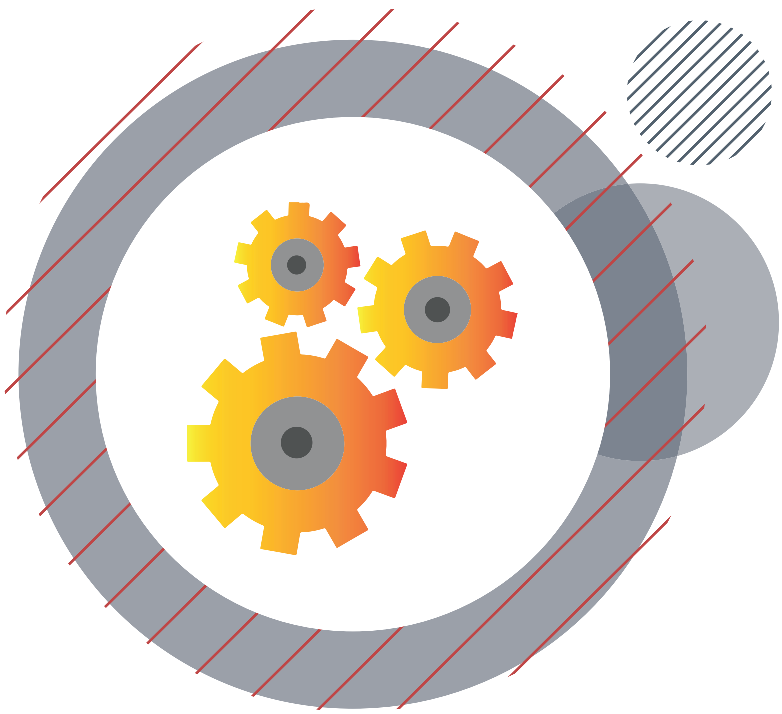
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

3 SECUNDARIA

TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024



SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA
ÁREA
MATEMÁTICA

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024
Educación secundaria comunitaria productiva
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Bartolomé Puma Velásquez
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

María Salomé Mamani Quispe
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Coordinación general
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Índice

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Matemática

Tercer año de secundaria

PRESENTACIÓN

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:

Glosario

Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.

Investiga

¿Sabías que...?

¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.

Noticiencia

Escanea el QR

Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.

Aprende haciendo

Desafío

Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.

¡Taller de Ortografía!

¡Taller de Caligrafía!

¡Razonamiento Verbal!

3 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

ECUACIONES APLICADAS AL CONTEXTO Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Una familia desea rentar un automóvil, para ello, se dirigen a una empresa que alquila autos y cobra Bs 200 al día y Bs 1,5 por 1 kilómetro recorrido. El padre renta un auto durante dos días y su cuenta llega a Bs 610. ¿Cuántos kilómetros (km) recorrió aproximadamente? Para solucionar este problema, debemos recurrir a la guía para modelar ecuaciones.

Identificamos la variable. Nos piden calcular el número de Km.

$$x = \textit{número de kilómetros}$$

Del lenguaje común al algebraico. Convertimos toda la información al lenguaje algebraico.

Lenguaje común	Algebraico
Número de kilómetros recorridos	x
Costo del recorrido (Bs 1,5 por 1 km)	$1{,}5x$
Costo diario (Bs 200 por día)	$2(200)$

Formulamos el modelo. Proponemos un modelo

Costo del recorrido + costo diario = costo total

$$1{,}5x + 2(200) = 610$$

Solucionamos. Ahora realizamos operaciones algebraicas

$$1{,}5x + 2(200) = 610 \rightarrow x = \frac{210}{1{,}5} = 140$$

Entonces recorrieron 140 kilómetros.

Como podemos observar de esta manera se puede aplicar las ecuaciones en la resolución de problemas en el contexto.

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

Paso 1: identificamos la variable. Identificamos la cantidad que el problema pide calcular. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea en el problema.

Paso 2: del lenguaje común al lenguaje algebraico. Leemos nuevamente el problema y lo expresamos en función a la variable que hemos definido en el paso 1 para organizar esta información, a veces es útil trazar un diagrama o hacer una tabla.

Paso 3: formulamos el modelo. Formulamos una ecuación (o modelo) que resuelva el problema planteado.

Paso 4: solución y prueba del resultado. Resolvemos la ecuación, verificamos el resultado y lo expresamos como una respuesta a la pregunta planteada.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Términos semejantes y su relación con la producción

Son términos semejantes aquellos que difieren en sus coeficientes o parte numérica pero que tienen la misma parte literal. Por ejemplo, $6xy$ y $-3xy$ son términos semejantes; $5x^2z$ y $-\sqrt{8}x^2z$ son términos semejantes; pero, $-4a^3b^2$ y $7a^2b^8$ son términos diferentes a pesar de contener la misma parte literal ya que sus exponentes son diferentes respectivamente.

Una **expresión algebraica** de dos o más términos semejantes puede reducirce a un solo término. Por ejemplo, $5a^2b^3 - 2a^2b^3 + a^2b^3$ puede reducirce a $4a^2b^3$, para ello debemos realizar el siguiente procedimiento de reducción de términos semejantes:

a) Agrupamos los coeficientes de los términos semejantes y copiamos el término literal.

$$5a^2b^3 - 2a^2b^3 + a^2b^3 = (5-2+1)a^2b^3$$

b) Sumamos los coeficientes agrupados.

$$(5-2+1)a^2b^3 = 4a^2b^3$$

2. Operaciones con expresiones algebraicas

La **suma** de expresiones algebraicas se realiza reduciendo términos semejantes. Para ello, las expresiones se colocan en filas con los términos semejantes en la misma columna, posteriormente se procede a realizar la suma algebraica.

Ciencia divertida

Ley de signos de sumas y restas:

a. Signos iguales se suman las cantidades y mantienen su signo.

$$(+)+(+)=(+)$$
$$(-)+(-)=(-)$$

b. Signos diferentes se restan las cantidades y domina signo del mayor.

$$(+)+(+)=(+)$$
$$(-)+(-)=(-)$$

Propiedades de la suma:

1. Asociativa
$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
2. Conmutativa
$$x+y=y+x$$
3. Elemento neutro
$$x+0=x=0+x$$

Ley de signos de multiplicación

$$(+)\times(+)=(+)$$
$$(-)\times(-)=(+)$$
$$(+)\times(-)=(-)$$
$$(-)\times(+)=(-)$$

Propiedades de la multiplicación

1. Asociativa
$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$
2. Conmutativa
$$x\times y=y\times x$$
3. Distributiva respecto a la adición o sustracción.
$$x(y\pm z)=(x\times y)\pm(x+z)$$
4. Elemento neutro
$$x\times 1=x=1\times x$$

Ley de signos de la división

$$(+)\div(+)=(+)$$
$$(-)\div(-)=(+)$$
$$(-)\div(+)=(-)$$
$$(-)\div(+)=(-)$$

Propiedades de potenciación:

a. Producto de bases iguales
$$a^n\times a^m=a^{n+m}$$
b. Cociente de bases iguales
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$
c. Potencia inversa
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
d. Exponente cero
$$a^0=1$$

Ejemplo 1. Sumamos: $3x+5y^3+6xy;\ 9x-4y^3-2xy; -4x+7y^3-xy$.

$$\begin{array}{rrr} 3x & +5y^3 & +6xy \\ 9x & -4y^3 & -2xy \\ -4x & +7y^3 & -xy \\ \hline 8x & +8y^3 & +3xy \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado es $8x+8y^3+3xy$

Ejemplo 2. Sumamos: $\frac{1}{2}a-5ab-3b^2;\ 4a+5b^2; -2a+3ab+4b^2$.

Por lo tanto, el resultado es $\frac{5}{2}a\ -2ab\ +6b^2$

Ejemplo 3. Sumamos: $3x+5y^3+6xy; 9x-4y^3-2xy; -4x+7y^3-xy$.

Para la **resta** de dos expresiones algebraicas se cambia el signo de los términos del sustraendo, posteriormente se realiza la suma de los términos semejantes.

Ejemplo 4. Restamos: $9x-6y^2+4xy$ de $3x-3y^2-7xy$.

$$-\begin{array}{r} 3x-3y^2-7xy \\ 9x-6y^2+4xy \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 3x-3y^2-7xy \\ -(9x-6y^2+4xy) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 3x-3y^2-7xy \\ -9x+6y^2-4xy \\ \hline -6x+3y^2-11xy \end{array}$$

Ejemplo 5. Restamos: $-3a^3+12ab-21b^3$ de $14-8ab+6b^3$.

$$-\begin{array}{r} 14a^3-8ab+6b^3 \\ -3a^3+12ab-21b^3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 14a^3-8ab+6b^3 \\ -(-3a^3+12ab-21b^3) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 14a^3-8ab+6b^3 \\ 3a^3-12ab+21b^3 \\ \hline 17a^3-20ab+27b^3 \end{array}$$

De igual manera se puede escribir la resta de manera horizontal:

$$(14a^3-8ab+6b^3)-(-3a^3+12ab-21b^3)$$
$$\to 14a^3-8ab+6b^3+3a^3-12ab+21b^3=17a^3-20ab+27b^3$$

Para **multiplicar** dos o más expresiones algebraicas, debemos multiplicar los términos contenidos en los factores de dicha multiplicación.

a. Para **multiplicar monomios** utilizamos propiedades de potenciación (producto de bases iguales) y las leyes conmutativa y asociativa.

Ejemplo 1. Multiplicamos: $-2x^3\ ;3xy;-7x^2y^2;2y^3x$.

Aplicamos las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación

$$\text{Escribimos}\quad [(-2)(3)(-7)(2)][(x^3)(x)(x^2)(x)][(y)(y^2)(y^3)]$$

Multiplicamos los coeficientes según la ley de signos y aplicamos la propiedad de potencia de bases iguales.

$$(84)(x^{3+1+2+1})(y^{1+2+3})=84x^7y^6$$

b. Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, debemos multiplicar el monomio por cada término del polinomio y sumar los términos semejantes.

Ejemplo 2. Multiplicamos: $-\frac{1}{3}x^3y$ por $3+x^2y^3-36x$.

$$\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(3+x^2y^3-36x)=\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(3)+\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(x^2y^3)-\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(36x)$$

$$=-x^3y-\frac{1}{3}x^{3+2}y^{1+3}+12x^{3+1}y=-x^3y-\frac{1}{3}x^5y^4+12x^4y$$

c. Para **multiplicar dos polinomios**, se debe multiplicar cada término de un polinomio por los términos del otro polinomio y posteriormente reducir términos semejantes.

Ejemplo 3. Multiplicamos: 3a + 2a² -4 por -a -3.

1. Multiplicamos el polinomio por -a.
2. Multiplicamos el polinomio por -3
3. Sumamos términos semejantes

$$\begin{array}{r} 2a^2+3a-4 \\ \underline{-a-3\quad\quad\quad} \\ -2a^3-3a^2+4a\quad\quad \\ \underline{-6a^2-9a+12} \\ -2a^3-9a^2-5a+12 \end{array}$$

Ordenamos de manera descendente según las potencias de a

Para **Dividir** expresiones algebraicas, debemos aplicar propiedades de potenciación como la división de bases iguales.

a. La división entre dos monomios consiste en determinar el cociente de los coeficientes numéricos y variables.

Ejemplo 1. Dividimos: $36x^5y^3z^2$ entre $-3x^3y^2z$

$$\text{Solución}: \frac{36x^5y^3z^2}{-3x^3y^2z}=\left(\frac{36}{-3}\right)\left(\frac{x^5}{x^3}\right)\left(\frac{y^3}{y^2}\right)\left(\frac{z^2}{z}\right)=(-12)\left(x^{5-3}\right)\left(y^{3-2}\right)\left(z^{2-1}\right)=-12x^3yz$$

b. Para la división de polinomios realizamos:

1°. Ordenamos los términos de ambos polinomios en orden descendente o ascendente de acuerdo con la potencia de una de las variables comunes a ambos polinomios.

2°. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Obteniendo el primer término del cociente.

3°. Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor y restamos del dividendo, obteniendo así un nuevo dividendo. Repetimos este procedimiento hasta que se obtenga un residuo, el cual tendrá un grado menor que el grado del divisor o cero.

4°. Por último, escribimos el resultado de la siguiente forma.

$$\frac{Dividendo}{Divisor}=Cociente+\frac{Residuo}{Divisor}$$

Ejemplo 2. Dividimos: $2x^2+4x^4-3x^3-3+x$ entre x^2+2x+1

$$\begin{array}{r|l} 4x^4-3x^3+2x^2+x-3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^4-8x^3-4x^2\quad\quad\quad\quad} & 4x^2-11x+20 \\ -11x^3-2x^2+x\quad\quad & \\ \underline{11x^3+22x^2+11x\quad\quad} & \\ 20x^2+12x-3 & \\ \underline{-20x^2-40x-20} & \\ -28x-23 & \end{array}$$

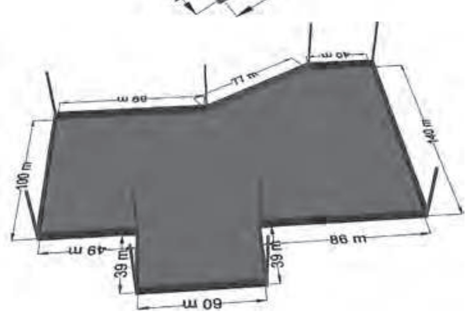
Por lo tanto el resultado de $\dfrac{4x^4-3x^3+2x^2+x-3}{x^2+2x+1}$ es $4x^2-11x+20+\dfrac{-28x-23}{x^2+2x+1}$

Problemas de aplicación

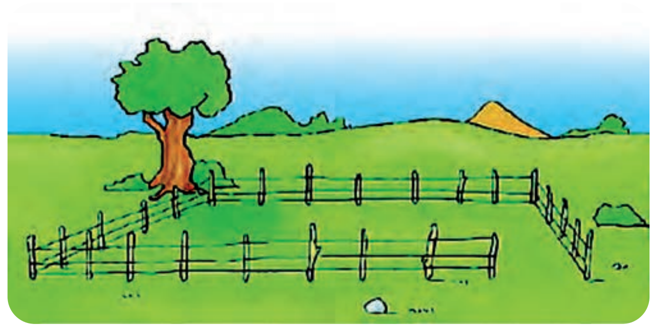
Problema 1. Una empresa construye las bases de dos viviendas, si x representa el número de metros lineales del cimiento y el costo de construcción es: $2x^2+6x-1100$ para la vivienda pequeña y $4x^2+12x+2300$ para la grande, ¿cuál es el costo total de la construcción de ambos cimientos?

Solución: el costo total se obtiene, de la suma de los costos de ambos cimientos.

$$\begin{array}{r} 2x^2+6x-1100 \\ \underline{4x^2+12x+2300} \\ 6x^2+18x+1200 \end{array}$$



$\therefore$ El costo de producción es de Bs $6x^2+18x+1200$.



Problema 2. Se desea calcular el área de la superficie de un terreno rectangular cuyas dimensiones de largo y ancho están determinadas por las expresiones $3a^2-4a-17; 2a-3$ respectivamente.

Solución: el área se determina multiplicando el largo por el ancho.

$$\begin{array}{r} 3a^2-4a-17 \\ 2a-3 \\ \hline 6a^3-8a^2-34a \\ -9a^2+12a+51 \\ \hline 6a^3-17a^2-22a+51 \end{array}$$

∴ El área es: $6a^3-17a^2-22a+51$

Problema 4. El ingreso mensual de un comerciante se representa por la expresión $7x^4+5x^2+10$. Sus gastos mensuales son representados por las expresiones: $3x^2+3; 2x^4+x; 3x^4+4x$. Encontremos la ganancia del comerciante, sabiendo que estos se obtienen restando todos los gastos al ingreso total. Además, se sabe que el valor de $x=5$.

Solución: debemos restar los gastos al ingreso mensual:

$$\begin{aligned} &= 7x^4+5x^2+10-(3x^2+3)-(2x^4+x)-(3x^4+4x) \\ &= 7x^4+5x^2+10-3x^2-3-2x^4-x-3x^4-4x \\ &= 7x^4-3x^4-2x^4+5x^2-3x^2-x-4x+10-3 \\ &= 2x^4+2x^2-5x+7 \end{aligned}$$

Reemplazamos $x=5$ que es el valor del producto:

$$2(5)^4+2(5)^2-5(5)+7=2(625)+2(25)-25+7=1250+50-25+7=1307-25=1282$$

∴ El comerciante tiene una ganancia mensual de Bs 1282.

Actividad 1. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios propuestos.

1. Eliminamos los signos de agrupación y simplificamos las expresiones resultantes combinando términos semejantes.

   $a)$ $(x+3y-z)-(2y-x+3z)+(4z-3x+2y)$ $c)$ $3x+4y+3\{x-2(y-x)-y\}$

   $b)$ $3(x^2-2yz+y^2)-4(x^2-y^2-3yz)+x^2+y^2$ $d)$ $3-\{2x-[1-(x+y)]+[x-2y]\}$

2. Sumamos las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes:

   $a)$ $2x^2+y^2-x+y,\ \ 3y^2+x-x^2,\ \ x-2y+x^2-4y^2$

   $b)$ $a^2-ab+2bc+3c^2,\ 2ab+b^2-3bc-4c^2,\ ab-4bc+c^2-a^2,\ \ a^2+2c^2+5bc-2ab$

   $c)$ $2a^2bc-2acb^2+5c^2ab,\ \ 4b^2ac+4bca^2-7ac^2b,\ 4abc^2-3a^2bc-3ab^2c,\ b^2ac-abc^2-3a^2bc$

3. Restamos la segunda expresión de la primera en las expresiones siguientes:

   $a)$ $3xy-2yz+4zx,\ 3zx+yz-2xy$

   $b)$ $ax^2+3y^2-6x+4y-2,\ 2x-y^2+3x^2-4y+3$

   $c)$ $r^3-3r^2t+4rt^2-t^3,\ \ 2t^3+3t^2r-2tr^2-3r^3$

4. Restamos $xy-3yz+4xz$ del doble de la suma de las expresiones siguientes: $3xy-4yz+2xz; 3yz-4zx-2xy$.
5. Obtenemos el producto de las expresiones algebraicas de cada grupo.

   $a)$ $4x^2y^5,\ -3x^3y^2$

   $b)$ $3abc^2,\ -2a^3b^2c^4,\ 6a^2b^2$

   $c)$ $r^2s+3rs^3-4rs+s^3,\ 2r^2s^4$

   $d)$ $y-4,\ y+3$

   $e)$ $x^2-4x+16,\ \ y+4$

   $f)$ $y^3+y^2z+yz^2+z^3,\ \ y-z$

   $g)$ $3x-y-z^2,\ \ 2y+x+3z^2$

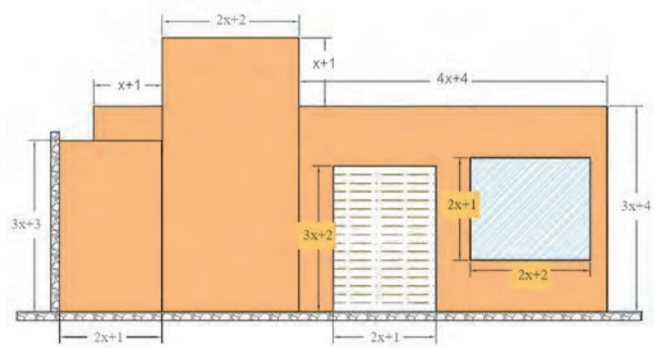
   $h)$ $3-x-y,\ 2x+y+1,\ \ x-y$

6. Realizamos las siguientes divisiones:

$a)\ -\dfrac{15x^4yz^3}{3x^2y^4z}$ $b)\ \dfrac{-32r^3s^2t}{-6r^5st^2}$ $c)\ \dfrac{4ab^3-3a^2bc+12a^3b^2c^4}{-2ab^2c^3}$ $d)\ \dfrac{4x^3 \quad -5x^2-3x}{x+1}$

$e)\ \dfrac{27a^3-64}{3a-4}$ $f)\ \dfrac{1-x^2+x^4}{1-x}$ $g)\ \dfrac{2a^3+a^5-3a-2}{a^2-3a+1}$ $h)\ \dfrac{4a^3b+5a^2b^2+a^4+2ab^3}{a^2+2b^2+3ab}$

7. Debemos pintar la fachada color naranja claro de una tienda cuyas dimensiones se observa en la figura. ¿Cuál es el área total que se debe pintar? Tomamos en cuenta que no se pintará la ventana y la puerta de persiana metálica. ¿Cuánto suma el área de la puerta y la ventana?



8. Deseamos calcular el volumen de una piscina de base rectangular cuyas dimensiones longitudinales son: $12(x+2y)$ metros de largo, $8(x-y)$ metros de ancho y $-2(x-3y)$ metros de altura. ¿Cuál es el volumen de la piscina?
9. En nuestros cuadernos proponemos cinco problemas que se puedan solucionar con una división de monomios.

3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Una **Igualdad** $(=)$, esta dada por dos cantidades iguales o equivalentes siempre y cuando tengan el mismo valor.

Ejemplos: $(3+1)^3=16$ $(3)^2+(1)^2=16$ $\sqrt{256}=16$

Entonces $(3+1)^3; (3)^2+(1)^2; \sqrt{256}$ son expresiones equivalentes a 16.

Por lo tanto, ecuación es una igualdad con una o más variables representadas con letras. Sí al remplazar valores definidos a sus variables se verifican para todos los casos se llaman identidad y si solo verifica para ciertos valores de las incognitas se llama ecuación condicional.

Ejemplo 1. $x+6=-1$ es válido solo para $x=-7$; por tanto, es una ecuación condicional.

Ejemplo 2. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ es válido para todos los valores de x e y; por tanto, es una identidad.

Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para determinar una magnitud especifica, por ejemplo:

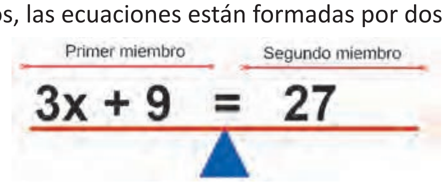
- La fórmula de $P=mg$ se utiliza para determinar peso equivalente al producto de la masa (m) de un cuerpo por la gravedad (g) terrestre que es un aproximado de $9{,}81\dfrac{m}{s^2}$.
- La fórmula geométrica $A=\pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un circulo dada la longitud de su radio.

De igual manera, existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que determinamos el valor de la variable o simplemente representar algún problema a través de un modelo matemático.

Ejemplos:

$x+9=29$ $x+y=7$ $x^2-3=0$ $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{7}{x+2}$

Al igual que una balanza de platillos, las ecuaciones están formadas por dos miembros:



Solución de una ecuación. Para calcular la solución de una ecuación debemos hallar el valor o los valores de las variables que verifican la igualdad.

Ejemplos:

a. Sí la ecuación $x+3=11$, la solución será $x=8$ ya que, al sustituir la variable, se obtendrá $8+3=11$

b. En la ecuación $x^2-4=21$, las soluciones son $x=5$, $x=-5$

c. En la ecuación $x-y=12$, las soluciones pueden ser $x=13$, $y=-1$

El **Grado de una ecuación** se obtiene del término que contenga la variable con el mayor exponente.

Ejemplos:

a. La ecuación $5x+3=11$, es de primer grado, porque la incógnita tiene un valor de 1

b. La ecuación $x^2-4x+10=0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2

c. La ecuación $x-y=12$, es de primer grado, porque ambas variables tienen exponente 1

4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Son ecuaciones equivalentes cuya resolución requiere operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) en ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la variable o incógnita.

Investiga

Investigamos más sobre los teoremas de ecuaciones.
TEOREMAS: sea la ecuación lineal $ax=b$

$a)$ Si $a\neq 0,\ x=\frac{b}{a}$ solución única

Demostración: $ax=b$

$$\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}(b)\to\left(\frac{1}{a}*a\right)x=\frac{b}{a}$$

$$1x=\frac{b}{a}\to x=\frac{b}{a}$$

Supongamos ahora que x_0 es solución, entonces, al sustituir en $ax=b$ obtenemos:

$$ax_0=b\to\frac{1}{a}(ax_0)=\frac{1}{a}(b)$$

$$\left(\frac{1}{a}*a\right)x_0=\frac{b}{a}\to x_0=\frac{b}{a}$$

$\therefore$, $x=\frac{b}{a}$ es la solución única.

$b)$ Si $a=0$ pero $a\neq b$, entonces $ax=b$ no tiene solución

Demostración:

Sea $=0$, entonces, para todo $k\in R, ak=0$, entonces, $ax\neq 0$, por tanto, k no es solución de $ax=b$

$c)$ Si $a=0$ y $b=0$, todo $k\in R$, es solución de $ax=b$

Demostración:

Si a $=0$, para todo $k\in R, ak=0$, si b = 0, entonces, cualquier número real k es solución de $ax=b$

Ejemplo 1. Calculemos el valor de x en la ecuación: $3x+2=6$

Solución: Agrupamos a los términos que contengan a la variable en el primer miembro y a los términos independientes en el segundo miembro, para ello, se aplican operaciones fundamentales, según corresponda.

$3x+2=6\to 3x+2-2=6-2$ se resta 2 en ambos miembros

$$3x=4$$

$(3x)\frac{1}{3}=(4)\frac{1}{3}$ se multiplica ambos miembros por $\frac{1}{3}$

$$x=\frac{4}{3}$$

Para verificar la solución, remplazamos el valor hallado en la variable de la ecuación original

$$3\left(\frac{4}{3}\right)+2=6\to 4+2=6$$

$$6=6$$

Por lo tanto, la solución es $\boldsymbol{x}=4/3$

Ejemplo 2. Calculemos el valor de la variable en la ecuación: $2a-16=5a-1$

Solución: $2a-16=5a-1\to 2a-16=5a-1$ Se suma 16 y se resta $5a$

$$2a-16+16-5a=5a-1+16-5a$$

$-3a=15$ Dividimos entre (-3)

$$-\frac{3a}{-3}=\frac{15}{-3}$$

$$a=-5$$

Por lo tanto, la solución es $\boldsymbol{a}=-5$

Ejemplo 3. Determine el conjunto solución de: $21m-19-7m=5+8m+2$

Solución: $21m-19-7m=5+8m+2\ \to\ 21m-7m-8m=5+2-19$

$$6m=-12\ \to\ m=\frac{-12}{6}\ \to\ m=-2$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-2\}$

Ejemplo 4. Determinar la solución de la ecuación $-x-5-4x=13x-2-18x$

Solución:

$$-x-5-4x=13x-2-18x$$
$$-x-4x-13x+18x=+5-2$$
$$0x=+3$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero (ver inciso b del teorema)

Ejemplo 5. Determinar el conjunto solución de la ecuación:

$$4y-9+5y+5=10y-4-y$$

Solución: $4y-9+5y+5=10y-4-y$

$$4y+5y-10y+y=-4+9-5$$
$$0y=0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero (ver inciso c del Teorema)

Ejemplo 6. Resolvemos

$$3x-\{2x-(7x+1)-10\}=13x-\{5-[x-(7-2x)-12]+15x\}$$

Solución. Se suprime los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$3x-\{2x-7x-1-10\}=13x-\{5-[x-7+2x-12]+15x\}$$
$$3x-2x+7x+1+10=13x-\{5-x+7-2x+12+15x\}$$
$$3x-2x+7x+1+10=13x-5+x-7+2x-12-15x$$
$$3x-2x+7x-13x-x-2x+15x=-5-7-12-1-10$$
$$7x=-35 \rightarrow x=-\frac{35}{7}=-5$$

Por consiguiente, el valor de x es: -5

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si:

$$P(x)=\frac{x}{1+x}$$
$$F(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$G(x)=x$$

Además:

$$P\{F[G(x)]\}=\frac{1}{10}$$

Calcular "x"

5. Resolución de problemas del contexto con ecuaciones de primer grado

1. La edad de Carolina excede en 2 años a la de Marco y el doble de la de Carolina más 12 años equivale al triple de la edad de Marco. Hallar ambas edades.

Solución

Datos:

Edad de Carolina: x

Edad de Marco: $x-2$

Planteamiento

$$2(\textit{edad de Carolina})+12\,\textit{años}=3(\textit{edad de Marco})$$
$$2x+12=3(x-2)\rightarrow 2x+12=3x-6$$
$$2x-3x=-6-12$$
$$-x=-18\rightarrow x=18$$

Por lo tanto, Carolina tiene 18 años y Marco 16 años

2. 90 litros de agua tiene un 6% de azúcar, ¿cuánta cantidad de agua deberíamos aumentar para tener agua al 2% de azúcar?

Solución

Datos:

90 *litros de agua al* 6% *de azúcar*

x litros a agua

$(90+x)$ *litros a agua al* 2% *de azúcar*

Planteamiento

$$6\%\,de\,90\,litros=2\%\,de\,(90+x)\,litros$$
$$\frac{6}{100}(90)=\frac{2}{100}(90+x)\rightarrow 5{,}4=1{,}8+\frac{x}{50}\rightarrow\frac{x}{50}=5{,}4-1{,}8$$
$$x=50*3{,}6=180$$

Debemos aumentar 180 litros para obtener agua al 2% de azúcar

3. Luanna tiene Bs 110 en billetes de Bs 10 y monedas de Bs 5, el número de billetes excede en 2 a las monedas ¿Cuántos billetes de Bs 10 y monedas de Bs 5 tiene Luanna?

Solución

Datos:

N° de billetes de Bs 10 es x

N° de monedas de Bs 5 es $x-2$

Planteamiento

La suma de los billetes con las monedas da como resultado el total.

$$(\text{denominación})(\text{billetes de Bs}10)+(\text{denominación})(\text{monedas Bs }5)=\text{total}$$
$$10x+5(x-2)=110\rightarrow 10x+5x-10=110\rightarrow 15x=120$$
$$x=\frac{120}{15}=8$$

Luanna tiene 8 Billetes de Bs 10 y 6 monedas de Bs 5

4. Ángel pago Bs 66 por un kit de aseo personal, una pasta dental, unos jabones y un Champú. Si el costo del champú excede en Bs 15 al de la pasta dental y en Bs 3 al de los jabones, determinar el costo de cada artículo.

Datos:

$Costo\ de\ champú{:}x$

$Costo\ de\ jabones{:}\ x-15$

$Costo\ de\ pasta\ dental{:}\ x-3$

Planteamiento

Planteamos la ecuación

$$x+(x-15)+(x-3)=66\rightarrow 3x-18=66$$

$$3x=66+18\rightarrow x=\frac{84}{3}=28$$

Por lo tanto, Ángel pago Bs 28 por el champú, Bs 13 por los jabones y Bs 25 por la pasta dental.

Actividad 2. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones y problemas cotidianos.

1) $a-(2a+1)=8-(3a+3)$

2) $(5-3a)-(-4a+6)=(8a+1)-3(2a+3)$

3) $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1-2(2x+3)$

4) $x-2\left[2x-(x+1)+5(1-x)\right]=x+(3x-7)$

5) $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)(x+1)$

6) $3a-\left\{10a-\left[(3-5a)-8\right]+(5a-3)(5a+4)\right\}=3(6x-4)-9$

7) $\frac{5}{2}m-\frac{5}{6}m=\frac{4}{3}$

8) $\frac{1}{4}+\left(2z-\frac{3z-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z+2}{6}\right)-2z$

9) $\frac{3}{a-5}=\frac{7}{x+5}$

10) $\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{(x-1)(x+1)}$

11) Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Hallamos los números.
12) La suma de las edades de Marcela, Gabriel y Rene es de 95 años. La edad de Marcela excede en 4 años a la edad de Gabriel y en 11 a la de Rene. Determinamos las edades de los tres.
13) María tiene 18 años y Juan 42, ¿En cuantos años la edad de Juan será el doble que la de María?
14) La edad de Luis es 3/5 de la edad de Marcelo y hace 5 años era la mitad, determinamos ambas edades.
15) A 90 litros de agua al 1,5% de Sal, ¿Cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
16) Se tiene 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de formula al 20%, si se desea una mezcla al 15 % de leche de formula. ¿Cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
17) Carlos tiene 400 monedas de Bs 0,5 y Bs 1, si en total tiene Bs 350 ¿Cuántas monedas de cada valor tiene?
18) Se desea repartir Bs 210 en monedas de Bs 1, Bs 2, Bs 5 de tal forma que el número de monedas de cada denominación sea el mismo, ¿Cuántas monedas se necesitan de cada denominación?

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 3.

Familia de ecuaciones: una familia de ecuaciones tiene valores similares que definen los parámetros de su campo de acción, y cada ecuación de la familia sin importar la estructura de su expresión siempre tendrá valores dentro de los parámetros. Nuestras familias se comportan de manera similar, los valores que adquirimos al interior de nuestras familias son los limites o parámetros que moldean nuestro comportamiento ante la sociedad, mientras los valores sean positivos nuestro comportamiento será correcto ya que obraremos con ética y moral, sin embargo, si los valores son negativos actuaremos fuera de los límites, es decir fuera de las leyes y normas. Por esto, todos somos iguales ante la ley, esta igualdad no es otra cosa que una ecuación con variables y constantes que definen a nuestra sociedad.

1. ¿Menciona algunos valores que se practican en tu familia?
2. Indica tres derechos y tres deberes que todo niño posee en nuestra sociedad.
3. Describe la importancia de la aplicación de ecuaciones en la resolución de problemas.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 4.

Realizamos las siguientes actividades para fortalecer lo aprendido:

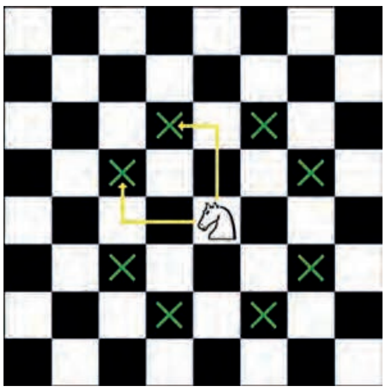
- Investigamos los pasos para modelar ecuaciones: Identificar la variable, usar abstracción matemática, formular el modelo y resolver la ecuación.
- Posteriormente modelamos cinco ecuaciones sobre situaciones que se presentan en nuestro entorno.

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES APLICADOS AL DESARROLLO DE LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

El cuadro mágico del salto del caballo: En este cuadrado, todas las líneas verticales y horizontales suman 260. Tenemos que averiguar los valores de las letras que aparecen, x, y, t, etc. para saber los números de cada casilla. Cuando conozcamos todos los números, si partimos del 1, los siguientes naturales, 2, 3, 4,... van apareciendo siguiendo el movimiento del caballo en el juego de ajedrez.

7x+5	2x-2	4x-1	9x-10	8x+1	x-4	10x-1	x
2y	9z	6z+6	16-z	67-z	z-2	7x+1	z-12
y	2t	u-60	24u	u	50+2u	6+u	60-2u
6y-4	t-2	v	9m	n	4p-7	s	2q-3
y+8	2t-10	2v+1	8m	2n-3	3p-4	15s-7	q+3
2y+4	62-t	v+u	3+6m	7n	2p-3	3s+2	70-q
68-3y	t-5	3v+1	6m-2	5n+1	p	8s-1	2q
16+2y	60-3y	3y+1	2y-5	3y-1	5y	4y-2	26-y



Actividad 5.

1. Analiza estos patrones y describe por qué sucede lo descrito anteriormente.
2. ¿Se podrá llegar a los mismos resultados con los movimientos de otras piezas de ajedrez? Fundamenta tu respuesta.
3. ¿Los resultados obtenidos tienen alguna relación con los productos y cocientes? Fundamenta tu respuesta.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Productos notables

1.1. Cuadrado de un binomio

a) Cuadrado de la suma de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

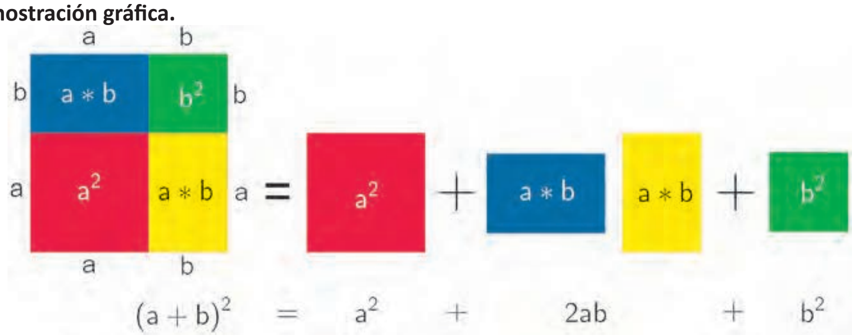
El cuadrado de la suma de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto de primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término.

Demostración analítica: realizamos la multiplicación algebraica convencional:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Por lo tanto, de manera sistemática decimos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demostración gráfica.



Recordemos que:

El área de un cuadrado es

$A = a^2$

El área del rectángulo es igual a

$A = b \cdot h$

Ejemplos:

a. $\left(x+5\right)^2 = x^2 + 2\left(x\right)\left(5\right) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

b. $\left(4a+5b^2\right)^2 = \left(4a\right)^2 + 2\left(4a\right)\left(5b^2\right) + \left(5b^2\right)^2 = 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4$

c. $\left(6ax^3+8y^5\right)^2 = \left(6ax^3\right)^2 + 2\left(6ax^3\right)\left(8y^5\right) + \left(8y^5\right)^2 = 36a^2x^6 + 96ax^3y^5 + 64y^{10}$

b) Cuadrado de la diferencia de un binomio: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

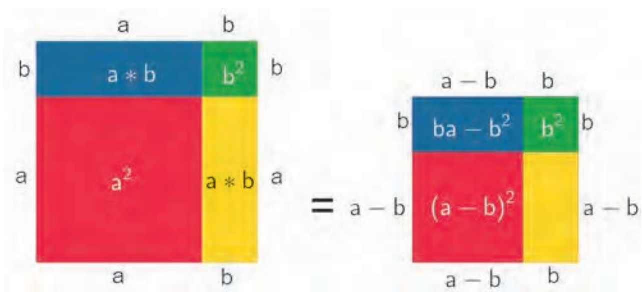
El cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Demostración analítica: multiplicamos de forma convencional:

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{\quad -ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

por lo tanto de manera sistemática decimos que: $\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Demostración gráfica:



$$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos:

a. $\left(y-7\right)^2 = y^2 - 2\left(y\right)\left(7\right) + 7^2 = y^2 - 14y + 49$

b. $\left(3a^2-5b^3\right)^2 = \left(3a^2\right)^2 - 2\left(3a^2\right)\left(5b^3\right) + \left(5b^3\right)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6$

Actividad 6. Para fortalecer nuestros conocimientos resolvemos los siguientes ejercicios:

1. $\left(5+x\right)^2$
2. $\left(9m+4n\right)^2$
3. $\left(2a^2x+6by^2\right)^2$
4. $\left(8x^2y+9m^3\right)^2$
5. $\left(x+6\right)^2$
6. $\left(4x+7\right)^2$
7. $\left(4a+6\right)^2$
8. $\left(5m+3\right)^2$
9. $\left(9-a\right)^2$
10. $\left(3a^4-5b^2\right)^2$
11. $\left(10x^3-9xy^5\right)^2$
12. $\left(3x-5\right)^2$
13. $\left(2m^3-6n^2\right)^2$
14. $\left(7-4y^3\right)^2$
15. $\left(am^2-3a^2\right)^2$
16. $\left(x^{m+2}+y^{n-2}\right)^2$
17. $\left(a^{2m}+b^{2n}c^{m+1}\right)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}x^m - y^2\right)^2$
19. $\left(\frac{x^{3m}}{2} + y^{2+m}\right)^2$
20. $\left(\frac{1}{a^{2m+3}} - \frac{b^{3m+2}}{2}\right)^2$
21. $\left(\frac{\sqrt{x^{m-2a}}}{2a^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^{m-2a}}\right)^2$
22. $\left(\sqrt{\frac{x^{2a-b}y^3}{2}} - \sqrt{\frac{2a}{x^{2a-b}y^3}}\right)^2$

1.2. Binomio conjugado: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

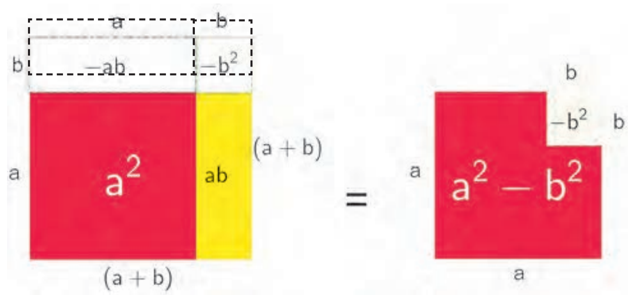
El producto de $(a+b)(a-b)$ es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

Demostración analítica. Realizamos el producto y obtenemos:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad -ab-b^2} \\ a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

Por lo tanto de manera sistemática decimos que: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Demostración gráfica:



$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos:

a. $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$

b. $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$

c. $(4a^3+5x^2y^4)(4a^3-5x^2y^4)=(4a^3)^2-(5x^2y^4)^2=16a^6-25x^4y^8$

Actividad 7. Desarrollamos los siguientes binomios conjugados.

1. $(m+n)(m-n)$
2. $(y^2-3x)(y^2+3x)$
3. $(6x^2+m^3y)(6x^2-m^3y)$
5. $(3ax+1)(3ax-1)$
5. $(3ax+1)(3ax-1)$
6. $\left(\frac{1}{2}x+y^2\right)\left(\frac{1}{2}x-y^2\right)$
7. $(x^{2m}-2y^{3n})(x^{2m}+2y^{3n})$
8. $\left(\frac{xy^2}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{xy^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$
9. $\left(\frac{a^{m+1}}{b^n}-2a^2\right)\left(\frac{a^{m+1}}{b^n}+2a^2\right)$
10. $\left(\frac{\sqrt{3}}{a^{1-n}}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{a^{1-n}}-\frac{1}{3}\right)$
11. $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{3}{2}+n}}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{3}{2}+n}}-\frac{x}{y}\right)$
12. $\left(\frac{2^x}{3^y}-\frac{y^3}{x^2}\right)\left(\frac{2^x}{3^y}+\frac{y^3}{x^2}\right)$

1.3. Cuadrado de un trinomio: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más los dobles productos de las combinaciones entre ellos.

Demostración:

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ \underline{a+b+c} \\ a^2+ab+ac \\ \qquad ab+b^2+bc \\ \underline{\qquad\qquad ac+bc+c^2} \\ a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \end{array}$$

por lo tanto ordenando tenemos que: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Ejemplos:

a. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

b. $(2x+3y+4z)^2=(2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(2x)(4z)+2(3y)(4z)$

$$=4x^2+9y^2+16z^2+12xy+16xz+24yz$$

c. $(a^2+2b^3+3c^4)^2=(a^2)^2+(2b^3)^2+(3c^4)^2+2(a^2)(2b^3)+2(a^2)(3c^4)+2(2b^3)(3c^4)$

$$=a^4+4b^6+9c^8+4a^2b^3+6a^2c^4+12b^3c^4$$

Actividad 8. Aplicamos el cuadrado de un trinomio en los siguientes ejercicios:

1. $(r+s+t)^2$
2. $(a^2-b+2c)^2$
3. $(3a+5b+6c)^2$
4. $(2x^3+5y^4+4z^5)^2$
5. $(m+2n+p-3q)^2$
6. $(2+2n+p-6r)^2$
7. $(m+3+p-2n+5t)^2$
8. $(2x-3y+1)^2$
9. $(3a^2+2b^2-1)^2$
10. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+c\right)^2$
11. $\left(\frac{1}{6}a-b+\frac{1}{4}\right)^2$
12. $\left(a^{x-1}-2a^x-a^{x+1}\right)^2$
13. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{y}+x^2\right)^2$
14. $(-2a^2+b^2-2)^2$
15. $\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$
16. $(-a-b-c)^2$
17. $\left(a^{x-1}-2a^x-a^{x+1}\right)^2$

1. 4. Productos de la forma (binomio con término común): $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

El producto de dos binomios es igual al cuadrado del primer término más la suma de los segundos términos del binomio por el término común más el producto de los términos del binomio.

Demostración analítica: multiplicamos de forma horizontal**:**

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

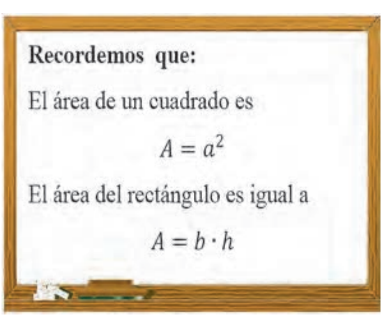
1. $(x+7)(x-2)=x^2+7\text{x}-2\text{x}-14=\text{x}^2+(7-2)x-14=x^2+5x-14$
2. $(x^{2m}-7)(x^{2m}-6)=x^{(2m)2}-(7+6)x^{2m}+42=x^{4m}-13x^{2m}+42$
3. $(2p-9)(2p+6)=(2p)^2-(18-12)p-54=4\text{p}^2-6p-54$
4. $(x^3-12)(x^3-3)=(x^3)^2-(12+3)x^3+36=x^6-15x^3+36$

Actividad 9. En nuestros cuadernos escribimos por simple inspección el producto de:

1. $(m-6)(m-5)$
2. $(a^6+7)(a^6-9)$
3. $(n-19)(n+10)$
4. $(x^2+5)(x^2+9)$
5. $(x+3)(x-4)$
6. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)$
7. $(3m+2n-4)(3m-3n+2)$
8. $\left(-xy+\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-xy\right)$
9. $\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{1}{5}x-\frac{3}{2}y\right)$
10. $(a+3b-5)(a-3b+2)$
11. $\left(x^2y+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-xy^2\right)$

1.5. Cubo de un binomio: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

a) Cubo de la suma de un binomio: El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primer por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.



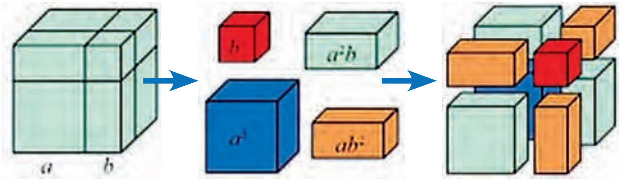
Demostración: descomponemos el cubo perfecto en sus factores múltiplos:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$
$$=(a+b)(a+b)^2$$
$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

Efectuando la multiplicación de estos dos últimos productos, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \underline{a+b\qquad\quad} \\ a^3+2a^2b+ab^2\qquad \\ \underline{a^2b+2ab^2+b^3} \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Representación gráfica.



Ejemplos:

1. $(x+1)^3 = x^3+3x^2(1)+3x(1)^2+(1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
2. $(2x+3)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2+(3)^3 = 8x^3+36x^2+54x+27$
3. $(3a^2+4b^3c^4)^3 = (3a^2)^3+3(3a^2)^2(4b^3c^4)+3(3a^2)(4b^3c^4)^2+(4b^3c^4)^3$

   $= 27a^6+108a^4b^3c^4+144a^2b^6c^8+64b^9c^{12}$
4. $\left(\frac{1}{2}x+y^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3+3\left(\frac{1}{2}x\right)^2(y^2)+3\left(\frac{1}{2}x\right)(y^2)^2+(y^2)^3 = \frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{3}{2}xy^4+y^6$

a. **Cubo de la diferencia de un binomio:** $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

   El cubo de la diferencia de dos términos es igual al cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

Demostración. del anterior producto se deduce que: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$
Efectuando la multiplicación de estos dos últimos productos, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+b^2 \\ \underline{a-b\qquad\quad} \\ a^3-2a^2b+ab^2\qquad \\ \underline{-a^2b+2ab^2-b^3} \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

Por lo tanto ordenando tenemos que: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplos:

1. $(x-2)^3 = x^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$
2. $(a^2-3b)^3 = (a^2)^3-3(a^2)^2(3b)+3(a^2)(3b)^2-(3b)^3 = a^6-9a^4b+27a^2b^2-27b^3$
3. $(5a-6y^2)^3 = (5a)^3-3(5a)^2(6y^2)+3(5a)(6y^2)^2-(6y^2)^3 = 125a^3-450a^2y^2+540ay^4-216y^6$

Actividad 10. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios por simple inspección:

1. $(a+2)^3$
2. $(2x+1)^3$
3. $(2x+3y)^3$
4. $(a^2+2b)^3$
5. $(3x+2y)^3$
6. $(4+3ab^2)^3$
7. $(n-4)^3$
8. $(1-3y)^3$
9. $(2m-3n)^3$
10. $(2a^2-b^3)^3$
11. $(a-3b)^3$
12. $(a^2-b^2)^3$
13. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$
14. $\left(x^{2m}+\frac{x^m}{y^n}\right)^3$
15. $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)^3$
16. $(a^{2+m}+b^{n-3})^3$
17. $\left(\frac{1}{a^x}-\frac{x}{2}\right)^3$
18. $\left(2x^{a^2}+\frac{1}{3}x^2\right)^3$
19. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}\right)^3$

2. Cocientes notables

Son cocientes que resultan de divisiones exactas entre polinomios, es decir que el resto es igual a cero y pueden ser escritas por simple inspección.

$$\textbf{Forma típica} \text{ de un cocientes notable}: \frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$$

De este se desprende los siguientes cuatro casos:

Primer caso: cuando n es un número par o impar.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots y^{n-1}$$

Segundo caso: cuando "n" es un número par el cociente es notable.

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots y^{n-1}$$

Tercer caso: cuando "n" es un número impar el cociente es notable.

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots y^{n-1}$$

Cuarto caso: no cumple como cociente notable.

$$\frac{x^n + y^n}{x - y} = no\ cumple$$

Ejemplos: realizamos los siguientes cocientes aplicando los casos según corresponda.

1) $$\frac{x^5 - 32}{x - 2} = \frac{x^5 - 2^5}{x - 2} = x^4 + x^3(2) + x^2(2)^2 + x(2)^3 + (2)^4 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

2) $$\frac{x^8 - 1}{x - 1} = \frac{x^8 - 1^8}{x - 1} = x^7 + x^6(1) + x^5(1)^2 + x^4(1)^3 + x^3(1)^4 + x^2(1)^5 + x(1)^6 + (1)^7$$
$$= x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

3) $$\frac{64a^6 - 729b^6}{2a + 3b} = \frac{(2a)^6 - (3b)^6}{2a + 3b} = (2a)^5 - (2a)^4(3b) + (2a)^3(3b)^2 - (2a)^2(3b)^3 + (2a)(3b)^4 + (3b)^5$$
$$= 32a^5 - (16a^4)(3b) + (8a^3)(9b^2) - (4a^2)(27b^3) + (2a)(81b^4) + 243b^5$$
$$= 32a^5 - 48a^4b + 72a^3b^2 - 108a^2b^3 + 162ab^4 + 243b^5$$

4) $$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$$

5) $$\frac{27x^6 + 125y^9}{3x^2 + 5y^3} = \frac{(3x^2)^3 + (5y^3)^3}{3x^2 + 5y^3} = (3x^2)^2 - (3x^2)(5y^3) + (5y^3)^2 = 9x^4 - 15x^2y^3 + 25y^6$$

6) $$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x + 3y} = \frac{(2x)^5 + (3y)^5}{2x + 3y} = (2x)^4 - (2x)^3(3y) + (2x)^2(3y)^2 - (2x)(3y)^3 + (3y)^4$$
$$= 16x^4 - (8x^3)(3y) + (4x^2)(9y^2) - (2x)(27y^3) + 81y^4$$
$$= 16x^4 - 24x^3y + 36x^2y^2 - 54xy^3 + 81y^4$$

7) $$\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y} = \frac{(2x^2)^4 + (5y)^4}{2x^2 + 5y} = (2x^2)^3 - (2x^2)^2(5y) + (2x^2)(5y)^2 - (5y)^3$$
$$= 8x^6 - (4x^4)(5y) + (2x^2)(25y^2) - 125y^3$$
$$= 8x^6 - 20x^4y + 50x^2y^2 - 125y^3$$

8) $$\frac{128a^7 - b^7}{2a - b} = \frac{(2a)^7 - (b)^7}{2a - b} = (2a)^6 + (2a)^5b + (2a)^4b^2 + (2a)^3b^3 + (2a)^2b^4 + 2ab^5 + b^6$$
$$= 64a^6 + 32a^5b + 16a^4b^2 + 8a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 + b^6$$

Actividad 11. En nuestros cuadernos efectuamos los siguientes cocientes aplicando los casos según corresponda:

1) $\dfrac{x^6-64}{x-2}$ 3) $\dfrac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$ 5) $\dfrac{x^{15}+y^{10}}{x^3+y^2}$ 7) $\dfrac{512a^9+b^9}{2a+b}$ 9) $\dfrac{m^8-256}{m-2}$

2) $\dfrac{x^6-y^6}{x+y}$ 4) $\dfrac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$ 6) $\dfrac{x^9+y^9}{x+y}$ 8) $\dfrac{x^{32}-y^{16}}{x^4+y^2}$

Fórmula para determinar el número de términos: para determinar el número de términos "n" de un cociente notable se calcula la división de los exponentes de las mismas variables.

$$\frac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s} \rightarrow \frac{p}{r} = \frac{q}{s} = \textit{número de términos}$$

Ejemplo: sea el cociente notable

$$\frac{x^{32}-y^{16}}{x^4+y^2} \rightarrow \frac{32}{4} = \frac{16}{2} = 8 \quad \rightarrow \textit{el cociente notable tiene ocho términos}$$

Fórmula posición de un término determinado: el término general o mejor conocido como el término del lugar "k" en el desarrollo de un cociente notable se representa por T_k y es igual a:

$$\frac{y^n \pm b^n}{y^m \pm b^m}, \ \textit{donde el término } T_k \textit{ se calcula según el caso correspondiente al cociente}.$$

Para el **caso 1,** se utiliza la siguiente fórmula.

$$T_k = x^{n-km} y^{km-m}$$

"n" es el exponente común en el numerador
"m" es el exponente común en el denominador

Para **caso 2** y **caso 3,** los términos de la solución se alternan entre $+$, cuando k sea impar, y $-$, cuando k sea par.

$$T_k = (-1)^{k-1} x^{n-km} y^{km-m}$$

"n" es el exponente común en el numerador
"m" es el exponente común en el denominador

Ejemplo: calculamos el término 25 en el desarrollo del siguiente cociente notable: $\dfrac{y^{150}-b^{100}}{y^3+b^2}$

Solución: aplicando la fórmula de número de términos determinamos "n"

$$\frac{y^{150}-b^{100}}{y^3+b^2} = \frac{(y^3)^{50}-(b^2)^{50}}{(y^3)+(b^2)} \rightarrow n = 50 \text{ y } m = 1$$

Luego $k=25,\ n=50 \text{ y } m=1$, remplazamos los datos en la fórmula de términos determinado.

$$T_k = (-1)^{k-1} x^{n-km} y^{km-m} = (-1)^{25-1} x^{50-25*1} y^{25*1-1} = x^{25} y^{24}$$

2.1. Término central de un cociente notable: para hallar el término central en el desarrollo de un cociente notable, determinamos la posición "k" de dicho término. Siendo "n" el número de términos que posee el desarrollo.

Si el número de términos es un número *impar* tendrá un solo término central: $k_c = \dfrac{n+1}{2}$

Si el número de términos es un número *par* tendrá dos términos centrales, por lo que se utilizan las siguientes dos fórmulas: $k_{c_1} = \dfrac{n}{2}$; $k_{c_2} = \dfrac{n}{2}+1$

Luego de obtener el o los valores de k, se reemplazan en la fórmula del término general.

$$T_k = \pm x^{n-k} a^{k-1}$$

Ejemplo: calculamos el término central de la siguiente división : $\dfrac{x^{21}-y^{21}}{x-y}$

Solución. Primero calculemos el número de términos del desarrollo de dicho cociente.

$$\frac{x^{21}-y^{21}}{x-y} \rightarrow \frac{21}{1} = \frac{21}{1} = 21, \textit{hay un número impar de términos, por lo tanto solo hay un término central}.$$

$$K_c = \frac{n+1}{2} = \frac{21+1}{2} = 11, \text{ luego buscamos el termino } 11 \text{ en la formula correspodiente al } \textbf{caso } 1$$

$$T_k = x^{n-km} y^{km-m} \rightarrow T_{11} = x^{21-11*1} y^{11*1-1} = x^{10} y^{10}$$

Actividad 12. En nuestros cuadernos realizamos los siguientes ejercicios para fortalecer lo aprendido.

1. Calculamos el número de términos de:	2. Determinamos el término…	3. Calculamos el término medio de los ejercicios 1) y 2)
a) $\dfrac{x^{15}-32}{x^3-2}$ b) $\dfrac{(x+2)^{16}-(x-2)^{16}}{2(x^2+4)}$ a) $\dfrac{x^{20}-y^{30}}{x^2-y^3}$	a) $septimo\,de\dfrac{x^{11}-y^{22}}{x-y^2}$ b) $quinto\,de\dfrac{x^{p}-y^{p+40}}{x^2+y^3}$ c) $quinto\,de\dfrac{x^{33}-y^{363}}{x^3-y^{33}}$	

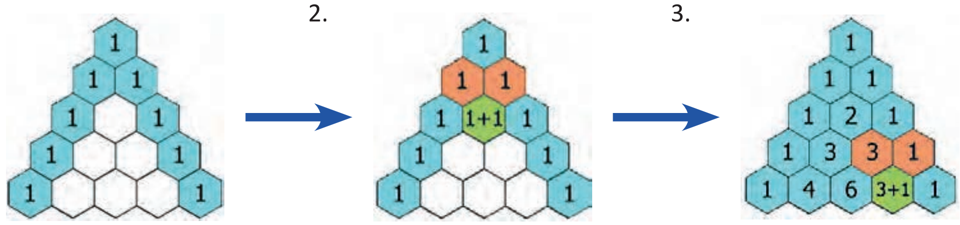
3. Triángulo de Pascal

Se construye mediante el siguiente procedimiento:

Anotamos 1 en los extremos, hasta donde el exponente del binomio lo indique.

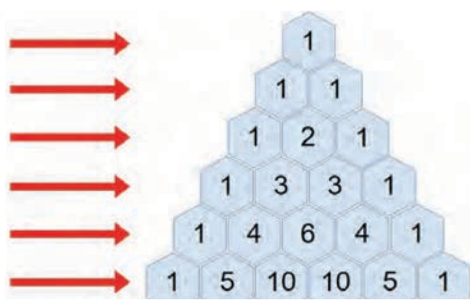
Los números internos se obtienen de la suma de los números superiores:

1. 2. 3.



El triángulo de Pascal nos permite desarrollar un polinomio según el grado del binomio designando los coeficientes como se muestra en la siguiente figura.

$$1 = (x+y)^0$$
$$x+y = (x+y)^1$$
$$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$$
$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x+y)^3$$
$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x+y)^4$$
$$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4 = (x+y)^5$$



Ejemplo 1. Hallamos el desarrollo del polinomio $(x+3y)^3$

Solución: mediante el triángulo de Pascal tenemos.

$=(x\pm y)^0$

$=(x\pm y)^1$

$=(x\pm y)^2$

$=(x\pm y)^3$

Luego los coeficientes serán de la cuarta fila, y al ser suma el polinomio, los términos del desarrollo son positivos.

$$(x+3y)^3 = x^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$$
$$(x+3y)^3 = x^3+9x^2y+3x(9y^2)+27y^3$$
$$(x+3y)^3 = x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$$

Ejemplo 2. Hallamos el desarrollo del polinomio $(x-y)^7$

Luego los coeficientes serán de la séptima fila.

$$(x-y)^7 = x^7-7x^6y+21x^5y^2-35x^4y^3+35x^3y^4-21x^2y^5+7xy^6-y^7$$

Actividad 13. Aplicando el triángulo de pascal resolvemos en nuestros cuadernos los siguientes ejercicios:

1) $\left(x+4y\right)^4$ 4) $(2x-y)^7$ 7) $\left(2-a^2\right)^{12}$ 9) $\left(a^2b+\dfrac{c^2}{b}\right)^4$ 11) $\left(\dfrac{1}{3}x^2+2y\right)^8$

2) $(3x-2y)^6$ 5) $(4x-3y)^9$ 8) $\left(\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{2}{3}b\right)^5$ 10) $(3x-3y^2)^6$ 12) $\left(x^m-5m^x\right)^9$

3) $(2a+3b)^5$ 6) $(3a+3b)^8$

4. Deducción del binomio de n – ésima potencia (Binomio de Newton)

El desarrollo de los binomios tiene gran importancia por su aplicación en diversas áreas como la ingeniería y otras. Sea el binomio $\left(a+b\right)^n$, de su desarrollo tendremos que:

- El desarrollo de $\left(a+b\right)^n$ tiene $n+1$ términos.
- Las potencias de "a" inician con exponente en "n" el primer término y disminuye en cada término hasta cero en el último.
- Las potencias de "b" empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando en una cantidad hasta "n" en el último término.
- Para cada término la suma de los exponentes de "a" y "b" es igual a "n".
- El coeficiente del primer término es 1 y del segundo es "n".
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de "a"dividido entre el número que indica el orden de ese término (factorial).
- Los términos extremos tienen coeficientes iguales.

Formula general

$$\left(a+b\right)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}a^{n-3}b^3+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{4!}a^{n-4}b^4+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n-4\right)}{5!}a^{n-5}b^5+\ldots+b^n$$

Ejemplo: desarrollamos el siguiente binomio aplicando la fórmula del binomio de Newton.

$$\begin{aligned}(2-m)^6 &= 2^6-6\cdot 2^5\,m+\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 2^4\,m^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}*2^3m^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}*2^2m^4-\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}2m^5+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!}m^6\\ &= 2^6-6\cdot 2^5\,m+\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 2^4\,m^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3m^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^2m^4-\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2m^5+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}m^6\\ &= 64-192m+240m^2-160m^3+60m^4-12m^5+m^6\end{aligned}$$

Deducción de n-ésimo término del binomio

Para determinar un término cualquiera del desarrollo del binomio se aplica la siguiente formula.

$$\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-r+2\right)}{\left(r-1\right)!}a^{n-r+1}b^{r-1}\ donde\ \text{"r"}\ es\ el\ término\ buscado$$

Ejemplo: hallamos el quinto término del desarrollo de $\left(x+5y\right)^6$

Solución: $a=x, b=5y, n=6, r=5,$ *reemplazamos los valores en la fórmula.*

$$\frac{6\left(6-1\right)\left(6-2\right)\left(6-5+2\right)}{\left(5-1\right)!}x^{6-5+1}\left(5y\right)^{5-1}=\frac{6\left(5\right)\left(4\right)\left(3\right)}{4*3*2*1}x^2\left(5y\right)^4=15x^2\left(625y^4\right)=9375x^2y^4$$

Actividad 14. En nuestros cuadernos desarrollamos los siguientes polinomios mediante el binomio de Newton.

1) $\left(2x+y\right)^4$ 3) $(2x^2-y^3)^7$ 5) $\left(\dfrac{1}{3}+2y\right)^8$ 7) $\left(2-a^2\right)^{10}$ 9) $\left(a^2b-\dfrac{c^2}{b}\right)^4$

2) $\left(\dfrac{1}{3}x-2\right)^6$ 4) $\left(\dfrac{1}{2}x+2y\right)^9$ 6) $\left(x^m-5m^x\right)^9$ 8) $\left(\dfrac{3}{2}+b\right)^5$ 10) $(3x+3y^2)^6$

Determinar el 4°, 6°, 3° y 8° término de $\left(x+3y\right)^5,\left(2m+1\right)^8,\left(m-7n\right)^4,\left(a^2-b^2\right)^9$ respectivamente.

Actividad 15. En nuestros cuadernos calculamos los siguientes valores:

1) *Si:* $\dfrac{a^m-b^{m+6}}{a^4-b^{\frac{m}{2}}}$ *es cociente notable, donde* $m\in Z^+$*, el valor* $a^4-b^{\frac{m}{2}}$

2) *La división:* $\dfrac{(5y-1)^{99}+(5y+1)^{99}}{10y}$ *da un c.n, donde un término tiene la forma:*

Ciencia divertida

Observamos el video "El Descubrimiento que Revolucionó el Cálculo de Pi" del canal Veritasium en español.

Escanea el QR

$a\left(25y^2-1\right)^b$. *El valor de* $E=a+b$

3) *Si* x^{a-b}, y^{ab} *es el 5to término del desarrollo del Cociente Notable:* $\dfrac{x^{5n+3}-y^{10n+15}}{x^{n-1}-y^{2n-1}}$; *hallar* $a+b$.

4) *Si el tercer término del desarrollo del cociente notable;* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x+2)^m-x^m}{x+1}\right)$

tiene como valor numérico 1024, *para* $x=2$. *Calcular el valor de* m.

¡Realizamos la valoración!

Actividad 16.

Como pudimos observar, los quehaceres de nuestra vida giran en torno a la interpretación de los datos y a la representación de estos a través del lenguaje, ya sea nuestra lengua materna o bien algún lenguaje especial como el lenguaje matemático.

Comprendemos la importancia de esta área, ya que logramos analizar y construir expresiones algebraicas que nos permiten realizar operaciones fundamentales, como sumar, restar, multiplicar y dividir. O simplemente realizar la descripción de los datos presentes en eventos o elementos de nuestro entorno, como se muestra en las imágenes.

Respondemos las siguientes preguntas en nuestro cuaderno:

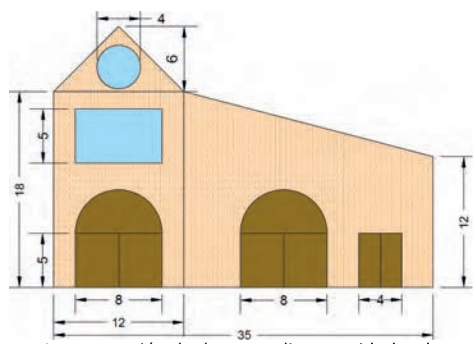
1. ¿Cuál es la finalidad del lenguaje matemático en nuestra vida?
2. ¿Por qué es importante la abstracción matemática en el estudio de los fenómenos o eventos que se presentan en nuestro entorno?
3. ¿Cuál crees que es la diferencia más relevante entre las operaciones fundamentales de la aritmética y las operaciones fundamentales del algebra?

¡Es hora de la producción!

Actividad 17.

Realicemos las siguientes actividades para fortalecer lo aprendido.

1. Elaboremos programas cortos utilizando hojas de cálculo Excel para resolver operaciones a través de las reglas de Ruffini y Horner. Posteriormente crea una guía con la que podamos socializar estos conocimientos a terceras personas.
2. Sistematizamos la información a través de medios digitales y analógicos.
3. Investiguemos en internet si existen programas que nos permitan realizar el cálculo de operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.



Interpretación de datos mediante unidades de medida.

En un triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 18.

Escribimos una lista de 4 virtudes, 4 defectos, 4 hábitos positivos y 4 hábitos negativos, luego de manera aleatoria leemos lo anotado, para socializar con los compañeros y respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Hubo alguna virtud o algún defecto que haya escrito todo el curso? ¿Cuál fue la virtud o defecto identificado?
2. Escribe los nombres de las y los compañeros cuyas respuestas coincidieron.
3. Debatimos sobre la definición de la palabra “común”

4 Virtudes	4 Defectos
1.-	1.-
2.-	2.-
3.-	3.-
4.-	4.-
4 Hábitos positivos	**4 Hábitos negativos**
1.-	1.-
2.-	2.-
3.-	3.-
4.-	4.-

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Casos de factorización

La Factorización de polinomios transforma una suma algebraica en un producto de factores, de modo que factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que al multiplicarlos se obtenga el polinomio original.

2. Factor común

Este método se aplica cuando todos los términos del polinomio tienen un factor común, que puede ser numérico o literal.

Factor común monomio: Es aquel factor que está presente en cada término del polinomio. Para poder factorizar se extrae el factor común de cada termino.

$$ax + bx = x(a+b)$$

Observemos los siguientes ejemplos:

1. Factorizamos: $2ab^3 + 3b^2$ (solo existe factor común en la parte literal)

$2a\boldsymbol{b}^3 + 3\boldsymbol{b}^2$ *como son de distinta potencia, consideramos el de* ***menor grado***

Entonces : $\quad 2ab^3 + 3b^2 = (2ab+3)b^2$

2. Factorizamos: $18x - 15y$ (cuando existe factor común en los coeficientes numéricos)

Descomponemos los coeficientes para hallar el factor común $18x - 15y = 2 \cdot 3 \cdot 3x - 3 \cdot 5y = 3(6x - 5y)$

3. Factorizamos: $36x^2y^2 - 27x^3y + 9x^4y$ (cuando existe factor común en letras y números)

Descomponemos coeficientes y terminos literales

$$36x^2y^2 - 27x^3y + 9x^4y = 4 \cdot 9x^2yy - 3 \cdot 9\boldsymbol{x^2}x\boldsymbol{y} + 9\boldsymbol{x^2}x^2\boldsymbol{y} = 9x^2y(4y - 3x + x^2)$$

Factor común Polinomio: se aplica cuando los términos de la expresión algebraica tienen como factor común un polinomio.

Ejemplos: factorizamos las siguientes expresiones.

1. Factorizamos: $(a+b)m^2 + (a+b)n$

Solución: *Se extrae el factor común polinomio* $(a+b)$

Entonces: $(a+b)m^2 + (a+b)n = (a+b)(m^2+n)$

Actividad 19. En nuestros cuadernos factorizamos las siguientes expresiones:

$ax+bx+cx$

$8a^3-6a^2$

$24a-12ab$

$14a-21b+35$

$5ax^2-5bx^2+5cx^2$

$20x-12xy+4xz$

$10x^2y-15xy^2+25xy$

$2x^2+6x+8x^3-12x^4$

$12m^2n+24m^3 3n^2-36m^4n^3$

$a(x+1)+b(x+1)$

$x^2(p+q)+y^2(p+q)$

$2(a^2+1)-b(a^2+1)$

$m(x+1)-n(x+1)+p(x+1)$

$a^3(a-b+1)-b^2(a-b+1)$

$1-x+2a(1-x)$

$a(a+1)-b(a+1)-a-1$

$x(2a+b+c)-2a-b-c$

$x(b+2)-b-2+3(b+2)$

$(x+y)(n+1)-3(n+1)$

1. Factorizamos: $3m(5x-2)-n(5x+2)+(5x+2)=(5x-2)(3m-n+1)$
2. Factorizamos: $2y(7m-n+3)-7m+n-3=2y(7m-n+3)-(7m-n+3)$
$$=(7m-n+3)(2y-1)$$

3. Factor común por agrupación de términos

Se trata de agrupar términos para obtener un factor común como se muestra en los siguientes ejemplos:

1. Factorizamos: $ax+ay+bx+by$

Solución: agrupamos convenientemente $(ax+ay)+(bx+by)$

Extraemos factor común monomio $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$

Factorizarmos: $ax-ay+az+x-y+z$

Solución: *agrupamos y factorizamos* $(ax-ay+az)+(x-y+z)$

$$=a(x-y+z)+(x-y+z)=(x-y+z)(a+1)$$

2. Factorizamos: $12x+24y+mx+2my$

Solución: *agrupamos dos a dos* $(12x+24y)+(mx+2my)$

Factorizamos en cada grupo $12(x+2y)+m(x+2y)=(x+2y)(12+m)$

Actividad 20. Factorizar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $am-bm+an-bn$
2. $ax-2bx-2ay+4by$
3. $a^2x^2-3bx^2+a^2y^2-3by^2$
4. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$
5. $4a^3-1-a^2+4a$
6. $4a^3-1-a^2+4a$
7. $x+a^2-xy^2-y^2$
8. $3abx^2-2y^2-2x^2+3aby^2$
9. $2am-2an+2a-m+n-1$
10. $3ax-2by-2bx-6a+3ay+4b$

4. Factorización de binomios

4.1. Diferencia de dos cuadrados.

Se factoriza de la siguiente manera:

1° Se extrae la raíz cuadrada en ambos términos.

2° Se multiplica el binomio conjugando como se indica a continuación:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Ejemplo: factorizamos $\frac{9}{16}x^2-\frac{1}{36}$

$$Las\ raices\ son: \sqrt{\frac{9}{16}x^2}=\frac{3}{4}x\ ;\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6};\quad por\ lo\ tanto\ \frac{9}{16}x^2-\frac{1}{36}=\left(\frac{3}{4}x\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}\right)$$

Actividad 21. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes ejercicios de diferencia de cuadrados.

1) $4x^2-9y^2$
2) $4x^2-b^2$
3) $25x^2-y^2$
4) x^2y^6-100
5) $81x^2-16y^2$
6) $(x+3)^2-16$
7) x^3y-y^3x
8) $(x+1)^2-36x^2$
9) $1-m^2n^4$
10) $m^{4a+8}-25$
11) $-x^{8a+2b}+x^{6a-4b}$
12) $49y^4-4(y^2-3y)^2$

4.2. Suma y diferencia de cubos perfectos

Cualquier suma o diferencia de cubos perfectos puede factorizarse de la siguiente manera:

1° Se extrae la raíz cúbica del primer y segundo término.

2° Luego se escribe el producto de la suma o diferencia de las raíces de cada término por el trinomio formado por la raíz del primer término al cuadrado $+o-$ el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz, como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Ejemplo 1. Factorizamos $27a^3+1$:
Calculamos la raíz cúbica de cada uno de los términos, obteniendo:

$$\sqrt[3]{27a^3}=3a \quad y \quad \sqrt[3]{1}=1$$

Luego la factorización será: $27a^3+1=(3a+1)(9a^2-3a+1)$

Ejemplo 2. Factorizamos $64x^3-125y^3$
Calculamos la raíz cúbica de cada uno de los términos, obteniendo:
$\sqrt[3]{64x^3}=4x$ y $\sqrt[3]{125y^3}=5y$

$$\therefore 64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)\left((4x)^2+(4x)(5y)+(5y)^2\right)=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$$

¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor divisor primo de $2^{19}-1$?

Actividad 22. Factorizamos los siguientes ejercicios en nuestros cuadernos para fortalecer lo aprendido.

1) $8x^3+z^3$
2) a^3-125b^3
3) $1+y^3$
4) $64x^3+27$
5) $125y^3+64z^3$
6) $a^3b^3-x^3$
7) x^3-27
8) $(x+y)^3-z^3$
9) a^9+b^9
10) $(x-2)^3-8y^3$
11) $x^8y-64x^2y^7$
12) $a^{12}+b^{12}$

5. Factorización de trinomios

5.1. Trinomio cuadrado perfecto

$$\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 \rightarrow \quad \mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$$

Si el primero y el tercer término son cuadrados perfectos y si el producto de la raíz cuadrada del primer término por la raíz cuadrada del tercer término por 2, nos da como resultado el valor absoluto del segundo término del polinomio original.

Ejemplo 1. Factorizar $1+2m+m^2$

Sacar la raíz cuadrada del primer y tercer término: $1+2m+m^2$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & m \end{matrix}$$

El segundo término debe ser el doble producto de las raíces, $2(1)(m)=+2m$.

Una vez verificado anotamos el cuadrado de la suma o la diferencia. $1+2m+m^2=(1+\boldsymbol{m})^2$

Ejemplo 2. Factorizar $9x^4-24x^2y+16y^2$

$$\textit{Las raíces son}: \sqrt{9x^4}=3x^2; \sqrt{16y^2}=4y; \textit{ el doble producto es}: 2(3x^2)(4y)=-24x^2y$$

$$\textit{Como los signos del trinomio son intercalados, se escribe } 9x^4-24x^2y+16y^2=(3x^2-4y)^2$$

Actividad 23. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

1) x^2-4x+4
2) $9x^2-30x+25$
3) $16a^2-48a+36$
4) $m^2-14m+49$
5) n^8-22n^4+121
6) $(x+3)^2-8(x+3)+16$
7) $x^2+8x+16$
8) $1+4y+4y^2$
9) $2x^2y^3+16x^2y^4+32xy^5$
10) $(x+2y)^3+10(x+2y)+25$
11) $16m^2-40mn+25n^2$

5.2. Trinomio de la forma: x^2+bx+c

Es el resultado del producto de binomios que tienen en común el primer término, para factorizarlo realizamos lo siguiente:
Factorizar: x^2+5x+6

$$\textit{Extraemos la raíz del primer termino } \sqrt{x^2=x} \textit{ y lo anotamos en el producto de binomios}$$

$$x^2+5x+6=(x\quad)(x\quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $+5x$ en el primer factor y se multiplica los signos del segundo y tercer término $(+)(+)=+$ para obtener el signo del segundo factor, así.

$$x^2+5x+6=(x+\quad)(x+\quad)$$

Como los factores tienen signos iguales, se busca dos cantidades cuyo producto es igual al tercer término (6) y cuya suma sea igual al coeficiente del término medio (5). En este caso son 2 y 3.

$$x^2+5x+6=(\boldsymbol{x}+2)(\boldsymbol{x}+3)$$

Ejemplo 1. Factorizamos la expresión $a^2-13a+30$.

$$a^2-13a+30=(a-\quad)(a-\quad)$$

$$a^2-13a+30=(a-10)(a-3)$$

Actividad 24. Fortalecemos nuestro aprendizaje mediante la resolución de los trinomios.

1) $x^2+7x+10$
2) $m^2-15m+54$
3) $a^2+2axy-440x^2y^2$
4) $21-4y-y^3$
5) $x^2+xy-20y^2$
6) $5+4m^{3n}-m^{6n}$
7) $m^4n^4+m^2n^2-132$
8) $t^2-99t+2430$
9) $x^2+3x-550$

5.3. Trinomio de la forma: ax² + bx + c donde $a\neq 1$

Factorizamos la expresión: $6a^2-7a-3$

Solución: se multiplica y divide por el coeficiente del término cuadrático, luego multiplicamos el numerador.

$$6a^2-7a-3\rightarrow\frac{6(6a^2-7a-3)}{6}=\frac{36a^2-7(6a)-18}{6}=\frac{(6a)^2-7(6a)-18}{6}=\frac{(6a-9)(6a+2)}{6}$$

Sacamos factor común de los factores del numerador y simplificamos.

$$\frac{(6a-9)(6a+2)}{6}=\frac{3(2a-3)2(3a+1)}{6}=\frac{6(2a-3)(3a+1)}{6}=(2\boldsymbol{a}-3)(3\boldsymbol{a}+1)$$

Actividad 25. Factorizamos las siguientes expresiones en nuestros cuadernos.

1) $6z^2+11z+4$
2) $10p^2+11p+3$
3) $9x^2+30x+25$
4) $21x^2-29xy-72y^2$
5) $24x^2+5xy-14y^2$
6) $6-5m^2-6m^4$
7) $2m^2+9mn-110n^2$
8) $a^2+2axy-440x^2y^2$
9) $30+13x-3x^2$

5.4. Aspa simple

Es un método que trata de encontrar factores múltiplos del primer y tercer término del trinomio, si la suma del producto en aspa de los factores es igual al termino central, se registra los factores múltiplos del trinomio.

Ejemplo. Factorizamos la expresión: $18a^2+17ay-15y^2$

$$18a^2+17ay-15y^2$$

$$\begin{array}{lll} 9a & -5y & =-10ay \\ 2a & +3y & =\underline{+27ay} \\ & & \;\;+17ay \end{array}$$

$$Luego\;\; 18a^2+17ay-15y^2=(9a-5y)(2a+3y)$$

5.5. Aspa doble

Se emplea para factorizar polinomios de la forma: $P(x,y)=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}+Dx^m+Ey^n+F$

$$P(x,y)=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}+Dx^m+Ey^n+F$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_1x^m & & C_1y^n & & F_1 \\ & \boxed{\mathrm{I}} & \boxed{\mathrm{III}} & \boxed{\mathrm{II}} & \\ A_2x^m & & C_2y^n & & F_2 \end{array}$$

Ejemplo: factorizar el polinomio: $x^2+2xy+y^2-2x-2y-63$

Solución: por método del aspa doble $x^2+2xy+y^2-2x-2y-63$

$$\begin{array}{ccc} x & y & -9 \\ x & y & 7 \end{array}$$

$$La\; factorizacion\; es=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-9)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+7)$$

Actividad 26. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes polinomios mediante el método del aspa:

1) $15x^4+x^2y-6y^2$
2) $11x^2y+10x^4-6y^2$
3) $21m^8-17m^4n+2n^2$
4) $54a^7b^2+7a^{14}-16b^4$
5) $15x^{2a}+9x^a-108$
6) $40x^{2a+2}-x^{a+1}-15$
7) $14x^2+29x-15$
8) $3a^2+5ab-2b^2$
9) $z^{10}-z^5-20$
10) $6x^2-7x+20$
11) $x^2+2xy+y^2+3x+3y+2$
12) $2x^2+4xy-11x-6y^2+7y+5$
13) $12a^2-ab+11a-6b^2+13b-5$
14) $m^2-2n^2+6p^2-mn+5mp-np$

6. Trinomio por adición y sustracción

Factorizamos x^4+3x^2+4

Solución: obtenemos las raíces cuadradas del primer y último término x^4 es x^2 y de 4 es 2; pero el doble producto de las raíces no es $3x^2$, por lo tanto, no es un trinomio perfecto, entonces.

Sumamos y restamos x^2 al trinomio $\quad x^4+3x^2+4+x^2-x^2$

Asociamos convenientemente $\quad (x^4+4x^2+4)-x^2$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x^2+2)^2-x^2$

Factorizamos la diferencia de cuadrados $\quad [(x^2+2)+x][(x^2+2)-x] \rightarrow (x^2+2+x)(x^2+2-x)$

Ordenamos los términos de cada factor $\quad (x^2+x+2)(x^2-x+2)$

Actividad 27. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes trinomios por sumas y restas:

1) z^4+z^2+1
2) $16m^4-25m^2n^2+9n^4$
3) $x^4+m^2n^2+n^4$
4) x^8+3x^4+4
5) x^4+2x^2+9
6) $4x^4-29x^2+25$
7) $16m^4-25m^2n^2+9n^4$
8) $81m^8+2m^4+1$
9) $49x^8+76x^4y^4+100y^8$

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 28. La factorización implica la revisión de varios temas del conocimiento matemático, siendo en sí una forma de mejorar la agilidad mental y el razonamiento en la aplicación práctica de los mismos. De igual manera, es mucho más que un contenido del álgebra, es una herramienta de trabajo para la vida cotidiana. La factorización llega al campo empresarial en varias formas:

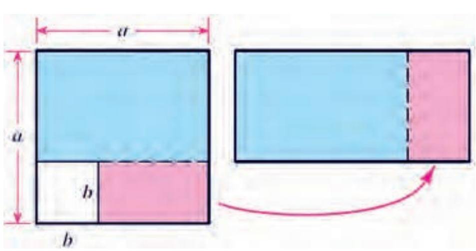
- En el área de ingeniería: contribuyendo en el diseño de edificios a desniveles.
- En la economía podemos conocer el porcentaje de un descuento, el orden, modo de facturar, etc.

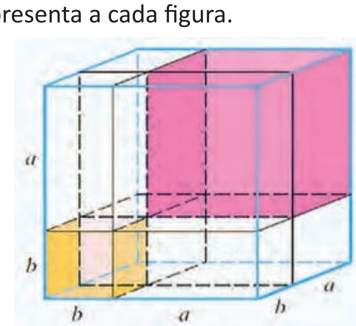
En ese sentido respondemos de manera reflexiva las siguientes preguntas:

- ¿Cómo la factorización contribuyó al desarrollo de la ciencia y tecnología?
- ¿Cómo aplicamos la factorización en la resolución de problemas?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 29. Utilizando materiales de nuestro entorno creamos las siguientes figuras, posteriormente modelamos una expresión algebraica factorizada y su respectivo producto que representa a cada figura.

1. 

2. 

- Investigamos la utilidad de la factorización en construcciones y actividades económicas.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Historia de la factorización. La factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para convertir una expresión algebraica de manera conveniente. Esta tiene una importancia considerable a través de la historia.

La factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado. Por otro lado, los babilonios, fueron los primeros que resolvieron, ecuaciones cuadráticas en unas tablillas descifradas por Neugebaveren 1930, cuya antigüedad es de unos 4.000 años, en estas se encontraron soluciones a varias ecuaciones, empleando el método conocido actualmente como "completar el cuadrado".

Por aquellos años existió una proeza al hallar una solución para polinomios con coeficientes racionales ax^3+bx^2+cx+d donde a, b, c y d son números cualesquiera, y "a" es diferente de cero.

Lo que tienen todas estas expresiones en especial, y que las hace ser de tercer grado, es que la incógnita aparece elevada al exponente 3 y ese es el mayor exponente de la incógnita. La gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro.

Actividad 30.

- Investiguemos la relación de Scipione del Ferro con Niccolo Fontana y Girolamo Cardano para con los polinomios ya mencionados.
- ¿Crees que en la actualidad es una proeza calcular polinomios de la forma $ax^3 + cx^2 + d$? ¿Por qué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Factorización por método de Ruffini

El método de Ruffini, es un método muy práctico, eficaz y sencillo, que nos permite encontrar las diferentes raíces de cualquier polinomio. Es ideal para aquellos polinomios que tienen un grado superior a dos (2).

Este método consiste en seleccionar una posible raíz del polinomio dado y formar una tabla; en el momento en que el último resultado de la tabla sea cero (0) habremos culminado; si no ocurre esto, entonces debemos intentarlo con otra posible raíz.

	1	0	-41	0	+184	0	-144
-1		-1	+1	+40	-40	-144	+144
	1	-1	-40	+40	+144	-144	0
1		+1	0	-40	0	+144	
	1	0	-40	0	+144	0	
-2		-2	+4	+72	-144		
	1	-2	-36	+72	0		
2		2	0	-72			
	1	0	-36				
-6		-6	+36				
	1	-6	0				
6		+6					
	1	0					

Factorizamos: $x^6-41x^4+184x^2-144$

Ordenamos el polinomio de forma decreciente respecto al exponente de la variable, debemos completar los vacíos con ceros.

Se determina los posibles divisores del término independiente son:

$$144=+1,-1,+2,-2,+3,-3,+6,-6,+9,-9,\dots$$

Se baja el primer coeficiente, se multiplica por el divisor (-1), de modo que $1*(-1)=-1$, luego sumamos en vertical $0+(-1)=-1$.

Repetimos el proceso hasta simplificar los coeficientes.

Se anota los factores múltiplos $(x\dots)$ con el signo cambiado $(x-1)$

$$R.(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+6)(x-6)$$

Actividad 31. Fortalecemos nuestro aprendizaje factorizando los siguientes polinomios en nuestros cuadernos.

1) y^3+5y^2+8y-4
2) m^4-22m^2-75
3) $b^3-9b^2+26b-24$
4) $a^5-21a^3+16a^2+108a-144$
5) $x^4+x^3-6x^2-4x+8$
6) $x^5+6x^4+5x^3-24x^2-36x$
7) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x$
8) x^4-2x^2+1

2. Casos combinados de factorización

Existen polinomios que se deben factorizar dos o más veces con diferentes métodos; como, por ejemplo:

Ejemplo 1. Factorizamos la expresión $2x^3+6x^2-8x$.

Solución: obtenemos el factor común del trinomio $2x^3+6x^2-8x \to 2x(x^2+3x-4)$

Factorizamos el trinomio de la forma x^2+bx+c

Ejemplo 2. Factorizamos la expresión $3x^4-243$

$$2x\left(x^2+3x-4\right)\rightarrow 2x\left(x+4\right)\left(x-1\right)$$

Solución: factorizamos 3 de la expresión $3x^4-243\rightarrow 3\left(x^4-81\right)$

Factorizamos el binomio con diferencia de cuadrados

$$3\left(x^4-81\right)\rightarrow 3\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)$$

Factorizamos nuevamente el primer factor aplicando diferencia de cuadrados.

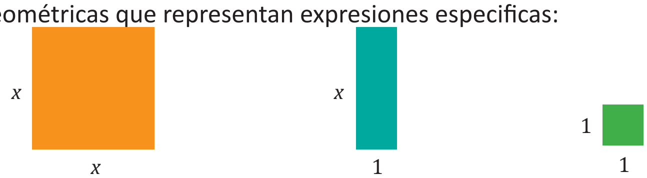
$$3\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)\rightarrow 3\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x^2+9\right)$$

Actividad 32. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes polinomios

1) z^2-3z+2	4) $x^2-2x-48$	7) $3m^2+10m+8$
2) a^2-a-20	5) $x^2-6a-40$	8) $6m^2+7m+2$
3) $x^2-7x+10$	6) $x^2+3x-54$	9) $3x^2-x-4$

3. Interpretación geométrica y aplicación de la factorización

Para realizar una interpretación geométrica de la factorización se requiere normar las siguientes herramientas, es decir, figuras geométricas que representan expresiones especificas:

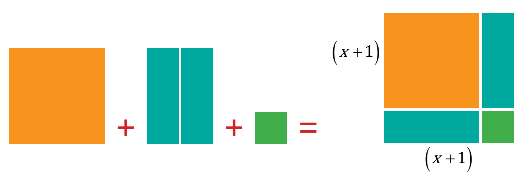


$x^2=x^2$ $\qquad$ $x\cdot 1=x$ $\qquad$ $1^2=1$

Observemos algunos ejemplos de factorización mediante esta interpretación:

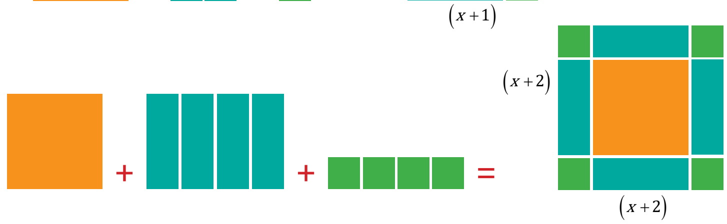
Ejemplo 1. Factorizar x^2+2x+1

$$x^2+2x+1\rightarrow\left(x+1\right)\left(x+1\right)$$



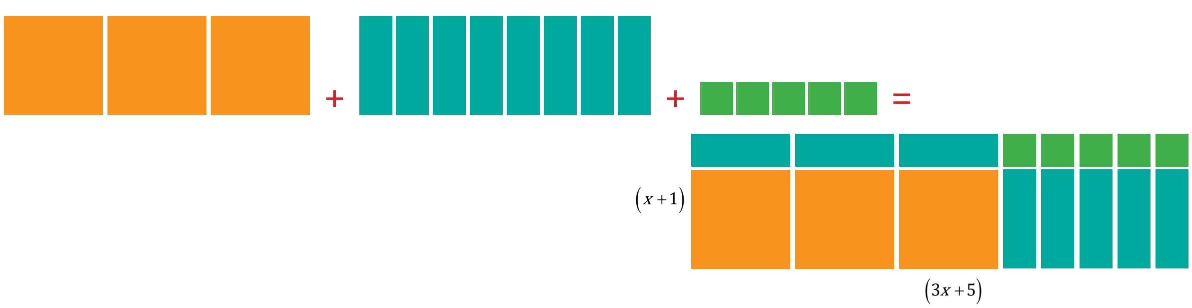
Ejemplo 2. Factorizar x^2+4x+4

$$x^2+4x+4\rightarrow\left(x+2\right)\left(x+2\right)$$



Ejemplo 3. Factorizar $3x^2+8x+5$

$$3x^2+8x+5\rightarrow\left(3x+5\right)\left(x+1\right)$$



Actividad 33. En nuestros cuadernos realicemos las siguientes interpretaciones geométricas de los polinomios:

1) $x^2+10x+24$	4) x^2+4x+3	7) m^2-m-30
2) $x^2+14x+33$	5) x^2+x-2	8) $8x^2+2x-1$
3) $x^2+3x-180$	6) $x^2+22x+30$	9) $6x^2+7x+2$

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 34. Como pudimos observar la factorización ha sido un tema del cual han tratado numerosos matemáticos importantes, haciendo un recorrido por la historia de las matemáticas, específicamente con la solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.

De igual manera, comprendemos que la factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para "transformar" una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema.

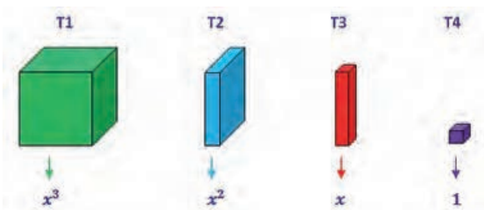
Tiene una importancia apreciable a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

En el cuaderno de ejercicios respondemos las siguientes preguntas.

1. ¿El método gráfico te parece más fácil de comprender o más complicado? ¿Por qué?
2. ¿Por qué es importante aprender a factorizar?
3. ¿Cómo podemos aplicar la factorización en la cotidianidad?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 35. Elaboramos figuras geométricas con materiales de nuestro entorno, para realizar la interpretación geométrica en la factorización:

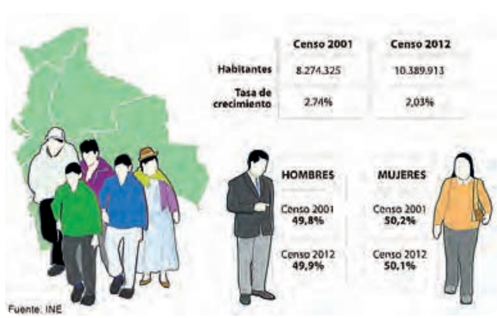


Organicemos un concurso de factorización geométrica con nuestros compañeros, premiando a quienes resuelven ejercicios de factorizacion en el menor tiempo posible.

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 36. Sabias que el objetivo del censo es obtener información estadística sobre la cantidad y las características de la población boliviana, datos que coadyuvarán en la planificación y toma de decisiones para la implementación de políticas públicas. Con estas políticas se podrá mejorar la educación, salud y seguridad ciudadana. Lo interesante de esto es que los datos recolectados se pueden representar en fracciones aritméticas y algebraicas. Con los cuales se dan respuestas a muchas preguntas. Como por ejemplo ¿Qué cantidad de mujeres ejercen la profesión de maestra?, etc.



- Con nuestros compañeros realicemos una investigación sobre los diferentes censos que se realizaron en nuestro País, para dar respuesta a dudas como ¿Qué año se realizó el primer censo en Bolivia?, ¿Qué tipos de censos existen? ¿Cuál es la relación de distribución de recursos con el censo?

Para realizar esta investigación, debemos buscar datos en páginas oficiales como por ejemplo la página del Instituto Nacional de Estadística https://censo.ine.gob.bo/.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Fracción algebraica

Una fracción algebraica es una expresión que se representa como el cociente de dos polinomios P/Q. Donde el polinomio P es el numerador y Q el denominador de la fracción. Por lo tanto:

$$\frac{P}{Q} \to \frac{2x}{3}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2+x}; \quad \frac{-x}{-y}; \quad \frac{2x-5}{x^2+9x-81}; \quad \frac{a^3+4b^2}{a^5-5ab+2b^3}$$

Son fracciones algebraicas racionales, donde $a, b, \ldots x, y \in \mathbb{R}$

Existen reglas para realizar cálculos con fracciones algebraicas, estas son las mismas que estudiamos en las fracciones aritméticas. De igual manera se considera fracción algebraica a toda expresión que mínimamente posee una letra o variable en el denominador, por ejemplo:

$$\frac{P}{Q} \to \frac{1}{2x^2};\quad 2x^{-2}\left(x-3\right);\quad \frac{-5x^{3m}y}{-x};\quad \frac{\sqrt{x-2}+3}{x}$$

2. Equivalencia de fracciones algebraicas

Acorde a una de las propiedades fundamentales de las fracciones, una fracción no se altera si se multiplican o dividen el numerador y el denominador por una misma cantidad, siempre que ésta sea distinta de cero. En estas condiciones las fracciones se llaman equivalentes.

Sean $P,Q,R.$ polinomios cualesquiera, expresados en forma de fracciones equivalentes.

$$\frac{P}{Q} \to \frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{R}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot R} \qquad \frac{P}{Q} \to \frac{P}{Q}\div\frac{R}{R}=\frac{P\div R}{Q\div R}$$

Ejemplos 1. Calculamos la fracción equivalente de P/Q, si se multiplica el numerador y denominador por R; donde $P=\left(2+x\right),Q=\left(1-x\right)\,y\,R=\left(1+x\right)$

$$\frac{2+x}{1-x} \to \frac{\left(2+x\right)}{\left(1-x\right)}\cdot\frac{\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)}=\frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{2+x}{1-x}=\frac{x^2+3x+2}{1-x^2}\,\textit{son fracciones equivalentes}$$

Ejemplo 2. Calculamos el equivalente de $2\left(x^2-1\right)/xy^2$, si se multiplica al numerador y denominador la expresión $2\left(x-2\right)$.

$$\frac{2\left(x^2-1\right)}{xy^2} \to \frac{2\left(x^2-1\right)}{xy^2}\cdot\frac{2\left(x-2\right)}{2\left(x-2\right)}=\frac{2\left(x^3-2x^2-x+2\right)}{xy^2\left(x-2\right)}=\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^2y^2-2xy^2}$$

$$\therefore \frac{2\left(x^2-1\right)}{xy^2}=\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^2y^2-2xy^2}\,\textit{son fracciones equivalentes}$$

3. Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar fracciones algebraicas debemos factorizar el numerador y el denominador para eliminar los factores y términos comunes en ambos.

a. Simplificación de monomios: la parte numérica se descompone en sus factores primos y la parte literal en sus factores múltiplos acorde a su exponente. Posteriormente se eliminan los factores semejantes.

Ejemplo 1. Simplificamos $10x^2y/4xz$

$$\frac{10x^2y}{4xz}=\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot y}{2\cdot 2\cdot x\cdot z}=\frac{5xy}{2z}$$

Ejemplo 2. Simplificamos los monomios $15a^{12}b^{15}c^{20}/75a^{11}b^{16}c^{22}$.
Descomponemos y aplicamos la propiedad de exponentes.

$$\frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 3}\cdot a^{12-11}b^{15-16}c^{20-22}=\frac{1}{5}ab^{-1}c^{-2}=\frac{a}{5bc^2}$$

b. Simplificación de polinomios: para simplificar polinomios debemos factorizar el numerador y/o el denominador y posteriormente eliminar los factores y términos semejantes.

Ejemplo 1. simplificamos: $\dfrac{3ab}{2a^2b+2a^3}$

Obtenemos factor común en el denominador $\dfrac{3ab}{2a^2b+2a^3}=\dfrac{3ab}{2a^2\left(b+a\right)}=\dfrac{3b}{2a\left(b+a\right)}$

Ejemplo 2. simplificamos: $\dfrac{\left(4n^2+4n-3\right)\left(n^2+7n-30\right)}{\left(2n^2-7n+3\right)\left(4n^2+12n+9\right)}$

Glosario

Signos de una fracción

Una fracción tiene tres signos:

1. Signo en el numerador
2. Signo en el denominador
3. Signo de la fracción

Cambio de signo en una fracción

1. Cuando una fracción no tiene factores indicados, se puede cambiar dos de sus tres signos sin que la fracción se altere.

$$\frac{P}{Q}=+\frac{+a}{+b}=-\frac{-a}{+b}=-\frac{+a}{-b}=+\frac{-a}{-b}$$

2. Cuando una fracción tiene los factores indicados, el cambio de signo no altera la fracción si el cambio se realiza a un número par de factores, si el cambio es a un número impar si cambia de signo.

$$\frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{\left(b-a\right)\left(c-a\right)}=\frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{-\left(b-a\right)\left(a-c\right)}$$

$$\frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{-\left(b-a\right)\left(a-c\right)}=\frac{-\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{\left(b-a\right)\left(a-c\right)}$$

$$\therefore \frac{\left(b-a\right)\left(a-c\right)}{\left(b-a\right)\left(a-c\right)}=+1$$

Propiedades de potenciación:

a. Producto de bases iguales

$$a^n\times a^m=a^{n+m}$$

b. Cociente de bases iguales

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

c. Potencia inversa

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

d. Exponente cero

$$a^0=1$$

e. Potencia de otra potencia

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$$

f. Propiedad distributiva

$$\left(ab\right)^m=a^mb^m\quad;\quad\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

Factorizamos los numeradores y denominadores.

$$\frac{\left(4n^2+4n-3\right)\left(n^2+7n-30\right)}{\left(2n^2-7n+3\right)\left(4n^2+12n+9\right)}=\frac{\cancel{(2n+3)}\cancel{(2n-1)}(n+10)\cancel{(n-3)}}{\cancel{(2n-1)}\cancel{(n-3)}(2n+3)\cancel{(2n+3)}}$$

$$=\frac{n+10}{2n+3}$$

Ejemplo 3. simplificamos: $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-4xy+3y^2}$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2-4xy+3y^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-3y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-3y}, \text{siempre y cuando } (x+y)\neq 0$$

Actividad 37. En nuestros cuadernos simplificamos las siguientes expresiones algebraicas.

1) $\dfrac{12x^2y^2}{4x^3y}$

2) $\dfrac{-16a^{20}b^{10}c^{1+m}}{-8a^{19}b^{12}c^2}$

3) $\dfrac{6x^3-18x^2-24x}{15x-9x^2}$

4) $\dfrac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$

5) $\dfrac{8-a^2}{a^2+2a-8}$

6) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

7) $\dfrac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$

8) $\dfrac{(x-2)^2\left(x^2+x-12\right)}{(2-x)(3-x)^2}$

9) $\dfrac{ab\left(x^2+y^2\right)+xy\left(a^2+b^2\right)}{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)}$

10) $\dfrac{\left[\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x-\frac{1}{y}\right)\right]^n\left(x-\frac{1}{y}\right)^{-2n}}{\left[\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)\right]^{-n}\left(y-\frac{1}{x}\right)^{2n}}$

11) $\dfrac{(a-1)(a^2-9)(a-5)+27}{(a+2)(a^2-16)(a-6)+48}$

4. Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es aquel término que se divide por todos los factores comunes y no comunes resultantes de:

- Obtener el m.c.m. de los coeficientes.
- Tomar los factores que no se repiten y de los que se repiten, tomar el de mayor exponente, para luego multiplicarlo por el m.c.m. de los coeficientes.

Ejemplo 1. Calcular el m.c.m. de la siguiente expresión $24x^2y^2z;15xy^2z;36y^4z^2$

Solución: calculemos el m.c.m. de los coeficientes y las variables

$$\begin{array}{ccc|c} 24 & 15 & 36 & 2\\ 12 & 15 & 18 & 2\\ 6 & 15 & 9 & 2\\ 3 & 15 & 9 & 3\\ 1 & 5 & 3 & 3\\ 1 & 5 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \quad mcm=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$$

Se toman los factores literales de mayor exponente si son comunes, de igual manera se toma los que no son iguales.

$$mcm=x^2y^4z^2$$

Por lo tanto, el mcm de $24x^2y^2z;15xy^2z;36y^4z^2\ es\ 360x^2y^4z^2$

5. Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es el término o polinomio que divide a todas y cada una de las expresiones dadas. Para obtener el M.C.D., debemos obtener:

- El máximo común divisor de los coeficientes.
- De los factores literales (monomios o polinomios) tomamos el de menor exponente común y se multiplica por el MCD de los coeficientes.

Ejemplo 1.calcular el MCD de $24x^2y^2z;15xy^2z;36y^4z^2$.

$$\begin{array}{ccc|c} 24 & 15 & 36 & 3\\ 8 & 5 & 12 & \end{array} \quad MCD=3$$

Tomamos los factores literales comunes de menor exponente.

$$MCD=y^2z$$

Por lo tanto, el MCD de $24x^2y^2z;15xy^2z;36y^4z^2\ es\ 3y^2z$

Actividad 38. En nuestros cuadernos determinamos el m.c.m. y el M.C.D. de las siguientes expresiones algebraicas:

1) $70x^2y^3z^4$; $42x^2y^4z^4$; $77x^3y^5z^3$
2) $96m^2y^2$; $72m^3y^4$; $120m^4y^5$
3) $4a^2b$; $8a^3b^2c$; $10ab^3c^3$
4) $78abc^2$;$39a^2bc$; $52ab^2c$
5) $m^2+mn;mn+n^2;m^3+m^2n$
6) $3a^2-a;27a^3-1;9a^2-6a+1$
7) $m^3-1;m^2-1$
8) $ab+b;a^2+a$
9) $60x^2b^x;75a^4b^{x+2};95ab^{x+1}$
10) $x^2-y^2;x^2-2xy+y^2$
11) $a^3-2a^2;3a^2-3a;4a^3-4a^2$
12) $124a^2b+12b;22a^2+2a$

6.Operaciones básicas con fracciones algebraicas

Suma y resta de fracciones algebraicas: Para sumar y restar fracciones algebraicas, empleamos el siguiente procedimiento:

1. Si es posible se simplifiquen las fracciones.
2. Hallamos el m.c.m. determinando el mínimo común denominador de los denominadores
3. Dividimos el mínimo común denominador entre cada denominador y luego lo multiplicamos por su respectivo numerador.
4. Simplificamos las expresiones restantes si es posible.

Ejemplo 1. Sumamos $\frac{3x}{4x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}$

Solución: simplificamos las fracciones si es posible y hallamos el m.c.m. descomponiendo en factores cada uno de los denominadores, para hallar el común denominador.

$$\frac{3x}{4x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}=\frac{3x}{4x\cdot x}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}=\frac{3}{4x}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}$$

De los denominadores $4x;xy;y^2$ *el m.c.m.es* $4xy^2$

Dividimos el m.c.m.entre cada denominador $\frac{4xy^2}{4x}=y^2;\frac{4xy^2}{xy}=4y;\frac{4xy^2}{y^2}=4x$

Multiplicamos los resultados por los numeradores $\frac{y^2(3)+4y(2)+4x(4a-3)}{4xy^2}=\frac{3y^2+8y+16ax-12x}{4xy^2}$

Ejemplo 2. Sumamos $\frac{a+5}{a^2-10a+25}-\frac{5a+3}{a^2-25}+\frac{a-1}{a+5}$

Solución: factorizamos y simplificamos las fracciones:

$$\frac{a+5}{a^2-10a+25}-\frac{5a+3}{a^2-25}+\frac{a-1}{a+5}=\frac{(a+5)}{(a-5)(a-5)}-\frac{(5a+3)}{(a-5)(a+5)}+\frac{(a-1)}{(a+5)}$$

Efectuamos las multiplicaciónes en el numerador

$$=\frac{(a+5)(a+5)-(5a+3)(a-5)+(a-1)(a-5)^2}{(a-5)^2(a+5)}$$

$$=\frac{a^2+10a+25-(5a^2-25a+3a-15)+(a-1)(a^2-10a+25)}{(a-5)^2(a+5)}$$

$$=\frac{a^2+10a+25-5a^2+22a+15+a^3-10a^2+25a-a^2+10a-25}{(a-5)^2(a+5)}$$

Simplificamos $$=\frac{67a-15a^2+15+a^3}{(a-5)^2(a+5)}=\frac{a^3-15a^2+67a+15}{(a+5)(a-5)^2}$$

Actividad 39. En nuestros cuadernos fortalecemos lo aprendido sumando y/o restando las siguientes fracciones.

1) $\frac{1}{a}+\frac{4}{a+b}-\frac{3}{a^2}$

2) $\frac{a}{a^2+6ab}+\frac{a-b}{a^2+5ab-6b^2}-\frac{a+b}{a}$

3) $\frac{a}{a^2b^2}-\frac{1}{(a+b)}+\frac{a+b}{(a-b)}$

4) $\frac{m+n}{2m+3n}-\frac{m}{4m^2+6mn+9n^2}+\frac{1}{2m^2+mn-3n^2}$

5) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x-1}$

6) $\frac{a+1}{a^2+a-12}-\frac{12}{a^2+5a-24}$

7) $\frac{a-b}{2}+\frac{a^2-b^2}{5a}+10ab$

8) $\frac{a}{a^2+6ab}+\frac{a-b}{a^2+5ab-6b^2}-\frac{a+b}{a}$

9) $\frac{(a-2)^{\frac{2}{3}}}{4(a+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{3(a+1)^{\frac{1}{3}}}{4(a-2)^{\frac{1}{3}}}$

10) $\frac{(8a-3)(4a^2+3a)^{\frac{1}{3}}}{3(4a^2-3a)^{\frac{2}{3}}}-\frac{(8a+3)(4a^2-3a)^{\frac{1}{3}}}{3(4a^2+3a)^{\frac{2}{3}}}$

11) $\frac{a+3b}{b+a}-\frac{3b^2}{b^2-a^2}+\frac{a}{b-a}$

Multiplicación de fracciones algebraicas: para multiplicar fracciones algebraicas descomponemos en factores el numerador y denominador, simplificamos las fracciones, luego multiplicamos numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo 1. Multiplicamos: $\left(\frac{5x}{9y}\right)\left(\frac{3y}{15x^2}\right)$

Multiplicamos y simplificamos los numeradores $\left(\frac{5x}{9y}\right)\left(\frac{3y}{15x^2}\right)=\frac{15\cdot x\cdot y}{15\cdot 9\cdot x\cdot x\cdot y}=\frac{1}{9x}$

Ejemplo 2. Multiplicamos: $\left(\frac{x^2-81}{2x^2+10x}\right)\left(\frac{2x+40}{x^2-36}\right)\left(\frac{2x-12}{2x+18}\right)\left(\frac{x^4+5x^2}{mx+20m}\right)$

Factorizamos los numeradores y denominadores para luego simplificar los términos semejantes.

$$\left[\frac{(x+9)(x-9)}{2(x^2+5)}\right]\left[\frac{2(x+20)}{(x+6)(x-6)}\right]\left[\frac{2(x-6)}{2(x+9)}\right]\left[\frac{x^2(x^2+5)}{m(x+20)}\right]=\left[\frac{x-9}{1}\right]\left[\frac{1}{x+6}\right]\left[\frac{1}{1}\right]\left[\frac{x^2}{m}\right]=\frac{x^2(x-9)}{m(x+6)}=\frac{x^3-9x^2}{mx+6m}$$

Ejemplo 3. Multiplicamos: $\frac{(x^2-5x+6)}{(3x-15)}\cdot\frac{6x}{(x^2-x-30)}\cdot\frac{(x^2-25)}{(2x-4)}$

Factorizamos los numeradores y denominadores para posteriormente simplificar factores.

$$\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-5)}\cdot\frac{6x}{(x-6)(x+5)}\cdot\frac{(x-5)(x+5)}{2(x-2)}=\frac{(x-3)}{1}\cdot\frac{x}{(x-6)}=\frac{x(x-3)}{x-6}=\frac{x^2-3x}{x-6}$$

Actividad 40. Fortalecemos nuestro aprendizaje multiplicando las siguientes fracciones algebraicas.

1) $\left(\frac{24m^2n^3}{7a^2b^3}\right)\left(\frac{42a^3}{36mn^2}\right)$

2) $\left(\frac{m^3-n^3}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{m-n}\right)$

3) $\left(\frac{3xyz^2}{16a^2b^7}\right)\left(\frac{2a^4b^6}{x^2y^2z}\right)$

4) $\left(\frac{36x^2-1}{16a}\right)\left(\frac{2ax}{6x+1}\right)$

5) $\left(\frac{5m-15}{3m-1}\right)\left(\frac{9m^2-6m+1}{10m-30}\right)$

6) $\left(\frac{12ab}{14m^2n^2}\right)\left(\frac{2m^4n^6}{144a^2b}\right)$

7) $\left(\frac{7a+14b}{20a-48b}\right)\left(\frac{5ab-12b^2}{a^3+a^2b}\right)$

8) $\left(\frac{4xy}{13m^2}\right)\left(\frac{39m}{12x^2y}\right)$

9) $\frac{14x^2-21x}{24x-16}\cdot\frac{12x-8}{42x-63}$

10) $\frac{x^3-27}{a^3-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$

11) $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$

12) $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$

13) $\frac{5}{x}\cdot\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{3y}{10}$

14) $\frac{16ab^2}{5a^2x}\cdot\frac{10x^3}{4b^3}\cdot\frac{2a^2}{3bx}$

División de fracciones algebraicas: para multiplicar fracciones algebraicas, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, luego el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. Posteriormente se factorizan o se simplifican los factores semejantes.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\qquad o\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 1. Realizamos la divisíon de $\frac{2mn}{7a} \div \frac{m}{35a^2}$

$$\frac{2mn}{7a} \div \frac{m}{35a^2} = \frac{(2mn)(35a^2)}{(7a)(m)} = 10an$$

Ejemplo 2. Dividimos: $\frac{2m^2+5mn+3n^2}{m^2-n^2} \div \frac{6m^2+mn-5n^2}{m+n}$

$$\textit{Invertimos la segunda fracción} \frac{2m^2+5mn+3n^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{m+n}{6m^2+mn-5n^2}$$

Factorizamos y posteriormente simplificamos factores semejantes.

$$\frac{(2m+3n)(m+n)}{(m+n)(m-n)} \cdot \frac{(m+n)}{(m+n)(6m-5n)} = \frac{2m+3n}{(m-n)(6m-5n)} = \frac{2m+3n}{6m^2-5mn-6mn+5n^2} = \frac{2m+3n}{6m^2-11mn+5n^2}$$

Actividad 41. Dividimos en nuestros cuadernos las siguientes fracciones algebraicas.

1) $\frac{7x^2y^2}{5a^2b^3} \div \frac{21xy^3}{25a^3b}$

2) $\frac{12mn^2}{17a^2b^3} \div \frac{3m^3n^4}{51ab^4}$

3) $\frac{24xy}{35m^2n^2} \div \frac{12y^4}{7m^3n}$

4) $\frac{81a^2-4b^2}{121x^2+22x+1} \div \frac{9a+2b}{22x+2}$

5) $\frac{36m^2+36mn+9n^2}{12} \div \frac{24m+12n}{6n}$

6) $\frac{200x+240y}{39x-6y} \div \frac{220ax-270ay}{65x^2-10xy}$

7) $\frac{x}{3x^2-3y^2} \div \frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$

8) $\frac{6a^2}{(2a+3)^3} \div \frac{2a^4}{(2a+3)}$

9) $\frac{12a^5}{(2a^3+1)^{\frac{1}{3}}} \div \frac{2a^2}{(2a^3+1)^{\frac{2}{3}}}$

Fracciones complejas: son fracciones que contienen operaciones en el numerador y el denominador, por ejemplo:

Ejemplo 1. Efectuar $\frac{a-b}{(b+c-a)(b-c-a)} + \frac{b-c}{(c+a-b)(a+b-c)} + \frac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$

Realizamos un cambio de signo a los dos factores de la primera fracción:

$$= \frac{a-b}{(a-b-c)(a-b+c)} - \frac{b-c}{(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-c)-(b-c)(a-b-c)+(c-a)(a-b+c)}{(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{a^2-b^2-ac+bc+b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ab}{((a-b)-c)((a-b)+c)(a+b-c)} = \frac{0}{\left((a-b)^2-c\right)(a+b-c)}$$

7. Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas con fracciones primero debemos suprimir los paréntesis si existieran, de adentro hacia afuera; potencias y raíces si existieran; multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, por último las sumas y restas.

Ejemplo 1. Resolvemos el siguiente ejercicio: $\frac{2a}{3b} + \left(\frac{5}{a}\right)\left(\frac{3}{b^2}\right) \div \frac{35a}{8b}$

Cambiamos la división por multiplicación y simplificamos los factores

$$\frac{2a}{3b} + \left(\frac{15}{ab^2}\right) \div \left(\frac{35a}{8b}\right) = \frac{2a}{3b} + \left(\frac{15}{ab^2}\right) \cdot \left(\frac{8b}{35a}\right) = \frac{2a}{3b} + \frac{24}{7a^2b} = \frac{(7a^2)(2a)+(3)(24)}{21a^2b} = \frac{14a^3+72}{21a^2b}$$

Ejemplo 2. Resolvemos el siguiente ejercicio:

$$\left(\frac{3a^2+10ab+8b^2}{5a-2b}\right)\left(\frac{6a}{15a^2+17ab-4b^2}\right) \div \frac{a+2b}{10a-4b} - 12b^2$$

Descomponemos en factores el numerador y denominador, luego simplificamos los factores comunes.

$$\left[\frac{(a+2b)(3a+4b)}{(5a-2b)}\right]\left[\frac{6a}{(3a+4b)(5a-b)}\right]\div\left[\frac{a+2b}{2(5a-2b}\right]-12b^2=\left[\frac{6a(a+2b)}{(5a-2b)(5a-b)}\right]\left[\frac{2(5a-2b)}{a+2b}\right]-12b^2$$

$$\textit{Hallamos el m.c.m. y restamos}\ \frac{12a-12b^2(5a-b)}{5a-b}=\frac{12a-60ab^2+12b^3}{5a-b}$$

Actividad 42. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios:

1) $\dfrac{9x}{2y}-\left[\left(\dfrac{4x^2}{y^2}\right)\left(\dfrac{y}{2x}\right)\right]$

2) $\dfrac{4a}{7b}+\left(\dfrac{16b^2}{7a}\div\dfrac{24b^3}{14a^2}\right)$

3) $\left(\dfrac{121m^2-16n^2}{4m^2-20n}\right)\left(\dfrac{m^2-5n}{11m-4n}\right)\div\dfrac{22m+8n}{m^2}$

4) $\dfrac{10p^2-3pq-4q^2}{4}\div\dfrac{35p^2-33pq+4q^2}{6}-\dfrac{p-q}{2}$

5) $\dfrac{7}{4}m^3+\dfrac{125m^2}{44n}\div\dfrac{25m}{12n}-\dfrac{1}{m}$

6) $\dfrac{x+4+\dfrac{3}{x}}{x-4-\dfrac{5}{x}}$

7) $\dfrac{\dfrac{(2a+3)^{\frac{1}{2}}}{2(a+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(a+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2a+3)^{\frac{1}{2}}}}{2a+3}$

8. Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

Problema 1. El área de un rectángulo es $(xy+2x+y+2)m^2$ y uno de sus lados mide $(x+1)m$. ¿Cuál es la medida del otro lado?

Datos:

$\textit{Área}=(xy+2x+y+2)m^2$

$\textit{Lado}\ a=(x+1)m$

Planteamiento:

$\textit{Área}=\textit{lado a}\cdot\textit{lado b}\rightarrow\textit{lado b}=\dfrac{\textit{Área}}{\textit{lado a}}$

$\textit{lado b}=\dfrac{(xy+2x+y+2)m^2}{(x+1)m}=(y+2)m$

El otro lado mide $(y+2)m$

Problema 2. La velocidad promedio es la razón entre una distancia recorrida, y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 6 horas en recorrer una distancia de 300 kilómetros, su velocidad promedio es:

Datos:

$\textit{Velocidad}=\dfrac{\textit{distancia}}{\textit{tiempo}}$

$V=\dfrac{300km}{6h}$

Planteamiento:

$v=\dfrac{300km}{6h}$ *simplificamos*

$v=50\dfrac{km}{h}$

Su velocidad es de 50 kilómetros por hora

Actividad 43. En nuestros cuadernos solucionamos los siguientes problemas.

1. El área de un rectángulo es $(2xy+4x+2y+4)m^2$ y uno de sus lados mide $(x+1)m$. ¿Cuál es la medida del otro lado?
2. La velocidad promedio es la razón entre una distancia recorrida, y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 8 horas en recorrer una distancia de 1600 kilómetros, su velocidad promedio es:

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 44. Debemos entender que las fracciones son una de las expreciones de la matemática que aparecen con mayor frecuencia en la vida cotidiana. Una cantidad enorme de productos se venden expresados como fracciones, ya sea el kilo, litro, o incluso unidades arbitrarias e históricamente establecidas para ciertos rubros. De igual manera es muy utilizada en la economía, por ejemplo en la distribución de recursos, que se realiza a través de una repartición equitativa acorde a la cantidad y número de personas. Nada de esto tendría sentido sin el aporte de hombres y mujeres que dedicaron su vida a la matemática.

- ¿Conoces alguna mujer u hombre matemático? ¿Conoces sus aportes en el avance tecnologico?
- ¿Cómo aplicamos las fracciones algebraicas en la cotidianidad?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 45. Construimos un juego matematico con materiales de nuestro entorno y jugamos en equipos colaborativos:

- El juego está diseñado para tres jugadores, cada jugador debe tener una ficha para recorrer las casillas del tablero.
- Cada jugador lanza un dado debiendo sacar 6 para iniciar el juego.
- Cuando la ficha de un jugador cae en una casilla el jugador debe resolver el ejercicio, si es resuelto de manera errónea debe retroceder 2 espacios. Los demás jugadores controlan la resolución del ejercicio además del profesor.
- Gana el jugador que llegue primero a la meta.

PARTIDA	$\frac{x}{2}+\frac{2x}{5}$	$\frac{a+b}{5}-\frac{1}{a}$	Vuelve a la partida	$\frac{a+b}{b}\div\frac{a+b}{b^2}$
				$\frac{1}{b}+\frac{a}{b}$
$\frac{5}{a-b}+\frac{3}{a^2-b^2}$	Retrocede tres espacios	$\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}\right)$	$\frac{m+n}{m}-m$	$\frac{m^2-n^2}{m+n}$
$\left(\frac{3x+1}{x}\right)\left(\frac{4x}{3}\right)$				
$\frac{x^2}{m}\div\frac{mn}{2x}$	$\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a}$	$\frac{2a+4b}{a+2b}$	$\frac{x+1}{x}\div\frac{1}{x^2}$	**META**

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Analicemos la lectura "**El Origen de las Potencias - Historia del tablero de Ajedrez**"

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez.

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara.

Sissa solo pidió que le diera un grano de trigo. ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey. – Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32... – Basta —le interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente.

Ciencia divertida

Aprendemos sobre el origen de las potencias
Fuente: https://www.youtube.com/@mechon239

Escanea el QR

Actividad 46. Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo podemos representar la petición del soberano?
- ¿Cuántas casillas tiene un tablero de ajedrez?
- ¿Cuántos granos de trigo tendrá la décima casilla?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Teoría de exponentes y sus propiedades

La teoría de exponentes, estudia los tipos y propiedades que las rigen. El teorema de exponentes consiste en la operación de tomar una expresión algebraica llamada base y multiplicarla por sí misma cuantas veces nos indique el exponente.

$$a^n = a\cdot a\cdot a\cdots, \text{ donde "}a\text{" es la base y "}n\text{" el exponente.}$$

Propiedades exponenciales:

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Producto de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se suman los exponentes.	$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$(5x)(8x^3) = 40x^{1+3} = 40x^4$
Cociente de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se restan los exponentes.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{-27x^7}{-3x^3} = \frac{-27}{-3}x^{7-3} = 9x^4$

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Exponente cero: cualquier expresión algebraica distinta de 0 elevada a cero es igual a 1.	$a^0 = 1 \rightarrow a \neq 0$	$\left(-21x^8\right)^0 = 1$
Potencia de otra potencia: si el exponente de una expresión algebraica esta elevada a otra potencia, se copia la base y se multiplican los exponentes:	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(2^m x^2\right)^3 = 2^{m \cdot 3} x^{2 \cdot 3} = 2^{3m} x^6$
Exponente negativo: si el exponente de una expresión algebraica es negativo, se invierte la base con su exponente, donde el exponente cambia de signo.	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \rightarrow a^m \neq 0$	$\left(-4x\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-4x\right)^2} = \dfrac{1}{16x^2}$
Potencia de un producto: la potencia de un producto de una expresión algebraica es igual a cada uno de los factores elevados al mismo exponente.	$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(x^2 \cdot y^3\right)^2 = x^{2 \cdot 2} y^{3 \cdot 2} = x^4 y^6$
Potencia de un cociente: la potencia de un cociente de una expresión algebraica es igual al cociente de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{x^4 \cdot y^3}{z^2}\right)^3 = \dfrac{x^{4 \cdot 3} \cdot y^{3 \cdot 3}}{z^{2 \cdot 3}} = \dfrac{x^{12} \cdot y^9}{z^6}$
Propiedad de signos en la potenciación. – Si el exponente de la potencia es *par* el resultado tendrá signo positivo. – Si el exponente de la potencia es *impar*, el resultado tendrá signo negativo, si el término es negativo.	$-a^{par} = a$ $-a^{impar} = -a$	$\left(-2x\right)^2 = \left(-2x\right)\left(-2x\right) = 4x^2$ $\left(-2x\right)^3 = \left(-2x\right)\left(-2x\right)\left(-2x\right) = -8x^3$

2. Reducción de expresiones algebraicas aplicando las diferentes propiedades de potenciación

Debemos aplicar las propiedades exponenciales para reducir la expresión mediante operaciones algebraicas.

Ejemplo 1. *Simplificamos la expresión* $\dfrac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$

Solución: como las bases son iguales, se simplifica el numerador y después su denominador.

$$\frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(a^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \left(a^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{a^2+1}$$

Ejemplo 2. *Simplificamos la expresión:* $\dfrac{\left(2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2x^{-2} \cdot y^6\right)^{-1}\left(2xy\right)^5}$

Solución: resolvemos las potencias para cada uno de los paréntesis.

$$\frac{\left(2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2x^{-2} \cdot y^6\right)^{-1}\left(2xy\right)^5} = \frac{2^6 x^{\frac{6}{3}} \cdot y^{\frac{30}{6}}}{\left(2^{-1}x^2y^{-6}\right)\left(2^5x^5y^5\right)} = \frac{2^6x^2y^5}{2^{-1+5}x^{2+5}y^{-6+5}} = \frac{2^6x^2y^5}{2^4x^7y^{-1}} = 2^{6-4}x^{2-7}y^{5-(-1)} = 2^2x^{-5}y^6 = \frac{4y^6}{x^5}$$

Actividad 47. En nuestros cuadernos simplificamos las siguientes expresiones:

1) $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{6}{4}}$

3) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{2x^{-3}y^{-1}}\right)^2$

4) $\dfrac{4x^5y^{-4}}{\left(2x^{-2}y^3\right)^{-2}}$

5) $\dfrac{\left(a+3b\right)^{\frac{1}{2}}\left(a+3b\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(a+3b\right)^{-\frac{4}{3}}}$

6) $\left[\dfrac{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}{\left(2x^2y^{-3}\right)^{-2}}\right]^{-3}$

7) $\left[\dfrac{\left(a^2b^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}\right)^4}{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}\right]^{-1}$

8) $\dfrac{1}{\left(3x^2y^3\right)^{-2}} \cdot \left(2xy^{-2}\right)^{-3}$

9) $\dfrac{\left(x^8y^{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(x^9y^6\right)^{\frac{1}{3}}}$

10) $\dfrac{\left[\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{\left(a^2+b^2\right)^{-2}}$

11) $\left[\left(4a^2b^3\right)^{-2}\left(2a^2b^{-2}\right)^2\right]^{-2}$

12) $\dfrac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

13) $\left(\dfrac{b^0-b^{-2}}{x^0-b^{-1}}\right)^{-1}$

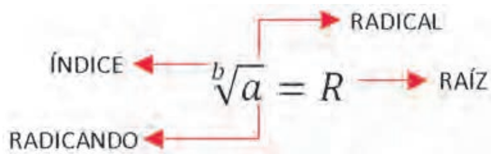
14) $\dfrac{a^2b^2\left(a^{-2}+b^{-3}\right)}{a-b}$

15) $\dfrac{ab^{-2}+a^{-2}b}{a^{-1}+b^{-1}}$

3. Radicales (raíz de índice natural de una expresión algebraica)

La radicación es la operación inversa a la potenciación, consiste en hallar la raíz del radicando o cantidad subradical, por lo tanto:

$$\sqrt[n]{a}=b \; si \; y \; solo \; si \; b^n=a$$



Propiedades de los radicales

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Raíz de un producto. El producto de radicales de igual índice es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores.	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[5]{4xy^3}=\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{y^3}$
Raíz de una raíz. Se multiplican los índices de los radicales y se copia la cantidad subradical.	$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}}=\sqrt[p\cdot q\cdot r]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{3x}}}=\sqrt[3\cdot 4\cdot 2]{3x}=\sqrt[24]{3x}$
Raíz de un cociente. La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{3a^6}{8b^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{3a^6}}{\sqrt[3]{8b^3}}=\dfrac{a^2\sqrt[3]{3}}{2b}$
Propiedad de signos en la radicación. Para obtener el signo de la raíz utilizamos la siguiente ley de signos.	$\sqrt[Par]{(+)}=(\pm)$ $\sqrt[Impar]{(+)}=(+)$ $\sqrt[Impar]{(-)}=(-)$ $\sqrt[Par]{(-)}=\boldsymbol{i}$ valor imaginario	$\sqrt{16}=\pm 4;\ \sqrt[3]{8}=2$ $\sqrt[3]{-8}=-2$ $\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2i$

4. Introducción de factores dentro del radical

Dada un radical, debemos introducir el coeficiente al radical. Para ello, se debe elevar el coeficiente a un exponente igual al índice de la raíz.

Ejemplo 1. Introducimos el coeficiente al radical

$$\frac{5xy^9}{4z^2}\cdot\sqrt{22xy^3}=\sqrt{22xy^3\left(\frac{5xy^9}{4z^2}\right)^2}=\sqrt{22xy^3\left(\frac{25x^2y^{18}}{16z^4}\right)}=\sqrt{11xy^3\left(\frac{25x^2y^{18}}{8z^4}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{275x^3y^{21}}{8z^4}}$$

5. Extracción de factores de un radical y transformación de radicales

Para extraer un factor fuera del radical, se divide el exponente de la cantidad subradical entre el índice del radical, el cociente será el exponente del factor saliente.

Ejemplo 1. Extraemos los factores del radical

$$6\sqrt[3]{\frac{81x^5y^2z^7}{64m^9}}=6\sqrt[3]{\frac{27*3*x^3*x^2*y^2*z^6*z}{64*m^9}}=6\frac{3xz^2\sqrt[3]{3x^2y^2z}}{4m^3}=\frac{9xz^2\sqrt[3]{3x^2y^2z}}{2m^3}$$

6. Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales. Para realizar estas operaciones los radicales deben ser semejantes, factorizar estos radicales y simplificar si es necesario.

Ejemplo 1 Sumamos y restamos: $\sqrt{81x^2z}-5\sqrt{147y}+\sqrt{12y}-\sqrt{125z}$

Actividad 48. En los cuadernos realicemos la introducción al radical.

1) $b^3\sqrt{abc}$

2) $x^2y^3\sqrt[3]{6x^2y}$

3) $3xz^2\sqrt[4]{2x^3y^2z}$

4) $\frac{5a}{2}\sqrt[3]{2ab^2}$

5) $\frac{7x^3y^2}{3z^2}\sqrt{x^{-1}yz}$

6) $\frac{2x^2y^2}{z}\sqrt[4]{\frac{z^4}{3xy}}$

7) $(x+1)\sqrt[3]{\frac{5y^2}{x+1}}$

8) $\left(\frac{3x-6}{3y+3}\right)\sqrt{\frac{y+3}{5x}}$

Actividad 49. En nuestros cuadernos extraemos factores del radical

1) $\sqrt[4]{16x^4y}$

2) $5\sqrt{8a^5b^2c}$

3) $3\sqrt[3]{-27x^3y^2z^7}$

4) $9y^2\sqrt[3]{250x^7y^{14}z^0}$

5) $\frac{5a}{7b}\sqrt{\frac{180b^7c^3}{9a^5d^2}}$

6) $\frac{3x^2y^5}{2z^3}\sqrt{\frac{288y^7}{45x^5m^2z^3}}$

7) $6\sqrt[3]{(2x-1)(8x^2-8x+2)}$

8) $\frac{3x}{y}\sqrt{\frac{3x^2+12x+12}{(x-y)(x^2y^2)}}$

Descomponemos los factores: $9x\sqrt{z}-5\sqrt{49\cdot 3\cdot y}+\sqrt{4\cdot 3\cdot y}-\sqrt{25\cdot 5\cdot z}$

Extraemos factores: $9x\sqrt{z}-(5*7)\sqrt{3y}+2\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$

Sumamos y restamos: $9x\sqrt{z}-35\sqrt{3y}+2\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$

$$9x\sqrt{z}-33\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$$

Ejemplo 2 Sumamos y restamos: $x\sqrt{12xy}+\sqrt{98y^3z}-5\sqrt{3x^3y}-y\sqrt{18yz}+x\sqrt{3xy}$

Simplificamos radicales $x\sqrt{2^2\cdot 3xy}+\sqrt{2\cdot 7^2y^2yz}-5\sqrt{3x^2xy}-y\sqrt{2\cdot 3^2yz}+x\sqrt{3xy}$

$$=x\left(2\sqrt{3xy}\right)+7y\sqrt{2yz}-5\left(x\sqrt{3xy}\right)-y\left(3\sqrt{2yz}\right)+x\sqrt{3xy}$$

‹ xy y

$$=2x\sqrt{3xy}+7y\sqrt{2yz}-5x\sqrt{3xy}-3y\sqrt{2yz}+x\sqrt{3xy}$$

$$=2x\sqrt{3xy}+7y\sqrt{2yz}-5x\sqrt{3xy}-3y\sqrt{2yz}+x\sqrt{3xy}$$

$$=(2x-5x+x)\sqrt{3xy}+(7y-3y)\sqrt{2yz}=-2x\sqrt{3xy}+4y\sqrt{2yz}$$

Multiplicación de radicales. Se aplican las propiedades de multiplicación de radicales y posteriormente se extrae la cantidad subradical.

Ejemplo 1. Multiplicamos: $3x^2\sqrt{5y}\cdot\frac{1}{9}\sqrt{7xy}$

$$3x^2\sqrt{5y}\cdot\frac{1}{9}\sqrt{7xy}=\left(3x^2\cdot\frac{1}{9}\right)\sqrt{5y\cdot 7xy}=\frac{x^2}{3}\sqrt{35xy^2}=\frac{x^2y\sqrt{35x}}{3}$$

Ejemplo 2. *Multiplicamos:* $\sqrt{3x}\cdot 5\sqrt[3]{x^2y}$

Igualamos los indices $\sqrt{3x}\cdot 5\sqrt[3]{x^2y}=5\sqrt[6]{(3x)^3}\cdot\sqrt[6]{(x^2y)^2}=5\sqrt[6]{(3x)^3(x^2y)^2}$

$$=5\sqrt[6]{27x^3x^4y^2}=5\sqrt[6]{27x^6xy^2}=5x\sqrt[6]{27xy^2}$$

División de radicales. Se aplican propiedades división de radicales y posteriormente se extrae el radical.

Ejemplo 1. Dividimos: $15\sqrt{3x^6y}\div 3\sqrt{27x^4}$

Extraemos del radical $\frac{15}{3}\sqrt{\frac{3x^6y}{27x^4}}=5\sqrt{\frac{x^2y}{9}}=\left(5*\frac{x}{3}\right)\sqrt{y}=\frac{5x\sqrt{y}}{3}$

Ejemplo 2. Dividimos: $\sqrt[4]{4x^3}\div 2\sqrt[3]{3xy}$

Obtenemos el m.c.m. en los indices $\frac{\sqrt[4]{4x^3}}{2\sqrt[3]{3xy}}=\frac{\sqrt[12]{(4x^3)^3}}{2\sqrt[12]{(3xy)^4}}=\frac{\sqrt[12]{64x^9}}{\sqrt[12]{81x^4y^4}}=\frac{1}{2}\sqrt[12]{\frac{64x^5}{81y^4}}$

7. Racionalización

Racionalización de una fracción si el denominador es monomio: Para racionalizar el radical del denominador cuando la fracción es un monomio, multiplicamos el numerador y denominador por un radical igual que el que se encuentra en el denominador.

Ejemplo 1. *Racionalizamos el denominador de:* $\frac{5xy}{3\sqrt{xyz}}$

Racionalizamos el radical del denominador, multiplicamos la fracción por $\sqrt{xyz}$ en el numerador y denominador.

$$\frac{5xy}{3\sqrt{xyz}}=\frac{5xy\cdot\sqrt{xyz}}{3\sqrt{xyz}\cdot\sqrt{xyz}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3\sqrt{(xyz)(xyz)}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3\sqrt{(xyz)^2}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3xyz}=\frac{5\sqrt{xyz}}{3z}$$

Racionalización de una fracción cuando el denominador es un binomio: Para racionalizar el denominador de una fracción algebraica, se debe multiplicar el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

Ejemplo 2. *Racionalizamos el denominador de:* $\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{5\sqrt{7yz}-4\sqrt{2x}}$

Multiplicamos el numerador y denominador por el conjugado: $\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)}{\left(5\sqrt{7yz}-4\sqrt{2x}\right)\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)}=\frac{5\sqrt{7xyz}+4x\sqrt{2}+15y\sqrt{7z}+12\sqrt{2xy}}{25(7yz)-16(2x)}$$

$$=\frac{5\sqrt{7xyz}+4x\sqrt{2}+15y\sqrt{7z}+12\sqrt{2xy}}{175yz-32x}$$

8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para solucionar problemas, debemos obtener los datos y posteriormente realizar operaciones.

Problema 1. Un comerciante realiza la compra de cierto número de pantalones por Bs 256. Sabiendo que el número de pantalones coincide con el precio de cada pantalón, ¿cuántos pantalones compró?

Datos:	**Planteamiento:**
Sea x el número de pantalones que compra y el precio coincide con el número de pantalones comprados:	El número de pantalones comprados por el precio de cada pantalón es igual al importe total: $x \cdot x=216\rightarrow x^2=256\rightarrow\sqrt{x^2}=\sqrt{256}\rightarrow x=16$ Compro 16 pantalones en total.

Problema 2. La suma de dos números es 270, y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 18. ¿Cuáles son los números?

Datos:	**Planteamiento:**
Sea x el primero de los números buscados. El segundo número será $270-x$	La raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 18: $\sqrt{x}=\sqrt{(270-x)+18}\rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{288-x}\rightarrow x=288-x$ $2x=288\rightarrow x=\frac{288}{2}=144$ El primer número es 144, el segundo es 126.

Actividad 53. En nuestros cuadernos solucionamos los siguientes problemas que incluyen radicales.

1. Al extraer la raíz cuadrada de un número dado, se obtiene, por resto, 2; y si a dicho número se suman 27 unidades, la raíz cuadrada de la suma aumenta en una unidad y el resto en 4. ¿Cuál es el número?
2. Un terreno cuadrado tiene una superficie de $324\,m^2$ ¿Cuánto costará cerrarlo si el metro de valla cuesta Bs 380?
3. Un propietario tiene un terreno cuyas dimensiones son 32 m de largo por 8 m de ancho, y quiere permutarlo por un terreno cuadrado de la misma superficie. ¿Cuál debe de ser el lado del terreno cuadrado?
4. Un terreno cuadrado tiene una superficie de $2209\,m^2$ y se quiere rodear con una valla que cuesta Bs 3,50 cada metro. ¿Cuánto costará la obra total?
5. Una caja en forma cúbica tiene un volumen de $125000\,cm^3$. Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones del recipiente resultante?
6. La suma de dos números es 250 y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 5. ¿Cuáles son los números?

Actividad 50. En nuestros cuadernos multiplicamos los radicales:

1) $\left(4\sqrt{2m}\right)\left(6\sqrt{4m^6}\right)$

2) $\left(5\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt[3]{ab}\right)$

3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{a+b}\right)\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{(a+b)^2}\right)$

4) $\left(\sqrt{\frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt[3]{a^3}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{1}{a}}\right)$

5) $\left(\sqrt{m+n}+4\right)\left(\sqrt{m+n}-2\right)$

6) $\left(\sqrt{m}\right)\left(\sqrt[5]{m+n}\right)$

7) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

Actividad 51. En nuestros cuadernos dividimos los radicales:

1) $\sqrt{a^2-b^2}\div\sqrt{a-b}$

2) $2\sqrt[3]{x^2}\div\sqrt[3]{8x}$

3) $\sqrt[3]{5a^2}\div\sqrt{3a}$

4) $343\sqrt[3]{n}\div 7\sqrt[3]{n^4}$

5) $\frac{7}{3}\sqrt{x}\div\frac{\sqrt{x}}{3}$

6) $2\sqrt[4]{8mn^2}\div\sqrt[3]{6mn}$

7) $\sqrt{108m^2y^3}\div\sqrt{36m^3y}$

8) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2y^3}\div\sqrt{6xy}$

Actividad 52. En nuestros cuadernos racionalizamos los siguientes ejercicios.

1) $\sqrt[4]{x}\,/3x$

2) $\frac{\sqrt[5]{16x^3}}{x^2}$

3) $\frac{5-\sqrt{2}}{23}$

4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$

5) $\frac{\sqrt{5a}-\sqrt{6b}}{10a-12b}$

6) $\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}}{x-8y}$

7) $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}$

¡Realizamos la valoración!

Actividad 54. La potencia estadística, es la probabilidad de detectar un efecto cuando ese efecto existe realmente en la población o en el entorno. En igualdad de condiciones, una prueba basada en una muestra grande tiene más potencia estadística que una prueba con una muestra pequeña. Esto sucede en el censo de población y vivienda. También hay formas de aumentar la potencia sin aumentar el tamaño de la muestra.

- ¿Consideras importante el estudio y análisis de la potenciación y radicación algebraica?
- ¿Cuál es la función que cumple la potenciación y radicación algebraica en la matemática?
- ¿La potenciación y radicación algebraica tiene aplicaciones en la vida real? Investiguemos para responder la pregunta.

¡Es hora de la producción!

Actividad 55. Con materiales de tu contexto construye un tablero de ajedrez más sus piezas, para fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico matemático y realizamos un campeonato interno en la unidad educativa.

ECUACIONES ALGEBRAICAS EN LA COMUNIDAD

¡Iniciamos desde la práctica!

Actividad 56. En la Unidad Educativa Agustín Ravelo, de la provincia Chayanta del Departamento de Potosí, los estudiantes de los diferentes años de escolaridad comparten responsabilidades en cuanto a la distribución del desayuno escolar, demostrando respeto entre varones y mujeres, practicando la igualdad de género con identidad cultural que es demostrada en las diferentes actividades deportivas y culturales.

- ¿Por qué es importante practicar la igualdad de género en la vida diaria?
- ¿Qué es identidad? Menciona algunos ejemplos.
- ¿Qué es igualdad? Menciona algunos ejemplos.

¡Continuemos con la teoría!

1. Ecuaciones lineales

Como observamos en el primer trimestre las ecuaciones lineales se resuelven mediante la aplicación de operaciones elementales en ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la variable o incógnita.

Ejemplo 1. Resolvemos la siguiente ecuación: $3x+8=12x-10$

Reducimos términos semejantes. $3x-12x=-8-10$

$$-9x=-18$$

Multiplicamos la ecuación por -1 $(-1)(-9x)=(-1)(-18)$

$$9x=18$$

$$x=\frac{18}{9}=2$$

Ejemplo 2. Resolvemos la siguiente ecuación:

$$(2x-3)^2-(x+4)=(2x+1)(2x-5)+\sqrt{x^2+2x+1}$$

Desarrollamos las potencias, productos y radicales:

$$4x^2-12x+9-x-4=4x^2-10x+2x-5+\sqrt{(x+1)^2}$$

Simplificamos el radical: $4x^2-12x+9-x-4=4x^2-10x+2x-5+x+1$

Trasponemos términos: $4x^2-12x-x-4x^2+10x-2x-x=-9+4-5+1$

Reducimos términos semejantes:

$$-12x+10x-2x=-9$$

$$-4x=-9$$

Multiplicamos (-1) a ambos miembros $(-1)(-4x) = (-1)(-9)$

Multiplicamos y despejamos la ecuación.

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

2. Ecuaciones con coeficiente fraccionario

Cuando aparecen fracciones en la ecuación, se elimina los denominadores al multiplicar los dos miembros de la igualdad por su máximo común múltiplo.

Ejemplo 1. Resolvemos la ecuación: $\frac{x}{2} + x = \frac{3}{5}x - \frac{10}{7}$

Hallamos el m.c.m. de las fracciones $\frac{x+2x}{2} = \frac{7(3x)-5(10)}{35} \rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{21x-50}{35}$

$$35(3x) = 2(21x-50) \rightarrow 105x = 42x - 100$$

Transponemos y reducimos términos semejantes. $105x - 42x = 100$

$$63x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{63}$$

Ejemplo 2. Resolvemos la ecuación: $\frac{a+6}{12} + \frac{2a-10}{5} = \frac{3a+5}{4} + \frac{a}{6}$

Hallamos el m.c.m. de cada miembro de la ecuación.

$$\frac{5(a+6)+12(2a-10)}{60} = \frac{3(3a+5)+2a}{12} \rightarrow \frac{5a+30+24a-120}{60} = \frac{11a+15}{12}$$

Reducimos términos semejantes $29a - 90 = \frac{60(11a+15)}{12}$

$$29a - 90 = 5(11a+15)$$

$$29a - 90 = 55a + 75 \rightarrow 29a - 55a = 90 + 75 \rightarrow -26a = 165$$

$$(-1)(-26a) = (-1)165 \rightarrow 26a = 165 \rightarrow a = \frac{165}{26}$$

Actividad 57. En nuestros cuadernos Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $4x + 24 = 8x$
2) $30x + 55 = 18x - 3x + 10$
3) $14x + 17 = 7 + 14x - 5x$
4) $4 - (3x+2) = 12x + 14 - (4x+1)$
5) $-[-(-6x-12)] = -24$
6) $[-(16+8x)+(46-2x)] = 2 - 3x$
7) $-(3x+2)+(2x-2) = -(3x+2)$
8) $-[-(45-1x)]-[-(15-2x)] = 7x$

Actividad 58. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones con coeficiente fraccionario.

1) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x = 3$
2) $\frac{3}{8}x + 2 - \frac{4}{5}x = 1 + \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$
3) $\frac{x}{2} + 6 - \frac{x}{4} = \frac{2x}{5} + 3$
4) $\frac{3x-5}{2} - 1 - \frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{4} = \frac{5x-1}{8}$
5) $\frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+1}{4} + \frac{2x+1}{9}$
6) $\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{3}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{2x-3}{4}\right) = x - 2$
7) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$
8) $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{6}x + 1$

3. Ecuaciones fraccionarias

Son ecuaciones en las cuales la incógnita se encuentra en el denominador para resolver este tipo de ecuaciones obtenemos el m.c.m. y quitamos los denominadores. Resolvemos las siguientes ecuaciones:

Ejemplo 1. Resolvemos la siguiente ecuación $\frac{4x-11}{x^2+10x+21} = \frac{5}{x+3} - \frac{11}{2x+14}$

Descomponemos los denominadores $\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{5}{x+3} - \frac{11}{2(x+7)}$

Hallamos el m.c.m. de cada miembro $\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{5(2)(x+7)-11(x+3)}{2(x+3)(x+7)}$

$$\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{10x+70-11x-33}{2(x+3)(x+7)} \rightarrow 2(4x-11) = -x-37$$

$$8x - 22 = -x - 37 \rightarrow 8x + x = 22 - 37 \rightarrow 9x = -15$$

$$x = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

4. Ecuaciones literales

Son aquellas en las que los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son letras, distintas de la incógnita.

Ejemplo 2. Resolvemos la ecuación: $\frac{x+m}{x-m} - \frac{x-m}{x+m} = m + \frac{mx^2}{x^2-m^2}$

Actividad 59. En nuestros cuadernos solucionamos las ecuaciones fraccionarias.

1) $\dfrac{1}{(x-2)}+\dfrac{4}{(x-2)}=1$

2) $\dfrac{8}{(2x+3)}+\dfrac{2}{(2x+3)}-2=\dfrac{1}{(2x+3)}+\dfrac{6}{(2x+3)}$

3) $\dfrac{3}{4x}-\dfrac{5}{14}-\dfrac{8}{7x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{11}{14x}$

4) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{5x}=\dfrac{9}{5x}-\dfrac{3}{x^2}$

5) $\dfrac{4}{x^2+5x+6}=\dfrac{3}{2x+6}$

6) $\dfrac{7}{(x+2)^2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{2x+4}$

7) $\dfrac{5}{2x}-\dfrac{10}{x}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4x}$

8) $\dfrac{36x^2+24x+1}{6x^2+12x+3}=6$

Actividad 60. En nuestros cuadernos resolvemos las ecuaciones literales

1) $ax-a^2=bx-b^2$

2) $mx-m^2-2mn=n^2-nx$

3) $\dfrac{x}{m}+1=\dfrac{x}{n}-3$

4) $ax^2+12bx+c=3bx+4c+ax^2$

5) $(x+a)^2-6a^2=(x-a)^2+2x$

6) $m^2x+mn=4m^2-m^2n+mn$

7) $\dfrac{x+m}{n}+\dfrac{2x-n}{m}=\dfrac{1}{m}$

Hallamos el m.c.m. en los dos miembros de la ecuación. $\dfrac{(x+m)(x+m)-(x-m)(x-m)}{(x-m)(x+m)}$

$$\frac{m(x+m)(x-m)+mx^2}{(x+m)(x-m)}=\frac{x^2+xm+xm+m^2-(x^2-xm-xm+m^2)}{(x-m)(x+m)}=\frac{m(x^2-m^2)+mx^2}{(x+m)(x-m)}$$

Luego $x^2+2mx+m^2-x^2+xm+xm-m^2=mx^2-m^3-mx^2\rightarrow 4mx=-m^3\rightarrow x=-\dfrac{m^3}{4m}=-\dfrac{m^2}{4}$

5. Ecuaciones de 2do grado con soluciones reales

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que puede escribirse de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c}=0;\quad \text{donde}\, a\neq 0$$

En la ecuación x es la incógnita; a,b son los coeficientes de la ecuación y c es constante,

$\boldsymbol{ax^2}\rightarrow$ *término cuadrático* ; $\boldsymbol{bx}\rightarrow$ *término lineal*; $\boldsymbol{c}\rightarrow$ *término constante o independiente*

Clasificación de las ecuaciones de segundo grado

a. Ecuaciones completas: Si los coeficientes a, b y c son distintos de cero la ecuación que se obtiene se llama ecuación completa.

$$ax^2+bx+c=0$$

b. Ecuaciones incompletas: Si b o c son igual a cero, las ecuaciones de segundo grado que se obtienen se llaman ecuaciones incompletas**.**

$$ax^2+c=0 \qquad ax^2+bx=0 \qquad ax^2=0$$

Métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado

3. **Ecuaciones cuadráticas puras**

Ejemplos: Despejamos x en las ecuaciones de segundo grado.

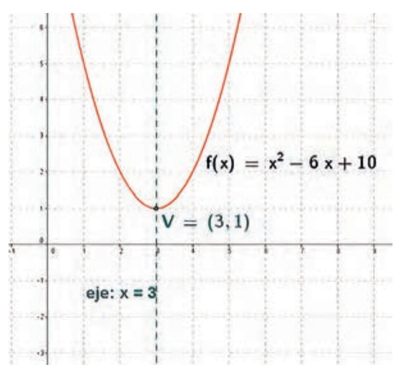
$a)\ \ x^2-4=0\rightarrow x^2=4\rightarrow x=\pm 2,$ *las raices son* $x_1=+2; x_2=-2$

$b)\ 2x^2-21=0,\rightarrow x^2=\dfrac{21}{2},$ *las raices son* $x=\pm\sqrt{\dfrac{21}{2}}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{41}$

4. **Mediante descomposición de factores:**

Ejemplos: despejamos x en las ecuaciones de segundo grado.

$a)\ 7x^2-5x=0;$ factorizamos $x(7x-5)=0.$



Igualamos los factores a0 $\rightarrow x=0\, o\, 7x-5=0$

luego la racices son $x_1=0\ y\ x_2=\dfrac{5}{7}$

$b)\ x^2-4x+4=0;$ factorizamos $(x-2)(x-2)=0; x-2=0$ y la raíz es $x=2$

5. **Formando un trinomio cuadrado perfecto**

Ejemplo 1. Hallamos las raíces de $x^2-6x-2=0$

Escribimos en un miembro los términos con la incógnita y se pasa el término independiente al otro miembro.

$$x^2-6x=-2; \textit{sumamos 9 a ambos miembros}\ \ x^2-6x+9=2+9\rightarrow(x-3)^2=11$$

De donde $x-3=\pm\sqrt{11},$ *las raices son* $x=3\pm\sqrt{11}$

6. **Aplicando la formula general (formula cuadrática);** las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0,$ viene dada por.

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la que b^2-4ac recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 1. Resolvemos $3x^2-5x+1=.$ *Donde* $a=3,b=-5,\ c=1.$ $\quad x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$

6. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema 1. Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.

Datos:

Primer número: x

Segundo número: x-5

Planteamiento:

"la suma de sus cuadrados sea 73"

$$x^2+(x-5)^2=73 \rightarrow 2x^2-10x-48=73 \rightarrow x^2-5x-24=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}=\frac{5\pm 11}{2} \rightarrow x_1=8;\ x_2=-3$$

El primer número es 8 y el segundo es 3.

Problema 2. Calcula el radio de jardín circular sabiendo que, si aumentamos el radio en 6 m, el área se hace nueve veces más grande.

Datos:

"Si aumentamos el radio en 6 cm se hace nueve veces más grande el área"

$$9(\pi R^2)=\pi(R+6)^2$$

Planteamiento:

$$9(\pi R^2)=\pi(R+6)^2$$

$$9R^2-R^2=36+12R \rightarrow 8R^2=36+12R \rightarrow 8R^2-12R-36=0$$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(8)(-36)}}{2(8)}=\frac{12\pm 36}{16} \rightarrow x_1=3;\ x_2=-\frac{3}{2}$$

El radio del círculo es 3 m.

Actividad 62. Resolvemos los siguientes problemas en nuestros cuadernos:

1. Hallamos la altura de un triángulo equilátero de lado 10 dm.
2. Un rectángulo tiene de diagonal 25 cm y de altura 15 cm. Averiguamos la base y el área.
3. Un triángulo isósceles tiene de base 8 cm y de altura 12 cm. Averiguamos el perímetro.
4. Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 dm respectivamente. Averiguamos el lado, el perímetro y el área.
5. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Hallamos dichos números.
6. De un tablero de $1200\,cm^2$ se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 5 cm más de lado que la otra. Si las tiras de madera que sobran miden $83\,cm^2$, ¿cuánto miden los lados de las piezas cuadradas cortadas?

Actividad 61. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Factorizando

1) $x^2+5x+4=0$

2) $x^2+11x+30=0$

3) $a^2-30=13a$

4) $3a^2=a+2$

5) $10a^2-13a-3=0$

6) $-32ax-15a^2=-7x^2$

7) $4x^2+5ax=-a^2$

Por formula

1) $x^2+2x+5=0$

2) $x^2-4x+5=0$

3) $\frac{1}{3}a^2+\frac{5}{6}a=0$

4) $36a^2-24a=-85$

5) $b^2-\frac{1}{3}ab$

=0

6) $x^2-25=0$

7) $ax^2-bx=0$

Actividad 63. Investigamos sobre la representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 64. Las ecuaciones nos permiten resolver problemas de la vida real traduciéndolos al lenguaje algebraico. A partir del estudio del contenido analizamos reflexivamente para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo aplicamos las ecuaciones de primer grado en situaciones de tu cotidianidad?
- ¿Cómo podemos aplicar las ecuaciones en proyectos productivos?
- ¿Consideras importante transformar hechos de la vida real al lenguaje algebraico?¿Por qué?

	1	2	3	4	5	6
A	8		2	7		4
B		9		2	6	3
C		7			1	
D	2		6	1		5
E	7	3			8	9
F		5	4		2	7

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

A 2	$2x+3=15$	C 6	$2(x+4)-5(2x+3)=71$
A 5	$x^2+7x-35=x^2$	D 2	$8x+8=7x+16$
B 1	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}$	D 5	$a^2x+b^2x=3a^2+3b^2$
B 3	$ax-10bx=5a-50b$	E 3	$3(x+6)-2(x+5)=9$
C 1	$4(x+6)-3(x+2)=22$	E 4	$ax+3b=4a+3b$
C 3	$(x+3)^2+5x=x^2+42$	F 1	$x+9=18$
C 4	$2x+3=x+12$	F 4	$\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=2$

Actividad 65. Construimos un juego matemático con materiales del contexto, para llenar el sudoku con los resultados de las ecuaciones planteadas:

- Llenar un sudoku consiste en llenar las casillas con los números del 1 al 9 sin repetir ningún número en las columnas, filas y cuadrados.
- Con ayuda de nuestros maestros diseñamos juegos de mesa como parte de nuestro proceso educativo. Posteriormente podemos realizar una exposición de los mismos.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Ciencia divertida

Partimos del análisis del siguiente video.

Escanea el QR

Actividad 66. Observamos el siguiente video y realizamos un análisis para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el GeoGebra?
- ¿Qué acciones podemos realizar con esta herramienta?
- ¿Esta herramienta nos permite comprender de mejor manera los gráficos matemáticos? ¿Por qué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Escanea el QR

Ingresa al codigo QR, para conocer las nociones básicas de ajedrez.

1. GeoGebra:

Es un programa de software gratuito que permite a los estudiantes crear construcciones matemáticas y modelos donde pueden arrastrar objetos y ajustar parámetros, para explorar álgebra y geometría simultáneamente (junto con otros campos matemáticos). Está basado en un navegador y también tiene subprogramas descargables para computadoras y dispositivos móviles. Podemos descargar esta aplicación de manera gratuita del la pagina https://www.geogebra.org/ o del Play Store de tu celular.

2. Gráficas de ecuaciones

Para graficar ecuaciones en el software GeoGebra, debemos igualar la ecuación a $f(x)$ o y, siendo x la variable en estudio de la ecuación de grado n.

A través del QR podrás descargar el manual de aplicación de esta herramienta. Leemos el capítulo 4 y 5 para graficar y animar respectivamente las siguientes ecuaciones.

$$f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{3}{4};\quad y=-3;\quad x=5;\quad y=x^2-4;\quad g(x)=-x^2+2x-3$$

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

3. Taller de pensamiento lógico

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para resolver problemas de razonamiento, mate en dos y mate en tres movimientos, a través de la plataforma virtual Lichess.

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 67. ¿Cómo aplicamos GeoGebra en la resolución de problemas del contexto?
¿Por qué crees que es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático a través de juegos?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 68. Realizamos videotutoriales del manejo de GeoGebra y construimos piezas de ajedrez con materiales del contexto.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

www.minedu.gob.bo
@minedubol
@minedubol
@minedu_bol
Ministerio de Educación - Oficial
MinEduBol
informacion@minedu.gob.bo
(591) 71550970 - 71530671
@minedu_bolivia

Av. Arce No. 2147 • Teléfonos: (591-2) 2442144 - 2442074 • Casilla de Correo: 3116
La Paz - Bolivia