ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

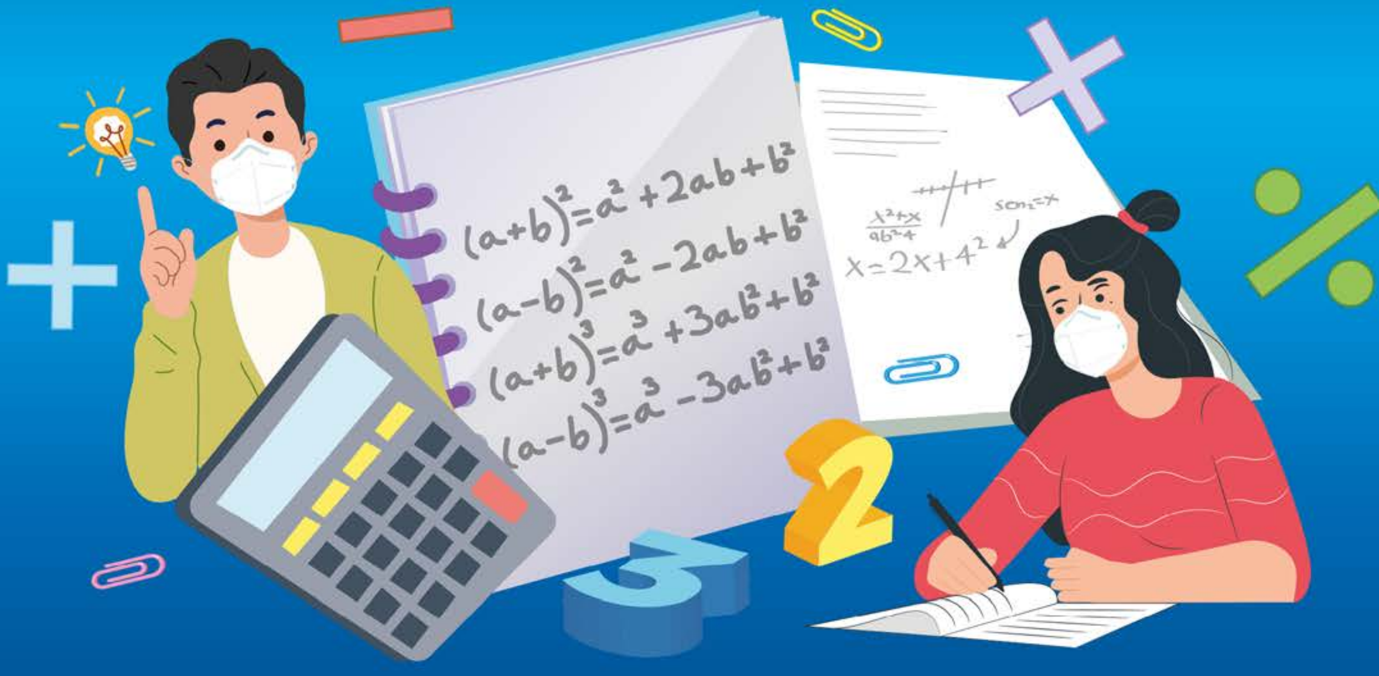
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

DOCUMENTO DE TRABAJO



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

"2022 AÑO DE LA REVOLUCIÓN CULTURAL PARA LA DESPATRIARCALIZACIÓN: POR UNA VIDA LIBRE DE VIOLENCIA CONTRA LAS MUJERES"

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO NIVEL APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS
MATEMÁTICA (3RO Y 4TO SEC.)
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Sandra Cristina Cruz Nina
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Fernando Reynaldo Yujra Quispe
DIRECTOR GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

EDICIÓN
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación de Adultos

Depósito Legal:
4-1-9-2022 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

La Paz - Bolivia
2022

PRESENTACIÓN

Con el propósito de consolidar el derecho a la educación con calidad en los aprendizajes, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Adultos, inicia ésta segunda fase proporcionando recursos educativos para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas para la presente gestión.

Es importante considerar que las Personas Jóvenes y Adultas participan activamente de los cambios en la sociedad y para ello, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permita tener mejores posibilidades de acceso al conocimiento en diversos campos de saberes, una formación permanente, continua y desarrollo igualitario, participativo e incluyente en el marco filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se ponen a consideración, tienen un enfoque inclusivo, buscan responder a la diversidad de características de las y los estudiantes/participantes; se encuentran elaborados según las orientaciones del currículo, es decir, la formación integral de acuerdo a las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir, los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación; además, toma en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional, enmarcados en el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo constituido en la Ley de la Educación N° 070 "Avelino Siñani – Elizardo Pérez".

Estimados estudiantes/participantes, comunidad en general, les invitamos a ser parte de la Educación Alternativa y a continuar con su formación personal y comunitaria que nos permitirá avanzar juntos en el "2022 año de la revolución cultural para la despatriarcalización: por una vida libre de violencia contra las mujeres".

Edgar Pary Chambi

Ministro de Educación

ÍNDICE

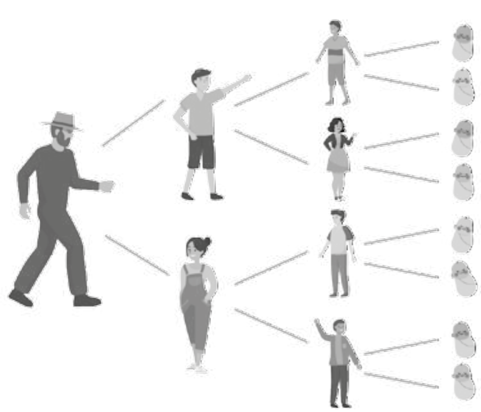
El presente, constituye un material educativo que coadyuvará en los procesos educativos de estudiantes/participantes del ámbito de la Educación Alternativa, orientados hacia el desarrollo de las potencialidades de la comunidad, a partir de las experiencias, recuperando los saberes y conocimientos de nuestro contexto.

Ofrece una serie de contenidos que han sido seleccionados para despertar el gusto por el aprendizaje y la participación, tomando en cuenta las orientaciones metodológicas que nos guiarán en el proceso.

MÓDULO I
ÁLGEBRA II

OBJETIVO HOLÍSTICO

Fortalecemos el equilibrio y armonía entre los estudiantes analizando la potenciación, radicación, ecuaciones, logaritmos y progresiones aplicándolas a la resolución de problemas de producción en la comunidad para aportar al emprendimiento productivo que genere impacto social.



UNIDAD 1
POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

1. PRÁCTICA

Desde que inicia el proceso de Universalización de la Educación, muchas comunidades tuvieron la oportunidad de contar con un Centro de Educación Alternativa, ya que el centralismo en muchos casos evitó el progreso de las comunidades lejanas.

Al llegar este beneficio a la comunidad Castañalito del departamento del Beni, que empezaba a despoblarse por falta de una escuela, destinó espacios para una infraestructura con un perímetro de media hectárea, construyendo una aula de madera de $40m^2$.

- Sabiendo que una hectárea es 100m * 100m, ¿Qué medida tiene media hectárea?
- ¿Cuántas posibilidades de medidas podemos generar con media hectárea y de qué formas?
- ¿$50\sqrt{2}m^2$ es una medida que se pueda poner en práctica sobre medidas perimetrales?

2. TEORÍA

¿Sabías que existen 7 operaciones matemáticas básicas?
Menciona las que recuerdes y explica en que consiste cada operación

....

....

¿Cómo interpretarías, 3*3*3*3*3*3*3 de manera abreviada?

....

....

(+) * (+) = ... (–) * (–) = ...

(–) * (+) = ... (+) * (–) = ...

Recuerda…

La nomenclatura simbólica expresa: para todo número negativo elevado a un exponente par el resultado será siempre positivo.

¿Qué es potenciación?

La potenciación es una operación matemática que consiste en multiplicar por sí mismo un número llamado base, tantas veces como lo indique otro número que se llama exponente.

$$\text{BASE} \longleftarrow a^n \longrightarrow \text{EXPONENTE}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{“n” veces}}$$

Si la base es negativa entonces se tiene:

- Base negativa exponente par $(-a)^{par} = +a$
- Base negativa exponente impar $(-a)^{impar} = -a$

Ejemplo 1

Expresamos como potencia los siguientes productos y hallamos el resultado:

Tenemos el producto:	(–5) * (–5) * (–5) * (–5)=
Escribimos la base y como exponente, la cantidad de veces que se repite la base.	$(-5)^4$ =
Obtenemos el resultado.	625

Ejemplo 2

Tenemos el producto:	(–3) * (–3) * (–3)=
Escribimos la base y como exponente, la cantidad de veces que se repite la base.	$(-3)^3 =$
Obtenemos el resultado.	– 27

Recuerda la ley de signos

(+) * (+) = +   (–) * (–) = +
(–) * (+) = –   (+) * (–) = –

Ejemplo 3

Resolvemos las siguientes potencias:

Tenemos la expresión:	$(-6)^5 =$
Multiplicamos por sí misma la base	(-6) * (-6) * (-6) * (-6) * (-6) =
Obtenemos el resultado	- 7776

Ejemplo 4

Tenemos la expresión:	$3^4 =$
Multiplicamos por sí misma la base	3 * 3 * 3 * 3 =
Obtenemos el resultado	81

Ejemplo 5

Tenemos la expresión:	$\left(-\frac{5}{2}\right)^4 =$
Multiplicamos por sí misma la base	$\left(-\frac{5}{2}\right) * \left(-\frac{5}{2}\right) * \left(-\frac{5}{2}\right) * \left(-\frac{5}{2}\right) =$
Obtenemos el resultado	$\frac{625}{16}$

Actividad 1
Expresamos como potencia los siguientes productos y halla el resultado:

Tenemos el producto:	2 * 2 * 2 * 2 * 2 =
Escribimos la base y como exponente, la cantidad de veces que se repite la base.	
Obtenemos el resultado.	

Actividad 2

Tenemos el producto:	$\left(-\frac{2}{3}\right) * \left(-\frac{2}{3}\right) * \left(-\frac{2}{3}\right) =$
Escribimos la base y como exponente, la cantidad de veces que se repite la base.	
Obtenemos el resultado.	

Actividad 3
Resolver las siguientes potencias:

Tenemos la expresión:	$(-3)^4 =$
Multiplicamos por sí misma la base.	
Obtenemos el resultado.	

Actividad 4

Tenemos la expresión:	$(-2)^3 =$
Multiplicamos por sí misma la base.	
Obtenemos el resultado.	

Actividad 5

Tenemos la expresión:	$-3^2 =$
Multiplicamos por sí misma la base.	
Obtenemos el resultado.	

Propiedades de la potenciación

N°	PROPIEDADES	FÓRMULA	EJEMPLO
1	Productos de potencia de la misma base. Bases iguales y exponentes diferentes se suman.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$ $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9$
2	Cociente de potencias de la misma base. Bases iguales exponentes diferentes se restan.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$ $\frac{x^5}{x^{-3}} = x^{5-(-3)} = x^8$
3	Potencia de otra potencia La potencia de potencia de una base es la multiplicación de sus exponentes.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ $[(-1)^5]^3 = (-1)^{5 \cdot 3} = (-1)^{15}$
4	Potencia de un producto. Exponente de bases diferentes quedan implicadas por el mismo exponente.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (a \cdot b \cdot c)^3$
5	Potencia de un cociente. El exponente de un cociente fraccionario implica al numerador y al denominador.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$ $\frac{9^n}{3^n} = \left(\frac{9}{3}\right)^n = 3^n$
6	Exponente cero. Todo número elevado a cero es 1.	$a^0 = 1$	$243^0 = 1$

Ejemplo 6

Aplicamos las propiedades de potencias adecuadamente en los siguientes ejercicios:

Tenemos la expresión:	$(3^2)^3 =$
Aplicamos la propiedad: • Resolvemos potencia por potencia:	$3^6 =$
Calculamos el resultado	729

Ejemplo 7

Tenemos la expresión:	$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 =$
Aplicamos la propiedad: • Producto de potencias de la misma base.	$2^{3+2+1} = 2^6$
Calculamos el resultado.	64

Ejemplo 8

Tenemos la expresión:	$(5x^2y^3z)^4 =$
Aplicamos la propiedad: • Potencia de un producto. • Potencia de otra potencia.	$(5)^4\ (x^2)^4\ (y^3)^4\ (z)^4 =$ $5^4 \quad x^8 \quad y^{12} \quad z^4 \quad =$
Calculamos el resultado.	$625\ x^8\ y^{12}\ z^4 \quad =$

Ejemplo 9

Tenemos la expresión:	$(2x^3 + 3x^4 - 8x^5)^0 =$
Aplicamos la propiedad: • Potencia de exponente cero.	1
Calculamos el resultado.	1

Ejemplo 10

Tenemos la expresión:	$\frac{25^n}{5^n} =$
Aplicamos la propiedad: • Potencia de un cociente.	$\left(\frac{25}{5}\right)^n =$
Hallamos el resultado.	5^n

Actividad 6

Resolvemos los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la potenciación:

a

Tenemos la expresión:	$a^2 \cdot a^3 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

b

Tenemos la expresión:	$x^7 \div a^3 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

c

Tenemos la expresión:	$\left[(-2)^3\right]^2 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

d

Tenemos la expresión:	$\dfrac{2^2}{2^{2-5}} =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

e

Tenemos la expresión:	$(5-4)^2 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

f

Tenemos la expresión:	$(7^3)^2 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

g

Tenemos la expresión:	$\dfrac{(3)^5 * (-5)^4 * (-5)^7}{(-5)^2 * (-5)^9} =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

h

Tenemos la expresión:	$\frac{x^4\ y^7}{x^2\ y^{11}} =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

i

Tenemos la expresión:	$(5x)^2 =$
Aplicamos la propiedad.	
Resultado.	

Exponente negativo

Cuando el exponente negativo es la inversa fraccionaria, donde la base se convierte en denominador y el exponente en positivo.

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\qquad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

Ejemplo 11

Potencia:	$2^{-3} =$
Invertimos la base y cambiamos el signo del exponente.	$\frac{1}{2^3} =$
Resolvemos.	$\frac{1}{8} =$

Ejemplo 12

Potencia:	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} =$
Invertimos la base y cambiamos el signo del exponente.	$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} =$
Resolvemos.	$\frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

Actividad 7

Hallamos el resultado de las siguientes potencias, aplicando propiedades si es necesario:

a **Potencia** $[(-3)^2]^{-3} =$

Resolvemos:

b **Potencia** $\frac{2^7}{2^9} =$

Resolvemos:

c **Potencia** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

Resolvemos:

d **Potencia** $-x^{-4} =$

Resolvemos:

Exponente fraccionario

Las potencias con exponente fraccionario son iguales a una raíz.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si el exponente es una fracción se procede de la siguiente forma.

Ejemplo 13

Potencia:	$25^{\frac{1}{2}} =$
Aplicando la propiedad de exponente fraccionario convertimos la expresión en una raíz.	$\sqrt[2]{25} =$
Resolvemos la raíz cuadrada.	$\sqrt{25} = 5$

Ejemplo 14

Potencia:	$8^{\frac{2}{3}} =$
Aplicando la propiedad, convertimos la expresión en una raíz.	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$
Resolvemos la potencia.	$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64}$
Resolvemos la raíz cúbica.	$\sqrt[3]{64} = 4$

Ejemplo 15

Potencia:	$\sqrt[3]{(x^2y^3)^5} =$
Aplicamos la propiedad, convertimos la raíz en exponente fraccionario.	$\sqrt[3]{(x^2y^3)^5} = (x^2y^2)^{\frac{5}{3}} =$
Aplicamos propiedad: potencia de otra potencia.	$(x^2y^3)^{\frac{5}{3}} = (x)^{\frac{2\cdot5}{3}} (y)^{\frac{3\cdot5}{3}} =$
Multiplicamos y simplificamos los exponentes.	$(x)^{\frac{2\cdot5}{3}} (y)^{\frac{3\cdot5}{3}} = (x)^{\frac{10}{3}} (y)^{\frac{15}{3}} =$
Respuesta.	$x^{\frac{10}{3}} y^5$

Actividad 8

Escribe la secuencia de pasos usados para resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio:	$E = \sqrt[n]{\dfrac{8^n + 16^n}{2^n + 4^n}} =$
………………………………..... ……………………………….....	$\sqrt[n]{\dfrac{8^n + 16^n}{2^n + 4^n}} = \sqrt[n]{\dfrac{(2^3)^n + (2^4)^n}{2^n + (2^2)^n}} =$
………………………………..... ………………………………..... ……………………………….....	$\sqrt[n]{\dfrac{2^{3n} + 2^{4n}}{2^n + 2^{2n}}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n} + 2^{3n} \cdot 2^n}{2^n + 2^n \cdot 2^n}} =$
………………………………..... ……………………………….....	$\sqrt[n]{\dfrac{2^{3n} + 2^{3n} \cdot 2^n}{2^n + 2^n \cdot 2^n}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n} * (1+2^n)}{2^n (1+2^n)}} =$
………………………………..... ……………………………….....	$\sqrt[n]{\dfrac{2^{3n} * \cancel{(1+2^n)}}{2^n \cancel{(1+2^n)}}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n}}{2^n}} =$
………………………………..... ……………………………….....	$\sqrt[n]{\dfrac{2^{3n}}{2^n}} = \sqrt[n]{2^{3n-n}} =$

....	$\sqrt[n]{2^{3n-n}} = \sqrt[n]{2^{2n}} =$
....	$\sqrt[n]{2^{2n}} = \sqrt[n]{(2^2)^n} =$
....	$\sqrt[\cancel{n}]{(2^2)^{\cancel{n}}} = 2^2 =$
	E = 4

Actividad 9
Hallar el valor de "E"

$$E = \sqrt[3]{\frac{2^{5+n}}{32}} =$$

$$E = \frac{2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^6}{2 \cdot 16 \cdot 2^{-2}} =$$

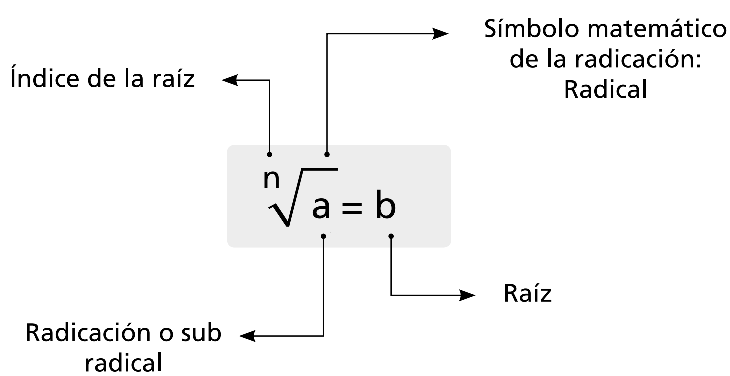
¿Qué es un radical?

El concepto de radical se utiliza para denominar la operación, de extraer raíces de un número; los radicales o raíces.

Definición

La raíz enésima de un número "a" es igual a "b", si y solo si "b" elevado a la "n" es "a"

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$



Ejemplo 16

$\sqrt{169} = 13 \iff 13^2 = 169$

$\sqrt[4]{81} = 2 \iff 2^4 = 81$

Actividad 10

$\sqrt{196} =$

$\sqrt[3]{216} =$

$\sqrt[3]{27} =$

$\sqrt[4]{81} =$

Propiedades de los radicales

N°	FÓRMULA	EJEMPLO
1	$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt[\cancel{5}]{(x+1)^{\cancel{5}}} = x+1$
2	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ $\sqrt{3x^2y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = x\sqrt{3y}$
3	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[5]{5}$
4	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3\cdot2]{2} = \sqrt[6]{2}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2\cdot2\cdot2]{256} = \sqrt[8]{256} = 2$
5	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	$3\sqrt{2 \cdot x} = \sqrt{3^2 \cdot 2x} = \sqrt{18x}$

Propiedades de los radicales

Simplificar radicales, es transformar la expresión en otra equivalente cuyo radicando tenga la forma más simple.

1. **El radicando no contiene factores afectados de exponentes mayores que el índice.**
2. **El radicando no puede ser una fracción.**
3. **El índice del radical es el menor posible.**

Ejemplo 17

1 $\sqrt{18} =$ → **Radicando** →

18	2
9	3
3	3
1	

$3^2 \cdot 2 = 18$

Solución $= \underbrace{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2 $\sqrt[6]{8x^{12} y^8 z^{15}} =$

Solución $\sqrt[6]{8x^{12} y^8 z^{15}} =$ ← Aplicamos la propiedad del exponente fraccionario

$= 2^{\frac{3}{6}} x^{\frac{12}{6}} y^{\frac{18}{6}} z^{\frac{15}{6}}$ ← Simplificamos la fracción en el exponente

$= 2^{\frac{1}{2}} x^2 y^3 z^{\frac{5}{2}} \quad = x^2 y^3 \sqrt{2z^5}$

3 $2a \sqrt[3]{\frac{x}{y}} =$

Solución $2a \sqrt[3]{\frac{x \cdot y^2}{y \cdot y^2}} =$ ← Multiplicamos por y^2 al numerador y al denominador

$\frac{2a \sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\cancel{\sqrt[3]{y^3}}} = \quad \frac{2a \sqrt[3]{x \cdot y^2}}{y} =$

Actividad 11

Simplificamos los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18} =$

b) $\sqrt[3]{54} =$

c) $\sqrt{8x^3} =$

d) $\sqrt[3]{32m^4n^5} =$

e) $2\sqrt{\frac{1}{3}} =$

f) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27a^2}{4b^3}} =$

Operaciones con radicales

Radicales semejantes

Dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo subradical.

$$2\sqrt[3]{2a} \quad ; \quad -5x\sqrt[3]{2a} \quad ; \quad \frac{1}{2}x^2\sqrt[3]{2a}$$

Son radicales semejantes

Ejemplo 18

1. $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$

Solución

$= (3 - 4 + 2)\sqrt{2}$ ← Sumamos y restamos

$= \sqrt{2}$

2. $2\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 3\sqrt{75} =$

$2\sqrt{12} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$4\sqrt{27} = 4\sqrt{3^2 \cdot 3} = 4 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$3\sqrt{75} = 3\sqrt{5^2 \cdot 3} = 3 \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

Solución

Son radicales semejantes

$= 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 15\sqrt{3}$

$= (4 + 12 - 15)\sqrt{3}$ ← Sumamos y restamos

$= \sqrt{3}$

3 $4\sqrt{7x} + 3\sqrt{2x} - \sqrt{7x} - \sqrt{2x} + 3\sqrt{x} =$

Solución

Asociamos

$$= \overbrace{(4\sqrt{7x} - \sqrt{7x})} + \overbrace{(3\sqrt{2x} - \sqrt{2x})} + 3\sqrt{x}$$

$$= 3\sqrt{7x} + 2\sqrt{2x} + 3\sqrt{x}$$

Actividad 12

Reducimos radicales semejantes

a) $3\sqrt{xy\ 3} \cdot 4\sqrt{xy\ 3} =$

b) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{a} =$

d) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} =$

e) $\sqrt{50} + \sqrt{63} - \sqrt{8} - \sqrt{28} =$

f) $\sqrt{25ax^2} + \sqrt{49b} - \sqrt{9ax^2} =$

g) $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2} =$

Multiplicación de radicales

Para multiplicar dos radicales, primero reducimos radicales al mismo índice en caso de que sea necesario, luego aplicamos la propiedad.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo 18

1 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$

Solución

$$= \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$$

2 $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{24} =$

Solución

$$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{6}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

3 $\sqrt{2}\left(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3}\right) =$ ⟵ Aplicamos la propiedad distributiva

Solución

$$= \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2$$

4 $\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1} - 2\sqrt{a-1}\right) =$

Solución

$$\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1} - 2\sqrt{a-1}\right) =$$

$$= \left(\cancel{\sqrt{a+1}}\right)^{\cancel{2}} - 2\sqrt{(a+1)(a-1)} + \sqrt{(a-1)(a+1)} - 2\sqrt{(a-1)^2}$$

$$= a+1 - \sqrt{(a+1)(a-1)} - 2(a-1)$$ ⟵ Multiplicamos y ordenamos

$$= a+1 - 2a + 2 - \sqrt{(a+1)(a-1)}$$ ⟵ Aplicamos diferencia de cuadrados

$$= -a+3 - \sqrt{a^2-1}$$

Actividad 13

Multiplicamos los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} =$

b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{18} =$

c) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - \sqrt{5}) =$

d) $2\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) =$

e) $2\sqrt{5}\,(3\sqrt{5} + 3) =$

f) $(2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) =$

g) $(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \cdot (4\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$

División de radicales

Las potencias con exponente fraccionario son iguales a una raíz.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo 20

1 $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

Solución

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$ ← Aplicamos la propiedad: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$= \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

2 $\dfrac{\frac{4}{5}\sqrt[3]{4ab}}{\frac{1}{10}\sqrt{2a^2}} =$

Solución

$\dfrac{\frac{4}{5}\sqrt[3]{4ab}}{\frac{1}{10}\sqrt{2a^2}} =$ Aplicamos extremos con extremos, medios con medios

$\dfrac{40\sqrt[6]{(4ab)^2}}{5\sqrt[6]{(2a^2)^3}} =$ Aplicamos la propiedad: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$8\sqrt[6]{\dfrac{\cancel{16}a^2b^2}{\cancel{8}a^6}} =$ Simplificamos

$8\sqrt[6]{\dfrac{2a^2b^2}{a^6}} =$ Resolvemos $\sqrt[6]{\dfrac{1}{a^6}} = \dfrac{1}{a}$

$= \dfrac{8}{a}\sqrt[6]{2a^2b^2}$

Actividad 14

Multiplicar los siguientes radicales:

1 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

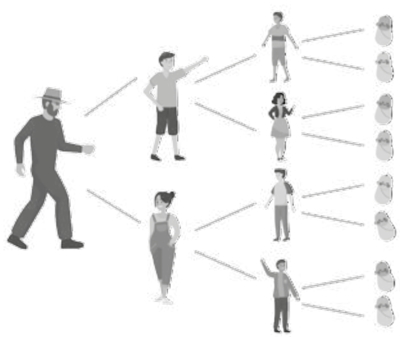
2 $\dfrac{\sqrt{8a^3b}}{\sqrt{12ab^2}} =$

Resolución de problemas

Ejemplo 21

Don Fernando tuvo 2 hijos, cada uno de sus hijos tuvo 2 hijos y cada uno de estos tuvo 2 hijos. ¿Cuántos nietos tuvo Don Fernando?

Resolviendo…

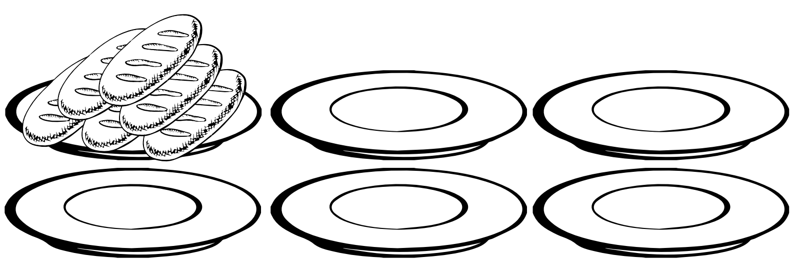


$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Respuesta. Don Fernando tuvo 8 nietos.

Ejemplo 22

Daniel preparó 6 charolas con 6 panes en cada una. ¿Cuántos panes ha preparado en total?



$$6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

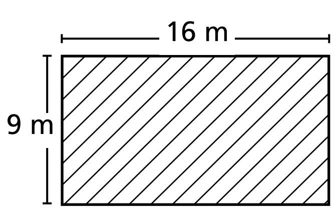
Respuesta.

Daniel preparó 36 panes en total.

Ejemplo 23

Una biblioteca tiene 16 metros de largo y 9 metros de ancho. ¿Puede construirse otra sala con la misma área, pero de forma cuadrada?, ¿Cuánto mediría cada lado?

Resolviendo…



$$\boxed{A = b \cdot h}$$
$$= 16 \quad 9$$
$$= 144$$
$$A = L^2 = 144$$
$$L = \sqrt{144} = 12$$
$$L = 12$$

Respuesta.

Si se puede construir otra sala de forma cuadrada, con la misma área. Cada lado mediría 12 metros.

Actividad 15

a) Tenemos 5 cajas, en cada caja 5 bolsas y en cada bolsa 5 trompos. ¿Cuántos trompos hay en total?

Respuesta: ....

b) Una constructora construyó 6 edificios iguales. Cada edificio tiene 6 pisos, en cada piso existen 6 habitaciones y cada habitación cuenta con 6 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en total?

Respuesta: ....

c) ¿Cuál es la medida de cada lado de la pantalla de un monitor, si el área que tiene es de 441 $(plg)^2$?

Respuesta: ....

3. VALORACIÓN

Como viste las potencias y raíces, pueden ayudarnos a resolver problemas de nuestra vida. Ahora respondemos:

¿Qué utilidad tienen en nuestra vida las potencias y raíces? Mencionemos 4 ejemplos.

....

....

¿Cuál es el sentido de diferenciar medidas lineales con superficies?

....

....

4. PRODUCCIÓN

¿Qué solución es propones sobre la utilización de las propiedades estudiadas para solucionar problemas donde existan medidas expresadas en unidades de superficie?

....

....

....

¿Elabora una guía donde sustentes matematicamente los pasos para poder solucionar medidas de la realidad en superficies y cuál es la solución al problema planteado en la práctica y qué sustento matemático le das? Realiza un informe

....

....

....

UNIDAD 2
ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. PRÁCTICA

En la ciudad de Viacha, existen muchas empresas de producen materiales de construcción, que son comercializados y distribuidos en todo el país; Juan y Pedro son trabajadores de una empresa de producción de ladrillos, ambos reciben un salario de acuerdo a la cantidad de ladrillos que producen diariamente.

Cierto día, ambos lograron producir 10.000 ladrillos uno de ellos 400 ladrillos más que el otro. A partir de la experiencia descrita respondemos en comunidad:

¿Es posible determinar qué cantidad de ladrillos produjo cada uno de los trabajadores?

____

¿De qué manera podríamos calcular su producción y respectivamente la remuneración que le corresponde a cada uno de ellos, sabiendo que la empresa paga Bs. 0.7 por unidad de ladrillo producido?

____

2. TEORÍA

Ecuaciones de primer grado

¿Qué es una igualdad?

Es la expresión donde dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplo 1

$5 = 2 + 3$	$3x^2 = 4x + 15$
El valor de 5 es igual al valor sumado de 2 y 3	El valor de $3x^2$ tiene el mismo valor de $4x+15$

¿Qué es una ecuación?

Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas.

¿Qué es una incógnita?

Es un valor desconocido en la ecuación y se representa con las últimas letras del alfabeto: u,v,x,y,z.

Reglas

1. Si se suma, se resta o se multiplica una misma cantidad en ambos miembros de la ecuación no se altera la solución.
2. Si se divide por una misma cantidad diferente de cero en ambos miembros de la ecuación tampoco se altera la solución.

Ejemplos de una ecuación:

$5x + 2 = 17$	Es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita; la "x" y esta igualdad se comprueba.	Si $x = 3$ Sustituyendo a la ecuación: $5(3) + 2 = 17$ $15 + 2 = 17$ $17 = 17$ Igualdad comprobada	Si a "x" le damos un valor distinto a 3, la igualdad no se comprueba.
$y^2 – 5y = -6$	Es una ecuación, porque es una igualdad que solo se comprueba para $y = 2$ y para $y = 3$	Si $y = 2$ Sustituyendo a la ecuación: $(2)^2 –5(2) = –6$ $4-10 = –6$ $–6 = –6$ Si $y = 3$. Sustituyendo a la ecuación: $(3)^2 –5(3) = –6$ $9 –15 = –6$ $9 –15= –6$ $–6= –6$ igualdad comprobada	Si a "y" le damos un valor diferente de 2 o 3, la igualdad no se comprueba o no es verdadera.

Ahora te toca verificar la ecuación:

8x -15 = 5x	Es una ecuación, porque es una igualdad que solo se comprueba para x = 5	Si x = 5 Sustituyendo a la ecuación: 8(5)-15 = 5 (5)	Si a "x" le damos un valor distinto a 5, la igualdad no se comprueba.

¿Qué son los miembros de una ecuación?

Se llama miembros de una ecuación a los dos grupos separados por el signo de igualdad.

El grupo que está a la izquierda del símbolo = se llama: PRIMER MIEMBRO	**3x - 5 = 2x - 3**	El grupo que está a la derecha del símbolo = se llama: SEGUNDO MIEMBRO

Reglas

1. Lo que está restando en un miembro se pasa al otro sumando y viceversa.
2. Lo que está multiplicando en un miembro se pasa al otro dividiendo conservando el signo y viceversa (cuando este número sea diferente a cero)

¿Qué son los términos?

Son cada una de las cantidades que están separadas por los signos (+), (-), (=).

Así, en la ecuación 3x-5=2x-3 los términos son: $\left\{\begin{array}{l} 3x \\ -5 \\ 2x \\ -3 \end{array}\right.$

ECUACIÓN NUMÉRICA	ECUACIÓN LITERAL
Es una ecuación que no tiene otras letras, sólo tiene las letras de la incógnita “x” **Ejemplo:** 4x –5 = x+4	Es una ecuación donde se presentan más letras aparte de la incógnita. **Ejemplo:** 3x +2a = 5b – bx

Grado de una ecuación

ECUACIONES DE PRIMER GRADO	ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
Es cuando el exponente de la incógnita "x" es 1 **Ejemplos:** $4x - 6 = 3x - 1$ $ax + b = b^2 + c$	Es cuando el mayor exponente de la incógnita "x" es 2 **Ejemplos:** $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolver una ecuación

Consiste en encontrar el valor de las incógnitas.

La transposición de términos

Consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

Regla para la transposición de términos

Si un término está con el signo (+) pasa al otro miembro con el signo (–)	Si un término está con el signo (–), pasa al otro miembro con el signo (+)
$5x + b = 2a$ $5x = 2a - b$ En esta ecuación, el término **+b** estaba en el primer miembro y pasó al segundo miembro con el signo cambiado **-b**	$4x - 2 = -1$ $4x = -1 + 2$ En esta ecuación, el término **-2** estaba en el primer miembro y pasó al segundo miembro con el signo cambiado **+2**

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se hace la selección de los términos. En el primer miembro se anotan todos los términos que tengan la incógnita, en el segundo miembro todos los términos numéricos.

Se suman y/o restan en cada miembro.

Para el despeje de la incógnita, el coeficiente de la incógnita pasa al otro miembro a dividir con su propio signo.

Ejemplo 2
Resolver la ecuación: 3x-5=x+3

TENEMOS LA ECUACIÓN	$3x - 5 = x + 3$
Todos los términos que contengan incógnitas, los llevamos al primer miembro y las numéricas al segundo miembro con los signos cambiados.	$\underbrace{3x - x} = \underbrace{3 + 5}$
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	$2x = 8$
El coeficiente de la incógnita "x" es 2, esto pasa al segundo miembro a dividir con su propio signo.	$x = \frac{8}{2}$
Hacemos la división y tenemos el valor de "x"	$x = 4$

Verificación o comprobación
Es para saber si el valor encontrado de la incógnita es el correcto. Consiste en reemplazar a todas las incógnitas de la ecuación con el valor encontrado, en este caso x = 4.

A LA ECUACIÓN	$3x - 5 = x + 3$
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x = 4.	$3(4) - 5 = 4 + 3$
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x = 4.	$12 - 5 = 7$
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	$7=7$

Ejemplo 3
Resolver la ecuación: 35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32

TENEMOS LA ECUACIÓN	$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$
Ordenamos la ecuación.	$- 22x - 18x + 30x = 14 + 32 - 35 - 6$
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	$- 40x + 30x = 46 - 41$ $- 10x = 5$
El coeficiente de x es -10 pasa a dividir.	$x = \frac{5}{-10}$
Hacemos la división o simplificación y tenemos valor de "x".	$x = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{-10}_{2}}$ $x = -\frac{1}{2}$

Verificación o comprobación

A LA ECUACIÓN	35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32
Reemplazamos a las incógnitas con el valor.	$35-22\left(-\frac{1}{2}\right)+6-18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14-30\left(-\frac{1}{2}\right)+32$
Realizamos las operaciones en cada miembro.	$35+\frac{22}{2}+6+\frac{18}{2}=14+\frac{30}{2}+32$ 35+11+6+9=14+15+32
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	61 = 61

Actividad 1
Resolver la ecuación: 5x = 8x-15

TENEMOS LA ECUACIÓN	5x = 8x -15
Ordenamos la ecuación.	
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	
El coeficiente de x es -10 pasa a dividir.	
Hacemos la división o simplificación y tenemos valor el de x.	

Verificación o comprobación

A LA ECUACIÓN	5x = 8x -15
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x=	5( ) = 8 ( ) -15
Realizamos las operaciones en cada miembro.	
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	

Actividad 2

Resolver la ecuación: y - 5 = 3y - 25

TENEMOS LA ECUACIÓN	y - 5 = 3y - 25
Ordenamos la ecuación.	
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	
El coeficiente de x es -10 pasa a dividir.	
Hacemos la división o simplificación y tenemos valor de x.	

Verificación o comprobación

A LA ECUACIÓN	y - 5 = 3y - 25
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x=	
Realizamos las operaciones en cada miembro.	
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	

Actividad 3

Resolver la ecuación: 2x-4=x+4

TENEMOS LA ECUACIÓN	2x - 4 = x + 4
Ordenamos la ecuación.	
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	
El coeficiente de x es -10 pasa a dividir.	
Hacemos la división o simplificación y tenemos valor de x.	

Verificación o comprobación

A LA ECUACIÓN	2x - 4 = x + 4
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x=	2( ) - 4 = ( ) + 4
Realizamos las operaciones en cada miembro.	
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	

Actividad 4
Resolver la ecuación: 5x+6 = 10x+5

TENEMOS LA ECUACIÓN	5x + 6 = 10x + 5
Ordenamos la ecuación.	
Sumamos y/o restamos en cada miembro.	
El coeficiente de x es -10 pasa a dividir.	
Hacemos la división o simplificación y tenemos valor de x.	

Verificación o comprobación

A LA ECUACIÓN	5x + 6 = 10x + 5
Reemplazamos a las incógnitas con el valor x=	
Realizamos las operaciones en cada miembro.	
Si ambos miembros igualan, entonces la ecuación es correcta.	

Resolvemos los ejercicios en la carpeta y anotamos las respuestas en los siguientes recuadros:

Actividad 1

21 - 6x = 27 - 8x Respuesta:

Actividad 2

8x + 9 -12x = 4x - 13 - 5x Respuesta:

Actividad 3

4x + 1 = 2 Respuesta:

Actividad 4

16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x Respuesta:

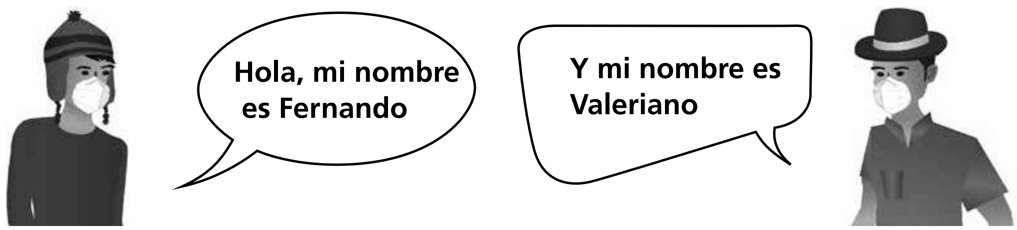
Actividad 5

9y - 11 = - 10 - 12y Respuesta:

Problemas de aplicación de ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 6

Existen dos hermanos, Valeriano tiene dos años menos que Fernando y la suma de sus edades da un total de 38 años ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?



Resolviendo…

Como no conocemos la edad de nadie, entonces:	x= edad de Fernando
Como Valeriano tiene 2 años menos que Fernando, entonces tendremos:	x-2= edad de Valeriano
Los dos hermanos tienen un total de 38 años, entonces tendremos la ecuación:	Edad de Fernando $x + x - 2 = 38$ Edad de Valeriano
Resolviendo la ecuación:	$x + x - 2 = 38$ $x + x = 38 + 2$ $2x = 40$ $x= \frac{40}{2}$ $x= 20$
Como x era la edad de Fernando, entonces tiene 20 años.	
La edad de Valeriano es:	x - 2 = Reemplazamos el valor de x =2 0 20 - 2 = = 18
Fernando tiene 20 años.	Valeriano tiene 18 años.

Comprobación o verificación

Los dos hermanos tienen que sumar 38 años.

20+18 = 38 / El resultado es correcto.

Ejemplo

Un día, el hermano Juan fue a la tienda a comprar una camisa y un sombrero para el desfile, pagó un total de Bs. 145. El sombrero cuesta Bs. 25 menos que la camisa.

¿Cuánto cuesta cada cosa?

Resolviendo…

Costo de la camisa: 	x = costo de la camisa
Costo del sombrero: 	x - 25 = el costo del sombrero
 +  =145 Bs.	Costo de la camisa ↓ x + x - 25 =145 ↑ Costo del Sombrero
Resolviendo la ecuación:	x + x - 25 = 145 x + x = 145 + 25 2x = 170 $x = \frac{170}{2}$ x = 85
Costo de la camisa	**85 bolivianos**
Costo del sombrero	x - 25 = Reemplazamos 85 a x 85 - 25= **60 bolivianos**

Comprobación o verificación
La camisa y el sombrero tienen que sumar 145.

85 + 60 = 145 / Los resultados son correctos.

Actividad 14

Resolver los siguientes problemas de aplicación en sus carpetas de prácticas.

a) David y su esposa Elena ganan un total de 1.154 bolivianos, pero Elena gana Bs. 506 menos que su esposo David.

¿Cuánto gana David y cuánto gana su esposa Elena?

Respuesta:

....

....

....

....

b) Julia y su esposo llevan a vender verduras en la feria de Titicachi, su esposo vende maíz, llegando a su casa suman el dinero y cuentan 350 bolivianos. Dámaso, esposo de Julia, ganó Bs. 200 más que su esposa.

¿Cuánto ganó cada uno?

Respuesta:

....

....

....

....

Inecuaciones de primer grado

¿Qué es una desigualdad?

Una desigualdad es una proposición de relación de orden existente entre dos cantidades conectadas a través de los signos:

no es igual $\neq$; mayor que $>$; menor que $<$

Ley de tricotomía

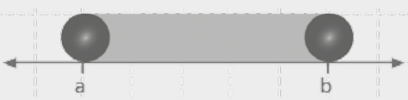
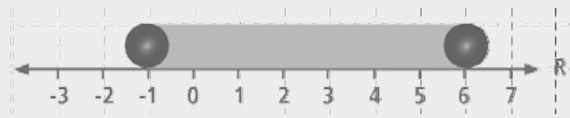
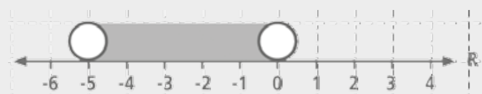
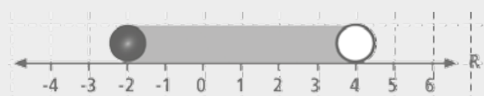
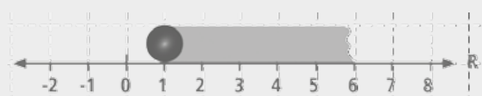
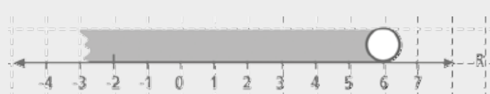
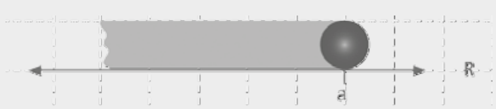
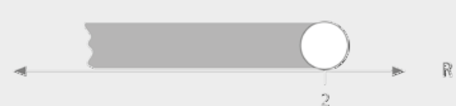
Si, a y b son dos números reales, al compararlos entre sí podemos afirmar:

$$a = b \; ; \; a > b \; ; \; a < b$$

Propiedades de las desigualdades

PROPIEDAD	EJEMPLO
1. Si sumamos o restamos a cada miembro un mismo número, la desigualdad no cambia.	$a < b$ $\boxed{a + c < b + c}$ //+c $5 < 7$ $5 + 2 < 7 + 2$ //+2 Se cumple la desigualdad $7 < 9$
2. Si multiplicamos o dividimos cada miembro por un número real positivo, la desigualdad no cambia.	$a > b$ //*c $\boxed{a * c > b * c}$ $3 > 2$ //*5 $3 * 5 > 2 * 5$ Se cumple la desigualdad $15 > 10$
3. Si multiplicamos o dividimos cada miembro por un número real negativo, el signo de la desigualdad se invierte.	$a < b$ //*(-c) $\boxed{a*(-c) > b*(-c)}$ $5 < 7$ //*(-2) La desigualdad se invierte $-12 > -14$

Clases de intervalos

INTERVALOS	EJEMPLOS
Intervalo cerrado $a \leq x \leq b$; $[a , b]$ 	$-1 \leq x \leq 6$; $= [-1,6]$ 
Intervalo abierto $a < x < b$; $]a , b[$ 	$-5 < x < 0$; $=]-5,0[$ 
Intervalo semiabierto, semicerrado $a < x \leq b$; $]a , b]$ 	$-2 \leq x < 4$; $= [-2,4[$ 
Intervalo al infinito $x \geq a$; $[a , \infty[$ 	$x \geq 1$; $= [, \infty[$ 
$x > a$; $]a , \infty[$ 	$x < 6$; $=]-\infty, 6[$ 
$x \leq a$; $]-\infty, a]$ 	$x \leq 2$; $]-\infty, 2]$ 
$x < a$; $]-\infty, a[$ 	$x < 2$; $]-\infty, 2[$ 

¿Qué es una inecuación?

Es una desigualdad cuyo conjunto solución es un subconjunto de los números reales.

$$x + 5 < 3$$

No confundas desigualdad con inecuación.
Una inecuación se genera mediante una desigualdad, en cambio una desigualdad podría no ser una inecuación.

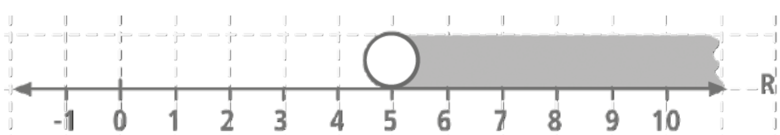
La solución de una inecuación son todos los puntos que cumplen la desigualdad.

Siempre será un conjunto de puntos, un intervalo.

Ejemplo 1

$5x - 2x > 12 + 3$	Transponemos términos
$5x - 2x > 12 + 3$	Reducimos términos semejantes
$\frac{3x}{3} > \frac{15}{3}$	Dividimos ambos miembros entre 3
$x > 5$; $=]5, \infty[$	

Gráfico:



Ejemplo 2

$2(2x - 4) - 5 \leq 7x - 1$	Quitamos los paréntesis
$4x - 8 - 5 \leq 7x - 1$	Transponemos los términos
$4x - 7x \leq -1 + 8 + 5$	Reducimos términos semejantes
$-3x \leq 12$	Dividimos ambos miembros entre -3
$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{12}{-3}$	Cambia el sentido de la desigualdad
$x \geq -4$; $= [-4, \infty[$	

Gráfico:

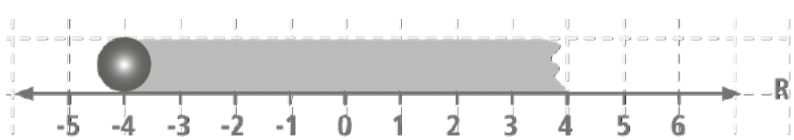
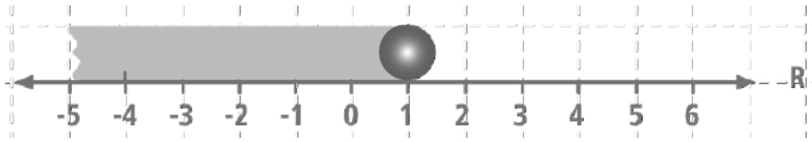


Gráfico:



Ejemplo 4

$-1 - 5 \leq\ 5x - 5x - 3x <\ 8 - 5$

$-1 - 5 \leq 5x - 5x - 3x\ < 8 - 5$ Restamos 5 a los tres términos.

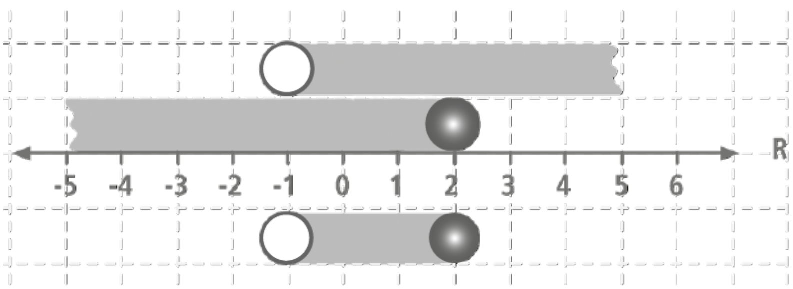
$-6 \leq -3x\ < 3$

$\frac{-6}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{3}{-3}$ Dividimos entre (-3) y cambia el sentido de la desigualdad.

$2 \geq x > -1$ Separamos en dos desigualdades.

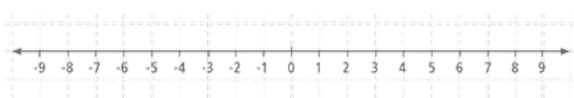
$x \leq 2 \quad \wedge \quad x > -1 \qquad ; \qquad\qquad =]-1,2]$

Gráfico:

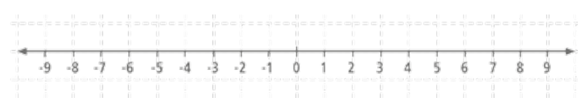


Resolvemos las inecuaciones y determinamos el conjunto solución:

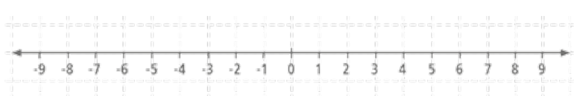
1 $3\ - 2 < 1$



2 $\frac{x+1}{2} > 4$



3 $-2\ +6 \leq\ -3$



4 $+3(\ -2) \leq 2\ -4$

3. VALORACIÓN

En el siguiente cuadro, manifestamos que acciones son consideradas igualdades y desigualdades en nuestras comunidades que deberíamos considerar para poder mejorar en un futuro.

N°	IGUALDADES	DESIGUALDADES

¿Por qué son importantes para nosotros las ecuaciones de primer grado?

....

....

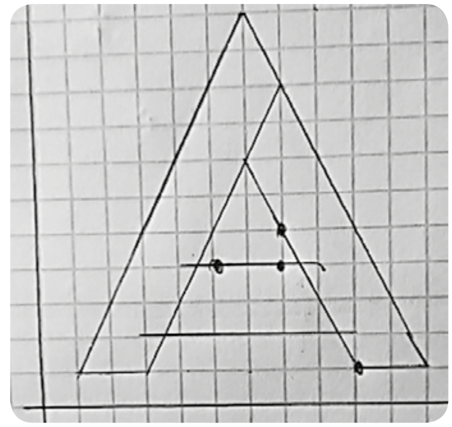
4. PRODUCCIÓN

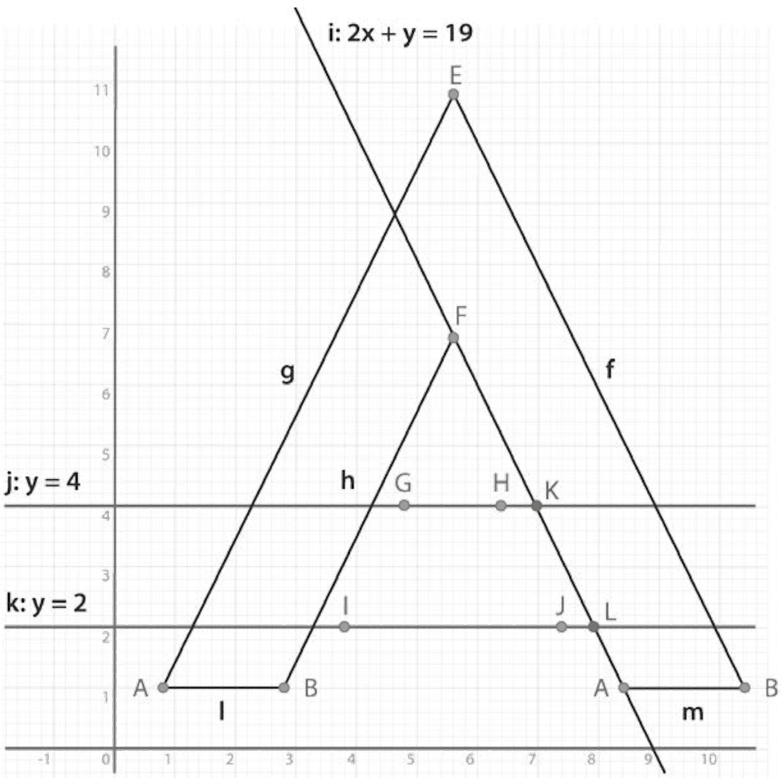
- Mediante el estudio de las inecuaciones, proponemos la forma en que podemos mejorar las reglas que hay en nuestra comunidad.
- Realiza un informe con los rangos de edad de tus compañeros de clase y represéntalos como inecuaciones.
- Por medio de estas inecuaciones realiza también un material didáctico para determinar cuándo hay intervalos cerrados y abiertos.
- Realiza un informe de cómo te ayudan las ecuaciones de primer grado para subsanar una necesidad o problema.

UNIDAD 3
SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS O MÁS INCÓGNITAS

1. PRÁCTICA

En el CEA San Cristobal de Guayaramerin los participantes decidieron construir estantes de madera para coadyuvar en la organización de su Centro. Pero se presentó dificultades para obtener la ubicación de los puntos K y L, (tal como se ve en el cuadro que sigue) donde se debería recurrir a la intersección de la ecuación de “i” con “j” y la intersección de “i” con “k”, de esta manera tener las ubicaciones exactas de ambos puntos de unión de las maderas.





Bajo esta situación también se requiere saber otros dos puntos de intersección.

- ¿Cómo podemos encontrar las intersecciones en dos ecuaciones lineales?
- ¿Consideras útil encontrar estas intersecciones?

2. TEORÍA

Ecuaciones simultáneas

Dos o más ecuaciones, con dos o más incógnitas, son simultáneas cuando tienen los mismos valores de las incógnitas.

¿Qué son las incógnitas?

Son variables de valor desconocido y se representan con las últimas letras del alfabeto: u,v,x,y,z.

¿Qué son los miembros de una ecuación?

Se llama miembros a los dos grupos separados por el signo igual:

Los términos que están a la izquierda de = se llaman: **PRIMER MIEMBRO**	**3x - 5 = 2x - 3**	Los términos que están a la derecha de = se llaman: **SEGUNDO MIEMBRO**

Ahora estudiaremos casos que nos ayudarán a resolver las ecuaciones.

¿Cómo pasar un término de un miembro a otro?

- Si un término está con signo (+), pasa al otro miembro cambiando de signo a (-).

$$3x + 5 = 2x - 3$$

$$3x = 2x - 3 - 5$$

- Si un término está con signo (-), pasa al otro miembro cambiando de signo a (+).

$$2x - 3 = 3x + 5$$

$$2x = 3x + 5 + 3$$

- Si un número está multiplicando (x), pasa al otro miembro a dividir (÷).

$$3x = 21$$

$$x = \frac{21}{3}$$

- Si un término está dividiendo (÷), pasa al otro miembro a multiplicar (×).

$$\frac{6x}{4} = 6$$

$$6x = 6 \cdot 4$$

Recuerda

En el álgebra se usan letras como: x, y, z, m, n.

Estas letras son números desconocidos.

LEY DE SIGNOS PARA SUMAR Y RESTAR

Signos iguales se suman y se coloca el signo común

$3x + 2x = 10$	$-3x - x = 20$
$5x = 10$	$-4x = 20$

Signos distintos se restan y se coloca el signo del número mayor

$7x - 3x = 12$	$-8x + 3x = 15$
$4x = 12$	$-5x = 15$

Si adelante de una ecuación no tiene signo, significa que tiene el signo positivo (+).

$3x + 2x = 10$

Si el coeficiente de una incógnita es 1, NO SE ANOTA.

$2x - 1x = 10 \longrightarrow 2x - x = 10$

LEY DE SIGNOS PARA SUMAR Y RESTAR	
MULTIPLICACIÓN	**DIVISIÓN**
(+) por (+) = +	(+) entre (+) = +
(–) por (–) = +	(–) entre (–) = +
(–) por (+) = –	(–) entre (+) = –
(+) por (–) = –	(+) entre (–) = –

Resolución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Para resolver un sistema de esta clase, tenemos que encontrar el valor de "x" y el valor de la incógnita"y".

Para esto existen muchos métodos para resolver, pero nosotros aprenderemos uno de esos métodos.

Por el método de reducción:

Ejemplo 1

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 20 \text{.......... ecuación (1)} \\ 4x - 3y = -23 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Para resolver por este método, vamos a eliminar la incógnita "y", para eso, vamos a llevar sus coeficientes delante de cada ecuación, de la siguiente manera:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3 \quad 5x + 6y = 20 \text{.......... ecuación (1)} \\ 6 \quad 4x - 3y = -23 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Los coeficientes que están delante multiplicarán a cada uno de los coeficientes de la ecuación, el 3 con la ecuación (1), el 6 con la ecuación (2).

$$\begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \begin{cases} 5x + 6y = 20 \text{.......... ecuación (1)} \\ 4x - 3y = -23 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Multiplicando tendremos:

$$15x + 18y = 60$$
$$24x - 18y = -138$$

Sumamos y restamos de forma vertical.

$$15x + 18y = 60$$
$$24x - 18y = -138$$
$$39x = -78$$

Despejamos la incógnita "x"

$$x = -\frac{78}{39}$$

Dividimos y tenemos el valor de x.

$$x = -2$$

Para encontrar el valor de "y" se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$5x + 6y = 20$
Reemplazamos el valor de "x = -2" y multiplicamos:	$5(-2) + 6y = 20$
Despejamos la "y"	$-10 + 6y = 20$ $6y = 20 + 10$ $6y = 30$ $y = \frac{30}{6}$
Dividimos y tendremos el valor de "y"	$y = 5$
Como respuesta tenemos:	$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

Por último, verificamos (prueba) en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$5x + 6y = 20$
Reemplazamos los valores de "x = -2" y de" y = 5" y multiplicamos:	$5(-2) + 6y = 20$
Sumamos y restamos	$-10 + 30 = 20$
Resultado verificado	$20 = 20$

Como ambos miembros igualan: 20 = 20
Eso nos indica que el ejercicio se resolvió de manera correcta.

Juguemos

Llena los cuadros vacíos, de modo que en cada fila y columna existan los números del 1 al 4 sin repetirse.

	4		3
4		1	

Ejemplo 2

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \text{.......... ecuación (1)} \\ 2x - y = -4 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Para resolver por este método, vamos a eliminar la incógnita "y", para eso, vamos a llevar sus coeficientes delante de cada ecuación, de la siguiente manera:

Resolver el sistema:

$$\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 5y = 7 \text{.......... ecuación (1)} \\ 2x - y = -4 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Los coeficientes que están delante multiplicarán a cada uno de los coeficientes de la ecuación, el 3 con la ecuación (1), el 6 con la ecuación (2).

$$\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 5y = 7 \text{.......... ecuación (1)} \\ 2x - y = -4 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Multiplicando tendremos:

$$3x + 5y = 7$$
$$10x - 5y = -20$$

Sumamos y restamos de forma vertical.

$$3x + 5y = 7$$
$$10x - 5y = -20$$
$$13x = -13$$

Despejamos la incógnita "x"

$$x = \frac{-13}{13}$$

Dividimos y tenemos el valor de x.

$$x = -1$$

Para encontrar el valor de "y" se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$3x + 5y = 7$
Reemplazamos el valor de "x = –1" y Multiplicamos:	$3(-1) + 5y = 7$
Despejamos la "y"	$-3 + 5y = 7$ $5y = 7 + 3$ $5y = 10$ $y = \frac{10}{5}$
Dividimos y tendremos el valor de la "y"	$y = 2$
Como respuesta tenemos	$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Por último, verificamos (prueba) en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$3x + 5y = 7$
Reemplazamos los valores de "x = –2" y de "y = 5", y multiplicamos:	$3(-1) + 5(2) = 7$
Sumamos y restamos:	$-3 + 10 = 7$
Resultado verificado:	$7 = 7$

Ahora investiguemos el significado de las siguientes palabras:

¿Qué es verificar? ¿Qué es igualdad?

....

....

....

....

Actividad 1

Resolver el sistema: $6x - 5y = -9$ .... ecuación (1) $4x + 3y = 13$ .... ecuación (2)
Vamos a eliminar la incógnita "y" lo hacemos de la siguiente manera:
$\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \begin{cases} 6x - 5y = -9 \text{ .... ecuación (1)} \\ 4x + 3y = 13 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$
Multiplicando tendremos:
Sumamos y restamos de forma vertical.
Despejamos la incógnita "x"
Dividimos, y tenemos el valor de x. x =

Para encontrar el valor de "y" reemplazamos a la ecuación 1	
Copiamos la ecuación (1)	
Reemplazamos el valor de "x" y Multiplicamos:	
Despejamos "y"	
Dividimos y tendremos el valor de "y"	y =
Como respuesta tenemos:	$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

Por último verificamos (prueba) en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	
Reemplazamos los valores de "x= " y de "y= " y multiplicamos:	
Sumamos y restamos:	
Resultado verificado:	

Gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado

Se trata de otra forma de hallar el resultado de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

La gráfica de cada ecuación del sistema es una recta, como consecuencia, la intersección de las gráficas es un único punto de coordenadas (a , b) y la solución del sistema es: x = a e y = b.

Ejemplo 3

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

Lo primero que hacemos es despejar "y" en ambas ecuaciones:

Primera ecuación

$y - 2x = 0$

$y = 2x$

Segunda ecuación

$y + x = 3$

$y = 3 - x$

Ahora realizamos una tabla para cada ecuación despejada.

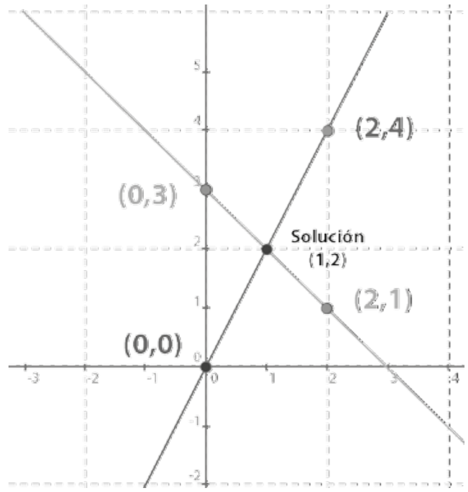
Primera ecuación

x	y = 2x
0	2(0) = 0
2	2(2) = 4

Segunda ecuación

x	y = 3 – x
0	3 - 0 = 3
2	3 - 2 = 1

Ahora representamos los puntos:



Solución: x = 1 ; y = 2

Actividad 2

Grafica el siguiente sistema de ecuaciones e indica el punto solución.

Ejemplo 3

$$\begin{cases} y + 2x = -7 \\ y - x = -4 \end{cases}$$

Despejar “y” en ambas ecuaciones:

Primera ecuación | **Segunda ecuación**

Ahora realizamos una tabla para cada ecuación despejada.

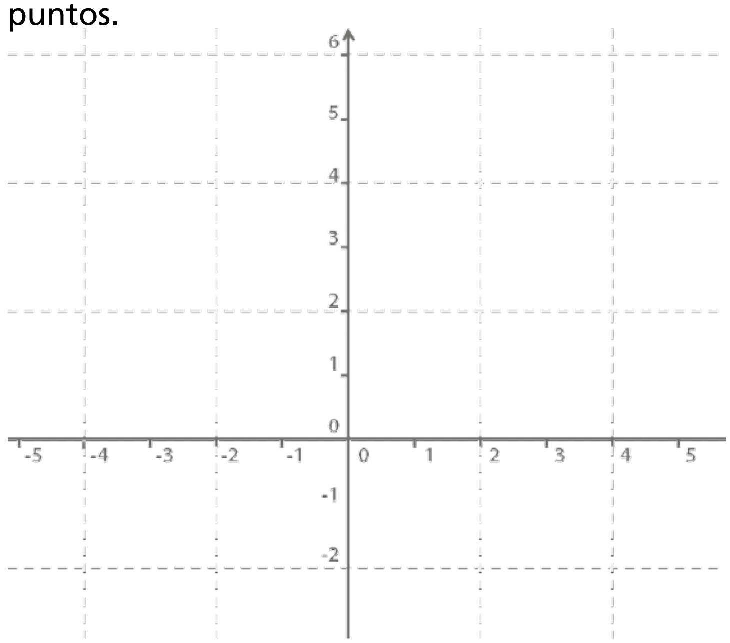
Primera ecuación

x	y = -2x - 7

Segunda ecuación

x	y = x - 4

Ahora representamos los puntos.



Actividad 2

Resolver: $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \text{ .... ecuación (1)} \\ 2x - y = -4 \text{ .... ecuación (2)} \end{cases}$	Hallamos el valor de "x"
Hallamos el valor de "y"	Verificamos

Lenguaje algebraico

El lenguaje común que manejamos lo podemos traducir al lenguaje algebraico, donde el dato desconocido será la incógnita y lo representaremos con una “x”.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
El doble de un número	2x

Ejemplo 1

De todos los casos, traducimos del lenguaje común al lenguaje algebraico.

	LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
1.	El triple de un número.	3x
2.	El doble de un número, más tres.	2x + 3
3.	El triple de un número, menos siete es igual a diez.	3x –7 = 10
4.	El doble de un número, menos el triple del mismo número.	2x –3x

Actividad 1

Traducimos del lenguaje común, al lenguaje algebraico.

	LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
1.	El doble de un número.	
2.	El triple de un número, menos ocho.	
3.	El triple de un número, más tres es igual a cinco.	
4.	El triple de un número, más el triple del mismo número.	

Resolución de problemas de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas:

Ejemplo 1

Un ganadero de Trinidad compró 4 vacas y 7 caballos con $us. 514.- y más tarde con el mismo precio, compró 8 vacas y 9 caballos esta vez por un valor total de $us 818.- ¿Cuánto cuesta cada vaca y cada caballo?

Resolvemos:

Como no sabemos el precio de cada vaca y de cada caballo, elegiremos las incógnitas:

x = Precio de la vaca
y = Precio del caballo

Ahora, con nuestros datos e incógnitas, vamos a escribir las ecuaciones:

Para la ecuación 1. La primera vez compra 4 vacas y 7 caballos con 514 dólares.

$4x + 7y = 514$ ………… ecuación 1

Para la ecuación 2. La segunda vez compra 8 vacas y 9 caballos con 818 dólares.

$8x + 9y = 818$ ………… ecuación 2

Igualando ambas ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas "x", "y":

$4x + 7y = 514$ .... ecuación (1)
$8x + 9y = 818$ ....ecuación (2)

Y para resolver este tipo de ecuaciones, aprendimos a resolver por el método de reducción.

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 514 \text{.......... ecuación (1)} \\ 8x + 9y = 818 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Para resolver por este método, vamos a eliminar la incógnita y para eso, vamos a llevar sus coeficientes al frente de cada ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 9 \\ -7 \end{array} \begin{cases} 4x + 7y = 514 \text{.......... ecuación (1)} \\ 8x - 9y = 818 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Los coeficientes que llevamos, vamos a multiplicar con cada uno de los coeficientes, el 9 con la ecuación (1) el -7 con la ecuación (2).

$$\begin{array}{r} 9 \\ -7 \end{array} \begin{cases} 4x + 7y = 514 \text{.......... ecuación (1)} \\ 8x - 9y = 818 \text{.......... ecuación (2)} \end{cases}$$

Nota. Tomar en cuenta la ley de los signos en las multiplicaciones.

MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
(+) por (+) = +	(+) entre (+) = +
(–) por (–) = +	(-) entre (-) = +
(–) por (+) = -	(-) entre (+) = -
(+) por (–) = -	(+) entre (-) = -

Multiplicando tendremos:

$$36x + 63y = 4626$$
$$-56x - 63y = -5726$$

Sumamos y restamos de forma vertical

$$36x + 63y = 4626$$
$$-56x - 63y = -5726$$
$$-20x = -1100$$

Despejamos la incógnita "x"

$$x = \frac{-1100}{-20}$$

Dividimos y tenemos el valor de x.

$$x = 55$$

Ya encontramos el precio de la vaca, ahora buscaremos el precio del caballo

Para encontrar el valor de "y" se reemplaza a cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$4x + 7y = 514$
Reemplazamos el valor de "x = 55" y multiplicamos:	$4(55) + 7y = 514$
Despejamos "y"	$220 + 7y = 514$ $7y = 514 - 220$ $7y = 294$ $y = \frac{294}{7}$
Dividimos y tendremos el valor de la "y"	$y = 42$
Como respuesta tenemos:	$\begin{cases} x = 55 \\ y = 42 \end{cases}$

Recordemos que "x", para nosotros representaba el valor de cada vaca.

Entonces: cada vaca cuesta 55 dólares.

Y que "y", para nosotros representaba el valor de cada caballo.

Entonces: cada caballo cuesta 42 dólares.

Por último verificamos (prueba) en cualquiera de las dos ecuaciones:	
Copiamos la ecuación (1)	$4x + 7y = 514$
Reemplazamos los valores de "x ="55 y de" y =" 42, y multiplicamos:	$4(55) + 7(42) = 514$
Sumamos y restamos:	$220 + 294 = 514$
Resultado verificado:	$514 = 514$
Como ambos miembros son iguales, el ejercicio es correcto.	

3. VALORACIÓN

¿Por qué son importantes los sistemas de ecuaciones en nuestra vida diaria?

....

¿De qué modo te pueden ayudar las ecuaciones simultáneas con dos incógnitas en tu diario vivir?

....

¿En qué situaciones concretas es útil un sistema de ecuaciones? Menciona 6 ejemplos.

....

¿Cómo nos ayuda a solucionar problemas y necesidades?

....

4. PRODUCCIÓN

Realiza un informe de las aplicabilidades que tienen los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, más su guía de resolución y que éste sea aplicado en tu contexto.

Realiza un modelo de escala donde veas conveniente la utilización de las ecuaciones para poder encontrar la intersección.

Realiza una guía de cómo podemos utilizar el sistema de ecuaciones en la resolución de problemas donde no sean geométricos.

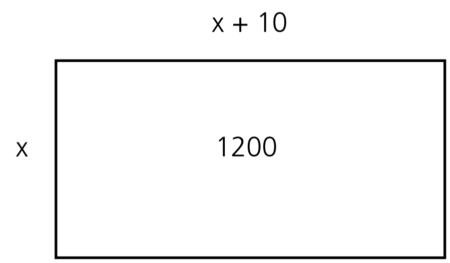
MÓDULO II
ÁLGEBRA III

OBJETIVO HOLÍSTICO

Fortalecemos el valor de la igualdad de oportunidades, a través del estudio de ecuaciones y progresiones matemáticas en la productividad, desarrollando habilidades y destrezas de razonamiento lógico matemático para asumir decisiones a partir de la lectura de problemas que se presentan en nuestra vida cotidiana.

UNIDAD 4
ECUACIONES E INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. PRÁCTICA



Daniela compró un terreno de 1 200 m² del que no cuenta con planos de medidas. Ella y sus vecinos pretenden encontrar las delimitaciones de sus terrenos queriendo determinar el ancho y largo de los mismos, teniendo en cuenta que un lado tiene 10 metros más que el otro.

¿Qué procedimientos utilizamos para resolver este problema?

....

....

....

....

¿Cómo solucionamos esta situación si se presenta en tu comunidad?

....

....

....

....

2. TEORÍA

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado o cuadrática con una incógnita, es de la forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \mathbf{a \neq 0} \qquad \textbf{Donde: } \mathbf{a, b, c \in R}$$

Donde las raíces o soluciones de la ecuación de segundo grado X_1 y X_2 deben satisfacer a la ecuación.

Métodos de resolución

Para resolver ecuaciones de segundo grado se conocen tres métodos: Factorización, Fórmula General y Completando Cuadrados, de estos se recomienda los dos primeros. En su resolución se recurre a los siguentes teoremas:

Teorema 1: Para todo $a, b \in R$ $ab = 0 \quad \leftrightarrow \quad a = 0 \quad ó \quad b = 0$	**Teorema 2:** Para todo $a, b \in R, \quad b \geq 0$ $a^2 = b \quad \leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{b}$

Por factorización

Ejercicio 1. Resolver la ecuación: $x^2 + 3x + 2 = 0$
Factorizamos usando el método del Aspa.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1x & & 2 = 2x \\ 1x & & 1 = 1x \end{array}\right\}$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0$$

Aplicando el **Teorema 1:** $\quad x_1 + 2 = 0 \quad ; \quad x_2 + 1 = 0$

Las raíces o soluciones son: $\quad x_1 = -2 \quad ; \quad x_2 = -1$

Verificando las raíces en la ecuación original:

Para $x_1 = -2$	Para $x_2 = -1$
$x^2 + 3x + 2 = 0$	$x^2 + 3x + 2 = 0$
$(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$	$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$
$4 - 6 + 2 = 0$	$1 - 3 + 2 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

las raíces son correctas y satisfacen a la ecuación.

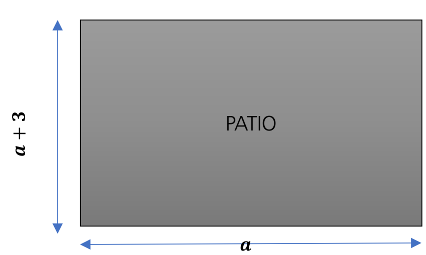
Ejercicio 2. El largo de un patio rectangular tiene tres metros mas que el ancho. Sí el área es igual a 54 metros cuadrados, ¿Cuáles son las dimensiones del patio?

Largo: $\boldsymbol{l = a + 3}$ $\qquad \boldsymbol{l \cdot a = 54}$

Ancho: $\boldsymbol{a}$ $\qquad \boldsymbol{(a + 3)\, a = 54}$

$Área = \boldsymbol{l \cdot a}$ $\qquad \boldsymbol{a^2 + 3a - 54 = 0}$

$$\boldsymbol{(a + 9)(a - 6) = 0}$$



$a_1 = -9$, $\boxed{a_2 = 6}$ $\qquad$ $l = 6 + 3 = 9[m]$

Resolver la ecuación de segundo grado por el método de factorización:

1) $x^2 + 11x + 24 = 0$
2) $x^2 - 5x + 6 = 0$
3) $x^2 - 6x - 7 = 0$
4) $2x^2 + 5x + 3 = 0$
5) $2x^2 + 3x + 2 = 0$
6) $3(3n - 2) = (n + 4)(4 - n)$
7) $x^2 - 7x + 12 = 0$
8) $x^2 - 8x + 6 = 0$
9) $x^2 + 4x - 32 = 0$
10) $2x^2 + 3x + 1 = 0$
11) $3x^2 + 2x - 5 = 0$
12) $(x - 4)^2 = 20 - 8x$

Fórmula general

Para hallar las raíces o soluciones a la ecuación de segundo grado se utiliza:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sus raíces son x_1 y x_2

Discriminante de la ecuación de segundo grado

La discriminante de una ecuación de segundo grado determina la solución de una ecuación.

Teorema 3: Sí: $ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad D = b^2 - 4ac$
Sí: $\boldsymbol{D} > 0$ **La ecuación tiene dos soluciones reales diferentes entre si.**
Sí: $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$ **La ecuación tiene dos soluciones reales iguales entre si.**
Sí: $\boldsymbol{D} < 0$ **La ecuación no tiene soluciones reales, las soluciones son números imaginarios.**

Analizando la Discriminante de las siguientes ecuaciones de segundo grado, determinar que tipo de soluciones tienen.

1. $3x^2 + 8x + 5 = 0$

   $a = 3, \quad b = 8 \quad y \quad c = 5$

   $D = b^2 - 4ac =$ $\qquad$ $D = 4$ $\qquad$ $\mathrm{D} > 0 \ \exists$ ____________________

2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

   $a = 4, \quad b = 12 \quad y \quad c = 9$

   $D = b^2 - 4ac =$ $\qquad$ $D = 0$ $\qquad$ $\mathrm{D} = 0 \ \exists$ ____________________

3. $5x^2 - 6x + 5 = 0$

   $a = 5, \quad b = -6 \quad y \quad c = 5$

   $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(5)(5) \quad \rightarrow \quad D = -64$ $\qquad$ $D < 0 \ \nexists$ ____________________

Resolvemos:

a) $3x^2 + 2x - 4 = 0$

b) $1 + 2x + 2x^2 = 0$

c) $4\sqrt{3}x = 4x^2 + 3$

1) Por medio de la aplicación de la Fórmula General resuelve la siguiente ecuación:
Sea la ecuación:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

Solución: Comparando la ecuación con la forma general:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \qquad con \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

Se tiene que: a=2 b=4 c=-6

Aplicando la fórmula general y reemplazando los valores de los coeficientes a,b y c, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot (2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \frac{4(-1 \pm 2)}{4}$$

$x = -1 \pm 2 \longrightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$

Verificación.

$2(1)^2 + 4(1) - 6 = 0$	$2(-3)^2 + 4(-3) - 6 = 0$
$2 + 4 - 6 = 0$	$18 - 12 - 6 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

2) Resolvemos las siguientes ecuaciónes de segundo grado por la fórmula general:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $2x^2 - x - 3 = 0$

c) $5x^2 - 4x + 12 = 0$

d) $7x^2 - 12x + 64 = 0$

e) $2x^2 - 4x = 0$

f) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

g) $10x^2 - 23x - 5 = 0$

h) $x^2 + 11x + 24 = 0$

i) $4x^2 + 3x - 22 = 0$

j) $4x^2 = 16$

3) Con ayuda del docente demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejercicios:

1) Determinamos el valor de k, si una raíz es igual a 3 en la ecuación: $2x^2 + kx - 15 = 0$

2) Hallamos el valor de k de modo que la ecuación: $5x^2 - 8x + k = 0$, tenga raíces cuyo producto sea igual a $\frac{1}{5}$

3) Hallamos el valor de p en la ecuación: $p(x^2 + 3x - 9) = x - x^2$, para que sus raíces sean iguales pero de signos contrarios.

Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación es una desigualdad (<,>, ≤ o ≥) en la que figura una o mas incógnitas. Resolver una inecuación, consiste en encontrar el conjunto solución de números que hace verdadera una desigualdad.
El conjunto solución de una inecuación puede indicarse a través del lenguaje simbólico matemático o por medio de una representación gráfica.

Una inecuación cuadrática tiene la forma:

$$P_{(x)}: ax^2+bx+c>0$$
$$P_{(x)}: ax^2+bx+c\geq 0$$
$$P_{(x)}: ax^2+bx+c<0$$
$$P_{(x)}: ax^2+bx+c\leq 0$$

1) Resolvemos la inecuación: $x^2 - x - 6 \geq 0$

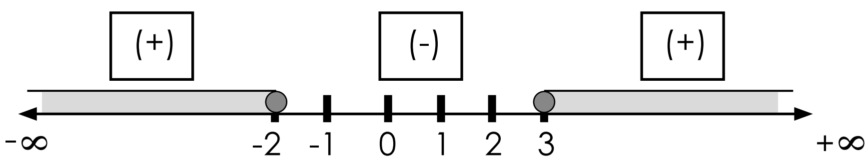
Solución:

Factorizamos $x^2 - x - 6 \geq 0$

Aplicamos el **Teorema 1** $(x - 3)(x + 2) \geq 0$

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$



$(x - 3) \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2) \geq 0 \quad \vee \quad x - 3 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 2 \leq 0$

$x \geq 3 \quad \wedge \quad x \geq -2 \quad \vee \quad x \leq 3 \quad \wedge \quad x \leq -2$

$(-\infty < x \leq -2) \quad \vee \quad (3 \leq x < +\infty)$

Cs: $x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq -3$ Cs: $[-\infty. -2] [3, +\infty]$

Ejercicios:

1) $x^2 - 4 < 0$

2) $x^2 - x4 - 3 < 0$

3) $x^2 - 2x - 15 < 0$

4) $x^2 - 12 \leq -x$

5) $9 - x^2 \geq 0$

6) $x^2 + 5x - 8 \geq 0$

3. VALORACIÓN

Valoramos la utilidad de las ecuaciones de segundo grado en el diseño de diferentes estructuras parabólicas, como ser: puentes, antenas satelitales, entre otros.

¿En que situaciones concretas es necesario utilizar las ecuaciones cuadráticas para resolver problemáticas?

R.- ....

....

....

¿Qué problemas o aplicaciones de las otras ramas utiliza la ecuación cuadrática o funciones cuadráticas? Menciona 5 ejemplos.

R.- ....

....

....

....

....

¿Cómo utilizarías las ecuaciones cuadráticas para subsanar datos en ciertos problemas?

R.- ....

....

....

4. PRODUCCIÓN

Construimos objetos donde se representan las ecuaciones cuadraticas o de segundo grado en la vida real a escala, con los materiales que se tiene en el entorno y al alcance.

Elaboramos un modelo según la práctica, de tal manera que este sea socializado en tu familia o comunidad para poder mencionar la utilidad en situaciones reales

Proponemos las rutas de aplicación cuadráticas para que este sea de referencia aplicativa en tu CEA, bajo un informe a socializarse.

UNIDAD 5
LOGARITMOS

1. PRÁCTICA

AÑO	LUGAR	INTENSIDAD Sobre la escala de Richter
1902	Sipe Sipe	5,2
1942	Ciudad de Cochabamba	5,2
1943	Ciudad de Cochabamba	5,2
1958	Aiquile	5,8
1976	Aiquile	5,8
1994	Corani y Ciudad de Cochabamba	4,0
1998	Aiquile y Totora	6,8


CASI TODO EL PAIS SINTIO EL SISMO ESTA MADRUGADA:

Tembló la tierra

Platos Buen Gusto

CORREO DEL SUR

HISTORIA DEL SIGLO XX
HOY PIDA
EL FASCICULO

¿Qué tan útil es conocer los logaritmos en este tipo de eventos? ¿Qué aplicaciones tiene en tu realidad?

2. TEORÍA

En 1998 ocurrió en Bolivia un terremoto que afectó a poblaciones como Totora y Aiquile (Cbba) ¿Cuáles serían las consecuencias económicas, sociales y sanitarias que traería un nuevo terremoto en Bolivia?

....

....

....

....

Concepto de logaritmo

Se denomina nogaritmo de un número, a aquel al que se debe elevar una determinada Base, para obtener el Número.

Ejemplos

1. $\log_{10} 100 = 2$
2. $\log_{2}\left(\frac{1}{8}\right) = -3$
3. $\log_{5} 125 = 3$

Partes de un Logaritmo

$$\log_{\underset{\text{base}}{\uparrow\, b}} \overset{\text{argumento}}{\overset{\downarrow}{a}} = \underset{\text{logaritmo}}{\underset{\uparrow}{c}}$$

Aplicación de un Logaritmo

$$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$$

$$a \geq 0;$$

Se lee:
El logaritmo del argumento "a", en base "b" es igual al número "c" si y solo si el argumento "a" es igual a la base elevado al exponente "c".

La aplicación de la definición es un proceso de comparación de los elementos de que componen a un logaritmo, veamos el siguiente gráfico:

$$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$$

Forma logarítmica y forma exponencial

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra.

Forma Logarítmica	Forma Exponencial
$\log_b a = c$	$a = b^c$

Ejemplos

Aplicando la definición de logaritmos, evalúa las siguientes expresiones.

1. $\log_{10} 100 = 2$

Se lee, logaritmo de 100 en base 10 es igual a 2.

Resolvemos:

Comparamos y completamos la definición de logaritmo.	$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$ $\log_{10} 100 = 2 \longleftrightarrow a = b^c$
Identificamos las partes del logaritmo.	$a = 100$ $b = 10$ $c = 2$
Reemplazamos los valores de "a", "b" y "c" sobre la definición.	$\log_{10} 100 = 2 \longleftrightarrow 100 = 10^2$
Resolvemos las operaciones indicadas. Como la igualdad del consecuente es cierta, el logaritmo cumple la definición, por tanto, se verifica que: $\log_{10} 100 = 2$	$\log_{10} 100 = 2 \longleftrightarrow 100 = 10^2$ $\log_{10} 100 = 2 \longleftrightarrow 100 = 100$ Verdadero

Aplicando la definición de logaritmos evalúa las siguientes expresiones.

2. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

Se lee, logaritmo de $\frac{1}{8}$ en base 2 es igual a – 3

Resolvemos:

Completamos la definición de logaritmo.	$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$ $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \longleftrightarrow a = b^c$
Identificamos las partes del logaritmo y los comparamos con la definición.	$a = \frac{1}{8}$ $b = 12$ $c = -3$
Reemplazamos los valores de "a", "b" y "c" sobre la definición.	$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \longleftrightarrow \frac{1}{8} = 2^{-3}$

Resolvemos las operaciones indicadas. Como la igualdad del consecuente es cierta, el logaritmo cumple la definición, por tanto, se verifica que: $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \longleftrightarrow \frac{1}{8} = -2^{-3}$ $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2^3}\right)$ $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \longleftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ Verdadero

Ejercicios

Aplicando la definición de logaritmo evalúa los siguientes logaritmos.

i) $\log_2 8 = 3$	ii) $\log_8 512 = 3$
Se lee:	Se lee:
$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$ $\log_2 8 = 3 \longleftrightarrow a = b^c$	$\log_b a = c \longleftrightarrow a = b^c$ $\log_2 512 = 3 \longleftrightarrow a = b^c$
a = ____ b = ____ c = ____	a = ____ b = ____ c = ____
$\log_2 8 = 3 \longleftrightarrow$ ___ = ___	$\log_2 512 = 3 \longleftrightarrow$ ___ = ___
$\log_2 8 = 3 \longleftrightarrow$ ___ = ___ $\log_2 8 = 3 \longleftrightarrow$ ___ = ___	$\log_2 512 = 3 \longleftrightarrow$ _______ = ___ $\longleftrightarrow$ _______ = ___ $\log_2 512 = 3 \longleftrightarrow$ _______ = ___ ....

En tu cuaderno, aplicando la definición de logaritmo, evaluamos los siguientes logaritmos.

Ejercicios

a) $\log_5 25 = 2$	f) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
b) $\log_3 81 = 4$	g) $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
c) $\log_8 512 = 3$	h) $\log_8 4 = \frac{12}{3}$
d) $\log_3 243 = 5$	i) $\log_5 1 = 0$
e) $\log_7 49 = 2$	j) $\log_4 x = 2$

Ejercicios: Hallamos el valor de la incógnita.

Aplicando la definición de logaritmos hallemos los valores desconocidos.

Tendremos tres casos en los cuales tendremos que hallar el valor de la incógnita.

1°	2°	3°
$\log_b a = x$	$\log_b x = c$	$\log_x a = c$
Cuando la incógnita es el logaritmo.	Cuando la incógnita es el argumento.	Cuando la incógnita es el logaritmo.

Ejemplo. CASO 1, cuando la incógnita es el logaritmo:

Hallar la incógnita "x" en:

1. $\log_6 36 = x$

Aplicamos la definición de logaritmo.	$\log_6 36 = x$ $\log_6 36 = x \longleftrightarrow 36 = 6^x$
Igualamos las bases en la forma exponencial de la definición de logaritmo.	$36 = 6^x$ $6^2 = 6^x$
Propiedad: Si las bases son iguales, entonces los exponentes también son iguales. Por lo cual el valor de la incógnita es: x = 2	$6^2 = 6^x$ $2 = x$ $x = 2$

Ejemplo. CASO 2, cuando la incógnita es el argumento:

Hallar la incógnita “x” en: **2.** $\log_2 x = 5$

Aplicamos la definición de logaritmo.	$\log_2 x = 5$ $\log_2 x = 5 \longleftrightarrow x = 2^5$
Resolvemos el segundo miembro de la ecuación. Por lo cual el valor del argumento es: x= 32	$x = 2^5$ $x = 32$

Ejemplo. CASO 3, cuando la incógnita es la base:

Hallar la incógnita “x” en: **3.** $\log_x 16 = 2$

Aplicamos la definición del logaritmo.	$\log_x 16 = 2$ $\log_x 16 = 2 \longleftrightarrow 16 = x^2$
Resolvemos el segundo miembro de la ecuación, aplicando raíz cuadrada para eliminar el exponente 2. Por lo cual el valor de la base es: x= 4	$16 = x^2$ $\sqrt{16} = \sqrt{x^2}$ $\sqrt{4^2} = x$ $x = 4$

Ejercicios

Aplicando la definición del logaritmo, hallamos el valor de la incógnita en los siguientes ejercicios.

CASO 1	CASO 2	CASO 3
a) $\log_5 125 = 2$	b) $\log_5 x = 4$	c) $\log_x 25 = 2$
$\log_5 125 = x \longleftrightarrow \_\_\_ = \_\_\_^{x}$	$\log_{\_} x = \_\_\_ \longleftrightarrow x = \_\_\_$	$\log_{\_\_\_} = 2 \longleftrightarrow 25 = x^2$
$\_\_\_ = 5^{x}$	$x = 5^{4}$	$\_\_\_ = x^{2}$
$5^{\_} = 5^{\_}$	$x = \_\_\_$	$\sqrt{\_\_\_} = \sqrt{x^2}$
$x = \_\_\_$		$x = \_\_\_$

Ejercicios

En tu cuaderno, realizamos los siguientes ejercicios.

a) $\log_3 3 = x$	f) $\log_2 x = 5$	k) $\log_x 1000 = 3$
b) $\log_3 9 = x$	g) $\log_4 x = 3$	l) $\log_x 16 = 4$
c) $\log_6 216 = x$	h) $\log_3 x = 10$	m) $\log_x 25 = 2$
d) $\log_2 64 = x$	i) $\log_5 x = 4$	n) $\log_x 81 = 2$
e) $\log_2 256 = x$	j) $\log_{10} x = 2$	ñ) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

Logaritmos comunes

Un logaritmo común es aquel que tiene base 10 (b=10) por lo que de ahora en adelante utilizaremos este tipo de logaritmo en la resolución de ejercicios. El logaritmo común de base 10 no se anota, se sobreentiende.

$$\log_b a = c \quad ; \quad b = 10$$

$$\log a = \log_{10} a$$

Propiedades de los logaritmos

P1:	$\log_b 1 = 0$	El logaritmo de la unidad es 0.
P2:	$\log_b b = 1$	El logaritmo de la misma base es 1.
P3:	$\log_b b^x = x$	
P4:	$b^{\log_b x} = x$	

Observamos los siguientes ejemplos sobre la aplicación de propiedades de logaritmos.

$\log_b 1 = 0$	$\log_b b = x$	$\log_b b^x = x$	$b^{\log_b x} = x$
$\log_6 1 = 0$	$\log_5 5 = x$	$\log_4 4^{2m} = 2m$	$5^{\log_5 2} = 2$
$\log_{125} 1 = 0$	$\log_{3012} 3012 = 1$	$\log_{45} 45^3 = 3$	$s^{\log_s 2} = 2$
$\log_m 1 = 0$	$\log_{mnp^3} mnp^3 = 1$	$\log_{12d} 12d^{2y} = 2y$	$123^{\log_{123} 4y} = 4y$

Leyes de los logaritmos

$\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$	L1: Logaritmo de un producto.
$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$	L2: Logaritmo de un cociente.
$\log_b A^n = n \cdot \log_b A$	L3: Logaritmo de una potencia.
$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_b A$	L4: Logaritmo de una raíz.

Observamos los siguientes ejemplos sobre la aplicación de leyes de los logaritmos.

$\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$	1.	$\log_2 (n \cdot y \cdot z) = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z$	(L1)
	2.	$\log_5 5m = \log_5 5 + \log_2 m$	(L1)
		$= 1 + \log_2 m$	(P2)
	3.	$\log 20 = \log\ (2 \cdot 10)$	
		$= \log 2 + \log 10)$	(L1)
		$= \log 2 + 1$	(P2)
	4.	$\log_4 3a + \log_4 5b + \log_4 b + \log_4 2$	
		$= \log_4 (3a)\ (5b)\ (b)\ (2)$	
		$= \log_4 30\ ab^2$	
	5.	$\log_4 2 + \log_4 32 + \log_4 (2)(32)$	
		$= \log_4 64$	
		$= \log_4 64^3$	
		$= 3$	(P3)

$\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$	6. $\log_2 \frac{s}{t} = \log_2 s - \log_2 t$ (L2)
	7. $\log_7 \frac{49}{7} = \log_7 49 + \log_7 7$ (L2) $= \log_7 7^2 - \log_7 7$ (P2) $= 2 - 1$ (P3) $= 1$
	8. $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{50}$ (L2) $= \log_2 16$ $= \log_2 2^4$ $= 4$ (P3)

En los ejemplos anteriores 5,7 y 8 se pueden aplicar la ley de logaritmos de una potencia.

$\log_b A^n = n \cdot \log_b A$	9. $\log_4 2 = \log_4 32 - \log_4 (2)(32)$ $= \log_4 64$ $= \log_4 4^3$ $= 3 \log_4 4$ (L3) $= 3(1)$ (P2) $= 3$
	10. $\log_7 \frac{49}{7} = \log_7 49 + \log_7 7$ $= \log_7 7^2 - \log_7 7$ $= 2 \cdot \log_7 7 - 1$ (L3) $= 2 \cdot (1) - 1$ (P2) $= 2 - 1$ $= 1$
	11. $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{50}$ $= \log_2 16$ $= \log_2 2^4$ $= 4 \cdot \log_2 2^2$ (L3) $= 4 \cdot (1)$ (P2) $= 4$

Expandir expresiones logarítmicas

Las leyes de los logaritmos nos permiten representar el logaritmo de un producto como la suma de logaritmos, así mismo, el logaritmo de un cociente, como la diferencia de logaritmos. Este proceso se denomina expansión de una expresión logarítmica.

Ejemplo

Usando las leyes de los logaritmos, expandimos las siguientes expresiones:

1. $\log_3 (7x)$	**2.** $\log_5 (2m^4 n^5)$	**3.** $\log_2\left(\frac{kh}{\sqrt[4]{x}}\right)$

Solución

1. $\log_3 (7x)$

$\log_3 (7x) = \log_3 7 + \log_3 x$	L 1

2. $\log_5 (2m^4 n^5)$

$\log_5 (2m^4 n^5) = \log_5 2 + \log_5 m^4 + \log_5 n^5$	L 1
$= \log_5 2 + 4 \log_5 m + 5 \log_5 n$	L 3

3. $\log_2\left(\frac{kh}{\sqrt[4]{x}}\right)$

$\log_2\left(\frac{kh}{x}\right) = \log_2 (kh) + \log_2 \sqrt[4]{x}$	L 2
$= \log_2 k + \log_2 h - \log_2 x^{\frac{1}{4}}$	L 1
$= \log_2 k + \log_2 h - \frac{1}{4} \log_2 x$	L 3

Nota: Estimado participante, debes tener mucho cuidado en la aplicación de las leyes de los logaritmos, ya que existen algunas expresiones que al ser similares a las leyes se confunden y se aplican de manera errónea. A continuación, te mostramos los posibles casos en los que no debes incurrir:

1° El logaritmo NO se distribuye sobre la suma: $\log_3 (M+N) \neq \log_3 M + \log_b N$

2° El logaritmo NO se distribuye sobre el cociente: $\dfrac{\log_3 M}{\log_3 N} \neq \log_b M - \log_b N$

Por lo que te pedimos que consideres esta NOTA para evitar errores en la resolución de ejercicios.

Ejercicios

Aplicando las leyes de los logaritmos, desarrollamos las siguientes expresiones:

1. $\log_2 (4y)$	5. $\log_3 (mp)^{11}$	9. $\log_3 \frac{m^2}{np^4}$	13. $\log \sqrt[5]{\frac{a-1}{a+1}}$
2. $\log_m (12p)$	6. $\log (x\sqrt{t})$	10. $\log \sqrt[3]{3n^2}q^4$	14. $\log \frac{3x^2}{(x+1)^8}$
3. $\log_5 (a(a-2))$	7. $\log \sqrt{mnp} \quad = 1$	11. $\log \left(\frac{x^3}{y\sqrt[3]{z}}\right)$	15. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$
4. $\log_2 DE^3$	8. $\log_2 \left(\frac{x^3y^6}{z^8}\right)$	12. $\log \left(\frac{b^3(b^2-1)}{y\sqrt[3]{b^2+1}}\right)$	16. $\log \left(\frac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$

Combinar expresiones logarítmicas

Así como podemos expandir expresiones logarítmicas, también podemos combinar expresiones logarítmicas, es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como uno solo.

Ejemplo

Usando las leyes de los logaritmos, combinemos las siguientes expresiones:

1. $2 \log m + \frac{1}{2} \log (m+1)$	**2.** $3 \log x + \frac{1}{2} \log y - 2 \log^2 (y+2)$

Solución

1. $2 \log m + \frac{1}{2} \log (m+1)$

$2 \log m + \frac{1}{2} \log \ (m+1)$	
$= \log m^2 + \frac{1}{2} \log (m+1)$	
$= \log m^2 + \log (m+1)^{\frac{1}{2}}$	L 3
$= \log m^2 + \log \ \sqrt{(m+1)}$	
$= \log^2 (m \ \sqrt{(m+1)})$	L 1

2. $3 \log x + \frac{1}{2} \log y - 2 \log (y^2 + 2)$	
$= 3 \log x + \frac{1}{2} \log y - 2 \log (y^2 + 2)$	
$= \log x^3 + \log y^{\frac{1}{2}} - \log (y^2 + 2)^2$	L 3
$= \log (x^3 + \sqrt{y} - \log (y^2 + 2)^2$	L 1
$= \log \left(\frac{x \sqrt{y}}{(y^2 + 2)^2} \right)$	L 2

Ejercicios

Aplicando las leyes de los logaritmos, desarrolla las siguientes expresiones:

1.	$\log_3 5 + \log_3 3$	**5.**	$4 \log m \frac{1}{2} \ \log (m^2 + 1) + 2 \log (m \ - 1)$
2.	$\log \ 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$	**6.**	$\log (x \ + y) + \log (x \ + y) - 2 \log z$
3.	$\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$	**7.**	$\log 5 + 2 \log x - 3 \log (x^3 + 5)$
4.	$\log_5 (x^2 + 1) - \log_5 (x \ + 1)$	**8.**	$\log_a b + C \log_a d - r \log_a s$

Cambio de base

Para hallar el logaritmo de un número, en una base distinta de la usual de 10, se aplica la siguiente fórmula:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$$

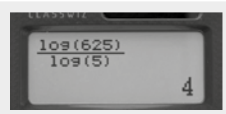
Con esta fórmula y utilizando la calculadora científica podemos hallar los valores que necesitemos.

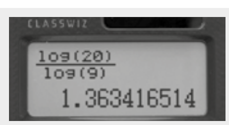
CALCULADORA CIENTÍFICA

Tecla específica para calcular logaritmos comunes.

Ejemplo

Aplicando la fórmula de cambio de base, transformemos la base de los siguientes logaritmos a base común (base 10) y con la ayuda de la calculadora hallemos el valor de:

1. $\log_5 625$	RESOLUCIÓN EN CALCULADORA
$\log_5 c = \dfrac{\log 625}{\log 5}$	
$= \dfrac{\log 625}{\log 5}$	
$\log_{20} 625 = 4$	

1. $\log_9 20$	RESOLUCIÓN EN CALCULADORA
$\log_9 20 = \dfrac{\log 20}{\log 9}$	
$\log_9 20 = \dfrac{\log 20}{\log 9}$ $\log_9 20 = \ 1,363416514$	
$\log_9 20 = 1,363416514$	

Ejercicios

Aplicando la fórmula de cambio de base y con el apoyo de la calculadora, calcular el valor de:

1.	$\log_3 225$	5.	$\log_{12} 864$
2.	$\log_7 12$	6.	$\log_6 532$
3.	$\log_5 2{,}78$	7.	$\log_{11} 2{,}5$
4.	$\log_{\sqrt{2}} 64$	8.	$\log_6 92$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial, es aquella en la que la incógnita se encuentra como exponente y el objetivo de la resolución de ecuaciones exponenciales, es hallar el valor de la incógnita.

Ejemplo $2^x = 7$

GUÍA PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES
1. Aislar la expresión exponencial en un miembro de la reunión. 2. Aplicar logaritmos a ambos miembros, luego utilice leyes de los logaritmos para "bajar el exponente". 3. Despeje la variable o incógnita.

Ejemplo

Resolvemos la siguiente ecuación:

1. $2^x = 7$	
$2^x = 7$	Ecuación dada.
$\log 2^x = \log 7$	Aplicamos log a cada miembro.
$x \log 2 = \log 7$	Aplicamos la L3, baja el exponente.
$x = \dfrac{\log 7}{\log 2}$	Despejamos "x".
$x \approx 2{,}807354922$	Resultado obtenido con la calculadora.

2. $3^{m+2} = 7$	
$3^{m+2} = 7$	Ecuación dada.
$\log 3^{m+2} = \log 7$	Aplicamos log a cada miembro.
$(m + 2)\log 3 = \log 7$	Aplicamos la L3, baja el exponente.
$m + 2 = \frac{\log 7}{\log 3}$	Despejamos "m".
$m = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$	Resultado obtenido con la calculadora.
$m \approx -0{,}2287562508$	Resultado obtenido con la calculadora.

3. $4 + 3^{5p} = 8$	
$4 + 3^{5p} = 8$	Ecuación dada.
$3^{5p} = 8 - 4$	Trasponemos +4 al segundo miembro
$\log 3^{5p} = \log 4$	Aplicamos logaritmos a ambos miembros.
$5p \log 3 = \log 4$	Aplicamos la L3, baja el exponente.
$5p = \frac{\log 4}{\log 3}$	Despejamos "p".
$p = \frac{\log 4}{5 \log 3}$	Trasponemos 5 al segundo miembro.
$p \approx 0{,}2523719014$	Resultado obtenido con la calculadora.

Ejercicios

Resolvemos las siguientes ecuaciones exponenciales, redondeando el resultado a cuatro lugares decimales (si es necesario):

1. $2^x = 32$	5. $3^{2x-1} = 5$
2. $5^x = -12$	6. $4(1+10^x) = 9$
3. $10^x = 25$	7. $8+6^{5x} = 16$
4. $2^x = 3$	8. $3^{\frac{x}{14}} = 0{,}1$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece afectada por un logaritmo. Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

$$\log_b a = c \longleftrightarrow a^b = c$$

$$\log_b x = \log_b y$$

$$x = y$$

GUÍA PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS
1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos. 2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación). 3. Despeje la variable.

Además, tenemos que comprobar las soluciones para verificar que no tenemos logaritmos nulos o negativos.

Ejemplo 1

Desarrollamos los siguientes ejercicios:

1. $\log_2(f+2)=5$	Ecuación.
$f+2=2^m$	Aplicamos la definición de logaritmo.
$f=32-2$	Despejamos la variable.
$f=30$	Resolvemos operaciones.

Ejemplo 2

Desarrollamos los siguientes ejercicios:

2. $4+3\log_2(2m)=16$	Ecuación.
$4+3\log_2(2m)=16$	Transponemos -16 al segundo miembro.
$3\log(2m)=16-4$	Transponemos 3 al segundo miembro.
$\log(2m)=\frac{1}{2}$	Simplificamos.

2. $\log_2(2m)= 4$	Aplicamos definición.
$2m= 10^4$	Resolvemos operaciones.
$m= 5000$	

Ejemplo 3

Desarrollamos los siguientes ejercicios:

3. $\log (y + 2)+ \log (y + 1) = 1$	Ecuación.
$\log [(y + 2)(y + 1)]= 1$	Aplicamos L1.
$y^2 + y - 2 = 10$	Aplicamos definición.
$y^2 + y -12 = 0$	Realizamos operaciones en el 1er miembro.
$(y + 4)(y - 3)= 0$	Transponemos 10 al 1er miembro.
$y = -4$ ó $y = 3$	Factorizamos.
	Planteamos respuesta.

Practicamos la resolución de problemas

Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log x + \log 20 = 3$	5. $\log x (3x - 5) = 3$
2. $\log x = 1- \log (2x - 3)$	6. $4 - \log (x - 3) = 3$
3. $\log_3 5x = \log_3 160$	7. $\log_3 (2 - x) = 3$
4. $\log_2 x = \log_2 (10 - x) = 4$	8. $\log_2 x + \log_3 (x - 3) = 2$

Aplicaciones de los logaritmos

El terremoto de Aiquile de 1976 fue de 5,8 grados sobre la escala de Richter, sin embargo, en 1998 el Terremoto de Aiquile alcanzó 6,8 grados en la escala de Richter ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de 1998 en relación al de 1976?

Utilizaremos el modelo intensidad de un terremoto:

$$R = \log \frac{a}{T} + B$$

R: Magnitud del terremoto en escala de Richter.

a: Amplitud.

B: Debilitamiento de la onda sísmica.

T: Periodo en segundos.

Para el terremoto de 1976.

$$R_2 = \log \frac{a_2}{T} + B$$

$$5{,}8 = \log \frac{a_1}{T} + B$$

Para el terremoto de 1998

$$R_1 = \log \frac{a_1}{T} + B$$

$$6{,}8 = \log \frac{a_2}{T} + B$$

RESOLUCIÓN	
$\left(\log \frac{a_1}{T} + B\right) - \left(\log \frac{a_2}{T} + B\right) = B_1 - B_2$	Realizamos la diferencia entre: R_1, R_2, para hallar la relación $\frac{a_1}{a_2}$
$\log \frac{a_1}{T} + B - \log \frac{a_2}{T} + B = 6{,}8 - 5{,}8$	Eliminamos signos de agrupación.
$\log \frac{a_1}{T} - \log \frac{a_2}{T} = 6{,}8 - 5{,}8$	Simplificamos términos opuestos
$\log \frac{a_1}{a_2} = 1$	Aplicamos L2.
$\frac{a_1}{a_2} = 1$	

RESPUESTA: Una diferencia de 1 en la escala de Richter a una razón de una potencia de 10, significa que el terremoto de 1998 fue 10 veces más fuerte que el terremoto de 1976.

Se desviaron 10 millones de dólares de ayuda internacional.

Cochabamba, Periódico Los tiempos, 22 de mayo de 2017

A 19 años del violento terremoto en los pueblos coloniales de Totora, Aiquile y Mizque, no se sabe a dónde fueron a parar al menos 10 millones de dólares de la ayuda internacional para los damnificados. El exalcalde de Totora, afirmó que la justicia está en deuda con los afectados del desastre.

El último informe del desvío y malversación de fondos para los afectados por el terremoto del 22 de mayo de 1998 data de 2002 cuando la directora de entonces de la Unidad Anticorrupción, anunció el inicio de procesos contra los responsables de la Prefectura de Cochabamba, el Ministerio de Defensa y la Dirección de Defensa Civil.

Ya vimos que el terremoto de 1998 fue 10 veces más catastrófico comparado con el de 1976, sin embargo, en 1998, se tuvo cooperación extranjera para mitigar los efectos del terremoto, sin embargo, hubo desvío de la ayuda internacional, ¿Cuál es tu criterio en relación a estos hechos, sabiendo que el terremoto fue el más fuerte que se haya registrado en la historia de Bolivia?

....

....

....

....

1. En una cartulina, elaboramos un cuadro comparativo de las escalas de Richter y la gravedad de cada uno, compártelo con tus compañeros y realiza un análisis comparando con el cuadro de terremotos que ocurrieron en Bolivia a lo largo del siglo XX.
2. Socializamos con nuestros compañeros/as 2 medidas que se deben ejecutar antes, durante y después de un terremoto, para ello debemos indagar en internet o en libros.

3. VALORACIÓN

¿Consideramos importante el estudio de los logaritmos como una herramienta para comprender fenómenos naturales y del diario vivir?

....

....

....

....

Determinamos el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

1. $\log 4x = 3\log 2 + 4\log 3$	4. $\log (x + 1) + \log x = \log (x + 9)$
2. $\log (2x - 4) = 2$	5. $\log (x + 3) + \log 2 - \log (x + 2)$
3. $4\log (3 - 2x) = -1$	3. $\log (x^2 + 15) = \log (x + 3) + \log x$

4. PRODUCCIÓN

- Realizamos una investigación sobre otras aplicaciones de los logaritmos.
- Redactamos un informe mencionando qué propiedades son las más utilizadas y cuales utilizarías en tu contexto.

UNIDAD 6
PROGRESIONES

1. PRÁCTICA

Ahora estudiamos a las progresiones, pero antes respondemos algunas preguntas:

Si un participante se propone ahorrar el primer día de clases 50 centavos, el segundo día de clases 1 boliviano, el tercer día 1,50 bolivianos, hasta que termine el semestre de Aprendizajes Complementarios. Considerando que el semestre tiene 100 días de clases, ¿Cuánto de dinero habrá ahorrado al terminar el semestre?

¿Consideras que los pagos que se realizan a los bancos, por concepto de amortización del crédito es justo? ¿Qué experiencias te tocó vivir con los bancos a ti o a tú familia?

2. TEORÍA

Progresiones

Intuitivamente podemos describir una sucesión como una lista de objetos, eventos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido. Cada objeto de una sucesión se llama término.

Progresión aritmética

Es una sucesión de números, donde a partir del primer número se obtienen los restantes sumando al anterior un número constantes denominado diferencia (d) de la Progresión Aritmética (P.A.).

$$\boxed{\text{P.A.: } a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots , a_n.}$$

- Los números $\mathbf{a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n;}$ se llaman términos de la sucesión.
- El subíndice indica el lugar que el término ocupa en la sucesión.
- El término general $\mathbf{a_n}$ es una expresión matemática que nos permite determinar cualquier término de la sucesión.

Término general

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 4d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n - 2)d) + d = a_1 + (n - 1)\ d$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Donde:

a_n:	Término General
a_n:	Primer Término
n:	Número de Término
d:	Diferencia

De la fórmula del término general podemos obtener las siguientes fórmulas.

$a_1 = a_n - (n - 1)\ d$	$d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$; $d = a_2 - a_1$	$n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1$
Primer Término	Diferencia	Número de términos

Ejemplo 1

Si el primer término es 2 y la diferencia es 3, determinar la sucesión aritmética:

DATOS	SOLUCIÓN
$a_1 = 2$ $a = 3$ $a_n = ?$	P.A.: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$. P.A.: 2, (2+3), (2+3+3), (2+3+3+3), ... , a_n. P.A.: 2, 5, 8, 11 ...
La progresión aritmética es: 2, 5, 8, 11, … , es una progresión CRECIENTE	

Ejemplo 2

Determinamos los primeros 7 términos y el término 200 de la progresión aritmética: 20,12, …

DATOS	SOLUCIÓN
$a_1 = 20$ $a_2 = 12$ $n = 200$ $d = ? = -8$ $a_n = a_{200} = ? = -1572$	P.A.: 2, 5, 8, 11 ... $d = a_2 - a_1$ $d = 12 - 20$ $d = -8$ Construimos los 7 primeros términos: P.A.: 20, 12, (12 - 8), (12 - 8 - 8), (12 - 8 - 8 - 8), ... P.A.: 20, 12, 4, -4, -12, -20, -28 Hallamos el término 200 de la PA, ósea el a_{200} : $a_n = a_1 (n - 1) d$ $a_{200} = 20 (200 - 1) (-8)$ $a_{200} = 20 + (199) (-8)$ $a_{200} = 20 - 1592$ $a_{200} = - 1592$ Es una progresión aritmética DECRECIENTE
La progresión aritmética es: 2, 5, 8, 11, … , es una progresión CRECIENTE	

Ejercicio

Determinamos los primeros 10 términos y el término 35 de las progresiones aritméticas:

DATOS	SOLUCIÓN
a_1 = ... a_2 = ... n = ... d = ? = ... a_n = ...	P.A.: 3, 5, ... $d = a_2 - a_1$ d = _________ d = _________ Construimos los 10 primeros términos: P.A.: ____, ____, _________, _________, _________, _________, ... P.A.: ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____ Hallamos el término 35 de la PA, ósea el a_{35}: $a_n = a_1$ (n - 1) d a_{35} = ______________________ a_{35} = ______________________ a_{35} = ______________________ a_{35} = _____________

Ejercicio

Hallamos el:

9° término de la PA: 7, 11, 15, ...
12° término de la PA: 5, 10, 15, ...
32° término de la PA: 8, 12, 16, ...
47° término de la PA: 7, 11, 15, ...
29° término de la PA: 12, 8, 4, ...
13° término de la PA: -6, -2, 2, ...

Ejemplo

Hallamos la diferencia en la siguiente Progresión Aritmética: 3, ..., 8, en el que 8 es el 6° término:

DATOS	SOLUCIÓN
$a_1 = 3$ $a_2 = 8$ $n = 6$ $d = ? = 1$	P.A.: 3, ____, ____, ____, ____, 8 Hallamos la diferencia: $d = \frac{a_2 - a_1}{n - 1}$ $d = \frac{a_2 - a_1}{n - 1}$ $d = \frac{5}{5}$ $d = 1$ Construimos la progresión aritmética: P.A.: 3, (3 + 1), (3 + 1 + 1), (3 + 1 + 1 + 1), ..., 8 P.A.: 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Ejercicio

Hallamos la diferencia en la siguiente progresión aritmética: 12, ..., 66, en el que 66 es el 10° término:

DATOS	SOLUCIÓN
a_1 = __________ a_2 = __________ n = __________ d = ? = __________	P.A.: ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____ Hallamos la diferencia: $d = \frac{a_2 - a_1}{n - 1}$ d = __________ d = __________ d= __________ Construimos la progresión aritmética: P.A.: ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____

Ejemplo

Ejemplo 3
Progresión: 3, 5, 7, 9, 11, …, a_{12}
El primer término es: $a_1 = 3$
El número de términos es: d = 2
El término general es: n = 12
El término general es: $a_{12} = a_1 + (n - 1)\ d$ $a_{12} = 3 + (12 - 1)\ 2$ $a_{12} = 25$

Ejemplo 3
Progresión: 7, 5, 3, 1, …, a_{24}
El primer término es: $a_1 = 7$
El número de términos es: d = -2
El término general es: n = 24
El término general es: $a_{24} = a_1 + (n - 1)\ d$ $a_{24} = 7 + (24 - 1)\ (- 2)$ $a_n = 7 - 46$ $a_n = - 39$

Ejercicios para reforzar lo aprendido

Hallamos el término indicado:

EJERCICIO 1
Progresión: 0, -2, -4, -6, …, a_{32}
El primer término es: $a_1 =$ ________
El número de términos es: d = ________
El término general es: n = ________
El término general es:

EJERCICIO 2
Progresión: 14, 7, 0, -7, …, a_8
El primer término es: $a_1 =$ ________
El número de términos es: d = ________
El término general es: n = ________
El término general es:

Resolución de problemas

1. El Centro de Educación Alternativa Don Bosco compra 10 computadoras para la especialidad de Sistemas Computacionales, cada computadora tiene un costo de Bs. 7000. Si cada año se deprecia en Bs. 510 ¿Cuánto será el valor de una computadora después de 6 años?

DATOS	SOLUCIÓN
PA: 510, 1020, 1530, … a_1 = 510 d = 510 n = 6 d = ?	$a_n = a_1 + (n - 1)\ d$ $a_6 = 510 + (6 - 1)\ 510$ $a_6 = 510 + (6 - 1)\ 510$ $a_6 = 3060$ Respuesta: al cabo de 6 años se deprecia Bs.3060.- por lo que la computadora al 6to año tendrá un valor de Bs. 3940.-

2. Juan, un participante del CEA CEITA GRAN CHACO, obtiene un trabajo con un salario de Bs. 3000 le prometieron que cada año le aumentarían Bs 600.- Calcular, ¿Cuál será su salario después de 10 años de trabajo?

DATOS	SOLUCIÓN
PA: 3000, 3600, 4200, …, a_{10} a_1 = ---------- d = ---------- n = ---------- d = ?	$a_n = a_1 + (n - 1)\ d$

Suma de N-Términos de una progresión aritmética

La fórmula para la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$s_n = \left(\frac{a_2 - a_n}{2}\right) \cdot n$$

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Progresión: 2, 4, 6, 8, 10, 12.	Progresión: 1, 4, 7, 10, 13, 16.
Observamos que la suma de los términos equidistantes es la misma: 2 + 12 = 14 4 + 10 = 14 6 + 8 = 14	Observamos que la suma de los términos equidistantes es la misma: 1 + 16 =17 4 + 13 = 17 7 + 10 = 17

Suma de los n términos:	
Hay 6 términos El primero es: 2 El último es: 12	$S_6 = \frac{12 - 12}{12} \cdot 6$ $S_6 = 42$

Suma de los n términos:	
Hay 6 términos El primero es: 1 El último es: 16	$S_6 = \frac{1 - 16}{2} \cdot 6$ $S_6 = 51$

Ejercicios para reforzar lo aprendido

EJERCICIO 1

Progresión: : 12, 17, 22, 27, …, a_{15}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:	
Hay ______ términos Hay términos es: ------- El último es:	$S_n =$

EJERCICIO 2

Progresión: 512, 412, 312, 212, …,a_{10}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:	
Hay ______ términos Hay términos es: ------- El último es:	$S_n =$

EJERCICIO 3

Progresión: : 6, 13, 20, 27, …, a_{15}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:	
Hay ______ términos Hay términos es: ------- El último es:	$S_n =$

EJERCICIO 4

Progresión: 2,6,10,14,18,.... ,a_{10}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:	
Hay ______ términos Hay términos es: ------- El último es:	$S_n =$

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica, es una sucesión de números reales en la que cada término (menos el primero), se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija r, llamada razón de la progresión. La razón se obtiene al hacer el cociente entre dos términos consecutivos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \ldots\ldots\ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

El término general de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y la razón es r es:

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

Donde:

a_n = Término enésimo.
r = Razón.
n = Número de términos.
a_1 = Primer término.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Progresión: 1,2, 4,8,16,32... r = 2 ;	Progresión: 256, 64, 16, 4, ... r=-2
Hallar el término 12	Hallar el término 8
Solución: $a_n = a_1 * r^{n-1}$ $a_{12} = 1 * 2^{12-1}$ $a_{12} = 1 * 2^{11}$ $a_{12} = 2048$	Solución: $a_n = a_1 * r^{n-1}$ $a_8 = 256 * (-2)^{8-1}$ $a_8 = 256 * (-2)^{7}$ $a_8 = 256 * (-128)$ $a_8 = -32768$
La razón es: r = 2	La razón es: r = -2
La progresión es: CRECIENTE	La progresión es DECRECIENTE

Ejercicios

Hallamos el:

- 9° término de la PG: 3,6,12,…
- 12° término de la PG: 8,4,2 ,…
- 32° término de la PG: 3,15,45,…
- 47° término de la PG: 7,35,175,…
- 29° término de la PG: 2,8,32,…
- 13° término de la PG: –6,–18,–36,…

Suma de N-Términos de una progresión geométrica

La fórmula para la suma de los **n** primeros términos de una progresión geométrica es hallar el:

$$s_n = a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{ó} \quad s_n = \frac{a_n\ r - a_1}{r - 1}$$

Ejemplo 1		EJERCICIO 1	
Progresión: 3, 6, 12,24, 48, 96, 192.		Progresión: 2, 8, 32, 128, 512, 2048.	
Suma de los n términos:		Suma de los n términos:	
Hay 7 términos El primero es: 3 El último es: 192 La razón es: 2	$s_7 = \frac{192\ (2) - 3}{1}$ $s_n = 384 - 3$ $s_n = 381$	Hay 6 términos El primero es: 1 El último es: 16	$s_7 = \frac{2048\ (4) - 2}{4 - 1}$ $s_7 = \frac{8190}{3}$ $s_n = 2730$

Suma de N-Términos de una progresión geométrica

EJERCICIO 1

Progresión: : 4, 20, 100, 500, …,a_7

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:

Hay ______ términos

Hay términos es:

El último es:

La razón es:

S_n =

EJERCICIO 2

Progresión: 7, 28, 112, 448, …,a_{10}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:

Hay ______ términos

Hay términos es:

El último es:

S_n =

EJERCICIO 3

Progresión: 13, 39, 117, …,a_{23}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:

Hay ______ términos

Hay términos es:

El último es:

S_n =

EJERCICIO 4

Progresión: 2, 6, 18, 54, 162, …, a_{32}

Encontrar el término enésimo

Suma de los n términos:

Hay ______ términos

Hay términos es:

El último es:

S_n =

Resolución de operaciones

A. Hallamos el término enésimo de la progresión geométrica:

a) 81, 27, 9, 3, ..., a_1

b) 64, 32, 16, 8, ..., a_8

c) 4096, 1024, 256, 64, ..., a_8

d) 27, 81, 243, 729, ..., a_{35}

B. Hallamos la suma n-términos de la progresión geométrica:

a) 243, 81, 27, 9, ..., a_{23}

b) -81, -243, -729, -2187, ..., a_{15}

c) -7, -35, -175, -1750, …

d) -9, -36, -144, -576, ...

3. VALORACIÓN

¿Para qué nos sirven las progresiones aritméticas en nuestro diario vivir?

....

¿Para qué nos sirven las progresiones geométricas en nuestro diario vivir?

....

....

4. PRODUCCIÓN

- Realizamos una serie de materiales didácticos que veamos convenientes para comprender el tema.
- Efectuamos una propuesta de actividad donde puedas aplicar las progresiones y como esto se visibiliza en la vida.
- Realizamos un informe para evidenciar otras aplicabilidades de las progresiones en la realidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Aufman, Richard N.;Lockwood, Joanne S. (2013). Álgebra Elemental. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.México.
- Baldor, A. (1997). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural, Ódice América. S.A.
- Cadena, F. R. (2017). *Matemática 3 de Secundaria*. Productiva Comunitaria. La Paz. Multigraf.
- Chungara, Victor Castro. (2017) Álgebra Básica. Edición Actualizada.
- Demana F, col. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico y algebraico*.
- Earl, W. Swokowsky; Jeffery, A. Cole. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Editorial Thomson. Duodécima edición. México.
- Mikenberg, Irene F. (2013). *Álgebra e Introducción al Cálculo*. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Penney, E. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica*. Prenice Hall. Cuarta edición.
- Rico, Carlos Marcial. (2012). *Álgebra*. Red Tercer Milenio. Primera Edición. México.
- Rojo, Armando O. (1995). *Álgebra II*. Décima tercera edición. Buenos Aires
- Soto, Efrain Apolinar. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Tercera edición. México.
- Studer M. (1995). Precálculo: *Álgebra, Trigonometría y Geometría analítica*. Cultura Moderna.
- Barnett, R. (1992). Precálculo: *Álgebra, Geometría analítica y Trigonometría*. Limusa SaDeC.v.
- Warez, A. (2012). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. ABooksGratis.
- Zill, Dennis; Dewar Jacquelinne. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Editorial McGrawHill. Tercera edición. México.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN
ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Whatsapp a nivel nacional:

591 - 71550970
591 - 71530671

Correo electrónico
informacion@minedu.gob.bo

@minedubol

@minedu_bol

minedubol

Ministerio de Educación - Oficial

MinEduBol

Av. Arce #2147
Tel. (591-2) 2681200
www.minedu.gob.bo
La Paz - Bolivia