de cada una de las paredes de un salón de clases siempre y cuando se conozca la superficie del mismo, tal y como se muestra a continuación.

TEOREMA DE PITÁGORAS



El teorema de Pitágoras señala que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Despejando r , se utiliza la raíz cuadrada:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Actividad

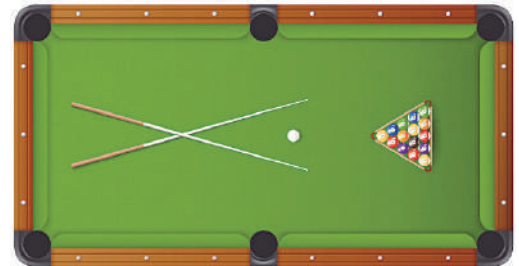
Conversamos con las compañeras y compañeros en clase, dialogamos sobre la importancia que tiene la matemática a través de la racionalización en situaciones de la vida real.

PRODUCCIÓN

Las raíces cuadradas se utilizan en una gran variedad de aplicaciones en la vida real y la tecnología. Aquí hay algunos ejemplos:

En la construcción: Las raíces cuadradas se utilizan para calcular la longitud de los lados de un cuadrado o un triángulo, así como la diagonal de un rectángulo. Esto es importante para la construcción de estructuras, como edificios, puentes y carreteras.

En la geometría: Las raíces cuadradas se utilizan para calcular la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. Esto es importante para el cálculo del área y el volumen de figuras geométricas.



Actividad

- Utilizando el maple de huevos, demostramos que en un maple de 25 huevos forma un maple cuadrado que tiene 5 unidades de lado.
- Una mesa de billar está formada por dos cuadradas, cada cuadrado forma 10000 cm^2 de área. Calculamos las medidas de los lados de la mesa de billar.

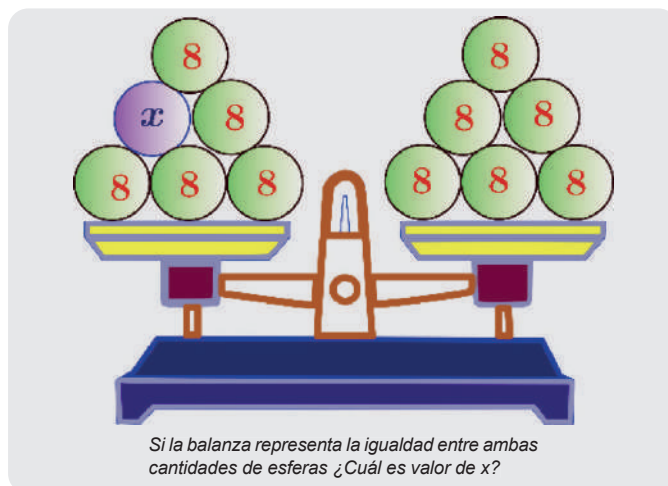


ECUACIONES LINEALES

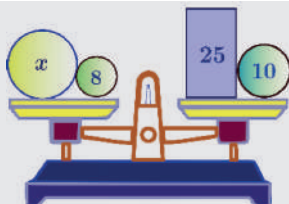
PRÁCTICA

Una ecuación es como una balanza en equilibrio: en la balanza se muestran objetos del mismo peso en ambos lados manteniendo equilibrio, mientras que en la ecuación se exhiben dos cantidades o expresiones del mismo valor manteniendo equilibrio en ambos lados.

En una ecuación, los dos miembros, el de la derecha y el de la izquierda, están balanceados por una relación de igualdad entre ellos. En una balanza en equilibrio, el peso de los objetos en el platillo derecho es igual al peso de los objetos en el platillo izquierdo. Este es el principio de la balanza.



Actividad

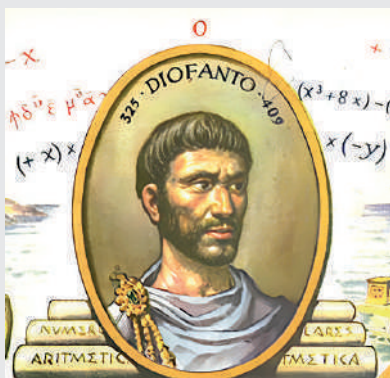


En la imagen, se observa que la balanza está en equilibrio, es decir ambos lados de la balanza son iguales:

- ¿Cuál será el valor de x , para que ambos platillos tengan el mismo valor o peso, es decir que sean iguales?

TEORÍA

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA



(Siglo II o siglo IV)

Diófanto fue un matemático griego considerado "el padre del álgebra". Fue el autor de una serie de libros llamados *Arithmetica*, muchos de los cuales ahora se han perdido. Sus textos tratan sobre la resolución de ecuaciones algebraicas. La ecuación diofántica ("geometría diofántica") y la aproximación diofántica son áreas importantes de la investigación matemática.

1. Ecuación

Una ecuación es la igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se cumple solo para determinados valores de las variables o incógnitas.

Ejemplos

(a)	$x + y = 5$	Ecuación de 1er grado con 2 incógnitas
(b)	$x^2 + y^2 = 36$	Ecuación de 2do grado con 2 incógnitas
(c)	$x^2 + 4x + 4 = 0$	Ecuación de 2do grado con 1 incógnita
(d)	$8x + 1 = 0$	Ecuación de 1er grado con 1 incógnita
(e)	$x + \frac{2}{3} = 12$	Ecuación de 1er grado con 1 incógnita

2. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal o de primer grado es una igualdad matemática con una o más incógnitas. Las ecuaciones lineales con una incógnita será nuestro objetivo de estudio.

Una ecuación de primer grado es con una incógnita es de la forma:

$$ax + b = 0; \quad a \neq 0$$

Donde a y b son constantes (números) y x la incógnita o variable de primer grado.

Ejemplo. Son ejemplos de ecuaciones lineales de primer grado:

$$\begin{aligned} (a) \quad & 2x + 1 = 12 \\ (b) \quad & 2x - (x - 2) = 2(x - 2) \\ (c) \quad & \{2 - [x - (x - 2)]\} = -(5x - 2) - (x - 4) \\ (d) \quad & \frac{x+2}{2} + \frac{2x-4}{4} = 2 \end{aligned}$$

3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado, utilizaremos las siguientes propiedades de igualdad:

- (a) Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ propiedad de la suma
- (b) Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$ propiedad de la sustracción
- (c) Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ propiedad de la multiplicación
- (d) Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ propiedad de la división

Es decir, a una igualdad podemos sumar, restar, multiplicar, y dividir a ambos miembros de la igualdad sin que se altere la igualdad.

Una igualdad tiene dos miembros:

$$2x - 5 = 3(4 - 3x)$$

igualdad segundo miembro
primer miembro

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita debemos despejar la incógnita (dejar solo a la incógnita) utilizando las propiedades antes mencionadas.

Ejemplo. Resolver $5x - 9 = 3x + 7$

$$\begin{aligned} 5x - 9 &= 3x + 7 \\ 5x - 9 + 9 &= 3x + 7 + 9 \\ 5x - 3x &= 3x + 16 - 3x \\ 2x &= 16 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{16}{2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

El objetivo será dejar solo a x
Sumamos **9** a ambos miembros
Restamos **3x**

Dividimos entre **2**

Para verificar si la solución es correcta se sustituye la solución en la ecuación original, veamos:

$$\begin{aligned} 5x - 9 &= 3x + 7 \\ 5(\mathbf{8}) - 9 &= 3(\mathbf{8}) + 7 \\ 40 - 9 &= 24 + 7 \\ 31 &= 31 \end{aligned}$$

Para probar sustituimos el valor de x
 $x = 8$ sustituimos en la ecuación.
Operamos.
Se cumple la igualdad, por tanto **$x = 8$** es solución de la ecuación.

ENCUENTRA EL NÚMERO

En los primeros cursos de primaria un trabajo que se realiza es el cálculo de ciertos valores para que se cumpla una igualdad. Resolvamos algunos ejemplos:

$$1 + 8 = \square$$

$$\square + 10 = 12$$

$$8 - \square = 5$$

$$2 \cdot \square + 1 = 9$$

$$9 - 3 \cdot \square = 3$$

$$\frac{4 + \square}{7} = 2$$

$$\frac{3 \cdot \square + 4}{2} = 5$$

FRANÇOIS VIÈTE



(1540-1603)

Matemático francés, fue el primero que utilizó letras para designar a las incógnitas y las constantes de las ecuaciones algebraicas.

Actividad

Resolvemos utilizando las propiedades de igualdad y realizamos la prueba para verificar la igualdad.

(a) $x + 2 = 3$

(d) $6x - 2 = 4x + 2$

(g) $4x - 1 = 10x - 2$

(j) $8x - 1 = 2x + 5$

(b) $2x - 2 = 10$

(e) $8x - 2 = 4x + 2$

(h) $6x - 2 = 10$

(k) $4x + 3 = 2x + 3$

(c) $4x - 2 = 3x - 12$

(f) $10x - 1 = 8x + 3$

(i) $10x + 2 = 0$

(l) $12x - 4 = 2x - 4$

¿EL EPITAFIO DE DIOFANTO?

Cuenta la leyenda que sobre la tumba de Diofanto se inscribió este epitafio:

Diofanto vivió una sexta parte de su existencia en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte estuvo soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un hijo que murió cuatro años antes que su padre, cuando tenía la mitad de años que vivió su padre (la edad a la que Diofanto murió).

Si x representa la edad de Diofanto al morir, la información anterior se representa con la ecuación:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Para resolver de forma sencilla se emplea la **transposición de términos** miembro a miembro, esto también deriva de las propiedades de igualdades: por ejemplo, lo que suma pasa a restar, lo que resta pasa a sumar, lo que multiplica a dividir, y lo que divide a multiplicar, veamos un ejemplo.

Ejemplo. Resolver $3x - 5 = 7 - x$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7 - x \\ 3x + x &= 7 + 5 \\ 4x &= 12 \\ x &= \frac{12}{4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El objetivo será dejar solo a x
 $-x$ pasa con x , y -5 pasa con 5
 4 está multiplicando a x , entonces pasa a dividir
 Finalmente x está solo en el primer miembro

Para la verificación sustituyamos el valor de la incógnita en la ecuación original.

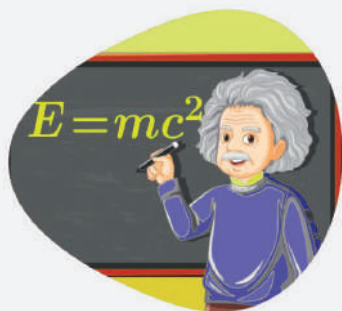
$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7 - x \\ 3(3) - 5 &= 7 - 3 \\ 9 - 5 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Para probar sustituimos el valor de x
 Operamos

Se cumple la igualdad, por tanto $x = 3$ es solución de la ecuación

CURIOSIDADES

En 1905 Albert Einstein escribió la famosa ecuación de la relatividad ($E = mc^2$)



Ejemplo. Resolver $4x + 25 = 10 + 12x$

$$\begin{aligned} 4x + 25 &= 10 + 12x \\ 4x - 12x &= 10 - 25 \\ -8x &= -15 \\ (-1)(-8x) &= (-1)(-15) \\ 8x &= 15 \\ x &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Todas las incógnitas al primer miembro

Multiplicamos por -1 para cambiar el signo del coeficiente de la incógnita

Verificando tenemos:

$$\begin{aligned} 4x + 25 &= 10 + 12x \\ 4\left(\frac{15}{8}\right) + 25 &= 10 + 12\left(\frac{15}{8}\right) \\ \frac{15}{2} + 25 &= 10 + 3\left(\frac{15}{2}\right) \\ \frac{15}{2} + 25 &= 10 + \frac{45}{2} \\ \frac{15+50}{2} &= \frac{20+45}{2} \\ \frac{65}{2} &= \frac{65}{2} \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de x
 Operamos fracciones

Se cumple la igualdad, por tanto $x = \frac{15}{8}$ es solución de la ecuación

Actividad

Resolvemos.

(a) $x - 2 = 8$

(b) $x - 2 = 1$

(c) $x - 3 = 2$

(d) $6x + 7 = 4x + 2$

(e) $5x - 2 = 4x + 2$

(f) $2024 - x = x + 2025$

(g) $x - 1 = 10x - 62$

(h) $x + 40 = 10x$

(i) $10x - 2 = 8$

(j) $8x + 5 = x + 5$

(k) $-x + 3 = x - 10$

(l) $-x + 55 = 2x - 45$

4. Resolución de ecuaciones de con signos de agrupación

Son ecuaciones afectadas por signos de agrupación. Se debe eliminar los signos de agrupación, tomando en cuenta el signo o el coeficiente que afecta al término.

Ejemplo. Resolver $2(x - 5) = -(x - 2)$

$$\begin{aligned} 2(x - 5) &= -(x - 2) \\ 2x - 10 &= -x + 2 && \text{Distribuimos el 2} \\ 2x + x &= 10 + 2 && \text{Todas las } x, \text{ al 1er miembro} \\ 3x &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} && 3 \text{ pasa a dividir al primer miembro} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver $-\{ -[2 - (4x - 5)] - x \} = x$

$$\begin{aligned} -\{ -[2 - (4x - 5)] - x \} &= x && \text{Distribuimos el signo negativo} \\ -\{ -[2 - 4x + 5] - x \} &= x && \text{al signo de agrupación.} \\ -\{ -2 + 4x - 5 - x \} &= x \\ 2 - 4x + 5 + x &= x \\ -4x + x - x &= -2 - 5 && \text{Multiplicamos por } (-1) \\ -4x &= -7 \\ 4x &= 7 \\ x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver

$$\begin{aligned} -\{ -[3 - 2(4m - 5) - 5(4 - m^2)] + 2m \} &= 5(m^2 + 2) \\ -\{ -[3 - 2(4m - 5) - 5(4 - m^2)] + 2m \} &= -5[-2(m + 1) - m^2] \\ -\{ -[3 - 8m + 10 - 20 + 5m^2] + 2m \} &= -5[-2m - 2 - m^2] \\ -\{ -3 + 8m - 10 + 20 - 5m^2 + 2m \} &= 10m + 10 + 5m^2 \\ 3 - 8m + 10 - 20 + 5m^2 - 2m &= 5m^2 + 10m + 10 \\ 5m^2 - 5m^2 - 8m - 2m - 10m &= 10 - 3 - 10 + 20 \\ -20m &= 30 - 13 \\ -20m &= 17 && \text{Multiplicamos por } (-1) \\ 20m &= -17 \\ m &= -\frac{17}{20} \end{aligned}$$

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Son símbolos matemáticos usados para agrupar números o expresiones algebraicas.

$()$ paréntesis

$[]$ corchetes

$\{ \}$ llaves

Paréntesis. Está representado por un par de arcos verticales, entre los que se coloca los números a agrupar.

Corchetes. Está representado por un par de cuadrantes verticales, entre los que se coloca los números y paréntesis a agrupar.

Llaves. Está representado por un par de curvas verticales, entre los que se coloca los números, paréntesis y/o corchetes a agrupar.

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

1) Se suprimen los signos de agrupación.

2) Se realizan los productos indicados.

3) Obtenida una ecuación equivalente, se procede a simplificar, para obtener la solución

Para suprimir signos de agrupación debes tomar en cuenta:

Si el signo que antecede al signo de agrupación, es positivo; se sacan los términos de la agrupación con su mismo signo.

Si el signo que antecede al signo de agrupación, es negativo; se sacan los términos de la agrupación con signo cambiado.

Resolvemos:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|--|
| (a) $2(x - 2) = 2$ | (d) $6(x + 12) = -(4x + 2)$ | (g) $x - \{x - [x - (x - 1)] - x\} = x - 6$ |
| (b) $2x - 2 = -(x - 1)$ | (e) $2 - (x - 2) = x - 2$ | (h) $8 - \{x - [2x - 2(x + 4)] - 8\} = 2(x - 1)$ |
| (c) $4(x - 3) = -(4 - x)$ | (f) $24 - x = x - (x + 4)$ | (i) $12 - \{4x + [10 - 2(x - 1)] - 1\} = -(x - 8)$ |

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

1. El primer modo para hallar el m.c.m. es el procedimiento que estábamos usando antes, es decir, escribimos los múltiplos de cada uno de los números que tenemos, después señalamos cuales son los múltiplos comunes y por último escogemos el que sea el múltiplo común más pequeño de todos.

2. El segundo modo para hallar el mínimo común múltiplo es a través del seguimiento de estos pasos:

- Descomponer cada número en factores primos.
- Seleccionar los factores primos en comunes y no comunes con mayor exponente.
- Multiplicar los factores primos seleccionados.

12	8	6	2
6	4	3	2
3	2	3	2
3	1	3	3
1		1	

El m.c.m de (12, 8, 6)

es $2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

¿QUÉ PASA CON $0 = 0$?

Al resolver una ecuación puede ocurrir que, al simplificar términos semejantes en cada uno de los miembros, se anulen todos entre sí y obtengamos $0 = 0$.

En este caso habría **infinitas soluciones** posibles, es decir, cualquier valor que demos a la incógnita x hace que se cumpla la igualdad ($0 = 0$ se cumple siempre).

Lo que tenemos realmente no es una ecuación, sino una identidad: expresión algebraica que se verifica siempre para cualquier valor de las variables o incógnitas (de las letras). Ejemplo $2x + 3 = -x + 3 + 2x$

5. Resolución de Ecuaciones con coeficiente fraccionario

Para eliminar las fracciones multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Ejemplo. Resolver $\frac{2x-2}{2} + \frac{x-2(x-4)}{6} = \frac{x}{3}$

$$\frac{2x-2}{2} - \frac{x-2(x-4)}{6} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{6(2x-2)}{2} - \frac{6[x-2(x-4)]}{6} = \frac{6x}{3}$$

$$3(2x-2) - [x-2(x-4)] = 2x$$

$$6x-6 - [x-2x+8] = 2x$$

$$6x-6 - x+2x-8 = 2x$$

$$6x-x+2x-2x = 6+8$$

$$5x = 14$$

$$x = \frac{14}{5}$$

Multiplicamos por el m.c.m., que es 6

6. Ecuaciones fraccionarias

Son ecuaciones que además de tener coeficiente fraccionarias, los denominadores están afectados por incógnitas o variables. Su resoluciones multiplicando a las fracciones por el m.c.m. Para hallar el m.c.m. primero debemos factorizar los denominadores.

Ejemplo. Resolver $\frac{2x}{x+1} - 3 = -\frac{x}{x-1}$

$$\frac{2x}{x+1} - 3 = -\frac{x}{x-1}$$

$$\frac{2x(x-1)(x+1)}{x+1} - 3(x-1)(x+1) = -\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$2x(x-1) - 3(x-1)(x+1) = -x(x+1)$$

$$2x^2 - 2 - 3(x^2 - 1) = -x(x+1)$$

$$2x^2 - 2 - 3x^2 + 3 = -x^2 - x$$

$$2x^2 - 3x^2 + x^2 + x = 2 - 3$$

$$+x = -1$$

$$x = -1$$

Resolvemos:

(a) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + 3 = 8$

(b) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} - 7 = 6$

(c) $\frac{4x}{7} - \frac{x}{2} + x = 3$

(d) $\frac{2x-2}{2} - 5 = \frac{x-3}{3}$

(e) $\frac{2x-10}{5} - 12 = \frac{x+12}{5}$

(f) $\frac{2x-10}{7} + 1 = \frac{x+12}{3}$

(g) $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{6} = \frac{10x-1}{9}$

(h) $\frac{m-3}{12} - \frac{2m-1}{4} = \frac{m-8}{3}$

(i) $\frac{m+1}{10} - \frac{m-12}{5} = \frac{2m-10}{5} + \frac{6m-12}{2}$

Ejemplo. Resolver: $\frac{2x-1}{x-2} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x-2} &= \frac{2}{3} \\ \frac{3(x-2)(2x-1)}{x-2} &= \frac{2 \cdot 3(x-2)}{3} \\ 3(2x-1) &= 2(x-2) \\ 6x-3 &= 2x-4 \\ 6x-2x &= -4+3 \\ 4x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Multiplicamos por el m.c.m., que es $3(x-2)$
Simplificando y aplicando la propiedad distributiva

Agrupando las incógnitas y las constantes

Ejemplo. Resolver: $\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{x-4}{3x-2} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{x-4}{3x-2} &= \frac{2}{3} \\ \frac{3(2x+1)(3x-2)(2x-1)}{2x+1} - \frac{3(2x+1)(3x-2)(x-4)}{3x-2} &= \frac{2 \cdot 3(2x+1)(3x-2)}{3} \\ 3(3x-2)(2x-1) - 3(2x+1)(x-4) &= 2(2x+1)(3x-2) \\ 3(6x^2-7x+2) - 3(2x^2-7x-4) &= 2(6x^2-x-2) \\ 18x^2-21x+6-6x^2+21x+12 &= 12x^2-2x-4 \\ 18x^2-6x^2-12x^2-21x+21x+2x &= -4-6-12 \\ 2x &= -22 \\ x &= -\frac{22}{2} \\ x &= -11\end{aligned}$$

Multiplicamos por el m.c.m., que es $3(2x+1)(3x-2)$

Aplicamos la propiedad distributiva

Tovos las incógnitas al primer miembro
Lo que multiplica pasa a dividir

Dividimos

Ejemplo. Resolver:

$$\begin{aligned}\frac{3}{m-4} - \frac{2}{m-3} &= \frac{8}{m^2-7m+12} \\ \frac{3}{m-4} - \frac{2}{m-3} &= \frac{8}{m^2-7m+12} \\ \frac{3}{m-4} - \frac{2}{m-3} &= \frac{8}{(m-4)(m-3)} \\ \frac{(m-4)(m-3) \cdot 3}{m-4} - \frac{(m-4)(m-3) \cdot 2}{m-3} &= \frac{(m-4)(m-3) \cdot 8}{(m-4)(m-3)} \\ 3(m-3) - 2(m-4) &= 8 \\ 3m-9-2m+8 &= 8 \\ 3m-2m &= 8-8+9 \\ m &= 9\end{aligned}$$

Multiplicamos por el m.c.m., que es $(m-4)(m-3)$

Propiedad distributiva

Agrupando

Resolvemos para x

(a) $(x+a)(x-b) - x(x+a) = 0$

(b) $x(x+a) = (x-a)^2$

(c) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

(d) $\frac{ax-b}{ax+b} - \frac{ax}{ax-b} = \frac{ab}{a^2x^2-b^2}$

(e) $\frac{a-1}{x-a} - \frac{2a(a-1)}{x^2-a^2} = -\frac{2a}{x+a}$

Despejamos la incógnita indicada:

(c) $\frac{A-t}{n} = L$; $A = ?$

(b) $Q = \frac{Ts-r}{T}$; $T = ?$

(i) $T = \frac{\sqrt{L}}{F}$; $L = ?$

ECUACIONES EN LAS CIENCIAS

El estudio de la Matemática está rodeado por muchas ecuaciones, veamos algunas:

Ecuación de Newton $F = ma$

Ec. para la velocidad $v = \frac{x}{t}$

Longitud de círculo $C = 2\pi r$

Área de círculo $A = \pi r^2$

Volumen de círculo $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ec. de la relatividad $E = mc^2$

Ecuación. de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$

Ley de Gases ideales $PV = nRT$

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ley de la gravedad $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

7. Ecuaciones literales

Son ecuaciones que además de tener una incógnita poseen otras variables. Para su resolución se deben considerar a las otras variables como si fuesen coeficientes.

Ejemplo. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$2x - mx = 4 - m^2$$

$$x(2 - m) = 4 - m^2 \text{ Factorizamos } x$$

$$x = \frac{4 - m^2}{2 - m}$$

$$x = \frac{(2 - m)(2 + m)}{2 - m}$$

$$x = 2 + m$$

$$m(x + m) - x = m(m - 1) + 1$$

$$mx + m^2 - x = m^2 - m + 1$$

$$mx - x = m^2 - m^2 - m + 1$$

$$x(m - 1) = -m + 1$$

$$x = \frac{1 - m}{m - 1}$$

$$x = \frac{-(m - 1)}{m - 1}$$

$$x = -1$$

Ejemplo. Resolver $\frac{x-a}{x+a} - \frac{x+a}{x-a} = \frac{2ax+a^2b}{x^2-a^2}$

$$\frac{x-a}{x+a} - \frac{x+a}{x-a} = \frac{a(2x+ab)}{(x+a)(x-a)}$$

$$\frac{(x+a)(x-a)(x-a)}{x+a} - \frac{(x+a)(x-a)(x+a)}{x-a} = \frac{a(x+a)(x-a)(2x+ab)}{(x+a)(x-a)}$$

$$(x-a)(x-a) - (x+a)(x+a) = a(2x+ab)$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - (x^2 + 2ax + a^2) = 2ax + a^2b$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 2ax + a^2b$$

$$-2ax - 2ax = 2ax + a^2b$$

$$-4ax - 2ax = a^2b$$

$$-6ax = a^2b \quad // (-1)$$

$$6ax = -a^2b$$

$$x = \frac{-a^2b}{6a}$$

$$x = -\frac{b}{6a}$$

La incógnita es x

Multiplicamos por el m.c.m. $(x+a)(x-a)$

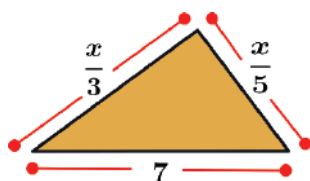
Simplificamos y aplicamos la propiedad distributiva

Sumamos términos

Multiplicamos por (-1)

8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema. Un paisajista planifica una serie de pequeños jardines triangulares fuera de un nuevo edificio de oficinas. Sus planes exigen que un lado sea un tercio del perímetro y el otro lado un quinto del perímetro. El espacio asignado para cada uno permitirá que el tercer lado sea de 7 metros. Encuentra el perímetro del triángulo.



Solución:

De la condición se cumple

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7$$

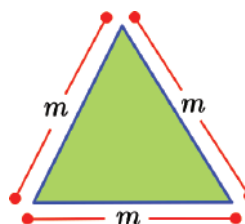
$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7 \quad // 15$$

$$15x = 5x + 3x + 105$$

$$x = 15$$

El perímetro es 17 metros

Problema. Richard calculó que una plaza triangular media 51 m. ¿Sabiendo que sus lados son iguales, hallar la medida de uno de sus lados?



Solución:

Un triángulo equilátero tiene tres lados iguales, por tanto, se cumple:

$$m + m + m = 51$$

$$3m = 51$$

$$m = \frac{51}{3}$$

$$m = 17$$

Luego un lado del triángulo mide 17 centímetros

Problema. El número de mesas en un salón de clase es el doble del número de sillas más 6 si en el salón hay 36 muebles entre mesas y sillas. ¿Cuántas mesas y sillas hay?



Solución:

x : es el número de sillas

$2x + 6$: el número de mesas

Planteando la ecuación:

$$2x + 6 + x = 36$$

$$x = 10$$

Luego:

$x = 10$: número de sillas

$2x + 6 = 26$: número de mesas

Problema. Wara llevaba ovejas a pastear. Por el camino un tercio de ellas se apartaron viendo un zorro; al llegar a su casa conto que el quedaron solo 24 ¿Cuántas ovejas tenía inicialmente?



Solución:

x : la cantidad de ovejas inicialmente

$\frac{x}{3}$: un tercio de lo que tenía

Planteando la ecuación:

$$x - \frac{x}{3} = 24$$

$$3x - x = 72$$

$$2x = 72$$

$$x = 36$$

Luego:

$x = 36$: número de ovejas

Las ecuaciones lineales se caracterizan por tener una variable de primer grado. Se aplica en el cálculo de cantidades como la distancia, el tiempo, el costo o el precio. Por ejemplo, para calcular la distancia que se recorre a una velocidad constante, se puede utilizar la ecuación:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} * \text{tiempo}$$

Las ecuaciones de primer grado son una herramienta matemática poderosa que se puede utilizar para resolver una amplia gama de problemas en la vida cotidiana.

$$t = 5 [s]$$



$$v = \frac{x}{t}$$

$$x = 10 [m]$$

VALORACIÓN

Actividad

- Investigamos y escribe en tu cuaderno 2 aplicaciones de ecuaciones lineales en la construcción, la medicina, la economía y las recetas para cocina.

PRODUCCIÓN

Actividad

Resolvemos, organizados en equipos, los problemas a continuación:

- Joselyn tiene conejos y gallinas en su casa, siendo 24 el número total de sus patas. Además, si en total tiene 9 animales, ¿cuántos conejos tiene Joselyn?
- Héctor Garibay, en una carrera de atletismo, ha recorrido la quinta parte de la carretera. Si le quedan por recorrer 1040 metros, ¿cuál es la longitud del camino?

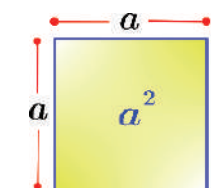
Elaboren un esquema de resolución para explicarlo a la clase.



ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

PRÁCTICA

Uno de los temas donde son utilizadas las ecuaciones cuadráticas es el cálculo de áreas de figuras geométricas como rectángulos, círculos y triángulos. Por ejemplo, si don Ramiro desea cultivar maíz en un terreno cuadrado sabiendo que el área es 100 m^2 . ¿Cómo se puede determinar la medida de los lados?



área = $a \cdot a$
área = a^2
Área de un cuadrado

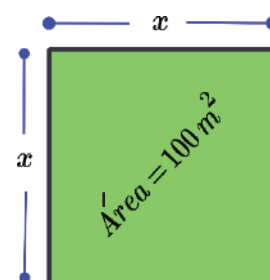
Sea x el lado del terreno cuadrado, luego su área es:

$$A = x \cdot x$$

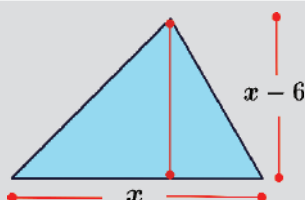
$$100 \text{ m}^2 = x \cdot x$$

$$x^2 = 100 \text{ m}^2$$

Para hallar las medidas de los lados del cuadrado se debe resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 100$



Actividad



Sabiendo que el área de un triángulo es:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

– Calcula el área del triángulo de la izquierda

TEORÍA

PARTES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$\begin{array}{c} \text{término lineal} \\ \downarrow \\ \text{término cuadrático} \quad \text{término independiente} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}$$

Término cuadrático ax^2 : Es el término que contiene la variable elevada al cuadrado.

Término lineal bx : Es el término que contiene la variable sin exponentes.

Término independiente c : Es el término que no contiene la variable.

1. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una ecuación cuyo mayor exponente de la incógnita es 2, su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser de dos tipos: **completas e incompletas**.

COMPLETAS	INCOMPLETAS	
$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$
Ejemplos: $x^2 + 4x + 4 = 0$ $2x^2 - x + 3 = 0$ $x^2 + 12x + 1 = 0$	Ejemplos: $x^2 + 12x = 0$ $9x^2 - x = 0$ $121x^2 - 3x = 0$	Ejemplos: $x^2 + 40 = 0$ $8x^2 - 7 = 0$ $8x^2 - 4 = 0$

2. Resolución de ecuaciones incompletas

Las soluciones o raíces de una ecuación satisfacen la ecuación cuadrática. Las resoluciones de ecuaciones incompletas tienen ciertos procedimientos particulares dependiendo del caso.

Ejemplos. Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

El objetivo será despejar x
Factorizamos x , (factor común)
Si el producto de factores es cero, uno ellos deben ser cero, por tanto, separamos, notando que las ecuaciones se convierten en lineales.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

El objetivo será despejar x
Pasamos c al segundo miembro

a pasa a dividir al 2do miembro,

El exponente se despeja como radical al 2do miembro

Ejemplo. Resolver $4x^2 + x = 0$

$$4x^2 + x = 0$$

$$x(4x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad 4x + 1 = 0$$

$$4x = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}$$

Despejemos x

Factorizamos x , (factor común).

Uno de los factores debe ser cero, por tanto, separamos.

Resolvemos la ecuación lineal

Ejemplo. Resolver $12x^2 = -48x$

:

$$12x^2 = -48x$$

$$12x^2 + 48x = 0$$

$$x(12x + 48) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad 12x + 48 = 0$$

$$12x = -48$$

$$x_2 = -\frac{48}{12}$$

$$x_2 = -4$$

Despejemos x

Factorizamos x , (factor común).

Uno de los factores debe ser cero, por tanto, separamos.

Despejamos x

Ejemplo. Resolver $81x^2 - 4 = 0$

$$81x^2 - 4 = 0$$

$$81x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{81}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{81}}$$

$$x_1 = \frac{2}{9} \quad ; \quad x_2 = -\frac{2}{9}$$

El objetivo será despejar x

Pasamos 4 al segundo miembro

81 pasa a dividir al 2do miembro,

El exponente 2 se despeja como raíz cuadrada al 2do miembro

Ejemplo. Resolver $x^2 - \frac{2}{121} = 0$

$$x^2 - \frac{2}{121} = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{121}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{121}}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{11} \quad ; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{11}$$

despejamos x

Pasamos el término independiente al segundo miembro

El exponente 2 se despeja como raíz cuadrada al 2do miembro

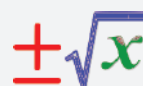
TEOREMA DEL FACTOR CERO

Si el producto de factores es cero, uno ellos deben ser cero, o incluso ambos debieran ser cero, en general se expresa:

$$\text{Si } a \cdot b = 0, \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Este teorema es muy importante en la resolución de ecuaciones de segundo grado por el método de factorización.

LOS DOS SIGNOS DE UNA RAÍZ CUADRADA



La raíz cuadrada de un número positivo siempre tiene dos valores, uno positivo y uno negativo, pues al elevar al cuadrado el signo siempre es positivo. El único número que tiene una sola raíz cuadrada es el cero.

AL-KHWARIZMI



Su obra *Kitab al-jabr wa al-muqabalah* fue traducida al latín en el siglo XII dando origen al término "álgebra". En ella se compilan una serie de reglas para obtener las soluciones aritméticas de las ecuaciones lineales y de las cuadráticas; su método de resolución de tales ecuaciones no difiere en esencia del empleado en nuestros días.

Resolvemos ecuaciones de la forma

(a) $4x^2 + 2x = 0$

(b) $4x^2 - 16x = 0$

(c) $13x^2 = 169x$

(d) $x^2 = \frac{2x}{121}$

(e) $12x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

(f) $\frac{x^2+2x}{2} = 6$

Resolvemos ecuaciones de la forma

(a) $81x^2 - 9 = 0$

(b) $1024x^2 - 4 = 0$

(c) $\frac{x^2}{4} - 25 = 0$

(d) $\frac{100x^2-25}{10} = 10$

(e) $x^2 - \frac{289}{225} = 0$

(f) $\frac{x^2+51}{2} = 50$

NACIMIENTO DE NÚMEROS IMAGINARIOS

Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$; requiere hallar un número real cuyo cuadrado sea -1 , esta situación no era posible con los números reales; pero el problema se superó con la construcción de números imaginarios y la invención de la unidad imaginaria i , definida mediante la igualdad

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Luego la solución de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

PARÁBOLAS Y ECUACIONES CUADRÁTICAS

La gráfica de una ecuación de segundo grado es una parábola, su forma es $y = ax^2 + bx + c$, traza una parábola con la coordenada x del vértice en $-\frac{b}{2a}$ y además se **abre hacia arriba** o **abajo**, dependiendo del signo del término cuadrático.



MÉTODO DE ASPA SIMPLE PARA FACTORIZAR TRINOMIOS

El método del aspa simple se usa como alternativa para factorizar trinomios que tienen la forma:

$$ax^2 \pm bx \pm c$$

$$x^2 \pm bx \pm c$$

Por ejemplo:

$$3x^2 - 2$$

$$3x \begin{array}{l} \nearrow +2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow (+2)(x) = +2x \\ \rightarrow (3x)(-1) = -3x \end{array} \downarrow +$$

$$x \begin{array}{l} \nearrow +2 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow (+2)(x) = +2x \\ \rightarrow (3x)(-1) = -3x \end{array} \downarrow -x$$

3. Resolución de ecuaciones completas

Una ecuación completa de segundo grado se puede resolver de forma gráfica, por factorización, por fórmula general y completando cuadrados.

3.1. Resolución gráfica

La resolución gráfica muestra las intersecciones de una parábola con el eje X; el procedimiento se explica en el siguiente ejemplo:

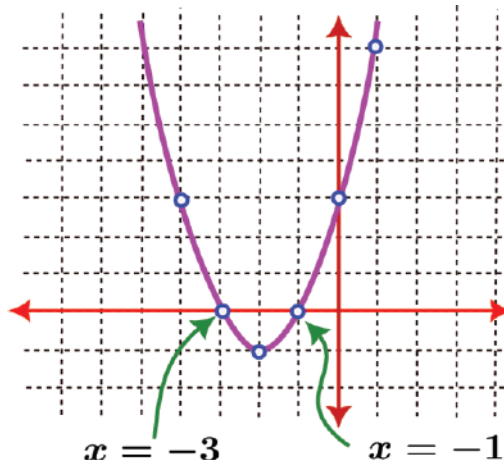
Ejemplo. Resolver gráficamente $x^2 + 4x + 3 = 0$

El primer paso realizamos una tabla de valores: $y = x^2 + 4x + 3$

x	$y = x^2 + 4x + 3$	(x, y)
0	$0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 8$	$(1, 8)$
-1	$(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$	$(-1, 0)$
-2	$(-2)^2 + 4(-2) + 3 = -1$	$(-2, -1)$
-3	$(-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0$	$(-3, 0)$

Para la columna x elegimos números aleatoriamente, las columnas y depende de la ecuación cuadrática

El segundo paso graficamos los puntos en un plano cartesiano:



En el tercer paso buscamos las intersecciones de la parábola con el eje X, y notamos puntos de intersección en $x = -3$ y $x = -1$, que son las soluciones de la ecuación.

3.2. Resolución por factorización

La resolución por este método implica factorizar el trinomio, en general se utiliza aspa simple y luego cada factor se iguala a cero.

Ejemplo. Resolver $x^2 - 4x + 3 = 0$

El primer paso, factorizamos por aspa

$$x^2 - 4x + 3$$

$$x \begin{array}{l} \nearrow -3 \\ \searrow -1 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow (-3)(x) = -3x \\ \rightarrow (x)(-1) = -x \end{array} \downarrow -4x$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & -3 \\ \hline x & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$(x - 3)(x - 1)$$

El término central debe ser igual al resultado del aspa.

Identificamos los factores

El **segundo paso**, igualamos los factores a cero

$$\begin{aligned}(x-3)(x-1) &= 0 \\ x-3 &= 0 \quad ; \quad x-1 = 0 \\ x_1 &= 3 \quad ; \quad x_2 = 1\end{aligned}$$

Resolvemos cada ecuación.

Ejemplo. Resolver $2x^2 + 5x - 3 = 0$

El **primer paso**, factorizamos por aspa

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad +5x \quad -3 \\ \begin{array}{l} x \quad \quad \quad 3 = +6x \\ 2x \quad \quad -1 = -x \end{array} \\ \quad \quad \quad +5x \end{array}$$

El término central debe ser igual al resultado del aspa.

Identificamos los factores

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & 3 \\ \hline 2x & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$(x+3)(2x-1) = 0$$

El **segundo paso**, igualamos los factores a cero y resolvemos:

$$\begin{aligned}(x+3)(2x-1) &= 0 \\ x+3 &= 0 \quad ; \quad 2x-1 = 0 \\ x_1 &= -3 \quad ; \quad 2x = 1 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3.3. Resolución por fórmula general

Si se tiene la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces o soluciones se calculan por la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo. Resolver $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Comparando con la forma general de una ecuación de segundo grado tenemos:

$$a = 2; b = 5; c = -3$$

Sustituyendo valores

Luego tenemos dos raíces

ECUACIONES DE BABILONIOS Y EGIPCIO

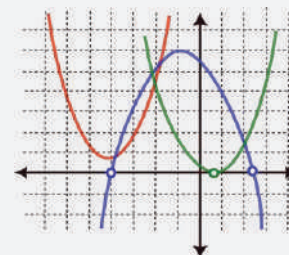


Hay evidencias de que los babilonios, alrededor del año 1600 a.C., ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución.

Este conocimiento pasó a los egipcios, que las usaban para redefinir los límites de las parcelas anegadas por el Nilo, en sus crecidas.

SOLUCIONES O RAÍCES

Llamamos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita a los dos valores: x_1 y x_2 , si existen, de la incógnita x para los que la igualdad de la ecuación es cierta. Podemos comprobar gráficamente la existencia de las dos raíces, si observamos que la parábola corta al eje de las abscisas.



-La ecuación tiene dos soluciones diferentes.

-La ecuación tiene dos soluciones iguales.

-La ecuación tiene no tiene soluciones.

Resolvemos graficando:

(a) $x^2 - 7x + 3 = 0$

(b) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(c) $x^2 - 8x + 7 = 0$

Resolvemos factorizando:

(a) $m^2 - m + 14 = 0$

(b) $m^2 - 2m - 8 = 0$

(c) $3m^2 - 15m = 18$

Resolvemos por fórmula general:

(a) $w^2 + w - 30 = 0$

(b) $w^2 = -6w - 9 = 0$

(c) $2w^2 = 24 - 2w = 0$

(d) $w^2 = -4 - 6w$

(e) $9t^2 = 6 - 6t$

(f) $t^2 - 4t = -2$

COMPLETANDO CUADRADOS

Para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ completando el cuadrado:

1. El término constante, c , debe estar en un lado.
2. Si $a \neq 1$, se divide ambos lados entre a .
3. Se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente del término x , $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos lados.
4. Se factoriza el trinomio como cuadrado de un binomio.
5. Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados. (Recordar que: $(x + q)^2 = r$ es equivalente a $x + q = \pm\sqrt{r}$)
6. Se despeja x .

3.4. Resolución completando cuadrados

Completar el cuadrado es una técnica para volver a escribir cuadráticas en la forma $(x + a)^2 + b$

Ejemplo. Resolver $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x^2 - 4x + 2^2 = -3 + 2^2$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{1}$$

$$x - 2 = \pm 1$$

$$x - 2 = +1 ; \quad x - 2 = -1$$

$$x = 1 + 2 ; \quad x = -1 + 2$$

$$x_1 = 3 ; \quad x_2 = 1$$

El término independiente se queda en el segundo miembro

Completamos con el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal, esto se suma a ambos miembros.

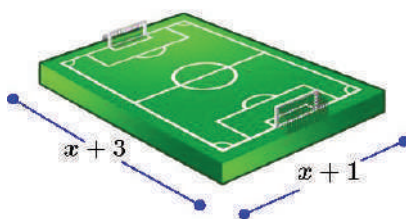
Factorizamos el trinomio

Luego tenemos dos raíces

4. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

En el siguiente apartado resolvemos algunos problemas de ecuación de segundo grado.

Problema. Cierta cancha de la escuela Shepard tiene 195 m^2 , considerando la figura, hallar la longitud de sus lados.



Solución:

Planteando la ecuación:
Área del rectangular:

$$(x + 1)(x + 3) = 195$$

$$x^2 + 4x + 3 = 195$$

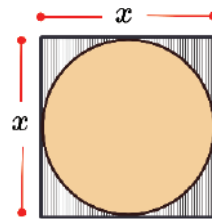
$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

Luego sus raíces son:
 $x = 12$; $x = -16$. Se

admite como solución
 $x = 12$

Por tanto, los lados miden 13 y 15

Problema. Calcular el área de la parte sombreada. Sabiendo que el área del cuadrado es 36.



Solución:

Utilizando el dato del área de un cuadrado, tenemos:

$$\text{Área} = x \cdot x = 36$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x_{1,2} = \pm 6$$

Luego el lado del cuadrado mide 6. y la radio del círculo es 3

Área del cuadrado

$$A = 6 \cdot 6$$

$$A = 36 [\text{m}^2]$$

Área del círculo

$$A = \pi \cdot 3^2 \text{m}^2$$

$$A = 9\pi [\text{m}^2]$$

Finalmente el área será:

$$A_T = A_{\text{CUADRADO}} - A_{\text{CIRCULO}}$$

$$A_T = 36 - 9\pi$$

$$A_T = 9(4 - \pi) [\text{m}^2]$$

Actividad

Resolvemos completando cuadrados:

(a) $y^2 = -10y - 24$

(b) $x^2 + 2x = 6$

(c) $a^2 - 12a = -35$

(d) $a^2 + 4a = -32$

(e) $y^2 - 6y = 3$

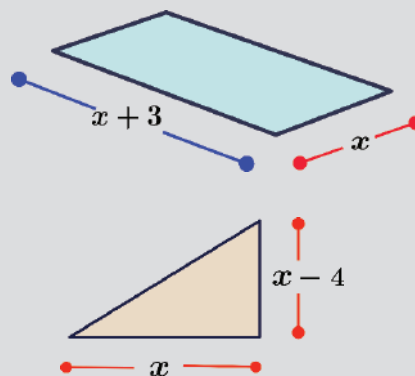
(f) $a^2 - 8a = -11$

(g) $m^2 + 4m = -2$

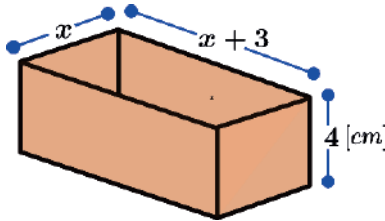
Resolvemos los siguientes problemas:

(a) El largo de un rectángulo es 3 pies más grande que su ancho. Determine las dimensiones del rectángulo, si su área es 28 pies cuadrados.

(b) Sabiendo que un triángulo rectángulo tiene un área de 320 m^2 . Calcular las dimensiones de sus lados.



Problema. Una compañía de cosméticos diseña una caja sin tapa para empacar sus productos con un volumen de 72 cm^3 . Sus dimensiones están representadas en la gráfica. Hallar las dimensiones de la caja.



Solución:

Volumen de la caja:

$$4x(x+3) = 72$$

$$4x^2 + 12x = 72$$

$$4x^2 + 12x - 72 = 0$$

Luego sus raíces

son: $x = 3$; $x = -6$

Tomamos $x = 3$. Luego los lados medirán: 3, 4 y 7 centímetros

Problema. Determina las dimensiones de un terreno que ocupa un área de 72 m^2 , y además uno de los lados es 18 unidades menos que el otro.

Solución:

x : es un lado

$x - 18$: el otro lado

Planteando la ecuación:

Área del rectangular

$$x(18 - x) = 72$$

$$18x - x^2 = 72$$

$$-x^2 + 18x - 72 = 0$$

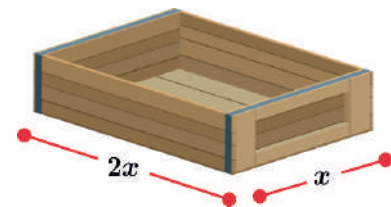
$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

Luego sus raíces son: $x = 12$; $x = 6$

Por tanto, los lados miden 6 y 12



En nuestra vida cotidiana, muchas veces debemos calcular el área de cierto espacio, para acomodar algo o para construir cosas; a veces el área de un lote de terreno, así, al construir una caja rectangular en donde la base de un lado debe tener el doble de la longitud del otro lado.



VALORACIÓN

Actividad

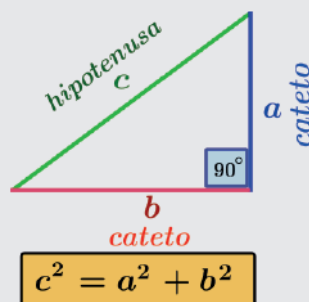
- ¿Qué otras aplicaciones en la vida cotidiana tienen las ecuaciones cuadráticas?
- ¿En qué áreas científicas se utilizan las ecuaciones cuadráticas?

PRODUCCIÓN

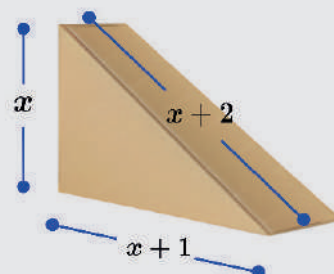
La construcción de objetos que tengan formas geométricas requiere el manejo de ecuaciones de segundo grado, es importante investigar y aplicar la teoría de ecuaciones cuadráticas para ampliar nuestro aprendizaje. Resuelve:

Actividad

Una de las leyes importantes en matemática es el Teorema de Pitágoras, señala que en todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.



En la figura observamos una caja de madera triangular. Utilizando el Teorema de Pitágoras, calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.



REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

POTENCIACIÓN

1. Aplicar las propiedades de potenciación

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} ; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- | | |
|---|---|
| (a) $a^{12} \cdot a^{24} \cdot a^{48}$ | (g) $\frac{2^3}{2^2}$ |
| (b) $10^2 \cdot 10^2$ | (h) $\frac{2^{4+2n}}{2^{n-2}}$ |
| (c) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ | (i) $\frac{3^{5x-5}}{3^{5x-4}}$ |
| (d) $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{1-2x}$ | (j) $\frac{2^{x^2-3x+1}}{2^{x^2-3x-1}}$ |
| (e) $3^x \cdot 3^{x-3} \cdot 3^{4-x}$ | |
| (f) $5^{n-1} \cdot 5^{n+3} \cdot 5^{-2n}$ | |

2. Aplicar las propiedades de potenciación

$$a^0 = 1; (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- | | |
|--|---|
| (a) $2a^0 + a^2 - a^0$ | (g) $(2^2)^2$ |
| (b) $(2024)^2 \cdot (2024)^{-2}$ | (h) $[2^0]^2 + [2^{\frac{5}{3}}]^3$ |
| (c) $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{-4}$ | (i) $(1^{2x})^{2025}$ |
| (d) $a^{2x} \cdot a^{x+3} \cdot a^{-3-3x}$ | (j) $[(2^3)^2]^2$ |
| (e) $(-1)^{x+3} \cdot (-1)^{x-3}$ | (k) $[2^{\frac{3}{2}}]^2 - [2^{\frac{1}{2}}]^2$ |
| (f) $e^{x-1} \cdot e^{x+3} \cdot e^{1-2x}$ | |

3. Aplicar las propiedades de potenciación

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

- | | |
|---|---|
| (a) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$ | (g) $(2^2 \cdot 2^{-1})^{-3}$ |
| (b) $(2x)^2 \cdot (2x)^{-3}$ | (h) $[2^{-2}]^2 - [2^{-\frac{1}{3}}]^3$ |
| (c) $2^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-2}$ | (i) $(2^0 \cdot 2^{-2} \cdot 2^2)^{-2}$ |
| (d) $m^{2x} \cdot m^{x-5} \cdot m^{3-3x}$ | (j) $[(2^{-2} \cdot 2^2)^{-2}]^{-2}$ |
| (e) $(-2)^{x-3} \cdot (-2)^{4-3x}$ | (k) $[2^{\frac{3}{2}}]^2 - [2^{\frac{1}{2}}]^2$ |
| (f) $e^{2x-1} \cdot e^{x-3} \cdot e^{1-2x}$ | |

4. Aplicar las propiedades de potenciación:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ; \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ | (d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ |
| (b) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$ | (e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ |
| (c) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ | (f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ |

5. Simplificar utilizando propiedades de exponentes:

- | | |
|---|---|
| (a) $\frac{a^{17} \cdot a^{-29}}{a^{-15} \cdot a}$ | (e) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)^{-2}$ |
| (b) $\frac{a^7 \cdot a^{-9}}{a^{-5} \cdot a^5} - \frac{a^0 \cdot a^2}{a^{-2} \cdot a^2}$ | (f) $\left(\frac{2x}{xy}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2x}{xy}\right)^2$ |
| (c) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1$ | (g) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-1}$ |
| (d) $\left(\frac{9}{4}\right)^{12} \cdot \frac{8^8}{3^{22}} - \frac{2^{12} \cdot 5^{10}}{(2 \cdot 5)^{10}}$ | (h) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2\right] \div \left(\frac{x}{6}\right)^{-1}$ |

6. Las bacterias son seres vivos minúsculos que se reproducen dividiéndose por la mitad cada cierto tiempo. Si suponemos que una bacteria se divide cada minuto.

En ese caso, después de dos minutos tendríamos cuatro bacterias, a los tres minutos ocho bacterias y así sucesivamente.

¿Cuántas bacterias tendríamos a los 10 minutos?



7. Una persona escucha un rumor, tres horas después ya se lo había contado a dos personas, cada una de las cuales, tres horas después se lo cuentan a otras dos que no lo conocían y así sucesivamente.

¿Cuántas personas han escuchado el rumor después de 18 horas?



8. Se pone levadura en la masa para que esta aumente. Las células de levadura se reproducen dividiéndose en dos. Si hubiese 10 células y cada una se dividiera en dos después de una hora. ¿Cuántas células habría en cuatro horas? Expresa en potencias



RADICACIÓN

1. Utilizar la definición de radicación

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sqrt{4} = 2 & \Leftrightarrow & 2^2 = 4 \\ \text{(b)} \sqrt{9} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(c)} \sqrt{121} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(d)} \sqrt{289} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(e)} \sqrt[3]{1728} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(f)} \sqrt[3]{512} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(g)} \sqrt[5]{32} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(h)} \sqrt[7]{128} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \\ \text{(i)} \sqrt[7]{2187} = _ & \Leftrightarrow & _ = _ \end{array}$$

2. Aplicar las propiedades de potenciación. Expresar como exponente fraccionario o viceversa.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} & \text{(g)} \sqrt[5]{x^{-1}} = 3^{\frac{2}{3}} \\ \text{(b)} \sqrt[3]{3^5} & \text{(h)} \sqrt[3]{(x+y)^5} \\ \text{(c)} \sqrt[3]{4^3} & \text{(i)} \sqrt[5]{(a+b)^2} \\ \text{(d)} \sqrt[5]{4^2} & \text{(j)} \sqrt[3]{(1-x)^{-2}} \\ \text{(e)} \sqrt{3} & \text{(k)} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^3} \\ \text{(f)} \sqrt{3^{10}} & \end{array}$$

3. Aplicar las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} & \text{(g)} \sqrt[5]{64} = 3^{\frac{2}{3}} \\ \text{(b)} \sqrt{50} & \text{(h)} \sqrt[7]{(1+y)^5} \\ \text{(c)} \sqrt{80} & \text{(i)} \sqrt[5]{(a+b)^2} \\ \text{(d)} \sqrt{120} & \text{(j)} \sqrt[3]{1+x+y} \\ \text{(e)} \sqrt[3]{54} & \text{(h)} \sqrt[3]{(x+y+z)^5} \\ \text{(f)} \sqrt[3]{625} & \text{(k)} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^4} \\ \text{(c)} \sqrt{800} & \text{(l)} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^5} \\ \text{(d)} \sqrt{1024} & \\ \text{(e)} \sqrt[3]{128} & \\ \text{(f)} \sqrt[3]{3125} & \end{array}$$

4. Aplicar las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} & \text{(e)} \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^3}} \\ \text{(b)} \sqrt[3]{\frac{125}{64}} & \text{(f)} \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \\ \text{(c)} \sqrt{\frac{120}{4}} & \text{(g)} \sqrt{\frac{120}{4}} \\ \text{(d)} \sqrt{\frac{100}{80}} & \text{(h)} \sqrt{\frac{100}{80}} \end{array}$$

5. Aplicar las propiedades de radicación y simplificar:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt{\sqrt{2}} & \text{(f)} \sqrt{\sqrt{\sqrt{64}}} \\ \text{(b)} \sqrt{\sqrt{x}} & \text{(g)} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{x^6}{4096}}}} \\ \text{(c)} \sqrt[3]{\sqrt{64}} & \text{(h)} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{x^{2024}}{x^{2023}}}}} \\ \text{(d)} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{729}}} & \\ \text{(e)} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{a^6}}} & \end{array}$$

6. Igualar los índices:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt{3} ; \sqrt[3]{3} & \text{(d)} a\sqrt{2} ; a\sqrt[5]{2} \\ \text{(b)} \sqrt{3} ; \sqrt[3]{3} ; \sqrt[5]{2} & \text{(e)} 2\sqrt{x} ; \sqrt[3]{x} ; 2\sqrt[5]{x} \\ \text{(c)} 2\sqrt{2} ; 4\sqrt[3]{5} & \text{(f)} 2\sqrt{\frac{a}{b}} ; \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \end{array}$$

7. Sumar o restar:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} B = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ \text{(b)} C = 12\sqrt{a} - 22\sqrt{a} - 15\sqrt{a} + 4\sqrt{a} \\ \text{(c)} D = 7\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 30\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \\ \text{(d)} E = \sqrt{x} + 20\sqrt{x} - 21\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \\ \text{(e)} L = 6\sqrt{x+y} - \sqrt{x+y} - 5\sqrt{x+y} \\ \text{(g)} T = 7\sqrt{x-y} - \sqrt{x-y} - 6\sqrt{x-y} \end{array}$$

7. Multiplicar:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} S = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} & \text{(f)} L = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \\ \text{(b)} A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} & \text{(g)} V = \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \\ \text{(c)} M = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} & \text{(h)} I = \sqrt[5]{m^2} \cdot \sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{m^2} \\ \text{(d)} U = \sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} & \text{(i)} E = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ \text{(e)} E = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} & \text{(j)} N = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \end{array}$$

8. Dividir:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} J = \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{144}} & \text{(d)} U = \frac{12\sqrt{2xy}}{3\sqrt{xy}} \\ \text{(b)} E = \frac{8\sqrt{100x^2}}{2\sqrt{4x^4}} & \text{(e)} S = \frac{8\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{a^2+2ab+b^2}} \\ \text{(c)} R = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2n}} & \text{(f)} A = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt{a+b}} \end{array}$$

9. Descomponer en radicales simples:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} S = \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} & \text{(a)} U = \sqrt{1 + 2\sqrt{9}} \\ \text{(b)} U = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} & \text{(b)} R = \sqrt{10 + 2\sqrt{4}} \\ \text{(c)} C = \sqrt{5 + 2\sqrt{7}} & \text{(c)} U = \sqrt{12 + 2\sqrt{3}} \\ \text{(d)} R = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}} & \text{(d)} S = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \end{array}$$

RACIONALIZACIÓN

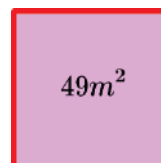
1. Racionalizar. Caso $\frac{B}{\sqrt{A}}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} S = \frac{1}{\sqrt{17}} & \text{(h)} C = \frac{a}{\sqrt[3]{3}} \\ \text{(b)} A = \frac{1}{\sqrt{13}} & \text{(i)} O = \frac{a}{\sqrt[3]{10a}} \\ \text{(c)} N = \frac{8}{\sqrt{20}} & \text{(j)} C = \frac{1}{\sqrt{x+y}} \\ \text{(d)} T = \frac{1}{\sqrt{30}} & \text{(k)} H = \frac{3}{\sqrt{9(x-y)}} \\ \text{(e)} A = \frac{2}{2\sqrt{5}} & \text{(l)} A = \frac{8}{2\sqrt{16(a-b)}} \\ \text{(f)} C = \frac{8}{12\sqrt{2}} & \text{(m)} B = \frac{2a}{a\sqrt{4a+4b}} \\ \text{(g)} R = \frac{1}{2\sqrt{3}} & \end{array}$$

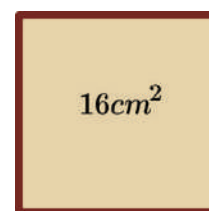
2. Racionalizar. Caso $\frac{C}{\sqrt{A+b}}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} M = \frac{1}{\sqrt{2}-2} & \text{(h)} C = \frac{x}{\sqrt{x-y}} \\ \text{(b)} A = \frac{1}{\sqrt{5}-5} & \text{(i)} O = \frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{8}}} \\ \text{(c)} R = \frac{8}{8-\sqrt{8}} & \text{(j)} C = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \text{(d)} D = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} & \text{(k)} H = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \\ \text{(e)} A = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} & \text{(l)} A = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}} \\ \text{(f)} C = \frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} & \text{(m)} B = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} \\ \text{(g)} R = \frac{1}{\sqrt{3}-5\sqrt{2}} & \end{array}$$

5. Si el área de un cuadrado es igual a $49 m^2$. ¿Cuál es la medida de su lado?



6. El área de un cuadrado es igual a $16 cm^2$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



7. Una mesa cuadrada tiene una superficie de $121 dm^2$. ¿Cuál es la medida del lado de la mesa cuadrada?

8. Cruz Alberto da 6 vueltas alrededor de un parque cuadrado, que tiene una superficie de $400 m^2$. ¿Cuántos metros recorre Luis?



9. En la Unidad Educativa CONVIFACG se quieren distribuir 625 estudiantes, formando un cuadrado. ¿Cuántos estudiantes habrá en cada lado del cuadrado?

ECUACIONES LINEALES

1. Resolver:

- (a) $6x - 2 = 4x - 5$ (d) $3x + 8 = 8x - 8$
 (b) $x + 5 = 3x - 5$ (e) $x - 10 = 3x - 10$
 (c) $10x - 2 = x - 1$ (f) $2023x - 2 = 2024x$

2. Resolver:(ecuaciones con signos de agrupación)

- (a) $6(x - 2) = x$ (d) $-[-(x - 1) - 1] = -(x - 1)$
 (b) $-(x + 5) = x$ (e) $x - [-(x + 5) - 7] = -x$
 (c) $-2 = -(1 - x)$ (f) $1 - \{ -[-(x - 1) - 1] \} = 1$

3. Resolver:(ecuaciones con coeficiente fraccionario)

- (a) $\frac{x}{4} - \frac{x-2}{4} = \frac{1}{4}$ (a) $\frac{x}{5} - \frac{x-2}{5} = \frac{x}{10}$
 (b) $\frac{x+5}{2} - \frac{4x-2}{5} = -\frac{2}{3}$ (b) $\frac{x-5}{3} - \frac{x-1}{9} = -\frac{1}{3}$
 (c) $\frac{2x-5}{7} - \frac{2-x}{5} = \frac{x-2}{10}$ (c) $\frac{x-1}{8} + \frac{2-x}{16} = -\frac{x-1}{8}$

4. Resolver:(ecuaciones fraccionarias)

- (a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 3$ (d) $\frac{2x-4}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{12}{x+1}$
 (b) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 5$ (e) $\frac{x^2+x+3}{x^2-x+3} = \frac{2x+5}{2x+7}$
 (c) $\frac{5x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x+2}$ (f) $\frac{5}{1+x} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} = 0$

4. Resolver:(ecuaciones literales)

- (a) $abx = a - x(a^2 + b^2) - b(ax - 1)$
 (b) $(m-4)x + (m-5)x = (x-5)m + (x-4)m$
 (c) $(x+m)^2 - (x+n)^2 = (m-n)^2$
 (d) $\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2-6a^2}{ab}$
 (e) $\frac{x+a}{x-a} = \frac{x-a}{x+a} - \frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$

5. Busca un número sabiendo que si se le divide entre 3 y al resultado se le suma 2 se obtiene 5.
 6. La suma de tres números consecutivos es 48. ¿Cuáles son los números?
 7. El perímetro de un rectángulo es 12 metros, si su base mide 4 metros. ¿Cuánto mide la altura?
 8. En un rectángulo la base mide el doble que la altura y su perímetro es 132 metros. ¿Cuánto miden la base y la altura?

ECUACIONES CUADRÁTICAS

1. Resolver (ecuaciones incompletas)

- (a) $m^2 - 9m = 0$ (g) $81t^2 - = 0$
 (b) $-4x^2 - x = 0$ (h) $121k^2 - 36 = 0$
 (c) $16t^2 - 8t = 0$ (i) $144k^2 - 169 = 0$
 (d) $100x^2 - 10x = 0$ (j) $196x^2 - \frac{1}{36} = 0$
 (e) $169x^2 - 13x = 0$ (k) $\frac{t^2}{100} - \frac{1}{400} = 0$
 (f) $25t^2 - 25x = 0$

2. Resolver por factorización:

- (a) $m^2 + 10m + 9 = 0$ (g) $8t^2 - 12t - 36 = 0$
 (b) $-4m^2 + m + 1 = 0$ (h) $6k^2 + 5k - 6 = 0$
 (c) $8t^2 + 10t + 3 = 0$ (i) $15k^2 - 7k - 4 = 0$
 (d) $t^2 + 2t - 15 = 0$ (j) $x^2 + 24x + 143 = 0$
 (e) $t^2 - 18t + 77 = 0$ (k) $t^2 + 17t + 72 = 0$
 (f) $2t^2 + 8t + 8 = 0$ (l) $4t^2 - 7t + 3 = 0$

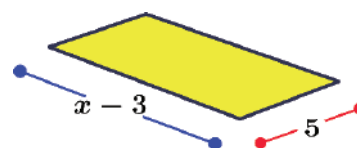
3. Resolver por fórmula general:

- (a) $m^2 + 2m + 6 = 0$ (f) $2t^2 - 7t + 4 = 0$
 (b) $-x^2 - 7x + 12 = 0$ (f) $20 = -5k^2 - 5k$
 (c) $4x^2 + 3x - 22 = 0$ (g) $2k^2 = 3k - 2$
 (d) $t^2 + 4t - 21 = 0$ (h) $5t^2 - 7t - 90 = 0$
 (e) $x^2 + 63 = 16x$ (i) $4t^2 + 3t = 22$

4. Resolver completando cuadrados

- (a) $m^2 + 6m - 16 = 0$ (d) $t^2 + 2t = 3$
 (b) $x^2 - 12x + 20 = 0$ (e) $7 = k^2 + 6k$
 (c) $t^2 = -10t - 16$ (f) $6k^2 = 8 - 13k$

5. Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.
 6. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Hallar dichos números
 7. Si se aumenta el lado de un cuadrado en 4 cm, el área aumenta en 80 cm^2 . Calcula el lado del cuadrado.
 8. Un rectángulo tiene área de 10 cm^2 . Considerando la gráfica, hallar las longitudes de sus lados



9. Un triángulo tiene área de 16 cm^2 . Considerando la gráfica, hallar la ecuación que representa su área.



(Ejercicios y problemas recopilados)

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

- Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. “*Texto de aprendizaje*”. 3er. Año, primero, segundo y tercer trimestre. La Paz, Bolivia.
- Ministerio de Educación, (2023). *Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz – Bolivia.
- Ministerio de Educación. “*Prontuario de mis aprendizajes MATEMÁTICA* [En proceso de Publicación].” (2023)
- Tintaya Condori, L. (2015). *Matemáticas 3*, Editorial Bruño – Bolivia.
- Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México
- Londoño, N. & Bedoya, H. (2003), *Matemática Progresiva 3*, Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.
- Olmos Millán, A. & Martínez C, L. C. (2003), *Matemática Práctica 3*, Editorial Voluntad S.A. – Colombia.
- Diccionario de Matemáticas (2000), Editorial Cultural S. A. Polígono Industrial Arroyomolinos – España.
- Laura Valencia, R. 2023. Compilado de Matemática 3, texto inédito.
- Allen R. A. (2007). *Álgebra Elemental*. Pearson. México.
- Dennis G. Z. (2012). *Álgebra y trigonometría*. McGRAW-HILL. México.
- Earl W. S. (2009). *Álgebra y trigonometría*. Cengage Learning Editores. México.
- Murray R. (2007). *Algebra Superior Ed*. McGRAW-HILL. México
- Allen R. A. (2008). *Algebra Intermedia*. Ed. Pearson. México
- Santillana Ed., (2013). *Matemática 2 para segundo curso de educación secundaria*. Santillana de Ediciones S.A.
- Baldor, A. (2008). *Álgebra* (2 ed.). México: Patria.
- Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. P. (2005). La caja de polinomios. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIII(1), 83-97.
- Wikimat. (s. f.). Factorización por Ruffini. <https://wikimat.es/polinomios/factorizacion/ruffini/>
- Madrid. (2020, 29 de febrero). Los polinomios y sus aplicaciones. *Matemáticas y sus fronteras*. <https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2020/02/29/147396>
- Santillana Ed., (2010). *Matemática Álgebra, funciones y la función lineal para Tercero de secundaria*. Santillana de Ediciones S.A.
- Revollo Torrico, R., (2022). *Matemática 3 Secundaria*. Tinta Plana. Cochabamba, Bolivia.
- Chapman, H. y Libertini, L. (2020). Descomposición de fracciones y fracciones parciales. LibreTexts.
- Fmaima. (2015, marzo 23). Fracciones algebraicas. SlideShare.
- Vázquez Vidal, G. (2018). Usos y curiosidades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo que nunca te habías imaginado. WordPress. Recuperado el 28 de agosto de 2023 de <https://gloriavazquezvidal.wordpress.com/2018/09/06/usos-y-curiosidades-del-maximo-comun-divisor-y-del-minimo-comun-multiplo-que-nunca-te-habias-imaginado/>

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **3ER AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología – Geografía

Giovana Velarde Vargas

Física

Jonathan Vino Varias

Química

Tatiana Soliz Espinoza

Lengua Castellana

Jazmin del Carmen Cañasto
Quisbert

Ciencias Sociales

Nilton Pizaya Blanco

Matemática

Rolando Vicente Laura Valencia

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía

Soraya Alejandra Mamani Quintana

Física

Alison Fabiola Poma Ovaillos

Química

Miriam Virginia Barcaya Rosales

Lengua Castellana

Yeny Aruquipa Saucedo

Ciencias Sociales

Erick Eduardo Cutipa Garcia

Matemática

Richard Revollo Torrico

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía

Jazmine Coral Ontiveros Terán

Física

Ted Aderly Valdez Alvan

Química

Ronald Quispe Lipa

Lengua Castellana

Anthony Alberto Laura Achá

Ciencias Sociales

Nilton Pizaya Blanco

Matemática

Juan Gutierrez Suntura

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA



ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN