ÁREA:

MATEMÁTICA

6to

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Texto de aprendizaje. 6to año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Olga Marlene Tapia Gutiérrez
Directora General de Educación Primaria
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria
Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Gloria Velazco Gomez

DIAGRAMACIÓN:
Ernesto Delfin Rodrigo Lira

Depósito legal:
4-1-21-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2024). Texto de aprendizaje. 6to año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

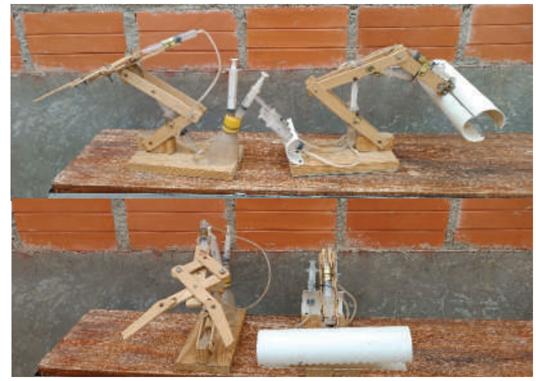
En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

GEOMETRÍA ANALÍTICA, LA LÍNEA RECTA

PRÁCTICA

Mario debe realizar su proyecto por lo que decide armar un brazo robótico cuyo funcionamiento sea hidráulico.



Para la construcción de este proyecto requiere de conocimientos sobre rectas paralelas y perpendiculares, utilizando el concepto de ángulo de inclinación.

En esta práctica abordamos las características del brazo hidráulico, observando las particularidades de las rectas planificando las trayectorias de estas, entre los puntos de inicio y final, en el plano cartesiano y el espacio de las articulaciones del brazo hidráulico.

Actividad

De acuerdo a la lectura, respondemos:

- ¿Qué conceptos se aplica en la construcción de un brazo o robot hidráulico?
- ¿Cómo armarías tu brazo hidráulico utilizando las posiciones de la línea recta?
- Analizamos en qué otras áreas se utiliza los conceptos de la línea recta.
- ¿Qué operaciones se utilizan para saber los movimientos que debe realizar el brazo hidráulico, para realizar un movimiento?

TEORÍA

ALGUNAS DEFINICIONES DE LA LÍNEA RECTA

- Es la línea que sus puntos intermedios hacen sombra a sus extremos (Platón, 427-347).
- Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos (Leibniz, 1646-1716).
- Es el camino más corto entre dos puntos (Legendre, 1752-1833)
- Es la línea que, trazada de un punto a otro no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazar entre esos dos puntos (Simpson, 11710-1761)
- La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados (Fourier, 1768-1830)

1. Definición y antecedentes

En la geometría euclidiana establece una serie de axiomas y postulados que parte del análisis del puntos, líneas, plano y axioma. Empezamos con la recta o línea que se extiende en la misma dirección, por lo que tiene una sola dimensión y contiene una cantidad infinita de puntos. Esta línea también puede describirse como un continuo de puntos que se extienden en una dirección.

Es una de las entidades geométricas básicas, junto con los puntos y los planos. Se consideran conceptos a priori porque su definición sólo es posible a partir de la descripción de las características de otros factores similares. Un ejemplo de las dificultades para determinar una línea a partir de puntos es la llamada paradoja de la dicotomía de Zenón, que ilustra la desaparición de una línea al dividirla en puntos porque entonces no existe el concepto de unir esa línea a partir de los puntos donde se encuentra la unión de los dos puntos ya existentes.

Desde el punto de vista analítico, una línea recta es una ecuación lineal o de primer grado con dos variables. La representación gráfica de este lugar geométrico, cuya ecuación es de primer grado en dos variables, es una línea recta.

Es decir, la **línea recta** es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor de la pendiente resulta siempre constante.

La línea recta:

- Analíticamente es una ecuación lineal en dos variables **x, y**.
- Queda determinada completamente si se conocen:
- Dos de sus puntos.
- Un punto y su pendiente.

Al respecto, desde la pendiente de la recta se puede determinar el ángulo de inclinación con respecto al eje horizontal.

Es así que las rectas pueden ser:

a) Horizontales

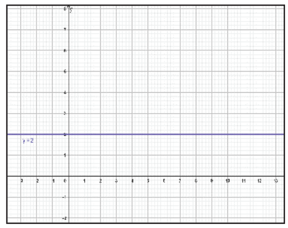
b) Verticales

c) Con pendiente positiva y con pendiente negativa.

Ejemplos:

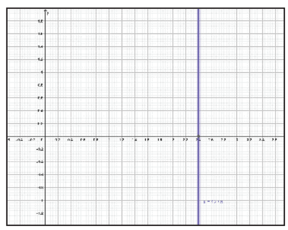
Grafica las rectas:

$$y = 2$$



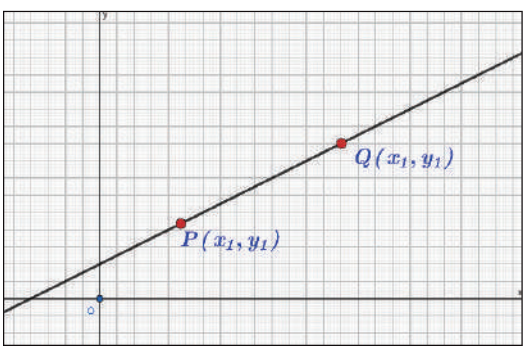
Esta gráfica no forma ningún ángulo, es decir si realizamos el trazo en un plano cartesiano, entonces cualquier recta que sea paralela al eje “x” es horizontal, y por tanto su pendiente es cero.

$$x = \frac{12}{5}$$



Al trazar esta gráfica, se obtiene una recta paralela al eje “y”, y desde la definición formal diremos que su pendiente es infinita.

2. Ecuaciones de la recta



Todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ están en una línea recta, para determinar la ecuación de dicha recta se necesita dos puntos de ella o bien un punto y la pendiente, situaciones que veremos a continuación.

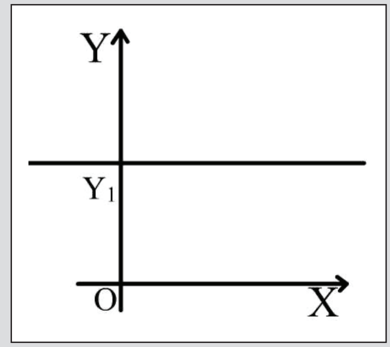
Una línea recta, queda perfectamente determinada si se conocen dos condiciones, las cuales son:

- Conociendo dos de sus puntos.
- Conociendo un punto y su dirección.

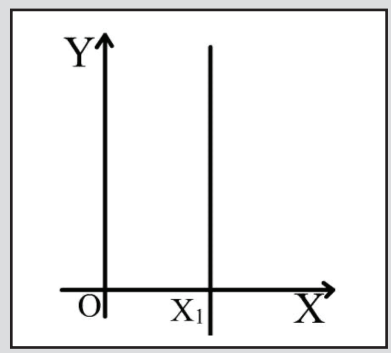
CONDICIONES

Si la recta es paralela al eje “X”, , y su ecuación es: $m = 0$

$$y = y_1$$

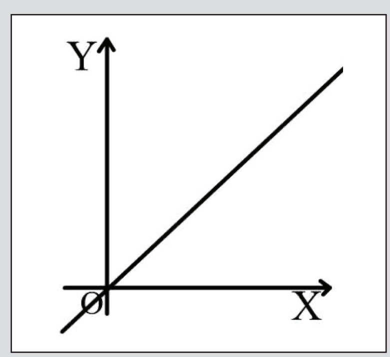


Si la recta es paralela el eje “Y”, $m = \infty$ *y su ecuación es:* $x = x_1$



Diagonal del I y III c. $m = 1$ *y su ecuación es:*

$$x = y$$



Actividad

Graficamos las rectas cuya pendiente es cero.

1) $y = -3$

2) $y = 4$

3) $y = -6$

4) $y = \frac{8}{3}$

5) $y = -0.5$

Graficamos las rectas cuya pendiente es infinita.

1) $x = 1$

2) $x = -10$

3) $x = 7$

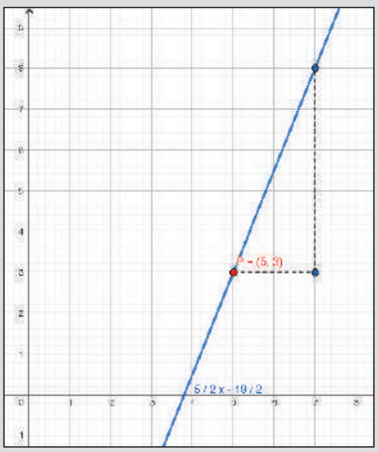
4) $x = -\frac{21}{6}$

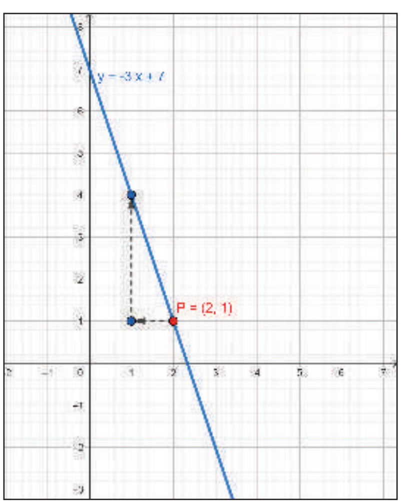
5) $x = \frac{7}{3}$

TRAZANDO UNA RECTA: PUNTO - PENDIENTE

Graficando la recta que pasa por el punto $P(5,3)$ y cuya pendiente es: $m = \frac{5}{2}$

Se localiza el punto $P(5,3)$ en el plano. A partir de este punto, se avanza 2 unidades hacia la derecha, después 5 unidades hacia arriba. En seguida, se procede a trazar la recta que pasa por $P(5,3)$, a la cual se le va calcular la ecuación.

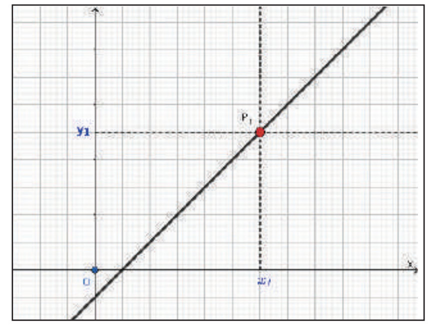




a. Ecuación de la recta: punto pendiente

Sea la recta AB de pendiente "m" que pasa por el punto fijo $P_1(x_1,y_1)$ y $P(x,y)$ es otro punto de coordenadas desconocidas que se localiza sobre la misma recta, entonces la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$. Quitando el denominador, se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Esta forma de la ecuación de la recta es llamada **ecuación punto – pendiente**, pues se obtiene a partir de la pendiente y un punto de la recta.

Ejemplos:

1) Hallar la ecuación de aquella recta que pasa por el punto $P(5,3)$ y tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$

$P(5,3)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$x_1 = 5$	$y - 3 = \frac{5}{2}(x - 5)$
$y_1 = 3$	$y - 3 = \frac{5}{2}x - \frac{25}{2}$
$m = \frac{5}{2}$	$y = \frac{5}{2}x - \frac{25}{2} + 3$
	$y = \frac{5}{2}x - \frac{19}{2}$

2) Encontrar la ecuación de aquella recta que pasa por $P(2,1)$ y tiene pendiente $m=-3$.

$P(2,1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$x_1 = 2$	$y - 1 = -3(x - 2)$
$y_1 = 1$	$y - 1 = -3x + 6$
$m = -3$	$y = -3x + 7$

Actividad

Obtenemos la ecuación de aquella recta que pasa por el punto y pendiente dados.

1) $P(3,4)$ $m = 2$

2) $P(-8,5)$ $m = \frac{3}{2}$

3) $P(-3,7)$ $m = 1$

4) $P(4,-3)$ $m = \frac{7}{2}$

5) $P(-7,-2)$ $m = 3$

6) $P(8,-3)$ $m = 1$

7) $P(9,3)$ $m = 2$

b. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Esta ecuación hace referencia al quinto postulado de Euclides que aparece en "Los Elementos" del mismo autor: *dos puntos determinan una recta*.

La recta AB que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y siendo $P(x,y)$ otro punto de la recta, tiene por ecuación:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \vee \qquad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad x_2\neq x_1$$

Ejemplos:

Determinar la ecuación de aquella recta que pasa por los puntos dados.

1) $A(4,3)$ y $B(1,-2)$

$A(4,3)$

$B(1,-2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{-2-3}{1-4}(x-4)$$

$$y-3=\frac{-5}{-3}(x-4)$$

$\Rightarrow \ 3(y-3)=5(x-4)$ por lo tanto $5x-3y-11=0$

2) $O(-2,-3)$ y $P(4,2)$

$O(-2,-3)$

$P(4,2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-(-3)=\frac{2-(-3)}{4-(-2)}[x-(-2)]$$

$$y+3=\frac{5}{6}(x+2)$$

$\Rightarrow \ 6(y+3)=5(x+2)$ por lo tanto $5x-6y-8=0$

3) $A(-4,1)$ y $B(5,-5)$

$A(-4,1)$

$B(5,-5)$

$$y-1=\frac{-5-1}{5-(-4)}[x-(-4)]$$

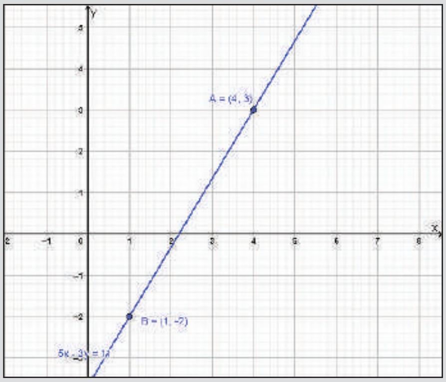
$$y-1=\frac{-6}{9}(x+4)$$

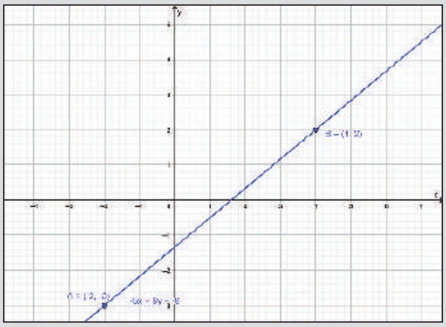
$\Rightarrow \ 2x+3y+5=0$ por lo tanto $2x+3y+5=0$

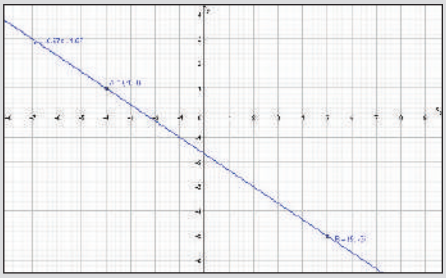
APUNTES

"m" es la pendiente

$$\boxed{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$







Actividad

Determinamos la ecuación de rectas que pasan por los puntos:

1) $A(-4,-3)$ y $B(0,5)$
2) $A(9,3)$ y $B(-2,-6)$
3) $O(7,7)$ y $B(-1,2)$
4) $R(-8,9)$ y $S(7,2)$
5) $A(3,2)$ y $B(-2,1)$
6) $A(5,6)$ y $B(2,3)$
7) $O(-5,4)$ y $B(2,-1)$
8) $R(6,-2)$ y $S(-6,-5)$
9) $S(2,4)$ y $T(5,-2)$

c. Ecuación de la recta abscisa - ordenada en el origen

Sea $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos de una recta determinada sobre los ejes "X" y "Y"; es decir, sus intersecciones con los ejes coordenados, entonces $A(a,0)$ y $B(0,b)$ son dos puntos de la recta. Además, para obtener la ecuación de una recta, cuando se conocen los segmentos que intersectan los ejes coordenados se reduce a calcular la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, esto es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \quad \rightarrow \quad y - 0 = -\frac{b}{a}(x-a)$$

$$ay = -bx + ab \quad \text{por lo tanto} \quad bx + ay = ab \quad \| \div ab$$

$$\therefore \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

1) A(6,0) y B(0,5)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1 \qquad //\bullet 30$$

$$5x + 6y = 30$$

2) Encontrar los puntos de intersección de la recta con los ejes.

$$5x + 8y - 6 = 0$$

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5}{6}x + \frac{8}{6}y = \frac{6}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

Los puntos de intersección con los ejes son: $\left(\frac{6}{5},0\right)$ y $\left(0,\frac{3}{4}\right)$

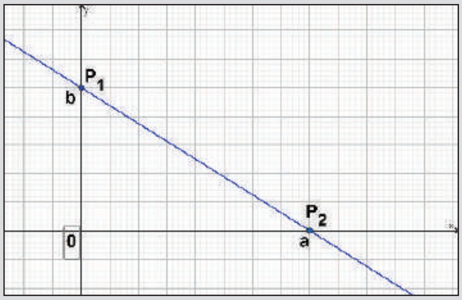
d. Forma general de la ecuación de una recta

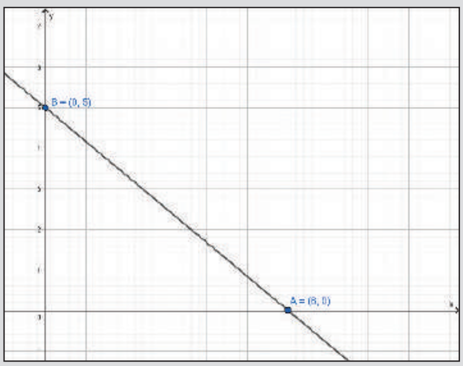
La ecuación de una recta en su forma general, viene expresada como: $(Ax+By+C=0)$; A, B y C son números reales

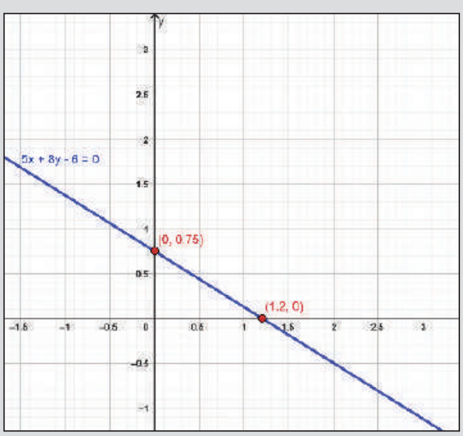
Despejando y de la ecuación general: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Toma la forma $y = mx + b$ $\quad$ *Por* tanto $\begin{cases} m = -\frac{A}{B} \\ b = -\frac{C}{B} \end{cases}$

GRÁFICOS







Actividad

Determinamos la ecuación de rectas que pasa por los puntos:

- $A(-4,0)$ $\quad B(0,5)$
- $A(9,0)$ $\quad B(0,-6)$
- $A\left(\frac{3}{4},0\right)$ $\quad B\left(0,\frac{15}{4}\right)$
- $A(5,0)$ $\quad B(0,-5)$

- Encontramos los puntos de intersección de la recta $3x - 5y - 15 = 0$ con los ejes
- Encontramos los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ con los ejes.
- Encontramos los puntos de intersección de la recta $6x - 5y - 30 = 0$ con los ejes.
- Encontramos los puntos de intersección de la recta $3x - 4y - 24 = 0$ con los ejes.

e. Forma normal de la ecuación de una recta

Una recta tiene como ecuación normal a: $(x\cos+\omega+ysen\omega-\rho=0)$

Donde:

ρ es la distancia de la recta l al origen y siempre es positiva

ω es ángulo formado por el semieje positivo x y ρ, $0\le\omega<360°$

$$x\cos\omega+ysen\omega-\rho=0$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que dista 3 unidades del origen, si la recta normal tiene un ángulo de inclinación de $\frac{7\pi}{6}$

Como: $\omega=\frac{7\pi}{6}=210°$ y $\rho=3$; reemplazando los valores en.

$$x\cos\omega+ysen\omega-\rho=0$$

$x\cos\frac{7\pi}{6}+ysen\frac{7\pi}{6}-3=0$ pero $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $sen\frac{7\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

$x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+y\left(-\frac{1}{2}\right)-3=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-3=0$

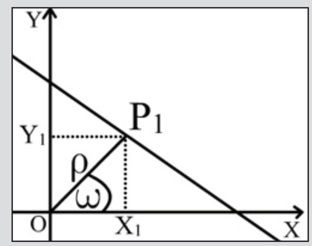
DEMOSTRACIÓN

$$x_1=\rho\cos\omega$$
$$y_1=\rho sen\omega$$

pendiente de l

$$m=-\frac{1}{tg\omega}=-\frac{\cos\omega}{sen\omega}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-\rho sen\omega=-\frac{\cos\omega}{sen\omega}(x\rho\cos\omega)$$
$$ysen\omega-\rho sen^2\omega=-x\cos\omega+\rho\cos^2\omega$$
$$x\cos\omega+ysen\omega-\rho\underbrace{\left(sen^2\omega+\cos^2\omega\right)}_{1}=0$$
$$x\cos\omega+ysen\omega-\rho=0$$



Actividad

- Hallamos la ecuación de la recta que dista 4 unidades del origen, si la recta normal tiene un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{3}$
- Hallamos la ecuación de la recta que dista 7 unidades del origen, si la recta normal tiene un ángulo de inclinación de $\frac{3\pi}{2}$
- La ecuación $x\cos 45°+ysen45°-1=0$ exprésala en su forma general.
- La ecuación $x\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+ysen\left(\frac{5\pi}{4}\right)-1=0$ exprésala en su forma general.
- La ecuación $x\cos 120°+ysen120°-1=0$ exprésala en su forma general.

VALORACIÓN

Una manera de determinar una recta es conociendo su pendiente (o ángulo de inclinación) y un punto de ella. La línea recta es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera, el valor de la pendiente “m”, es el más aplicable en la construcción, edificación de viviendas o edificios, donde se debe tomar en cuenta las condiciones del medio ambiente de la zona donde se construirá el edificio o vivienda.

¿Cómo se emplea el concepto de pendiente en los techos de las viviendas?

¿En qué situaciones de la vida se utilizan las rectas y sus pendientes como una herramienta importante para la solución de problemas?

¿Cómo se calcula la pendiente en un techo?

PRODUCCIÓN

- Investigamos y elaboramos un informe sobre la aplicación de la línea recta en construcciones.
- Para modelizar tu investigación, utilizamos el GeoGebra que fortalezcan tu investigación.
- Construimos una maqueta con la aplicación de tu investigación.
- Investigamos sobre el diseño y construcción de rampas para sillas de ruedas que se deben construir en los ingresos a instituciones como entidades financieras, por ejemplo, ¿cuál debe ser la inclinación de la recta para que el usuario pueda ingresar al recinto?

APLICACIONES DE LA LÍNEA RECTA

PRÁCTICA

Los jóvenes y señoritas de la promoción están realizando el aseo de su curso, para lo cual están llenando agua de un grifo. Llenan agua en un recipiente de forma cilíndrica, de aproximadamente 100 litros, se midieron los niveles del agua en determinados intervalos de tiempo, los datos recolectados se muestran en la siguiente tabla, el tiempo inicial es cuando el nivel estaba a 20 centímetros.

Tiempo (x) (minutos)	Nivel (y) (centímetros)
0	20
2	29
4	38

Actividad

Respondemos:

- ¿Cuál es el modelo matemático o ecuación que nos permite predecir el nivel del agua en cualquier tiempo?
- ¿Cuál será el nivel de agua en el tanque a los 12 minutos?
- ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar un recipiente cilíndrico de 80 cm de altura?

TEORÍA

PENDIENTE DE UNA RECTA

Es la inclinación de una recta con respecto a la horizontal.

A lo largo de la historia muchos otros pensadores han dado su definición:

Es la línea cuyos puntos intermedios hacen sombra a sus extremos. (Platón, 427-347).

Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos. (Leibniz, 1646-1716).

Es el camino más corto entre dos puntos. (Legendre, 1752-1833).

La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados. (Fourier, 1768-1830).

Recordemos algunos conceptos previos

Distancia entre dos puntos: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos:

$$m=tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ecuación de la recta: $ax+by+c=0$

Formas de la ecuación de la recta

- Punto-pendiente: $y-y1=m(x-x1)$
- Recta que pasa por dos puntos: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
- Recta abscisa y ordenada en el origen: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
- Forma general de la ecuación de una recta: $Ax+By+C=0$

  Donde $m=-\frac{A}{B}$ y $b=-\frac{C}{B}$
- Forma normal de la ecuación de una recta: $x\cos\omega+ysen\omega-\rho=0$

1. Aplicaciones de la recta en su forma normal

Una recta escrita en su forma:

$$General \text{ es}: Ax+By+C=0$$
$$Normal \text{ es}: x\cos\omega+ysen\omega-\rho=0$$

Sus coeficientes son proporcionales

$$\cos\omega=kA \ ① \qquad sen\omega=kB \ ② \qquad -\rho=kC \ ③$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\omega}{A}=\frac{sen\omega}{B}=\frac{-\rho}{C}=k$$ "k" es constante

Elevando al cuadrado ① y ② y sumando miembro a miembro

$$\cos^2\omega+sen^2\omega=k^2\left(A^2+B^2\right)$$

$$\Rightarrow 1=k^2\left(A^2+B^2\right)\Rightarrow k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Reemplazando "k" en ①,② y ③ y sustituyendo en la ecuación normal.

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad \left(A^2+B^2\right)\neq 0$$

Ejemplos: Reducir las ecuaciones a la forma normal:

1) $2x-3y+5=0$

$A=2$ $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$B=-3$ $$\frac{2}{\pm\sqrt{2^2+(-3)^2}}x+\frac{(-3)}{\pm\sqrt{2^2+(-3)^2}}y+\frac{5}{\pm\sqrt{2^2+(-3)^2}}=0$$

$C=5$ $$\frac{2}{\pm\sqrt{13}}x-\frac{3}{\pm\sqrt{13}}y+\frac{5}{\pm\sqrt{13}}=0$$

$$\cos\omega=\frac{2}{\sqrt{13}} \qquad sen\omega=\frac{3}{\sqrt{13}} \qquad -\rho=\frac{5}{\sqrt{13}}$$

Así la ecuación normal será: $x\cos 56°18'36''+ysen56°18'36''+\frac{5}{\sqrt{13}}=0$

2) Determinar la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es $\rho=4$ y que tiene un ángulo de inclinación de la normal de 30º

La ecuación normal será: $x\cos 30°+ysen30°-4=0$

DATOS

El signo que precede al radical es

$$\begin{cases} Contrario \text{ a C} \\ Igual \text{ a} \begin{cases} \text{B} \\ \text{C} \end{cases} \end{cases} \quad si \begin{cases} \text{C}\neq 0 \\ B\neq 0\ ;\ \text{C=0} \\ \text{A}\neq 0\ ;\ C=B=0 \end{cases}$$

$$\omega=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$
$$\omega=56°18'36''$$

$$\omega=\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$
$$\omega=56°18'36''$$

Actividad

Reducimos las ecuaciones a la forma normal.

- $x+y-4=0$
- $x-2y+10=0$
- $x-y+\sqrt{3}=0$
- $6x+8y+20=0$
- $12x+5y-25=0$

- Determinamos la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es p=-2 y que tiene un ángulo de inclinación de la normal de 75º
- Determinamos la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es p=3 y que tiene un ángulo de inclinación de la normal de133º

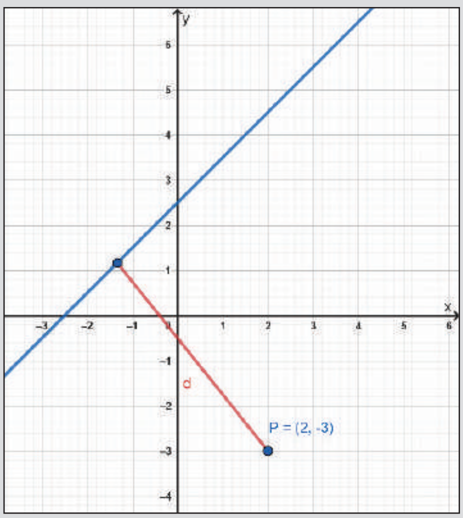
RECUERDO

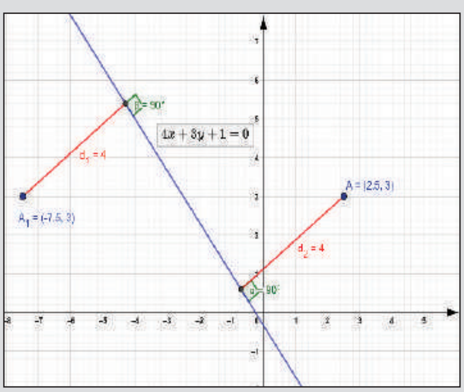
Si y el origen están:

- A distinto lado de ***l*** la distancia d es positiva.
- Al mismo lado de ***l*** la distancia d es negativa.

La recta pasa por el origen, d es:

- Positiva si P1 está arriba de ***l***.
- Negativa si P1 está abajo de ***l***.





2. Distancia de un punto a una recta

La distancia "d" de una recta $Ax+By+C=0$ a un punto $P(x1,y1)$ puede obtenerse sustituyendo las coordenadas del punto en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de la recta.

El valor esta dado por:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

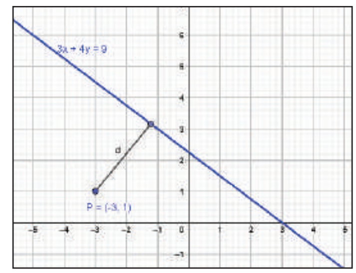
Ejemplos:

1) Qué distancia hay del punto (-3,1) a la recta $3x+4y-9=0$.

$$A=3 \qquad d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$B=4 \qquad d=\frac{|3(-3)+4(1)+(-9)|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$C=-9 \qquad d=\frac{14}{5}$$



2) Hallar la distancia de la recta $4x-4y+10=0$ al punto P(2,-3).

$$A=4 \qquad d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$B=-4 \qquad d=\frac{|4(2)+(-4)(-3)+10|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}$$

$$C=10 \qquad d=\frac{30}{\sqrt{32}}\bullet\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} \rightarrow d=\frac{15\sqrt{2}}{4}$$

3) La distancia de la recta $4x+3y+1=0$ al punto P es 4.
Si la ordenada de P es 4, halle su abscisa.

$$d=4 \qquad d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$y=3 \qquad 4=\frac{|4x+(+3)(3)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$4=\frac{|4x+10|}{\pm 5} \rightarrow \pm 20=4x_1+10 \rightarrow x=\frac{-10\pm 20}{4} \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{15}{2} \\ x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$x=\frac{-10\pm 20}{4} \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{15}{2} \\ x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Actividad

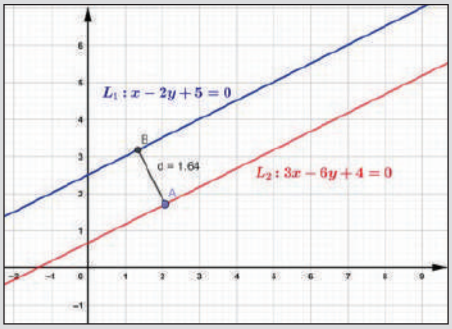
- Hallamos la distancia de la recta $\frac{3}{4}x-y+1=0$ al punto P(2,3).
- Hallamos la distancia de la recta $x+y+1=0$ al punto P(1,-5).
- La distancia de la recta $\frac{3}{2}x+y+2=0$ al punto P es 3. Si la ordenada de P es 3, hallamos su abscisa
- La distancia de la recta $2x+5y-10=0$ al punto P es 3. Si la abscisa de P es 3, hallamos su ordenada.

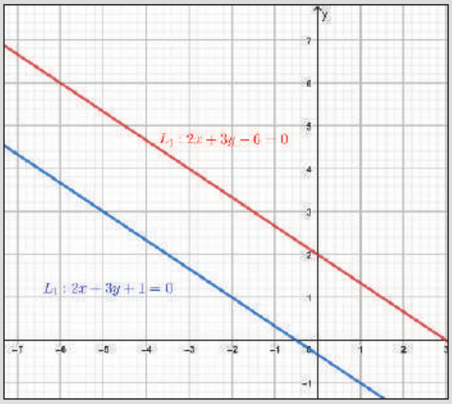
3. Distancia entre rectas paralelas

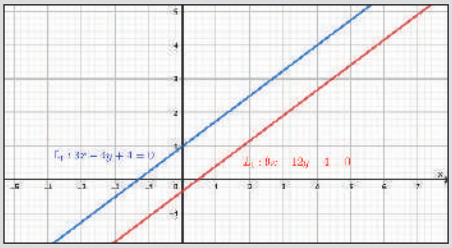
Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto en cualquiera de las rectas, después se calcula la distancia de ese punto a la otra recta. La fórmula que nos ayuda a encontrar el valor de la distancia es:

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

GRÁFICOS







Ejemplos:

1) Determinar la distancia entre las rectas L_1: $x-2y+5=0$ y L_2: $3x+6y+4=0$

Debemos igual las rectas:

$$\begin{array}{lcl} L_1: x-2y+5=0 & \|\times 3 & L_1: 3x-6y+15=0 \\ L_2: 3x-6y+4=0 & & L_2: 3x-6y+4=0 \end{array}$$

Las rectas son iguales: $L_1=L_2$. Se obtiene $A=3$, $B=-6$, $C_1=15$ y $C_2=4$

Entonces: $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{3^2+(-6)^2}}=\frac{|15-4|}{\sqrt{45}}=\frac{|11|}{\sqrt{45}}=\frac{11\sqrt{45}}{45}$

2) Determinar la distancia entre las rectas $L1$: $2x+3y+1=0$ y L_2: $2x+3y-6=0$

Las rectas son iguales: L_1 y L_2

Se obtiene $A=2$, $B=3$, $C_1=1$ y $C_2=-6$

Entonces: $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|1-(-6)|}{\sqrt{13}}=\frac{|7|}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$

3) Determinar la distancia entre las rectas $L1$: $3x+4y+4=0$ y $L2$: $9x-12y-4=0$

Se obtiene $A=9$, $B=-12$,

Debemos igualar las rectas: $C_1=12$ y $C_2=-4$

$L_1: 3x-4y+4=0 \quad \|\times 3$ entonces

$L_1: 9x-12y+12=0 \qquad d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\frac{|12-(-4)|}{\sqrt{225}}=\frac{|16|}{15}=\frac{16}{15}$

Actividad

- Determinamos la distancia entre las rectas L_1: $3x-y+3=0$ y L_2: $6x-2y-3=0$.
- Determinamos la distancia entre las rectas L_1: $2x-y+7=0$ y L_2: $2x-y-3=0$.
- Determinamos la distancia entre las rectas $L_1: \frac{3}{4}x+y-\frac{3}{2}=0$ y $L_2: \frac{4}{5}x+y-\frac{21}{5}=0$
- Determinamos la distancia entre las rectas L_1: $x-3y-6=0$ y L_2: $4x-2y+1=0$.
- Determinamos la distancia entre las rectas L_1: $3x-y-5=0$ y L_2: $6x-2y+7=0$.
- Determinamos la distancia entre las rectas L_1: $2x-3y-10=0$ y L_2: $2x-3y+6=0$.

a) Ecuación de las bisectrices de los ángulos suplementarios de dos rectas que se cortan

Sean: L_1 y L_2 dos rectas que se cortan

Donde: $L_1 = A_1x+B_1y+C_1=0$ y $L_2 = A_2x+B_2y+C_2=0$

Sus bisectrices son L_3 y L_4 cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\left|\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|$$

Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

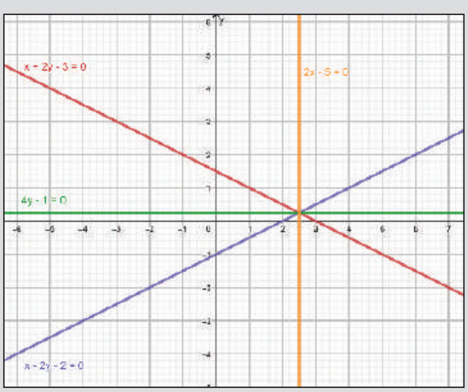
- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

- Si $C\neq 0$, el radical tendrá signo opuesto al de "C"
- Si $C=0$, el signo del radical es igual al de "B"
- Si $C=B=0$, el signo del radical es igual signo al de "A"

DATOS

$A_1 = 1$	$A_2 = 1$
$B_1 = 2$	$B_2 = -2$
$C_1 = -3$	$C_2 = -2$



Ejemplo:

Determinar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas: $x+2y-3=0$ y $x-2y-2=0$

Al aplicar la definición se determina que las distancias se relacionan de la siguiente manera:

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\pm\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{x-2y-2}{\pm\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x+2y-3 = (x-2y-2)\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$x+2y-3-x+2y+2=0$$

$$4y-1=0$$

$$d_1' = -d_2'$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x+2y-3 = -(x-2y-2)\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$x+2y-3+x-2y-2=0$$

$$2x-5=0$$

Las bisectrices de los ángulos son:

$$4y-1=0 \qquad 2x-5=0$$

Actividad

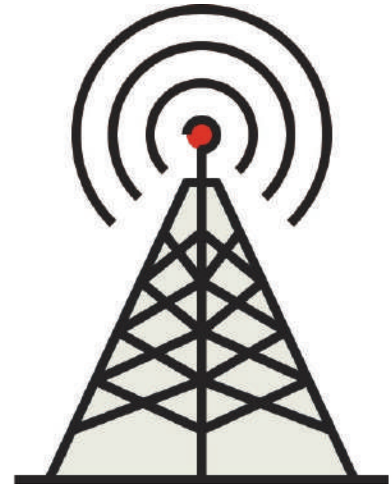
Hallamos la ecuación de recta que pasa por los puntos:

- $A(-4,6)$ y $B(0,5)$
- $A(9,0)$ y $B(0,-6)$
- $A\left(\frac{3}{4},0\right)$ y $B\left(0,\frac{15}{4}\right)$
- $A(5,0)$ y $B(0,-5)$

- Encontramos los puntos de intersección de la recta $3x-5y-15=0$ con los ejes.
- Encontramos los puntos de intersección de la recta $2x+3y-6=0$ con los ejes.
- Encontramo los puntos de intersección de la recta $6x-5y-30=0$ con los ejes.
- Encontramos los puntos de intersección de la recta $3x-4y-24=0$ con los ejes.

4. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema 1: Cristian compró una computadora (laptop) personal al precio de 4950 Bs. Estima que el valor de depreciación es de 495 Bs al cabo de 5 años. Si se considera una depreciación lineal. ¿Encuentre una ecuación que exprese el valor de la laptop en función del tiempo?



El valor de la laptop es lineal con respecto al tiempo, es decir:

$$(t_2,V_2)=(0,4950) \text{ y } (t_1,V_1)=(5,495)$$

Aplicamos la definición de pendiente en base a los datos proporcionados:

$$m=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}=\frac{4950-495}{0-5}=\frac{4455}{5}=891 \qquad \Rightarrow \qquad m=891$$

Utilizando la ecuación punto pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \Rightarrow \qquad V-V_1=m(t-t_1)$$
$$V-4950=495(t-0) \quad \Rightarrow \quad V=495t+4950$$

Problema 2: Si la temperatura en la ciudad de Cochabamba es de 18°c y la temperatura a una altitud de 1 km es de 12°c exprese la temperatura T(°C) en términos de la altitud "h" (Km). Suponga que su relación es lineal. ¿Cuál es la temperatura a 22 Km?

La variación de las temperaturas es: $(x_1,y_1)=(0,18°)$ y $(x_2,y_2)=(1,12°)$.

Aplicamos la definición de pendiente en base a los datos proporcionados:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{12-18}{0-1}=-6$$

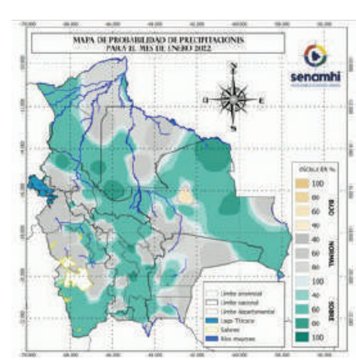
Utilizando la ecuación punto pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y-18=-8(x-0)$$
$$y=-8x+18 \quad \Rightarrow \quad T=-8x+18$$

Así la temperatura será: $T=-8(22)+18 \quad \Rightarrow \quad T=158°$

VALORACIÓN

En la vida diaria, si se identifica la existencia de relaciones entre dos variables y se pueden representar como un lugar geométrico lineal, el cual puede representarse mediante los modelos algebraicos y gráficos, que son útiles para comprender situaciones que se caracterizan por tener una razón de cambio, es decir, un cambio que tiene una variable con respecto a otra.



Según los pronósticos del Servicio Meteorológico (Senamhi). La información proporcionada es que la temperatura irá en aumento cada día que pase, haciendo que la temperatura incremente en 0,30°

¿Cómo se emplea el concepto de pendiente en la vida diaria?

¿Puedes determinar la ecuación pendiente – ordenada al origen que modela esta situación?

PRODUCCIÓN

- Investigamos y construimos un modelo matemático que te permita conocer la depreciación de los aparatos electrónicos que tienes en casa.
- Construimos un papelógrafo para exposición, referido a la depreciación de los aparatos electrónicos. Para modelizar la investigación, utilizamos el GeoGebra.

LA CIRCUNFERENCIA

PRÁCTICA

En tu barrio, comunidad o región, se puede observar objetos y figuras que representan circunferencias.

Así, por ejemplo, el aro del tablero de baloncesto o el centro de la cancha de fútbol.

Otro elemento que, en su tiempo, utiliza la forma circunferencial es el reloj.

Del mismo modo se puede citar como un objeto importante a la rueda, cuyo invento revolucionó el desarrollo tecnológico.

Actividad

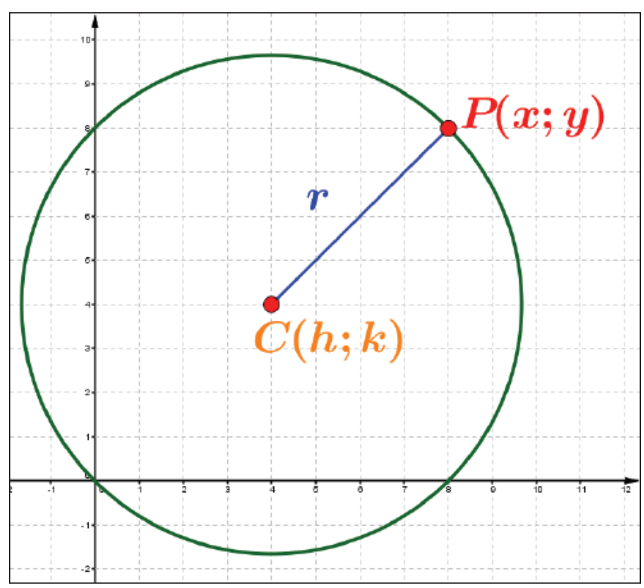
Tomando en cuenta la lectura anterior, respondemos:

- ¿Qué elementos tiene la circunferencia?
- ¿Qué otras circunstancias puedes citar, donde intervenga la circunferencia?

TEORÍA

1. Definición

La circunferencia aglutina los puntos del plano cartesiano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia de punto centro a cualquier punto de esa figura geométrica se la denomina radio.



2. Elementos

Los elementos de la circunferencia son: el Centro, cuyas coordenadas son C(h;k), el radio “r” y el conjunto de puntos que es representado por P(x;y).

PATA PATA

Juego tradicional

Si te diste cuenta, en el juego de la pata pata, la pelota que está en el extremo describe una circunferencia en su trayectoria, mientras que la cuerda que lo sostiene cumple el papel de radio.

3. Ecuaciones de la Circunferencia

Ecuación canónica

Si el centro de la circunferencia se ubica sobre el origen de coordenadas rectangulares, la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Hay que tomar en cuenta que:

Si el radio es positivo, la circunferencia es real.

Si el radio es negativo, la circunferencia es imaginaria.

Si el radio es nulo, igual a cero, la circunferencia se reduce a un punto en el plano cartesiano.

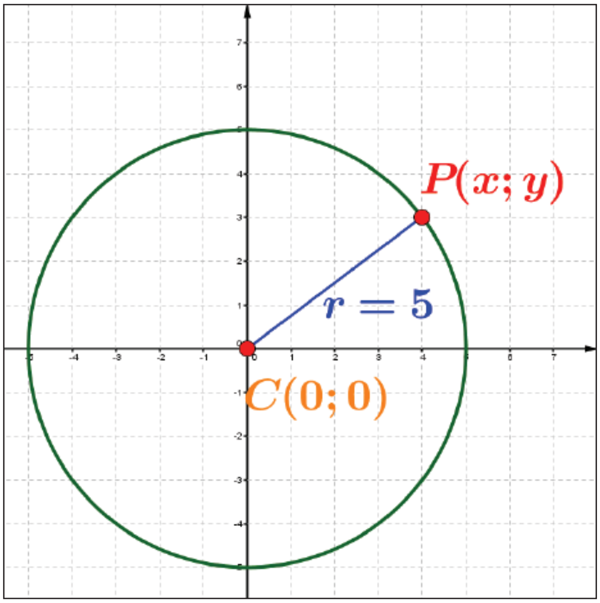
Ejemplo:

Dada una circunferencia que tiene centro en el origen y radio 5 unidades, determinar su ecuación canónica y trazar el gráfico.

Se tienen los datos: $C(0;0), r=5$, por lo que la ecuación será:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

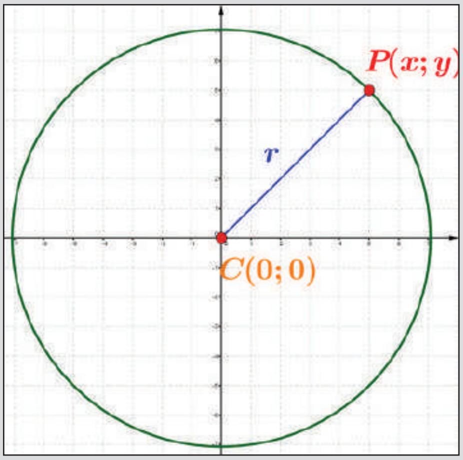
Su gráfico es:



Ejemplo:

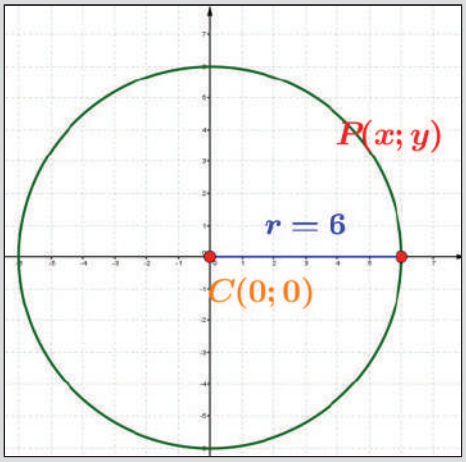
La circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2=36$ tiene centro en el origen y su radio mide 6.

ECUACIÓN CANÓNICA



$$x^2 + y^2 = r^2$$

GRAFICAMENTE



$$x^2+y^2 = 6^2$$

Actividad

Determinamos la ecuación canónica de la circunferencia si el radio es:

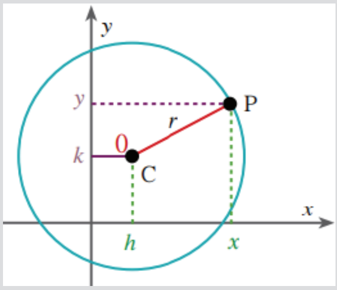
a) $r = \sqrt{2}$
b) $r = 4$
c) $r = 2$
d) $r = 2 - \sqrt{2}$
e) $r = \frac{3}{2}$

Trazamos el gráfico de las ecuaciones:

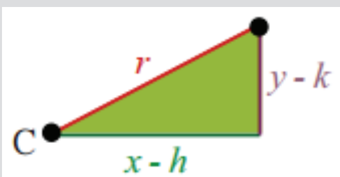
a) $x^2 + y^2 = 3$
b) $x^2 + y^2 = 8$
c) $2x^2 + 2y^2 = 8$
d) $x^2 - \sqrt{3} = -y^2$
e) $x^2 - 16 = -y^2$
f) $x^2 + y^2 = 64$

CONSTRUCCIÓN

Siendo C el centro y P un punto del plano cartesiano, y r es la distancia entre ambos puntos.



Se puede deducir que:



Al que se aplica el Teorema de Pitágoras:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

IMPORTANTE

La ecuación canónica

$$x^2+y^2=r^2$$

Es la ecuación con centro en C(0;0), implica que:

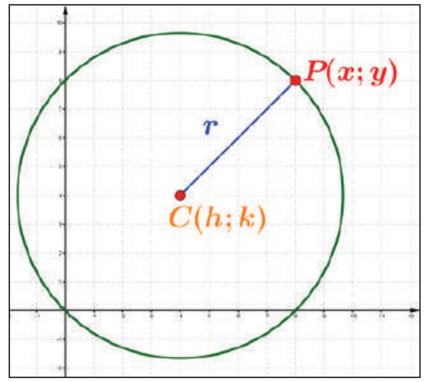
$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

Ecuación ordinaria o ecuación principal

Es la ecuación que tiene la forma:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

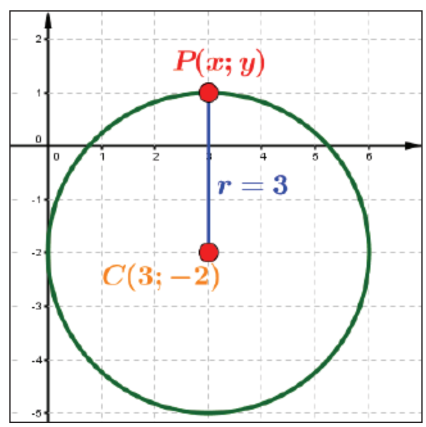
Donde el centro es un punto $C(h;k)$ y el radio es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia, $r=\overline{CP}$.



Ejemplo:

Representar gráficamente la circunferencia de centro en $C(3;-2)$ y $r=3$, luego encontramos la ecuación principal u ordinaria.

Con los datos tenemos:



Ahora, partiendo de la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, se puede escribir la ecuación ordinaria de la ecuación

$(x-3)^2+(y+2)^2=3^2$ es la ecuación buscada.

Actividad

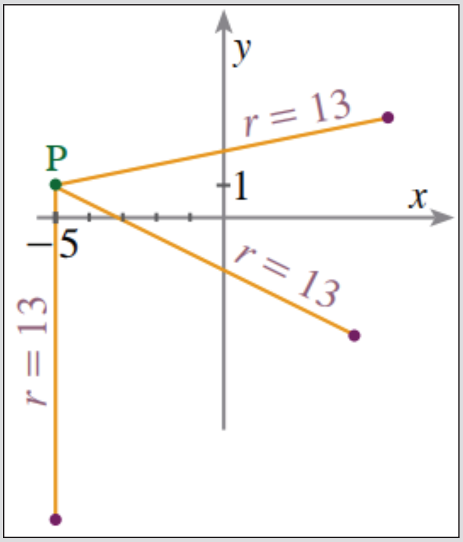
Resolvemos los ejercicios:

- Calculamos la ecuación y graficamos circunferencia de centro $C(-2;-3)$ y radio $r=4$.
- Calculamos la ecuación y graficamos circunferencia de centro $C(2;3)$ y radio $r=5$.
- Calculamos la ecuación y graficamos circunferencia de centro $C(-1;4)$ y radio $r=6$.

Ejemplo:

Una circunferencia pasa por P(-5;1) y tiene como radio $r=13$. Hallar la ecuación principal cuando el centro cumple con $h=k+1$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



1ro, La interpretación geométrica se encuentra a la derecha.

2do, El centro podría estar en cualquier parte del plano cartesiano, Tomaremos la ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

En la que reemplazamos $x=-5, y=1, r=13, h=k+1$

$$(-5-(k+1))^2+(1-k)^2=132$$

$$(-5-k-1)^2+(1-k)^2=132$$

$$(-6-k)^2+(1-k)^2=169$$

$$36+12k+k^2+1-2k+k^2=169$$

$$2k^2+10k-132 \quad \rightarrow \quad k^2+5k-66=0$$

Luego,

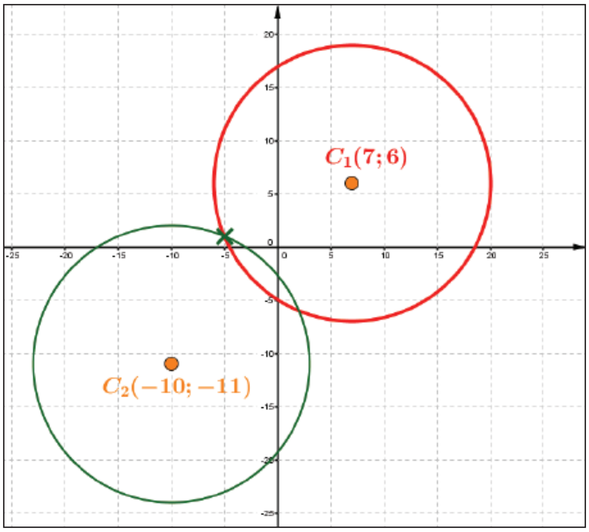
$$k_1=6, \quad k_2=-11$$

3ro, Calculando h , encontramos que $h_1=7$, $h_2=-10$. Esto indica que tenemos dos centros, por consiguiente, tenemos dos circunferencias que cumplen con la condición del problema: $C_1\,(7;6)$, $C_2\,(-10;-11)$

4to, Así las ecuaciones son:

$$(x-7)^2+(y-6)^2=169 \quad , \quad (x+10)^2+(y+11)^2=169$$

Trazamos los gráficos para verificar:



Actividad

Encontramos las ecuaciones de la circunferencia a partir de los datos, luego graficamos la misma en el plano cartesiano:

a) C(-1;1) r=4
b) P(-2;0) r=2 h=k-1
c) P(3;-4) r=4 h=2k
d) P(-√2; √2) r=2 h=k

RELACIÓN ENTRE ECUACIÓN ORDINARIA Y GENERAL

$$h = -\frac{D}{2}$$

$$k = -\frac{E}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

Si $r>0$, $C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$

Si $r=0$, la circunferencia es un punto.

Si $r<0$, no representa una circunferencia.

Ecuación general de la recta

Dada la ecuación principal u ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, al desarrollarla se encuentra la ecuación:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo:

Calcular la ecuación general de la circunferencia que tiene centro en $C(3;-1)$ y radio $r=4$.

Partimos de la ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

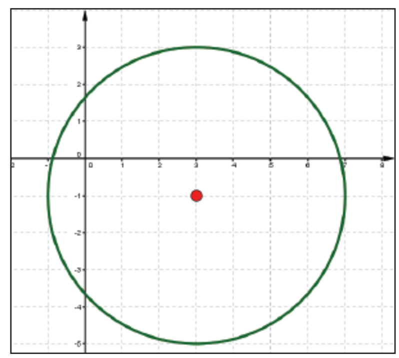
Utilizando los valores: $(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

Desarrollando los binomios y ordenando:

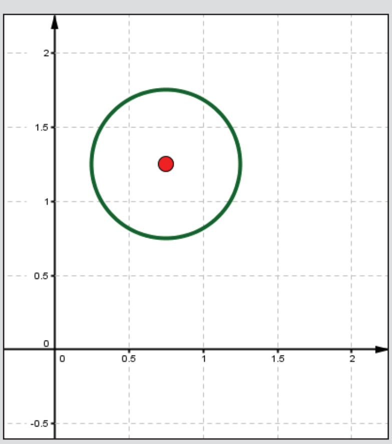
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=16$$

$$x^2+y^2-6x+2y-6=0$$

Es la ecuación general de la circunferencia.



TRAZO DE LA CIRCUNFERENCIA



Ejemplo:

Se quiere trazar el gráfico de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{15}{8} = 0$$

Para ello debemos convertirla a su forma principal, para identificar centro y radio y luego trazar su gráfico.

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{15}{8} = 0$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2\right] = -\frac{15}{8} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = -\frac{15}{8} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

De acá deducimos $C(h;k) = C\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$, $\quad r = \frac{1}{2}$

Actividad

Determinamos si la ecuación es una circunferencia, un punto o un conjunto vacío. Si lo es, gráficamos y hallamos su centro y radio.

a) $4x^2+4y^2-12x+8y+77=0$

b) $x^2+y^2-4x+14y+37=0$

c) $x^2+y^2-8x+6y+29=0$

d) $9x^2+9y^2-144x+12y+580=0$

Ejemplo:

Una circunferencia tiene ubicado su centro sobre el eje X y pasa por los puntos (-1;5) y (2;3). Encontrar su ecuación general.

Del problema se deduce que el centro tiene coordenadas C(h;0), respecto del cual equidistan los puntos dados.

$$\sqrt{(5-0)^2+(-1-h)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(2-h)^2}$$

$$25+1+2h+h^2=9+4-4h+h^2 \quad \to \quad h=-\frac{13}{6}$$

Luego el centro es: C(-13/6;0)

Ahora, para calcular el radio determinamos la distancia del centro a uno de los puntos dados:

$$r=\sqrt{(3-0)^2+\left(2+\frac{13}{6}\right)^2} \quad \to \quad r=\sqrt{\frac{949}{36}}$$

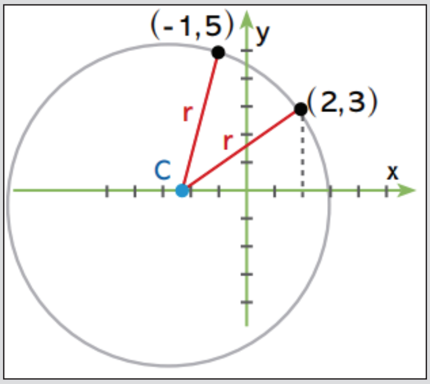
De este modo, la ecuación buscada será:

$$\left(x+\frac{13}{6}\right)^2+y^2=\frac{949}{36}$$

Desarrollando la ecuación principal:

$$36x^2+36y^2+156x-780=0$$

GRÁFICO



Actividad

Resolvemos los problemas:

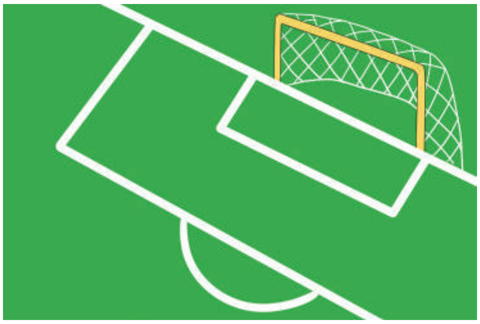
- Encontramos la ecuación general de aquella circunferencia que pasa por el punto (5;-2) y que es concéntrica con $x^2+y^2-2x=35$
- Determinamos la ecuación general de aquella circunferencia cuyo centro está sobre el eje Vertical y que pasa por los puntos (3;3) y (5;-5).

VALORACIÓN

En clase, establece un diálogo con tus compañeras y compañeros sobre la importancia de la circunferencia en la telecomunicación y otros, respondiendo a las preguntas:

¿Qué problemas cotidianos se pueden resolver con las ecuaciones de la circunferencia?

¿Por qué es importante la circunferencia en el avance tecnológico?



PRODUCCIÓN

Organizamos una jornada para pintar los campos deportivos de nuestra unidad educativa, pensando en cómo pintar las áreas circulares de forma exacta, con solo una cuerda, brocha y pintura.

APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

PRÁCTICA

La invención de la rueda dio inicio a toda la tecnología que hoy en día utilizamos, este invento revolucionó la historia del ser humano.

Resulta que la rueda tiene la forma de una circunferencia, así como muchos objetos que son utilizados comúnmente; por ejemplo, la circunferencia como figura de la geometría, como base en la elaboración de los CDs o DVDs, en los que se utiliza bastante precisión para su funcionamiento en el tratamiento y almacenamiento de datos.

Muchos objetos adoptan la forma de una circunferencia, objetos que nos facilitan ciertos procesos y hasta son parte de situaciones comunes como el transporte o el deporte.

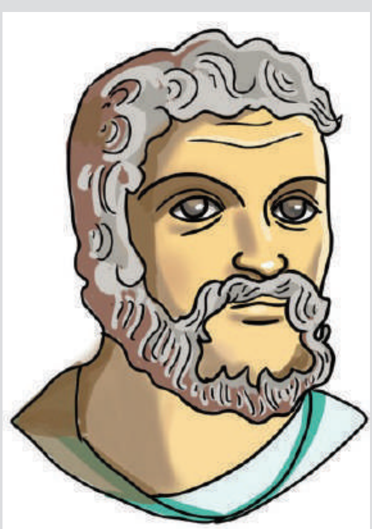
Actividad

Luego de una lectura, respondemos:

- ¿Cuáles son los elementos básicos de una circunferencia?
- ¿La circunferencia es representada por alguna ecuación algebraica en particular?
- En Uyuni se encuentra el "Cementerio de trenes", ¿sabías que fueron construidos utilizando circunferencias proporcionales?

TEORÍA

APOLONIO DE PÉRGAMO



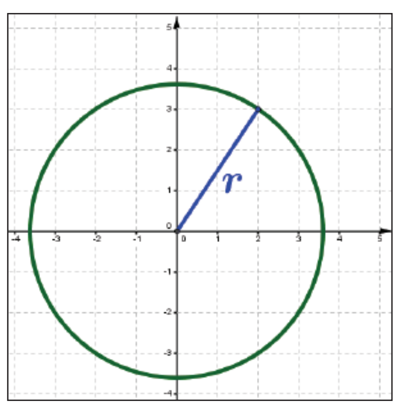
(262 – 190 a.C)

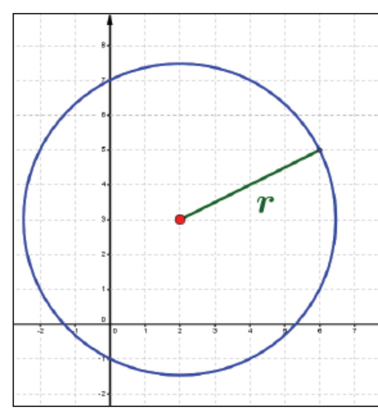
Matemático estudioso de las secciones cónicas, resolvió la ecuación general de segundo grado utilizando geometría cónica.

1. Memoria de ecuaciones y relaciones

La circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado Centro.

Existen dos situaciones: cuando el centro es ubicado en el origen y cuando es ubicado en cualquier punto del plano.





Centro y radio	$C(0;0), r$	$C(h;k), r$
Ecuación principal	$x^2+y^2=r^2$	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
Ecuación general	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	
Relación	$D=-2h,\quad E=-2k,$	$F=h^2+k^2-r^2$

2. Circunferencia que pasa por tres puntos

Si se tienen tres puntos que son parte de la circunferencia, que parte de la ecuación general de la circunferencia en cada punto, de tal modo que se obtenga un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al resolverla, se encuentran los coeficientes de la ecuación general, trazando así la gráfica.

Ejemplo:

Se desea trazar una circunferencia que pasa por tres puntos:

A(-2;4), B(1;-5) y P(6;4).

Paso 1. Reemplazamos las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la circunferencia, así:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A(-2;4) \to \ (-2)^2 + 4^2 + D\,(-2) + E4 + F = 0$$

$$(1;-5) \to \ 1^2 + (-5)^2 + D\,1 + E\,(-5) + F = 0$$

$$P(6;4) \to \ 6^2 + 4^2 + D\,6 + E\,4 + F = 0$$

Paso 2. Encontramos el sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} -2D + 4E + F = -20 \\ D - 5E + F = -26 \\ 6D + 4E + F = -52 \end{cases}$$

Paso 3. Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método que convenga:

$$D = -4, \qquad E = -\frac{2}{3} \quad F = -\frac{76}{3}$$

Paso 4. Así, la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 4x - \frac{2}{3}y - \frac{76}{3} = 0$$

Paso 5. Para trazar la circunferencia, utilizamos la relación entre la ecuación general y la ecuación principal:

$$D = -2h, \qquad E = -2k, \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

$$-4 = -2h \ \to \ h = 2$$

$$-\frac{2}{3} = -2k \ \to \ k = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{76}{3} = h^2 + k^2 - r^2 \ \to \ r = \frac{\sqrt{265}}{3} \sim 5{,}43$$

De este modo, la circunferencia tiene Centro en

$$C\left(2;\tfrac{1}{3}\right) \qquad \text{y} \qquad r = \frac{\sqrt{265}}{3}$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA CON CALCULADORA

MODE , EQN , 2

-2 =;4=; 1=;-20=

1=; -5=;1=;-26=

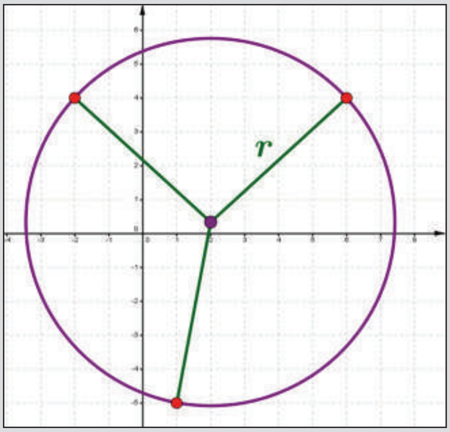
6=;4=;1=,-52=

= → x= - 4 = D

= → $y = -\frac{2}{3} = E$

= → $z = -\frac{76}{3} = F$

GRÁFICAMENTE



Actividad

Determinamos la ecuación de las circunferencias, en cada caso, que pasa por los puntos indicados:

a) (10;1), (1;6), (8;7)
b) (-20;5), (-10;1), (6;9)
c) (5;-1), (-2;8), (-5;0)
d) (-3;-5), (-1;8), (5;2)
e) (0;0), (1;9), (8;-3)
f) (1;1), (4;4), (5;-5)

MONEDAS DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

Observa la moneda de Bs 5.

Podemos ver varias circunferencias, pero todas tienen el mismo centro:

Resulta que las circunferencias describen una familia de circunferencias concéntricas.

3. Familia de Circunferencias

Una familia de circunferencias es el conjunto de circunferencias que cumplen la condición:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

Donde p es el parámetro y siempre será positivo.

Ejemplo:

Representar gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto $(3;-2)$ y radio $p=1,2$ y 3.

La familia de circunferencias es el conjunto de circunferencias concéntricas, sus ecuaciones principales serán:

$$C1:\ (x-3)^2+(y+2)^2=1^2$$

$$C2:\ (x-3)^2+(y+2)^2=2^2$$

$$C3:\ (x-3)^2+(x+2)^2=3^2$$

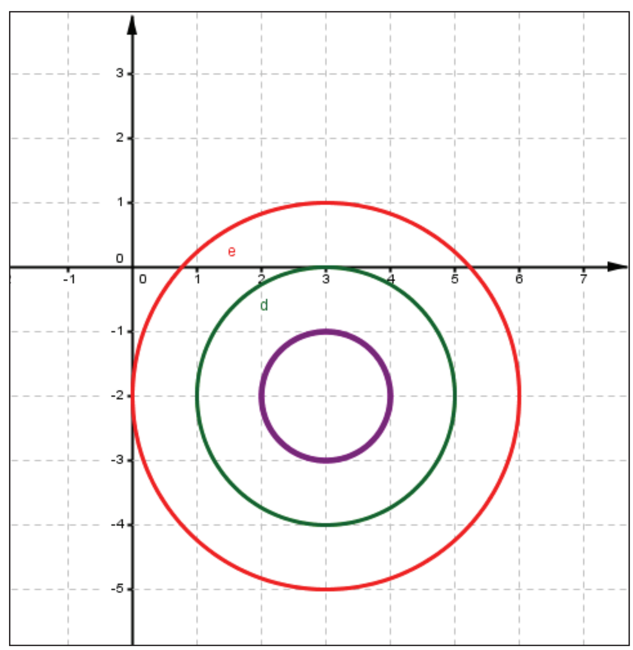
Además, sus ecuaciones generales serán:

$$C1:\ x^2+y^2-6x+4y+12=0$$

$$C2:\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$$

$$C3:\ x^2+y^2-6x+4y+4=0$$

Trazando las gráficas correspondientes:



Actividad

Determinamos la familia de circunferencias para el parámetro asignado:

a) Centro en (-1;2), p=2,3
b) Centro en (-3;-2), p=1,2,3
c) Centro en (5;4), p=5;6
d) Centro en (-5;-2), p=1,3,5

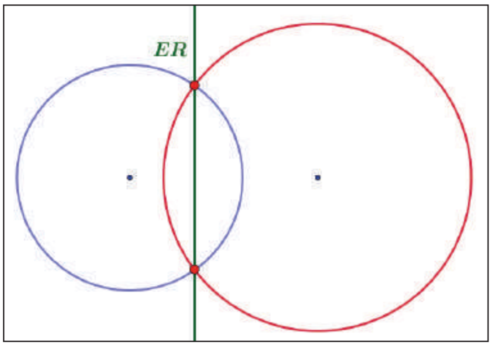
e) Encontramos la familia de circunferencias que tiene su Centro en la intersección de las rectas $2x+3y=5, x-4y+3=0$

f) Encontramos la familia de circunferencias que tiene su Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son (3;-2) y (-5;-4).

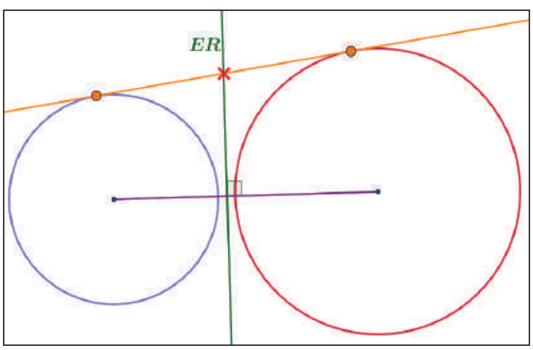
4. Eje radical entre circunferencias

Se refiere a determinar la posición relativa entre dos circunferencias:

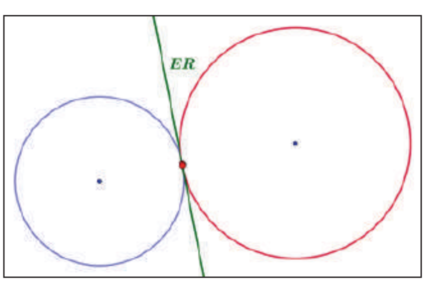
Si las Circunferencias son Secantes, el eje radical pasa por los puntos de intersección de dos circunferencias y la distancia entre los centros es menor a la suma de los radios.

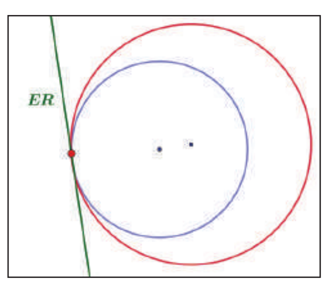


Si las Circunferencias son Exteriores, el eje radical se determina uniendo los puntos medios de los segmentos que se determinan por los puntos de contacto de las tangentes a las circunferencias.



Si las Circunferencias son Tangentes Exteriores o Interiores, el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y es perpendicular al segmento que forman los centros.





EJEMPLO

Se quiere determinar la posición relativa entre las circunferencias:

$$C1: x^2+y^2-2x+16y=0$$

$$C2: x^2+y^2-6x-4y=0$$

Se trata de un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

De ambas se encuentra:

$$4x+20y=0 \rightarrow x=-5y$$

Luego,

$$(5y)^2+y^2-6(-5y)-4y=0$$

$$\rightarrow 25y^2+y^2+30y-4y=0$$

$$\rightarrow 26y^2+26y=0$$

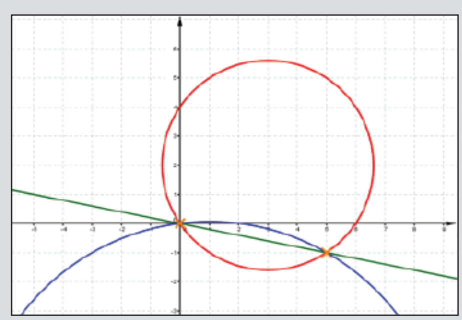
$$\rightarrow y=0; \quad y=-1$$

En consecuencia:

$$x=0; \; x=5$$

Así, determinamos que las circunferencias se intersecan en los puntos $(0;0)$ *y* $(5;-1)$

Concluimos que las rectas son secantes



Actividad

Determinamos la posición relativa entre las circunferencias y trazamos sus gráficos:

a) $x^2+y^2=25 \; ; \; x^2+y^2-14x-10y=-65$

b) $x^2+y^2=25 \; ; \; x^2+y^2-10x-8y=-32$

c) $(x-1)^2+(y-5)^2=25 \; ; \; x^2+y^2-18x-10y=-97$

5. Tangente a una circunferencia

Se trata de establecer la relación de tangencia entre una circunferencia y una recta.

Ejemplo:

La recta $4x$-3y-8=0 es tangente a una circunferencia que tiene su centro en el punto (0;3). Se pide encontrar la ecuación general de la circunferencia y trazar la circunferencia y la recta.

Claramente la distancia del punto (0;3) a la recta $4x$-3y-8=0 es el radio de la circunferencia.

Realizando los cálculos:

$$d = r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow r = \frac{|4 \cdot (0) - 3 \cdot (3) - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \rightarrow r = \frac{|-17|}{\sqrt{25}}$$

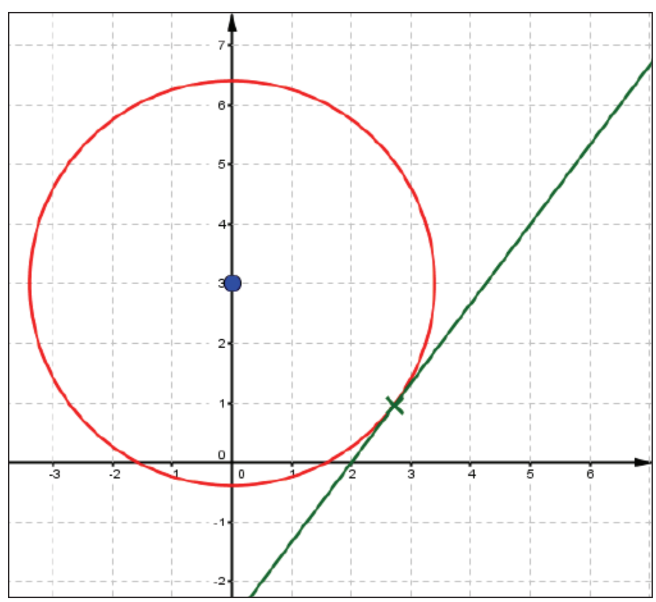
$$r = \frac{17}{5}$$

A continuación, dados C(0;3) y $r = \frac{17}{5}$, es posible encontrar la ecuación:

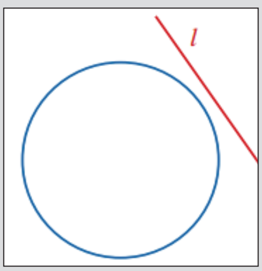
$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2$$

Que, escribiendo en su forma general, resulta:

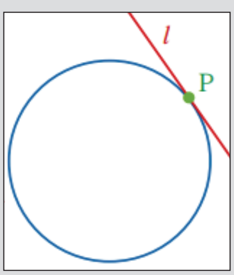
$$25x^2+25y^2-150y-64=0$$



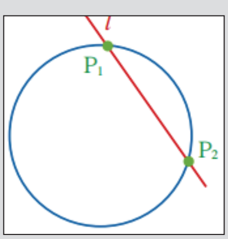
POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA CON UNA CIRCUNFERENCIA



Recta Exterior



Recta Tangente



Recta Secante

Actividad

Encontramos la ecuación de la circunferencia con centro "C" y que es tangente a la recta dada:

a) C(1;-1), *2x-y+1=0*

b) C(2;4), *2x+2y=4*

c) C(0;0), *x+3y=1*

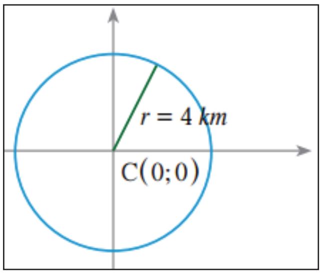
d) C(-2;3), *2+3-y=0*

6. Aplicaciones

Problema. ¿Cuál es el lugar geométrico que describe la trayectoria de un avión que sobrevuela una ciudad en una distancia constante de 4 km de la torre de control del aeropuerto local, esperando instrucciones para aterrizar?

Solución. Para dar solución al problema, se lo debe interpretar desde una vista superior al plano cartesiano, haciendo que la torre de control se sitúe en el origen del plano, tomando como radio a los 4 km.

De este modo: $C(0;0), r=4$

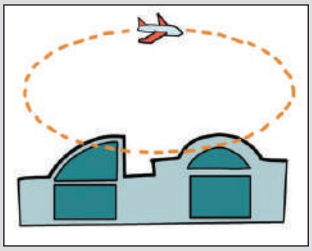


Por tanto:

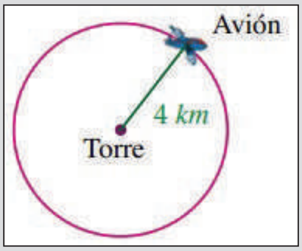
$$x^2+y^2=4^2 \rightarrow x^2+y^2=16$$

Es la ecuación de la trayectoria del avión.

VISTA FRONTAL



VISTA SUPERIOR



Actividad

Resolvemos el problema:

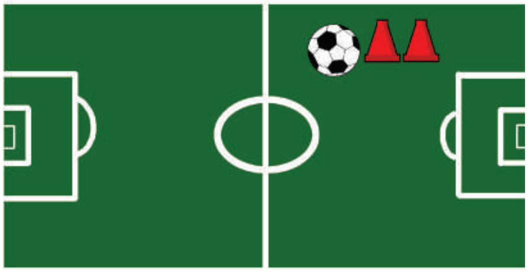
Una fuga de agua se produce en una zona que está a 2 km al Este y 8 km al Norte del centro de la ciudad. Inundó la zona en un radio de 9 km a la redonda. ¿Cuál es la ecuación del área inundada? La casa de Adrián se encuentra a 5 km al Este y 8 km al Sur del centro ¿se inundó?

VALORACIÓN

Un apartado especial que utiliza principios geométricos es el deporte, diferentes disciplinas deportivas utilizan a la circunferencia como elemento principal en el desarrollo del juego.

Las formas circulares que se utilizan siempre se pueden expresar algebraicamente.

¿Qué deportes conoces, donde se observan circunferencias?



PRODUCCIÓN

Organizados en equipos de trabajo, elaboramos una maqueta de la cancha de fútbol de salón más cercana, identificando las formas geométricas que intervienen en su diseño.

PARÁBOLA

PRÁCTICA

Las comunidades rurales de nuestro Estado Plurinacional de Bolivia tenían escaso acceso a vías de comunicación como el Internet hasta que se instalaron antenas parabólicas satelitales para aumentar la cobertura de Internet y de este modo reducir el costo de tales servicios.

Eleazar es uno de los ingenieros en telecomunicaciones que propiciaron este hecho, instalando las antenas, ubicando eficientemente los aparatos de recepción (LNB) para que la antena reciba señal satelital, del Satélite Túpac Katari, en cierta ubicación.

Utilizó conocimientos de geometría analítica para establecer sus cálculos.

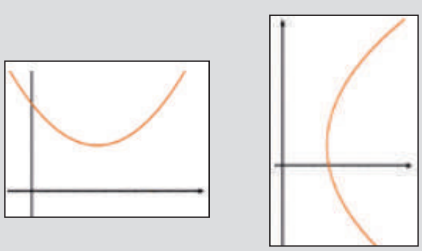
Actividad

Analizamos un poco y respondemos:

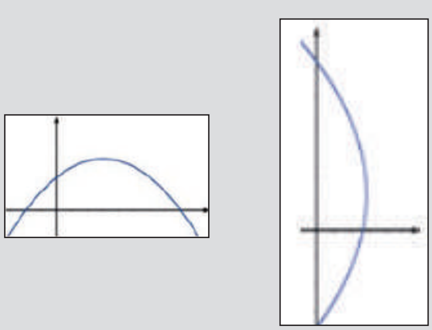
- ¿Cómo funcionan las antenas parabólicas que se instalaron en las comunidades?
- ¿Qué tipo de cálculos tuvo que hacer Eleazar para establecer el lugar en que debe ubicarse el LNB?
- ¿Hacia dónde y por qué están direccionadas las antenas parabólicas?

TEORÍA

DATOS



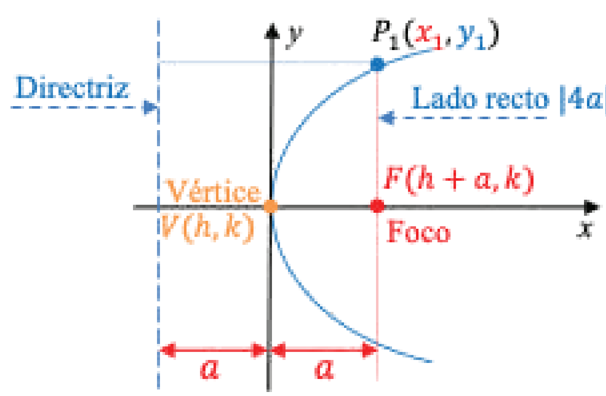
Parábolas positvas



Parábolas negativas

1. Definición de la Parábola

Es el lugar geométrico donde se encuentran los puntos del plano, que equidistan de un punto fijo, denominado foco y de una recta de nombre directriz.



2. Elementos

Los elementos de la parábola son: Vértice “V”, Foco “F”, Directriz, Lado Recto “|4a|”, parámetro fijo “a” y Eje de Simetría “$\overline{VF}$”.

Las parábolas pueden ser verticales u horizontales, se abren hacia arriba o hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha y sus ecuaciones algebraicas cambian según la forma que adopten y viceversa.

La parábola tiene dos tipos de ecuaciones, la ecuación ordinaria o principal y la ecuación general. La primera se escribe en función del vértice y la segunda en función de los coeficientes polinómicos, pero ambas pueden ser verticales u horizontales.

3. Ecuaciones de la Parábola

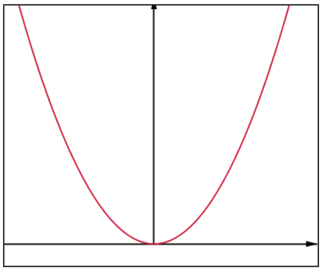
a. Parábolas Verticales

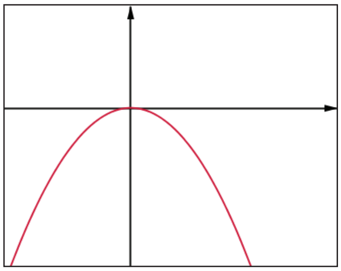
Las parábolas verticales se caracterizan por tener el eje focal paralelo al eje vertical. Cuando el vértice está en el origen $V(0;0)$, la ecuación ordinaria o principal es:

$$x^2=\pm 4ay$$

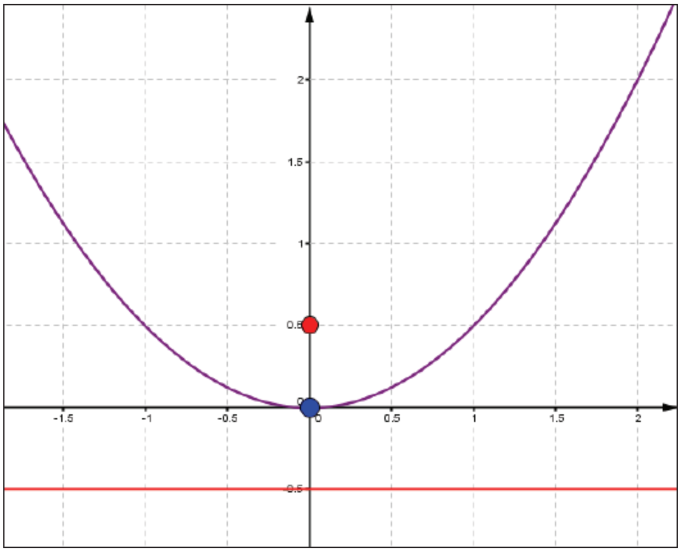
Una parábola es vertical y positiva si sus ramas se abren hacia arriba y será vertical y negativa si sus ramas se abren hacia abajo, sus ecuaciones correspondientes son:

$x^2=+4ay$ $\qquad$ $x^2=-4ay$





Así, por ejemplo: El gráfico de la parábola de ecuación $x^2=2y$, tiene vértice en el Origen $V(0;0)$, Foco en $F(0;0,5)$, Eje de simetría es vertical $x=0$, el parámetro fijo es $a=1/2$, Lado Recto=2, su directriz será D: $y=-0,5$, es:



PARÁBOLA VERTICAL POSITIVA

Ecuación Ordinaria o Principal

$x^2=4ay$

Ecuación General

$x^2+Ey=0$

Condición

$E=-4a$

PARÁBOLA VERTICAL NEGATIVA

Ecuación Ordinaria o Principal

$x^2=-4ay$

Ecuación General

$\mathbf{x^2+Ey=0}$

Relación

$E=4a$

¿DÓNDE VEMOS PARÁBOLAS?

¿Puedes ver la forma parabólica que toma?

Actividad

A partir de los elementos, construimos la parábola vertical en el plano cartesiano:

a) V(0;0), F(0;2)
b) V(0;0), a=2, parábola negativa
c) V(0;0), D: y=3
d) V(0;0), D: y=6
e) V(0;0), a=3, parábola positiva
f) V(0;0), F(0;-5)

Dadas las ecuaciones de las parábolas verticales, trazamos la parábola y determinamos sus elementos:

a) $0,5y=x^2$
b) $y=-4x^2$
c) $y=4x^2$
d) $y=-0,5x^2$
e) $x^2=y$
f) $y=-x^2$

PARÁBOLA HORIZONTAL POSITIVA

Ecuación Ordinaria o Principal

$y^2=4ax$

Ecuación General

$y^2+Dx=0$

Condición

$D=-4a$

PARÁBOLA HORIZONTAL NEGATIVA

Ecuación Ordinaria o Principal

$y^2=-4ax$

Ecuación General

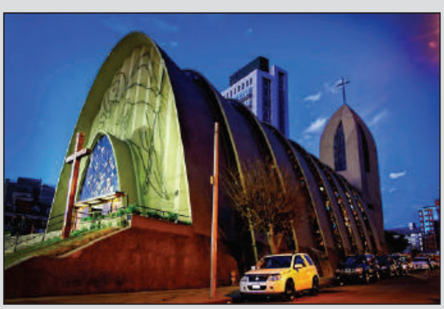
$y^2+Dx=0$

Relación

$D=4a$

PARROQUIA SAN MIGUEL, LA PAZ

La estructura tiene forma de un arco parabólico



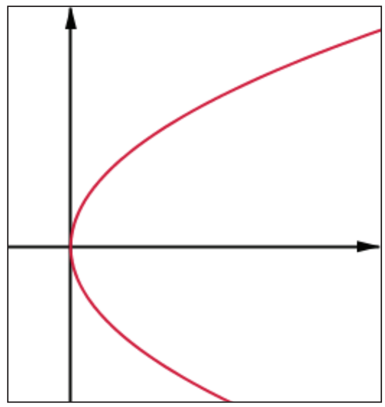
b. Parábolas Horizontales

Las parábolas horizontales se caracterizan por tener el eje focal paralelo al eje horizontal. Cuando el vértice está en el origen V(0;0), la ecuación ordinaria o principal es:

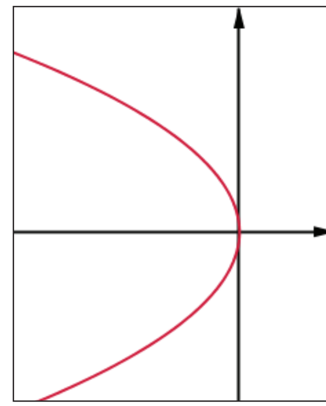
$$y^2=\pm 4ax$$

Una parábola es horizontal y positiva si sus ramas se abren hacia la derecha y será horizontal y negativa si sus ramas se abren hacia la izquierda, sus ecuaciones correspondientes son:

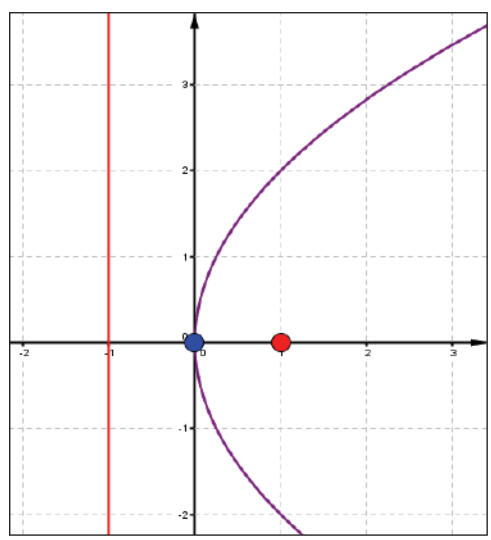
$y^2=+4ax$



$y^2=-4ax$



Así, por ejemplo: El gráfico de la parábola de ecuación $y^2=4x$, tiene vértice en el Origen $V(0;0)$, Foco en $F(1;0)$, Eje de simetría es vertical $y=0$, el parámetro fijo es $a=1$, Lado Recto=4, su directriz será D: $y=-1$, es:



Actividad

A partir de los elementos, construimos la parábola horizontal en el plano cartesiano:

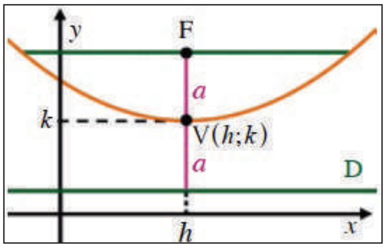
a) V(0;0), F(2;0)
b) V(0;0), a=2, parábola negativa
c) V(0;0), D: y=3
d) V(0;0), D: y=6
e) V(0;0), a=3, parábola positiva

Dadas las ecuaciones de las parábolas horizontales, trazamos la parábola y determinamos sus elementos:

a) $y^2=-4x$
b) $y^2=2y$
c) $y^2=y$
d) $y^2+y=0$
4) $y^2+8y=0$

c. Parábolas con vértice fuera del origen

Son las parábolas que tienen el vértice en un punto V(0;0) distinto del origen. Sus ecuaciones y gráficos serán:

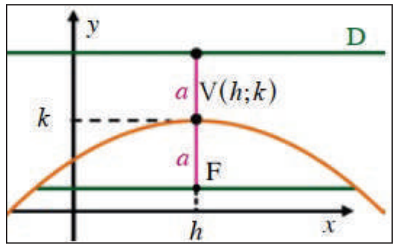


Parábola vertical positiva

$(x-h)^2=4a(y-k)$

Foco: $F(h;k+a)$

Directriz: $y=k-a$

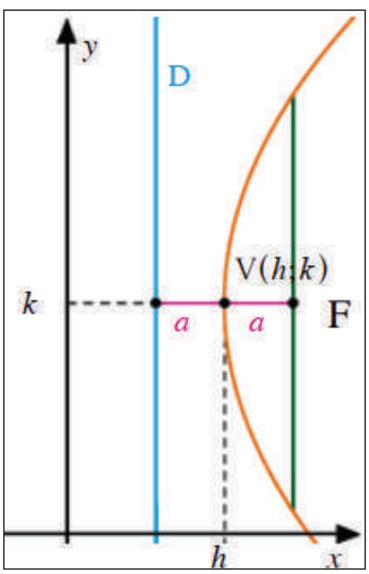


Parábola vertical negativa

$(x-h)^2=-4a(y-k)$

Foco: $F(h;k-a)$

Directriz: $y=k+a$

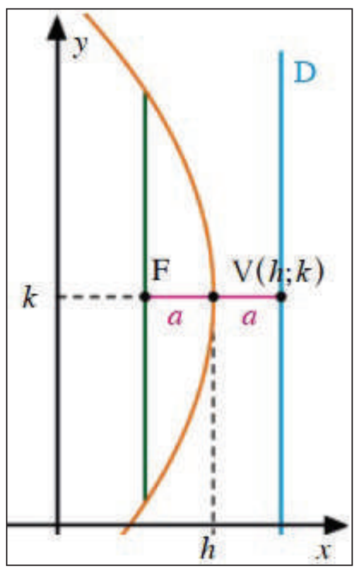


Parábola horizontal positiva

$(y-k)^2=4a(x-h)$

Foco: $F(h+a;k)$

Directriz: $x=h-a$



Parábola horizontal negativa

$(y-k)^2=-4a(x-h)$

Foco: $F(h-a;k)$

Directriz: $x=h+a$

NO OLVIDAR QUE

Vértice: *V(h;k)*

Foco: *F* (es un punto)

Directriz: *D*, es recta vertical u horizontal

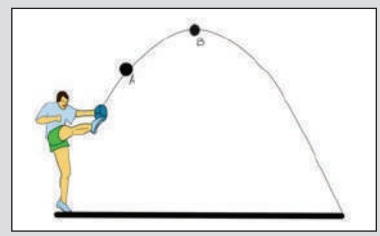
Parámetro fijo: *a*

Lado Recto: $LR=|4a|$

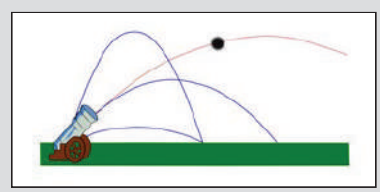
Eje Focal: $EF=\overline{VF}$

TRAYECTORIA PARABÓLICA

De un balón en el fútbol



De un proyectil



Piensa en otras opciones donde se pueda observar la trayectoria parabólica.

Actividad

Trazamos la parábola a partir de los elementos:

a) V(3;2), F(5;2)

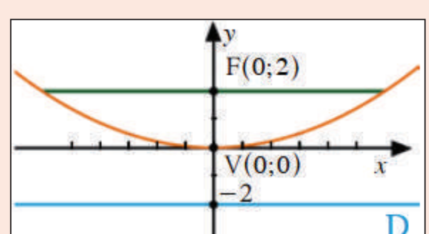
b) V(1;3), F(1;6)

c) V(-3;2), F(-4;2)

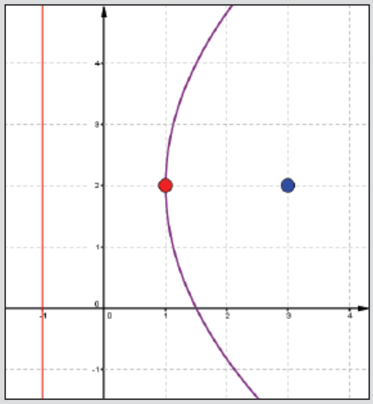
d) Vertical positiva, F(1;1), a=3

e) Directriz: x=5, F(0;3)

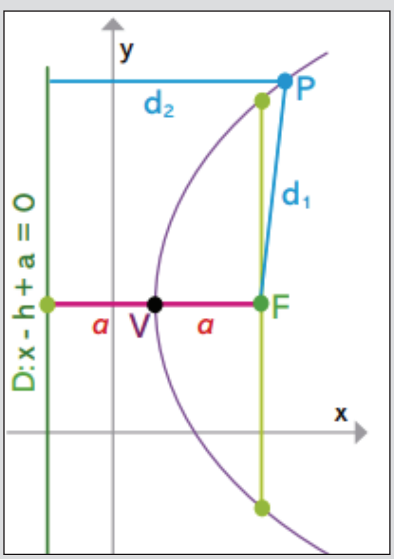
Dado el gráfico, determinamos sus elementos:



V(1;2), F(3;2)
D: x=-1, LR=8



DATOS



d_1: Distancia entre dos puntos.

d_2: Distancia de un punto a una recta

$d_1 = \overline{PF}$; $d_2 = \overline{PD}$

Ejemplo:

Determinar gráfica y los elementos de una parábola horizontal positiva de la que se conoce su vértice V(1;2) y el parámetro fijo a=2.

De lo anterior se puede deducir que:

h=1, k=2, a=2, la directriz está a la izquierda del vértice y tiene por ecuación: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Por lo que:

$$(y-2)^2 = 4\cdot 2\cdot (x-1)$$

Así, la ecuación buscada es:

$$(y-2)^2 = 8\cdot (x-1)$$

Y los elementos se describen a la izquierda.

Ejemplo:

Elaborar la gráfica de la parábola y encontrar su ecuación principal si tiene vértice *V(-4;3) y F(-4;0).*

Se debe observar que el foco se ubica por debajo del vértice por lo que se trata de una parábola vertical negativa, luego se elige la ecuación:

$$(x-h)^2=-4a(y-k)$$

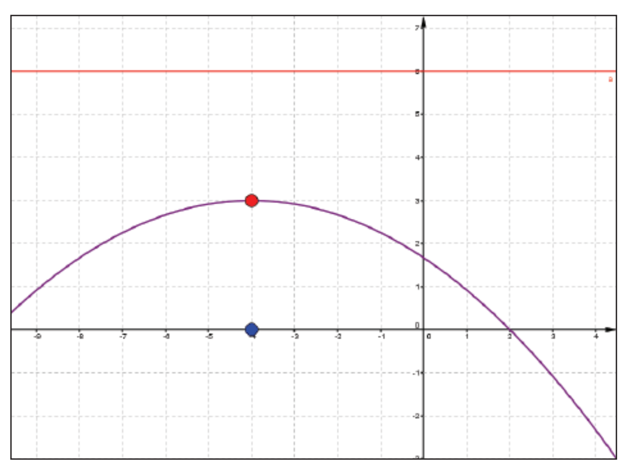
Reemplazando los valores del ejercicio:

$$h=-4,\ k=3,\ a=3$$

la ecuación se reduce a:

$$(x+4)^2 = -12(y-3)$$

Luego concluimos que: *V(-4;3), F(-4;0), D:y=6, LR=12.*



Actividad

Encontramos los parámetros, trazamos la gráfica y determinamos la ecuación, según sea el caso, de la parábola cuyos elementos son:

a) V(-2;6) D: $x = 10$
b) F(-2;6) D: $x = 10$
c) V(1;-3) D: $y+2 = 0$
d) Parábola vertical positiva, F(3;2) y a =5
e) $(x-3)^2 = 16(y-2)$
f) $(4-y)^2 = -20x$
g) *V(2;0) F(5/2;-4)*
h) Parábola horizontal negativa, *F(3;-2) y a = 2*
i) $(y+2)^2 = -2(x+1)$

4. Ecuación General de la Parábola

Las ecuaciones de la parábola se identifican de acuerdo al eje de simetría.

Si el eje de Simetría es vertical o paralelo al eje "y"	Si el eje de Simetría es horizontal o paralelo al eje "x"
$x^2+Dx+Ey+F=0$	$y^2+Dx+Ey+F=0$

Ejemplo:

Se pide determinar la ecuación principal y gráfica de la parábola cuya ecuación es:

$$y^2-6y-8x+17 = 0$$

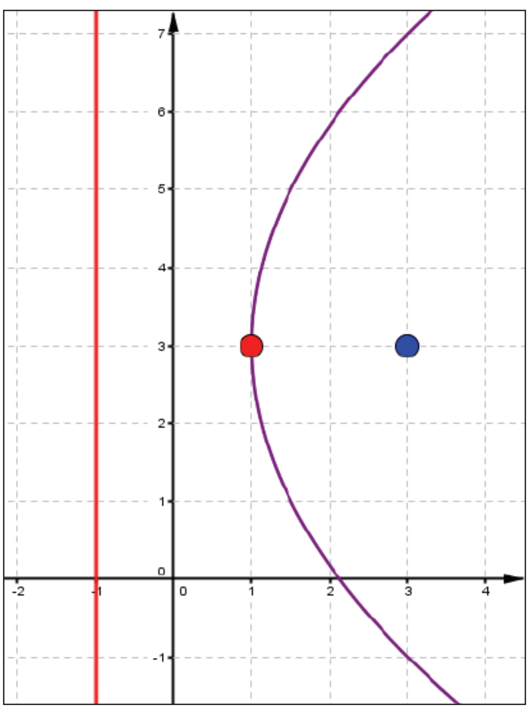
La ecuación dada exige a su equivalente

$$y^2+Dx+Ey+F = 0 \quad \rightarrow \quad (y-k)^2 = \pm 4a(x-h)$$

Utilizando el método de completar cuadrados, tendremos que

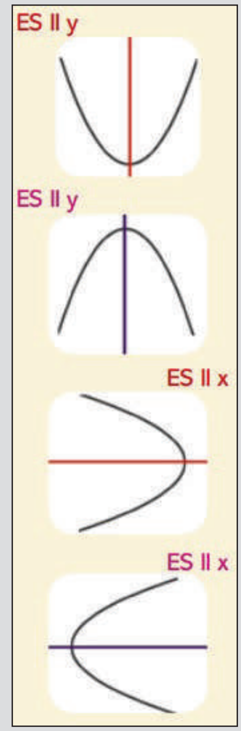
$$y^2-6y-8x+17 = 0 \quad \rightarrow \quad (y-3)^2 = 4 \cdot 2(x-1)$$

De donde $V(1;3)$, $a = 2, F(3;3)$, $D: x = -1$, $LR=8$

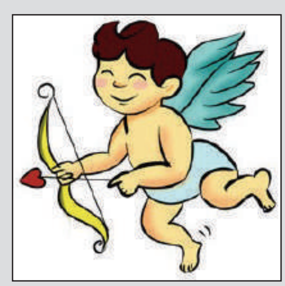


EJE DE SIMETRÍA

Se debe recordar que la parábola tiene un eje de simetría (ES), que es la recta que une el vértice con el foco.



CUPIDO



¿Qué forma tiene el arco de Cupido?

Actividad

Determinamos el gráfico, la ecuación principal y los elementos de las Parábolas, partiendo de las ecuaciones generales:

a) $y^2-10y-12x+37=0$

b) $x^2-12x+16y+68=0$

c) $y^2+20x+8y+56=0$

d) $x^2+8x-6y+28=0$

e) $y^2-5x+6y+13=0$

Determinamos la ecuación principal el gráfico y la ecuación general de las parábolas en las que se conocen:

a) $V(-1;2)$ $F(4;2)$

b) $V(3;-5)$ $F(3;2)$

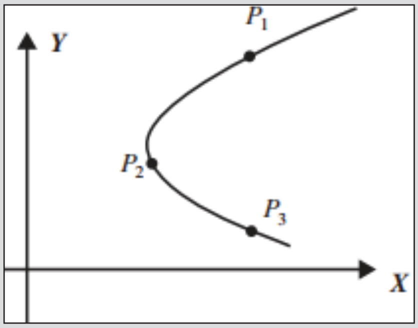
c) $D: x+1=0$ $V(0;1)$

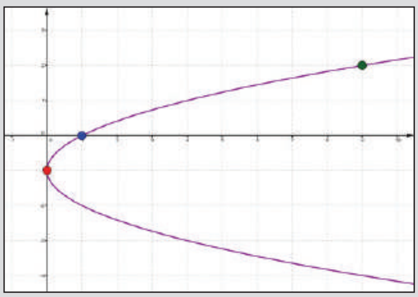
d) $D: y+2=0$ $F=1;-5)$

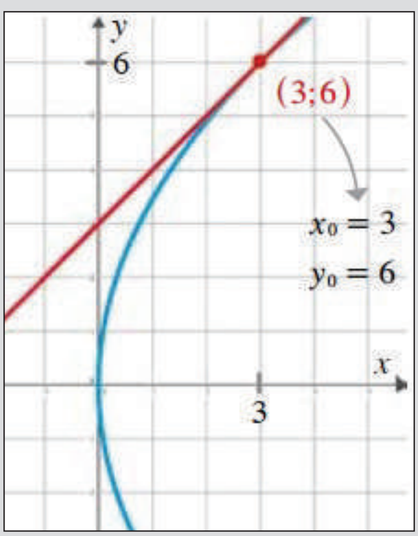
e) $V(2;0)$ $F(5/2;0)$

f) $V(-5;5)$ $F(-5;1)$

GRÁFICO







5. Parábola que pasa por tres puntos

Se trata de que dados tres puntos que pertenecen a una parábola, sea vertical u horizontal, es posible encontrar su ecuación identificando un sistema de ecuaciones de 3x3.

Ejemplo:

Establecer la ecuación parabólica, donde el eje es paralelo al eje horizontal y pasa por los puntos: $A(1;0)$, $B(9;2)$, $C(0;-1)$

Utilizamos la ecuación: $y^2+Dx+Ey+F=0$, reemplazando para cada punto:

$$A(1;0) \rightarrow 0^2+D\cdot1+E\cdot0+F=0 \rightarrow D+0\cdot E+F=0$$

$$B(9;2) \rightarrow 2^2+D\cdot9+E\cdot2+F=0 \rightarrow 9D+2E+F=-4$$

$$C(0;-1) \rightarrow (-1)^2+D\cdot0+E\cdot(-1)+F=0 \rightarrow 0\cdot D-E+F=-1$$

Se puede utilizar una calculadora para determinar la solución del sistema de tres ecuaciones con tres variables.

De ahí que con $D=-1, E=2, F=1$, $y^2-x+2y+1=0$ es la ecuación buscada.

6. Tangente a una Parábola

La recta tangente a una parábola en el punto $(x_0;y_0)$ se determina con:

Si la parábola es Horizontal:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0)$$

Si la parábola es vertical:

$$y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=12x$ en el punto (3;6).

La parábola $y^2=12x$, es parábola horizontal positiva y tiene vértice en $V(0;0)$ y el parámetro $a=3$.

Utilizando la ecuación de la recta tangente a una parábola:

$$y - 6 = \frac{6-0}{2\cdot(3-0)}\cdot(x-3) \rightarrow y - 6 = 1\cdot(x-3) \rightarrow \boxed{y = x+3}$$

Es la recta tangente pedida.

Actividad

Encontramos la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje indicado y que pasa por los puntos:

a) (0;0), (1;-2), (4,-4), eje X.
b) (19;2), (10;-1), (7;0), eje X.
c) (1;0), (5;8), (-2;15), eje Y.
d) (0;1), (-2;3), (1;6), eje Y.

Determinamos la ecuación de la recta que es tangente a la parábola en el punto que se indica:

a) $4x^2+5y=0$ en el punto $(5;-20)$
b) $x^2-8x+8y+24=0$ en el punto $(8;-3)$

Determinamos si las ecuaciones son tangentes o no:

a) $y^2-12x-10y = -37, y-5x = 0$
b) $x^2+48-24y = 0, 2y = x+1$

7. Aplicaciones

Problema. Una antena parabólica satelital tiene un diámetro de 1,5 m, su profundidad es de 25 cm. ¿A qué altura se debe colocar el receptor? (habitualmente el receptor de señal lleva las siglas LNB).

Solución. Cuando una onda emana del LNB (foco) y choca con la superficie de la antena parabólica, esta se refleja en paralelo con un eje vertical. Así es como emiten señal las antenas parabólicas.

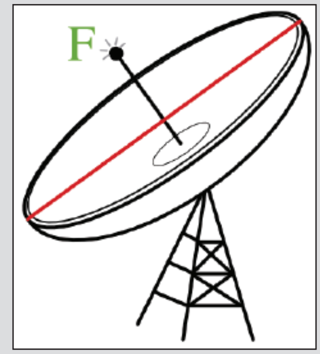
Se construye una parábola con vértice en el origen y eje de simetría vertical. El diámetro de la antena es de 1,5 metros y su fondo es de 25 centímetros. Como la parábola es simétrica, pasará por los puntos $(-0{,}75;0{,}25)$ y $(0{,}75;0{,}25)$.

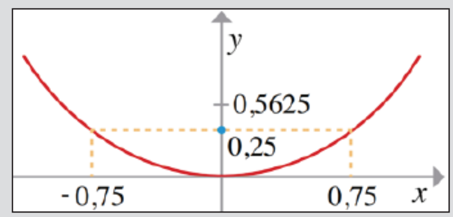
Utilizando la ecuación de parábola vertical con vértice en el origen y reemplazando uno de los puntos en la misma, determinamos el parámetro fijo que representa el lugar en que se debe colocar el LBN.

$$x^2 = 4ay \quad \rightarrow \quad (-0{,}75)^2 = 4a(0{,}25) \quad \rightarrow \quad a = 0{,}5625$$

Así, las coordenadas del foco se dan por $(0;0{,}5625)$.

De este modo, la altura a que se debe colocar el receptor o LNB es de 56,25 centímetros del vértice de la antena parabólica.

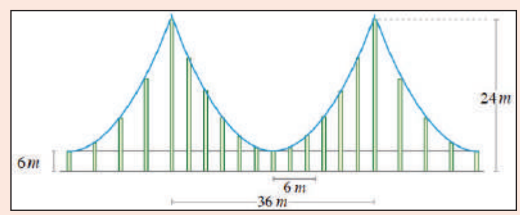




Actividad

Resolvemos el problema

Dos torres sostienen un puente colgante, cuya altura es de 24 metros, como el de la figura, Si las torres se separan por 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro del puente?



VALORACIÓN

Las zonas alejadas del país recurren a la señal satelital para poderse comunicar con el resto del país y el mundo. Para ello, el gobierno instaló antenas parabólicas satelitales cuyo funcionamiento parte de la forma parabólica que tiene esta y que identificando el foco de la forma parabólica de la antena se provee de señal satelital a toda una comunidad.

¿Conoces estas antenas parabólicas y su funcionamiento?

Conversa con tus compañeros de clase sobre la importancia de las antenas parabólicas y su importancia para establecer comunicación entre distintas regiones del país y el mundo.

PRODUCCIÓN

- Construimos la antena parabólica expuesta en el problema del subtítulo 7 de este tema. Verifica si los cálculos son correctos y aplicables en la realidad, analizando las situaciones geométricas y analíticas.
- Discutimos sobre la posibilidad de concentrar calor con una cocina solar, construyéndola y poniéndola a prueba, generando trabajo en equipo.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

LÍNEA RECTA

Ecuación punto pendiente

Determinar la ecuación de la recta y graficarla si pasa por el punto y su pendiente indicados:

$A(1;4),m=7/2$
$B(-1;1),m=-1/2$
$C(-2;2),m=-2$
$D(3;-2),m=-3/2$
$E(1/2;-1),m=3$
$A(0;0),m=-3$
$B(2;-3),m=1$
$E(0,5;2),m=4$

Recta que pasa por dos puntos

Encontrar la ecuación general de la recta y trazar su gráfica cuando pasa por los puntos dados:

$A(-2;1),B(2;5)$
$A(-3;5),B(4;-2)$
$A(1;5),B(5;-3)$
$A(3;-2),B(-2;6)$
$A(-5;-1),B(5;1)$
$A(8;-1),B(-3;4)$
$A(1;0),B(6;8)$
$A(0;-4),B(4;0)$
$A(-5;0),B(0;-5)$
$A(-6;10),B(5;2)$
$A(1;4),B(0;0)$
$A(0;0),B(-3;2)$
$A(4;2),B(-4;2)$
$A(3;-1),B(7;-1)$
$A(4;5),B(1;-2)$
$A(3;-2),B(2;3)$
$A(1;7),B(-3;4)$
$A(-10;1),B(1,10)$
$A(2;1),B(3;-7)$
$A(4;-2),B(-8;0)$

Recta abscisa y ordenada en el origen

Encontrar la ecuación de la recta que tiene abscisa “a” y ordenada en el origen “b”.

$a=3,b=2$
$a=-2,b=-4$
$a=-2,b=4$
$a=5,b=5$
$a=3,b=-2$
$a=2,b=-1$
$a=-10,b=12$
$a=15,b=1$
$a=-4,b=-6$
$a=-7,b=2$

Ecuación general de la recta

Encontrar pendiente y ordenada, trazar el gráfico de la recta cuya ecuación es:

$4x+7y-10=0$
$10x+6y-7=0$
$3x+9y-5=0$
$3x+7y-1=0$
$5x+3y-1=0$
$9x+9y-1=0$
$2x+8y-6=0$
$7x+5y-1=0$
$8x+6y-3=0$
$6x+9y-1=0$
$y-9x=1$
$y-8x=7$
$y-3x=3$
$y-4x=3$
$y-10x=3$
$x-3y+5=0$
$x-6y+1=0$
$x-9y+4=0$
$x-9y+1=0$
$x-10y+6=0$

APLICACIONES DE LA LÍNEA RECTA

Distancia de un punto a una recta

Determinar la distancia del punto a la recta dadas:

$P(1;4);2x-7y+3=0$
$P(-2;5);3x+4y-5=0$
$P(-1;7);12x+5y+26=0$
$P(3;0);-x+y+4=0$
$P(-4;0);x+3=0$
$P(-3;-6);y-3=0$
$P(2;-1);2x-3y-5=0$
$P(-3;2);4y+3x+7=0$
$P(-2;5);3x+4y=0$
$P(3;-0,5);5x+2y-3=0$

Distancia entre rectas paralelas

Determinar la distancia entre las rectas paralelas:

$y=-1/4\,x+6 \;;\; x+4y-8=0$
$x+4/3\,y-4=0 \;;\; 3x+4y+13=0$
$x-2y-3=0 \;;\; x-2y+1=0$
$y=2x-4 \;;\; y=2x+16$

Encontrar una recta que diste de 4 unidades respecto a la recta $y=2$

Comprobar si la recta que une los puntos $A(1;-3)$ y $B(5;0)$ y la recta que une a $C(-3;0)$ y $D(1;3)$ son rectas paralelas.

CIRCUNFERENCIA

Elementos de la circunferencia

¿La circunferencia de centro en el origen y pasa por el punto (–2, – 5), cuál es la ecuación?

Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 10 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio 9 unidades?

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (–2,4) y tiene centro en el origen?

Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio mide 4 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

Determinar la ecuación de la circunferencia de radio 6 y de centro en el origen

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y pasa por el punto (2, – 3)

Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

Ecuación canónica

Encontrar la ecuación canónica de la circunferencia cuyo centro es el origen y el radio es:

a) $r=0$
b) $r=1$
c) $r=2$
d) $r=3$
e) $r=4$
f) $r=5$
g) $r=6$
h) $r=7$
i) $r=8$
j) $r=-1$
k) $r=-2$
l) $r=\sqrt{2}$
m) $r=\sqrt{5}$
n) $r=1/2$
o) $r=3/8$

Trazar la circunferencia cuya ecuación es:

a) $x^2+y^2=1$
b) $x^2+y^2=2$
c) $x^2+y^2=4$
d) $x^2+y^2=9$
e) $x^2+y^2=25$
f) $x^2+y^2=-4$
g) $x^2+y^2=9/4$
h) $x^2+y^2=4/9$
i) $x^2+y^2=\sqrt{3}$
j) $x^2+y^2=\sqrt{8}$

Ecuación ordinaria o principal

Establece la ecuación de la circunferencia de diámetro al segmento AB, con B(– 4,7) y A(6,– 1).

Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AB, con A(–2,1) y B(1,3).

Calcula la ecuación de aquella circunferencia cuyo centro es C(1,– 3) y pasa por P(4,3).

Encuentra la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C(0,3) y pasa por Q(1,-5).

Determina la ecuación de la circunferencia de centro en (– 1,– 5) y es tangente al eje Y.

Con centro en (– 1,– 5) y es tangente al eje X, halla la ecuación de a circunferencia.

El centro de una circunferencia es el punto (5, – 2) y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?

El centro de una circunferencia es el punto (3, 5) y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?

Una circunferencia tiene centro en (– 4,2) y diámetro 8, hallar su ecuación general.

Una circunferencia tiene centro en (3,7) y diámetro 6, hallar su ecuación general.

Ecuación general

Traza la circunferencia y encuentra su ecuación general, sabiendo que pasa por el centro y radio dados:

a) $C(-2;3)\quad r=4$
b) $C(5;2)\quad r=1$
c) $C(-2;3)\quad r=3$
d) $C(-2;-3)\quad r=4$
e) $C(1;-2)\quad r=2$
f) $C(-5;-5)\quad r=5$
g) $C(-2;0)\quad r=1$
h) $C(2;-3)\quad r=2$
i) $C(1;-3)\quad r=3$
j) $C(11;10)\quad r=9$

Dada la ecuación general, se pide trazar la circunferencia y encontrar centro y radio de la misma

a) $x^2+y^2-36=0$
b) $x^2+y^2-2=0$
c) $x^2+y^2+5y-1=0$
d) $x^2+y^2-4y=0$
e) $x^2+y^2+2x=8$
f) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
g) $x^2+y^2-4x-2y+13=0$
h) $x^2+y^2-2x-10y+25=0$
i) $x^2+y^2-8x+10y-12=0$
j) $x^2+y^2-x-2=0$

APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

Circunferencia que pasa por tres puntos

Determinar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:

a) $A(6;0);B(0;8);D(0;0)$
b) $A(-2;0);B(2;8);D(4;3)$
c) $A(6;2);B(-1;5);D(0;1)$
d) $A(5;3);B(-2;8);D(2;3)$
e) $A(3;-1);B(-1;3);D(1;3)$
f) $A(6;0);B(0;0);D(0;-6)$
g) $A(-5;2);B(1;3);D(5;-3)$
h) $A(2;-5);B(-1;8);D(3;1)$
i) $A(-5;9);B(-2;-6);D(3;-1)$
j) $A(-8;-4);B(-2;6);D(1;3)$

Familia de circunferencias

Representa gráficamente las siguientes familias de circunferencias:

a) Centro en el punto $(1;2)$ y $p=1,2,3$
b) Centro en origen y $p=1,3,5$
c) Centro en el punto $(-2;3)$ y $p=1,2,3$
d) Centro en el punto $(2;-3)$ y $p=2,4,6$
e) Centro en el punto $(1;-5)$ y $p=3,5,6$
f) $(x-1)^2+(y-3)^2=p^2$
g) $(x)^2+(y-2)^2=p^2$
h) $(x+2)^2+(y-4)^2=p^2$
i) $(x-3)^2+(y)^2=p^2$
j) $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$

Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

a) Centro en la intersección de las rectas $2x+3y-5=0, x-4y+3=0$

b) Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son: $(4;-3)$ y $(5;6)$

c) Concéntricas con la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

d) Concéntricas con la circunferencia que pasa por los puntos $(0;0)$, $(1;1)$, $(1;-1)$

Varios

a) Sean los puntos $A(3;-2)$, $B(1;2)$, $D(-5;4)$ que forman un triángulo, ¿cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo?

b) Una circunferencia pasa por el punto $(1;-6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x-7y+10=0, 7x+3y-13=0$. Encuentra su ecuación.

c) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 6 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?

d) Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(7;5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2+4x+16y-22=0$

Tangente a una circunferencia

a) ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de Centro $C(2;0)$ y es tangente a la recta $x-y+4=0$?

b) ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y es tangente a la recta $2x+3y-7=0$, en el punto $(2;1)$?

c) ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de Centro $C(1;6)$ y es tangente a la recta $x-y+4=0$?

d) ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de Centro $C(-4;-1)$ y es tangente a la recta $3x-2y-12=0$?

e) Determinar la ecuación general de aquella circunferencia de Centro $C(1;6)$ y que es tangente al eje X

f) Se tiene el punto central $C(3;-1)$ y es tangente al eje Y, halla la ecuación general.

g) Con centro en $C(-4;3)$ y tangente al eje Y, ¿Cuál es la ecuación general?

h) Tiene centro en $C(2;-3)$ y que es tangente al eje X, encuentra la ecuación general.

Problemas de aplicación

a) Se notificó una fuga de agua con origen en una zona a 16 km al Este y 14 km al Sur del centro de la estación central de una ciudad. El agua inundó la zona en un radio de 3 km a la redonda. ¿Cuál es la ecuación del área inundada? ¿La zona que está a 5 km al Este y 7 km al Sur de la estación, fue afectada?

b) Un avión sobrevuela la torre de control esperando respuesta para poder aterrizar. Determinar el radio entre la torre y el avión, obtener el perímetro del movimiento del avión si vuela con una trayectoria $x^2+y^2-8x+6y+3=0$ y determinar las coordenadas de la torre.

c) Los comunarios y las autoridades acordaron construir el Centro de Salud a la misma distancia de sus comunidades. La comunidad P está a 3 km al Este y 5 km al Sur del Centro de Salud, la comunidad Q está a 7 km al Norte y la comunidad R a 12 km al Este y 3 km al Norte. ¿En qué lugar se construye el Centro de Salud? ¿Qué distancia recorrerán los comunarios, en línea recta, para llegar al Centro de Salud?

d) Desde un centro de investigaciones sismológicas se detecta un sismo que se originó a 3 km Este y 2 km Sur, con un radio de 6 km a la redonda. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia del área afectada? ¿Afectó en algo al centro de investigación?

PARÁBOLA

Elementos de la parábola

Completar la tabla:

Ecuación	Vértice	Eje	Foco	Lado Recto	Directriz
	(0;0)				y=2
			(0;0)		x=-6
$x^2+8y-2x=0$					
	(3;2)		(4;2)		
$(y-2)^2=-4(x-3)$					
$y^2=-3/2\,x$					
	(0;0)			6	

Ecuación principal u ordinaria de la parábola

Encontrar la ecuación principal si se conocen:

a) $V(0;5)$, $F(-3;5)$

b) $D: x+2=0$ $V(1;3)$

c) $a=2$, $F(2;0)$, Eje paralelo a X

d) $V(2;-3)$, $F(2;3)$

e) $D: y=-2$, $V(0;6)$

Determinar los elementos de la parábola y trazar su gráfica:

a) $y^2=7x$

b) $y^2=-4x$

c) $x^2=-y$

d) $x^2=5/2\,y$

e) $y^2=-16(x-1)$

f) $(x+3)^2=6y$

g) $(x-2)^2=-2y$

h) $(y-2)^2=-4(x+3)$

i) $(y+2)^2=-(x-6)$

j) $(x-1)^2=8(y+3)$

Ecuación general de la parábola

Transformar las ecuaciones generales a su forma principal, indicar los elementos y trazar la gráfica:

a) $x^2+3x-3y+8=0$

b) $x^2-2x+2y+5=0$

c) $y^2+12y+4x-6=0$

d) $y^2+10y+7x-20=0$

e) $2x^2+8x-8y-1=0$

Parábola que pasa por tres puntos

Determinar la ecuación general de la parábola que pasa por los puntos indicados y que tengan eje de simetría paralelo al indicado:

a) $A(3;3)$, $B(6;5)$, $C(6;-3)$, X

b) $A(4;5)$, $B(-2;11)$, $C(-4;21)$, Y

c) $A(-7;4)$, $B(-5;0)$, $C(-7;-4)$, X

d) $A(5;3)$, $B(5;-5)$, $C(11;7)$, X

e) $A(-1;4)$, $B(0;-1)$, $C(2;-2)$, Y

f) $A(-6;2)$, $B(2;2)$, $C(5;6)$, Y

g) $A(-7;5)$, $B(-4;3)$, $C(4;3)$, Y

h) $A(-5;-2)$, $B(1;1)$, $C(7;2)$, X

i) $A(0;0)$, $B(5;2)$, $C(6;-4)$, X

j) $A(-1;2)$, $B(0;-6)$, $C(4;3)$, Y

Recta tangente a una parábola

Encontrar la recta tangente a la parábola en el punto dado para cada ecuación:

a) $2x^2-x+12y+22=0, A(36;1)$

b) $x^2-3y=0$, $A(2;4/3)$

c) $y^2+2x=0$, $A(-3/2;-1)$

d) $y^2+5x+5=0, A(-6;5)$

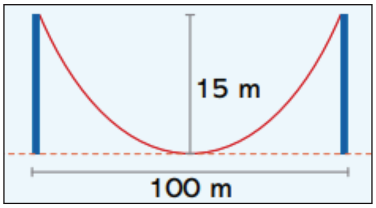
e) $x^2+4x-8y-20=0, A(-2;-3)$

Problemas de aplicación

a) Un arco parabólico tiene una altura de 9 metros, su base 12 metros. Hallar la ecuación y la altura de los puntos del arco situados a 4 metros del centro.

b) Dos niños que están separados por 5 metros uno del otro, sujetan una cuerda a un metro de altura. Obtener la altura de la cuerda a 1,5 metros del centro de la parábola que forma la cuerda.

c) La distancia entre dos soportes verticales de un puente colgante es de 100 m y la altura de un pilar es de 15 m, como muestra la figura.



d) Si el cable tiene forma parabólica, obtener su ecuación.

Hallar la altura del cable a 30 m del centro.

e) Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 cm del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?

(Ejercicios y problemas recopilados)

ELIPSE E HIPÉRBOLA

PRÁCTICA

Luis es un Físico que trabaja en el planetario Max Schreier, de la Universidad Mayor de San Andrés.

Su pasión por la ciencia lo llevó a estudiar la carrera de Física y especializarse en la astronomía, pues su sueño es trabajar en la NASA algún día.

En estos últimos meses, por las noches accede al telescopio del planetario, para observar el movimiento de los planetas, asteroides, cometas y otros cuerpos celestes, y ha verificado que su desplazamiento alrededor de una órbita sigue una forma elíptica con respecto a otros cuerpos mayores.

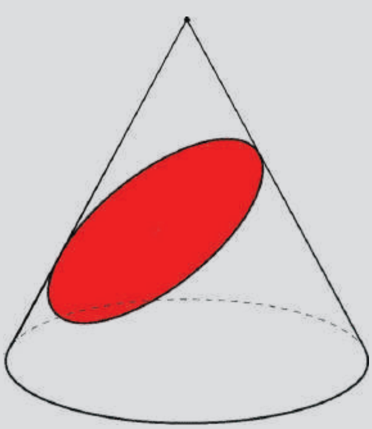
Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué fuerzas físicas definen el movimiento de estos cuerpos de forma elíptica?
- ¿Cómo se expresa el movimiento elíptico en la mecánica y la electricidad?
- ¿Qué otros fenómenos o acciones físicas describen su movimiento de forma elíptica?

TEORÍA

REPRESENTACIÓN CÓNICA



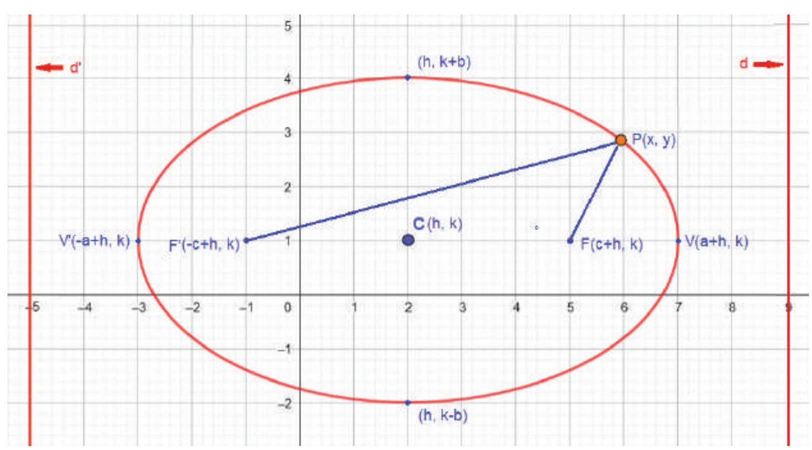
Las cónicas resultan de cortar de diferentes maneras un cono. En este caso, al cortar de forma oblicua un cono, la región que se forma se llama elipse.

1. Elipse

Lugar geométrico donde la suma de distancias a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos se llaman focos.

a) Elementos

El esquema general de una Elipse es el siguiente:



Donde:

(h,k): coordenadas del centro de la elipse

$C_{(h,k)}$: es el centro de la elipse de coordenadas

$F_{(c+h,k)}$, $F'_{(-c+h,k)}$: son los puntos fijos

d,d': se denominan directrices

b) Ecuaciones

Elipse sobre el eje X

Ecuación general:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Forma general:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Directriz: $x=\frac{\pm a^2}{c}$

Focos: $F'_{(-c+h,k)}$; $F_{(c+h,k)}$

Vértices Primarios:

$V'_{(-a+h,k)}$;$V_{(a+h,k)}$

Vértices secundarios:

$B'_{(h,-b+k)}$;$B_{(h,b+k)}$

Relación de Elipse:

$a^2=b^2+c^2$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}<1$

Lado Recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Relación de Elipse:

$a^2=b^2+c^2$

Sobre el eje Y

Ecuación general:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Forma general:

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Directriz: $y=\frac{\pm a^2}{c}$

Focos: $F'_{(h,-c+k)}$; $F_{(h,c+k)}$

Vértices Primarios:

$V'_{(h,-a+k)}$;$V_{(h,a+k)}$

Vértices secundarios:

$B'_{(-b+h,k)}$;$B_{(b+h,k)}$

Relación de Elipse:

$a^2=b^2+c^2$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}<1$

Lado Recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Relación de Elipse:

$a^2=b^2+c^2$

c) Propiedades

Propiedad 1

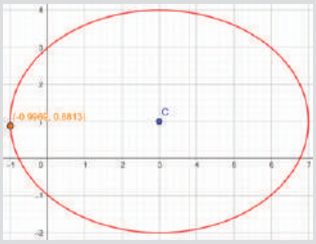
La distancia de un punto focal a la intersección de la elipse con la recta tangente más la distancia del otro punto focal a la misma intersección, es igual a $2a$, es decir $d_1+d_2=2a$

Propiedad 2

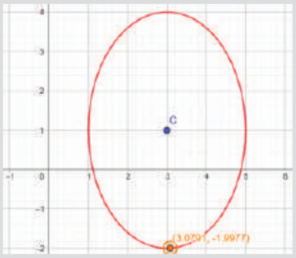
El ángulo entre d_1 y la recta tangente es igual al ángulo entre d_2 y la recta tangente, es decir $\alpha=\beta$

ECUACIONES

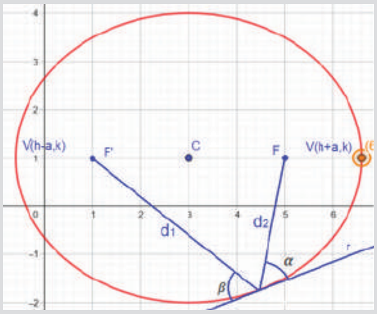
Sobre el eje X



Sobre el eje Y



Propiedad



Ejemplo:

Hallar todos los elementos de la elipse si el Foco es: $F(6,1)$,$F'(-2,1)$ y el Vértice es: $V(7,1)$,$V'(-3,1)$

Hallamos las variables correspondientes igualando los datos con las ecuaciones correspondientes:

Para el Foco: $F(6,1)=F(c+h,k)$; $F(-2,1)=F(-c+h,k)$

Para le vértice: $V(7,1)=F(a+h,k)$; $F(-3,1)=F(-a+h,k)$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} c+h&=6\ldots(1)\\ -c+h&=-2\ldots(2)\end{aligned}\right\}$$ sumando ambas ecuaciones (1) y (2): $2h=4 \rightarrow h=2$; en (1): $c+2=6 \rightarrow c=4$

$$\left.\begin{aligned} a+h&=7\ldots(3)\\ -a+h&=-3\ldots(4)\end{aligned}\right\}$$ como h=2, reemplazando en (3): $a+2=7 \rightarrow a=5$

$k=1\ldots(5)$

Resumimos variables: $h=2;k=1;c=4;a=5$

Esto implica que el centro de la elipse es: $C:(h,k)=(2,1)$

Si: $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2} \rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2}$ $\quad \boldsymbol{b=3}$

Según la ecuación general de la elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Reemplazamos valores: $\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1} \rightarrow$ ecuación de la Elipse.

Para la forma general: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \rightarrow \frac{9(x^2-4x+4)+25(y^2-2y+1)}{(25)(9)}=1 \rightarrow 9x^2-36x+36+25y^2-50y+25=1(25)(9)$

$9x^2-36x+25y^2-50y=164 \rightarrow$ Forma general

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $\quad \boldsymbol{e=\frac{4}{5}}$

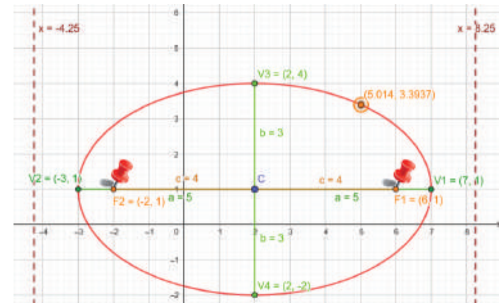
Latus Rectum (lado recto): $LR = \frac{2b^2}{a} \rightarrow LR = \frac{2*3^2}{5} \rightarrow \boldsymbol{LR} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}$

Directriz (paralelo al eje x)

$$d: (x - \mathrm{h}) - \frac{a}{e} = 0 \rightarrow x - 2 - \frac{5}{\frac{4}{5}} \rightarrow \boldsymbol{d}: \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{4}}$$

$$d: (x - \mathrm{h}) + \frac{a}{e} = 0 \rightarrow x - 2 + \frac{5}{\frac{4}{5}} \rightarrow \boldsymbol{d}: \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}$$

Gráficamente:

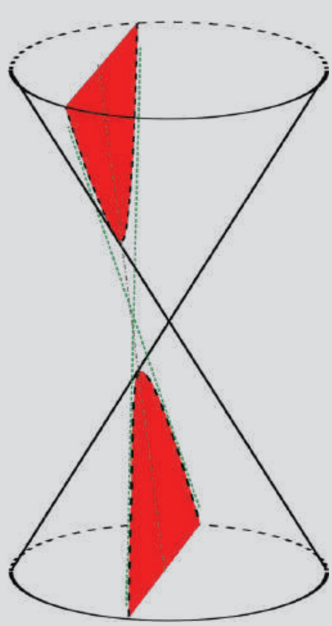


Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

- Graficar la elipse $9x^2+16y^2=100$ con todos sus elementos.
- Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (2,-6) y (2,6) y sus focos son (0,-5) y (0,5).
- Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (-2,0) y su excentricidad es 2/3.
- Los focos de una elipse son los puntos (0,-3) y (0,3) y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es 9. Hallar su ecuación.
- Hallar la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyo eje principal se encuentra en el eje X. El eje menor es igual a 10 y la excentricidad es 12/13.
- Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse con centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0,-7) y pasa por el punto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})g$

REPRESENTACIÓN CÓNICA



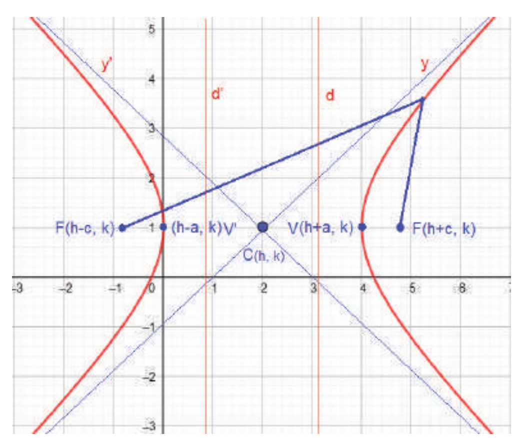
Las cónicas resultan de cortar de diferentes maneras un cono. En este caso, al cortar de forma vertical dos conos, ubicados como en la figura, la región que se forma se llama hipérbola.

2. Hipérbola

Lugar geométrico de puntos donde la diferencia de distancias a los puntos fijos es constante, los puntos fijos se llaman focos.

a) Elementos

El esquema general de una Hipérbola es la siguiente:



Donde:

(h,k): coordenadas del centro de la hipérbola

$C_{(h,k)}$: es el centro de la hipérbola de coordenadas (h,k)

$F_{(c+h,k)}, F'_{(-c+h,k)}$: son los puntos fijos o Foco

d, d': se denominan directrices

b) Ecuaciones

Hipérbola sobre el eje X

Ecuación general:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Forma general:

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Directriz: $x=\frac{\pm a^2}{e}$

Focos: $F'(-c+h,k)$; $F(c+h,k)$

Vértices Primarios:

$V'(-a+h,k)$ $\quad V(a+h,k)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}<1$

Lado Recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Relación de Hipérbola:

$a^2=b^2+c^2$

Sobre el eje Y

Ecuación general:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Forma general:

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Directriz: $y=\frac{\pm a^2}{c}$

Focos: $F'(h,-c+k)$; $F(h,c+k)$

Vértices Primarios:

$V'(h,-a+k)$ $\quad V(h,a+k)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}<1$

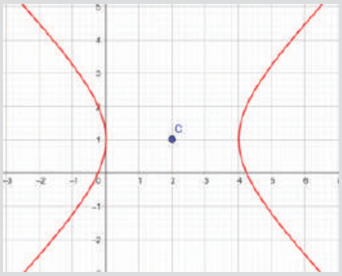
Lado Recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Relación de Hipérbola:

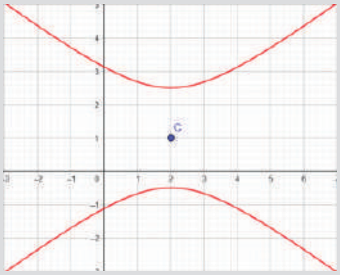
$a^2=b^2+c^2$

ECUACIONES

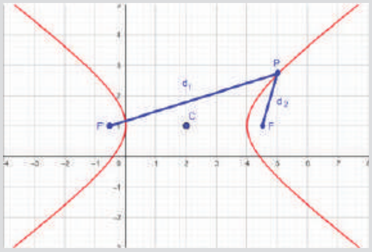
Sobre el eje X



Sobre el eje Y



Propiedad



c) Propiedad

La resta del segmento d_1 que distancia de un punto focal y un punto P de la elipse y el segmento d_2 que es la distancia del otro punto focal con el mismo punto P es constante (no varia), vale decir:

$$|d_1-d_2| = \text{constante}$$

Ejemplo:

Hallar todos los elementos de la hipérbola si la excentricidad es: $e=\sqrt{2}$ y los Vértices están en: $V(3,2),V'(-1,2)$

Hallamos las variables correspondientes igualando los datos con las ecuaciones.

Del vértice:

$$V(3,2) = F(a+h,k);\ F(-1,2) = F(-a+h,k)$$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{matrix} a+h=3\ldots(1) \\ -a+h=-1\ldots(2) \end{matrix}\right\}$$ sumando ambas ecuaciones (1) y (2): $2h=2 \rightarrow h=1$; en (1): $a+1=3 \rightarrow a=2$

$k=2\ldots(3)$

Resumimos variables: $h=1;\ k=2;\ a=2$

Esto implica que el centro de la elipse es: $C:(h,k)=(1,2)$

De la excentricidad: $e=\sqrt{2}$, pero por definición: $e=c/a$, entonces: $\sqrt{2}=c/2 \rightarrow c=2\sqrt{2} \rightarrow 2{,}8284$

De la relación: $c^2=a^2+b^2 \quad b=\sqrt{c^2-a^2} \quad b=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2} \quad \boldsymbol{b=2}$

Según la ecuación general de la hipérbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Reemplazamos valores: $\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y-2)^2}{2^2}=1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1} \rightarrow$ Ecuación de la hipérbola

Para la forma general: $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1 \rightarrow \frac{(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)}{4}=1 \rightarrow x^2-2x+1-y^2+4y-4=4(1)$

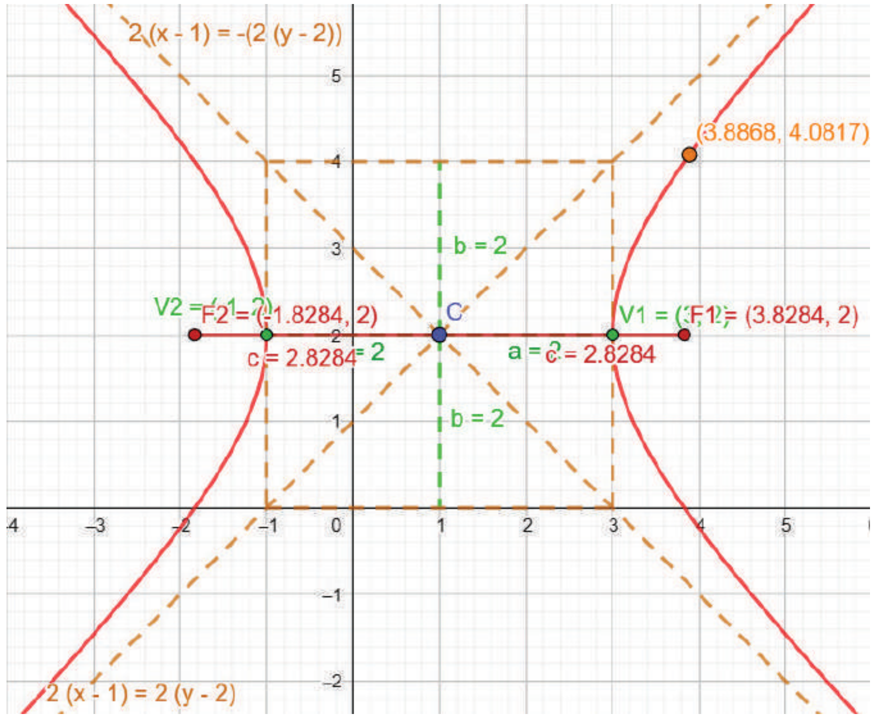
$x^2-2x-y^2+4y=7 \rightarrow$ Forma general

Latus Rectum (lado recto): $LR=\frac{2b^2}{a} \quad LR=\frac{2*2^2}{2} \quad \boldsymbol{LR=4}$

Asíntotas: $(y-k)=\pm\frac{ax}{b} \quad (y-2)=\pm\frac{2x}{2} \quad y=\pm x+2\begin{cases} y=x+2 \\ y'=-x+2 \end{cases}$

Directrices: $d:(y-k)=\pm\frac{a}{e} \quad y-2=\pm\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{cases} d: y=2+\sqrt{2} \\ d': y'=2-\sqrt{2} \end{cases}$

Gráficamente:



Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

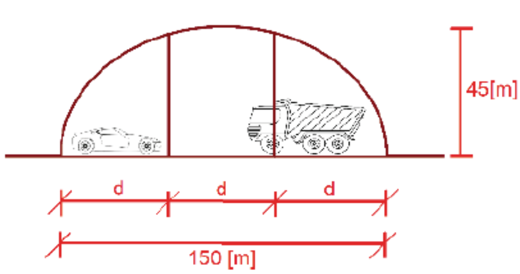
- Halla la ecuación de una hipérbola de centro en el origen, con foco en el eje Y, la distancia del lado recto es $16/3$ y la asíntotas en la pendiente es $3/4$.
- Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje. Halla su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\sqrt{6/2}$ y que pasa por el punto (2,1)
- El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso esta sobre el eje Y. Si un foco es el punto (0,4) y la excentricidad es igual a 2. Hallar su ecuación.
- Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse $25x^2+9y^2=225$. Halla la ecuación de la hipérbola con excentricidad $4/3$.
- Halla la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $2x^2+3y^2=24$ y cuyos vértices están en los focos de la elipse.

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Ejemplo:

Un puente está diseñado de tal manera que sus soportes tienen forma de semi elipse con una longitud de 150 m, siendo su máxima altura 45 m. Hallar la altura de dos soportes verticales cuya distancia entre sí y a sus respectivos extremos es la misma.

Planteamos el problema gráficamente:



d: Es la distancia equivalente entre los soportes y sus respectivos extremos, entonces las distancias son iguales.

Tomamos como origen $(0,0)$ de la elipse el punto de inicio del lado izquierdo del puente, con ello las variables que utiliza la elipse son:

$$2a=150 \rightarrow a=75$$

$$b=45$$

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{75^2 - 45^2} \rightarrow c = 60[m]$

De la ecuación general: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, asumiendo el punto de origen al inicio del puente, el centro de la elipse es $C(75,0) \rightarrow h=75, k=0$, reemplazando en la ecuación general:

$$\frac{(x-75)^2}{75^2} + \frac{(y-0)^2}{45^2} = 1$$

Para hallar la altura de uno de los soportes, tomamos la distancia de uno de los mismos respecto al origen, vale decir: si $3d=150 \rightarrow d=50$, ahora calculamos la altura en la ecuación general:

$$\frac{(x-75)^2}{75^2} + \frac{(y-0)^2}{45^2} = 1 \rightarrow \frac{(50-75)^2}{75^2} + \frac{(y-0)^2}{45^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{y = 30\sqrt{2}[m] \equiv 42,43[m]}$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

- Un arco en forma de media elipse tiene $40[\mathrm{m}]$ de ancho y $16[\mathrm{m}]$ de altura en el centro. Encuentre la altura del arco de $10[\mathrm{m}]$ del extremo derecho.
- El techo de un túnel de forma semi elíptica tiene $14[\mathrm{m}]$ de altura en su punto más alto y $10[\mathrm{m}]$ de ancho, si las paredes laterales tienen una altura de $10[\mathrm{m}]$, encontrar la altura del techo a $2[\mathrm{m}]$ de cualquier pared.
- El arco de un túnel es de forma semi elíptica, tiene un ancho en la parte más baja de 48 m y una altura en el centro de 20m. ¿Qué ancho tiene el túnel a la mitad de su altura?

VALORACIÓN

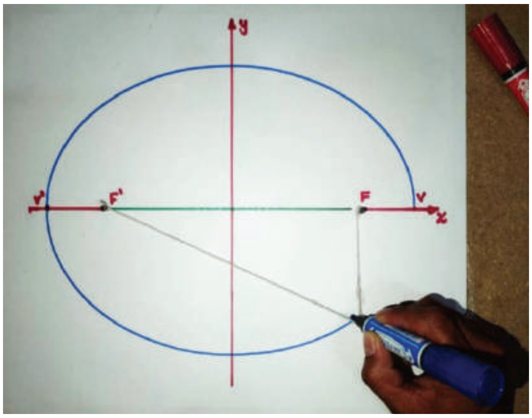
Las secciones cónicas están presentes de diversas formas en la vida cotidiana. Un ejemplo de ello es aplicación de la elipse en la medicina con el “litotriptor”. Este es un aparato médico que se utiliza para desintegrar los llamados “cálculos renales”, recurriendo a ciertas propiedades de reflexión que concentran ondas intra acuáticas de choque en un foco de un elipsoide.

- Investiga el funcionamiento del litotriptor.
- Conversa en clase sobre el funcionamiento del litotriptor y el uso de las ecuaciones de la elipse.
- ¿En qué otra situación cotidiana se observan los elementos de la elipse o hipérbola?

PRODUCCIÓN

Diseñamos el tablero de la figura con los siguientes materiales:

- Un tablero
- Dos clavos
- Una hoja de papel
- Varias tiras de cuerda
- Un marcador



Atar la cuerda a los dos clavos (focos) y dibuja la elipse correspondiente en la hoja de papel, tomando como referencia al punto medio entre los clavos, como centro de la elipse y también el origen del eje de coordenadas.

Con estos detalles, tomar las medidas correspondientes de la elipse para 3 tiras de cuerda de diferente tamaño, vale decir, las coordenadas, variables, la ecuación y la forma general de la elipse.

TEORÍA DE CONJUNTOS

PRÁCTICA

Juana es una maestra de primaria, su vocación a la enseñanza y el manejo a los niños la convirtieron en la maestra favorita del salón.

Ella desea conocer la personalidad grupal e individual de los estudiantes, con el objeto de promover la comunicación y nivelar el aprendizaje segmentando a aquellos niños que tienen dificultades de aprendizaje o su comportamiento no es el bueno.

En una de las varias actividades de curso, ella reúne a los estudiantes y les pide que realicen una coreografía en formar de círculos, con el fin de despertar la creatividad y realizar el trabajo en conjunto y lograr la unión de los estudiantes que en ciertas ocasiones se los han visto distanciados unos de otros.

Actividad

Respondemos:

- ¿Cómo fomentarías la colaboración y la comunicación para lograr la unión en el grupo?
- ¿Qué tienes en común con tus compañeros de curso?

TEORÍA

CONJUNTO

La idea de agrupar objetos de la misma naturaleza para clasificarlos en “colecciones” o “conjuntos” es parte de la vida diaria de los seres humanos.

Por ejemplo, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de árboles en un terreno, el conjunto de ropa en un negocio de venta al público, el conjunto de electrodomésticos en una cocina, etc. En todos estos ejemplos, se utiliza la palabra conjunto como una colección de objetos.

Por tanto, el concepto de conjunto, está referido a reunir o agrupar personas, animales, plantas o cosas, para estudiar o analizar las relaciones que se pueden dar con dichos grupos.

1. Concepto, elementos y relación de pertenencia

Es una colección bien definida de objetos que pueden representar cualquier cosa, ya sean números, personas, letras, etc.

a) Notación

A los conjuntos los denotamos con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. También se utiliza otros símbolos que limitan que elementos pertenecen a un conjunto, como ser:

“/“ para expresar “tal que”

“∈” para expresar que un elemento pertenece a un conjunto

“<” para expresar “menor que”

“>” para expresar “mayor que”

“⊂” para expresar que un conjunto es pate de otro conjunto

b) Representación de un conjunto

Los conjuntos pueden representarse de dos formas:

a) Por extensión. Si se enumera a cada uno de sus elementos

b)Por comprensión. Si se menciona la propiedad que caracteriza a todos sus elementos.

Ejemplo:

Sea: a) $A=\{x \in Z \,/\, x<2\}$ Esta escrita por comprensión

b) $A=\{-1,0,1\}$ Esta escrita por extensión

c) $B=\{x \in R \,/\, x^2=1\}$ Esta escrita por comprensión

2. Notación de conjuntos numéricos

Algunas de estas notaciones representan a los siguientes conjuntos:

Conjunto de los números naturales: N={1,2,3,4,5,.....}

Conjunto de los números Enteros: Z={......,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....}

Conjunto de los números Racionales: Q={......,-3/5,(-1)/2,1/2,1,2.....}

Conjunto de los números Irracionales: I={...,$\sqrt{2}$,π,e,$\sqrt{5}$.....}

3. Definición de un conjunto

a) Por extensión

Si se enumera a cada uno de sus elementos que lo constituyen.

Ejemplo:

A={-1,0,1} Esta escrita por extensión ya que se pueden enumerar uno a uno todos los elementos

b) Por comprensión

Se dice que un conjunto está determinado por comprensión si y solo si se menciona la propiedad que caracteriza a todos sus elementos.

Ejemplo

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

a) W={x/x es día habíl de la semana}

Los días hábiles de la semana que formarán conjunto W son: W={lunes,martes,miercoles,jueves,viernes}

b) A={x∈N / x≤7} Esta escrita por comprensión

Los números naturales menores o iguales a 2 son: 1,2,3,4,5,6,7

Por tanto, la determinación por extensión es: A={1,2,3,4,5,6,7}

c) B={x∈Z /-5>x≤2}

Los números enteros mayores a -5 y menores o iguales a 2, son: -4,-3,-2,-1,0,1,2

Por tanto, la determinación por extensión es: B={-4,-3,-2,-1,0,1,2}

d) C={x∈N / x^3 =x}

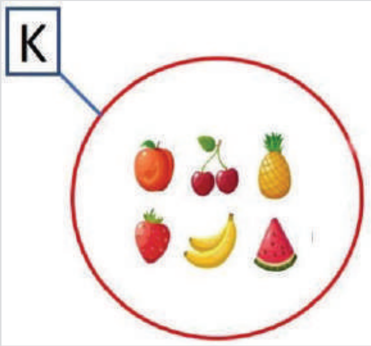
Resolviendo la ecuación: $x^3=x \rightarrow x^3-x=0 \rightarrow x(x^2-1)=0 \rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{matrix}$

Considerando solo los números naturales, la determinación por extensión es: C={1}

4. Diagrama de Venn

Es una relación grafica que utiliza círculos solapados para mostrar en forma gráfica la relación lógica entre dos o más grupos que contienen elementos, resaltando la igualdad o diferencia con sus elementos.

POR COMPRENSIÓN Y POR EXTENSIÓN



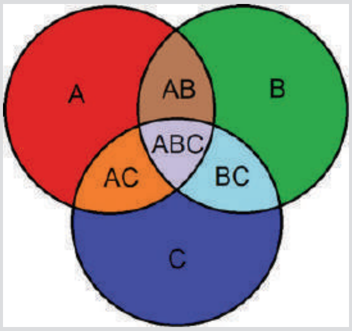
Por comprensión:

K={x / x son frutas}

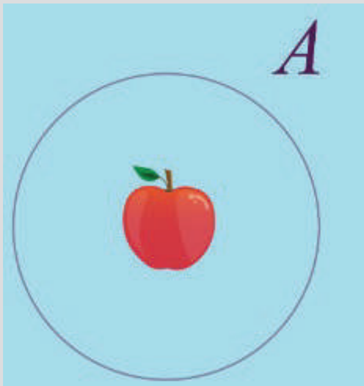
Por extensión:

$$K = \left\{ \begin{matrix} manzana, cerezas, piña, \\ plátano, sandía \end{matrix} \right\}$$

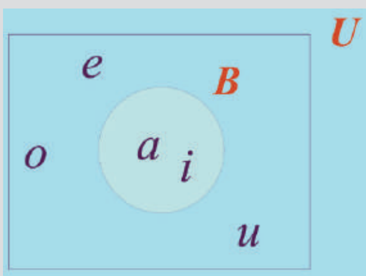
GRÁFICAMENTE



CONJUNTOS



Conjunto Unitario



Conjunto Universo

5. Conjuntos especiales

Son aquellos que se caracterizan por el número de elementos, entre ellos podemos mencionar: conjunto unitario, conjunto vacío, conjunto universal.

a) Conjunto unitario

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento

Ejemplo. $A=\{x\ /\ x=a\}=\{a\}$

Ejemplo:

C={x /x es la última letra del abecedario}=Z

b) Conjunto Vacío

El conjunto vacío es aquel conjunto que carece de elementos y se denota por Ø.

Ejemplo:

B={x∈R / x^2=-1}=Ø, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a -1

c) Conjunto Universal

Es un conjunto de cuyos elementos se escogen algunos de ellos para formar otros conjuntos, se denota por U.

Ejemplo:

Sea el conjunto Universo: U={0,1,2,3,4,5,6,7}, determinar los elementos del subconjunto: $A=\{x\in R / -2\leq x\leq 3\}$ que está dentro de U.

Los elementos que cumplen la desigualdad son: -2,-1,0,1,2,3

Considerando cual de esos elementos incluyen en el conjunto U: A={0,1,2,3}

Ejemplo:

Para U={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, hallar el subconjunto B, si el conjunto $B=\{x\in U / x^2\in U\}$

Los elementos de x donde su respectivo x^2 también pertenece a U son: $(-3)^2 = 9, (-1)^2 = 1, 0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4$ y $3^2 = 9$, por tanto el conjunto B es: B={-3,-2,-1,0,1,2,3}

Actividad

Hallamos los siguientes conjuntos:

- A = {x /x es un mes del año que solo tenga 30 días}
- B={x / x es una selección campeona mundial}
- $C=\{x\ /\ x^2 = x\}$
- $D=\{x\in Z\ /\ (x+1)^2 = 4\}$
- Sea el conjunto universo U={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, hallamos los subconjuntos:
  - $E=\{x\in U\ /\ -2\leq x < 5\}$
  - $F=\{x\in U / x^2\in U\}$
  - $G=\{x\in U / (x^2-1)\in U\}$
- Sea el conjunto universo U={x∈N / x es un número impar}, hallamos los subconjuntos:
  - $H=\{x\in U\ /\ -10\leq x\leq 21\}$
  - $I=\{x\in U\ /\ (x^3 + 9x^2 + 26x + 24=0)\in U\}$
  - $J=\{x\in U / (\sqrt{(x^3-1)})\in U\}$

6. Relación entre conjuntos

Se sabe que el símbolo "∈" (pertenencia) se utiliza para relacionar un elemento con un conjunto, pero existe otro símbolo "⊂" (subconjunto) que relaciona dos conjuntos definidos, uno incluido dentro del otro, en un mismo universo. Entre las relaciones más importantes tenemos a:

a) Inclusión de conjuntos

Definición

Si: $A \subset B \leftrightarrow \forall x : x \subset A \rightarrow x \subset B$

Observaciones

$A \subset A$ Todo conjunto está incluido en sí mismo.

$\emptyset \subset A$ El conjunto vacío está incluido en cualquier otro conjunto.

$A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$ Transitividad de la inclusión de conjuntos.

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B=\{3,4,5,6,9,11\}$

$C=\{4,5,6\}$

Verificar que conjuntos pertenecen a otros conjuntos

Identificamos los conjuntos de menor a mayor: $C<B<A$

Los elementos de $C=\{4,5,6\}$ si repiten en sus inmediatos superiores, es decir los conjuntos de A y B.

Los elementos de B no repite en su inmediato superior.

Con ello se puede afirmar lo siguiente:

- $C \subset A$
- $C \subset B$
- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$

b) Igualdad de conjuntos

Definición. Dos conjuntos A y B son iguales $A=B \leftrightarrow \forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$ o bien $A=B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Ejemplo:

Verificar si los conjuntos $A=\{x \,/\, x^2-3x-4=0\}$ y $B=\{x \in N / x<3\}$ son iguales

Sean los conjuntos:

$A=\{x \,/\, x^2-3x-4=0\}$

Resolviendo la ecuación: $x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-1)=0$

Se tiene: $x=2, x=1$

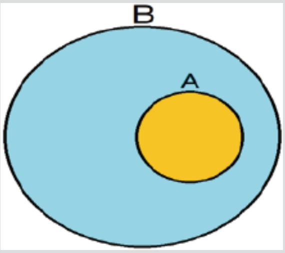
Por tanto: $A=\{1,2\}$

$B=\{x \in N \,/\, x<3\}$

Por extensión tenemos: $B = \{1,2\}$

En consecuencia, $A=B$, ya que tienen los mismos elementos.

REPRESENTACIÓN CÓNICA



A está incluido en B

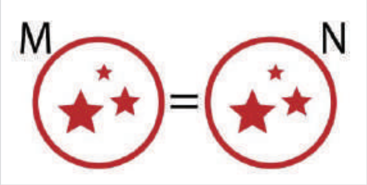
Todos los elementos de A le pertenecen a B

SUDAMÉRICA

Bolivia está incluida en Sudamérica

Entonces: ¡los nueve departamentos de Bolivia están incluidos en Sudamérica!

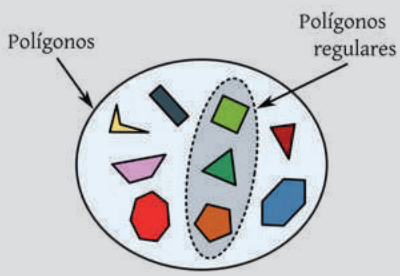
IGUALDAD



Conjuntos iguales

Todos los elementos de N son los mismos que los elementos de M

CONJUNTO DE PARTES



El conjunto de los “Polígonos regulares” es una parte del conjunto de “Polígonos”

NOTACIÓN

- $\{\ \}$ *Conjunto*
- $\in$ *Pertenece*
- $\notin$ *Nopertenece*
- / *Tal que*
- # *Cardinalidad*
- $\subset$ *Subconjunto*
- $\not\subset$ *No es subconjunto*
- $\cap$ *Inter sec ción*
- $\cup$ *Unión*
- $\wedge$ *Conjunción y*
- $\vee$ *Disyunción o*

c) Conjunto de partes

Definición. Se entiende por conjunto de partes de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, y se denota por $P_{(A)}$

En símbolos: $P_{(A)} = \{X / X \in A\}$

O bien: $X \in P_{(A)} \leftrightarrow X \in A$

El número de elementos del conjunto de partes se puede determinar con la siguiente relación:

$$N[P_A] = 2^{n(A)}$$

Donde $n(A)$: es el número de elementos del conjunto A

Ejemplo:

Determinar el conjunto de partes de $A=\{2,3,4\}$

La cantidad de elementos es: $N[P_A] = 2^3 = 8$

Los elementos de $P_{(A)}$ son todos los subconjuntos de A, es decir: $\emptyset;\{2\},\{3\},\{4\};\ \{2,3\},\{2,4\},\{3,4\};A$

Y la notación por extensión es:

$P_{(A)} = \{\ \emptyset,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},A\}$

Ejemplo:

Determinar el conjunto de partes de

$$B=\{x \ /\ x \text{ son las últimas 4 letras del abecedario}\}$$

Los elementos son: $\{w,x,y,z\}$

La cantidad de elementos es: $N[P_A] = 2^4 = 16$

Los elementos de $P_{(A)}$ son todos los subconjuntos de A, es decir:

$$\emptyset; \{w\},\{x\},\{y\},\{z\}; \{w,x\},\{w,y\},\{w,z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}; \{w,x,y\},\{w,x,z\},\{w,y,z\},\{x,y,z\};\ B$$

Y la notación por extensión es:

$$P_{(B)} = \{\emptyset; \{w\},\{x\},\{y\},\{z\}; \{w,x\},\{w,y\},\{w,z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}; \{w,x,y\},\{w,x,z\},\{w,y,z\},\{x,y,z\};\ B\}$$

Ejemplo:

Determinar el conjunto de partes de $A=\{a,b,c\}$

El número de elementos del conjunto se determina con $2^n = 2^3 = 8$, es decir que el conjunto dado tiene 8 partes.

$$P(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{\emptyset\}\}$$

Observación. La cantidad de partes que tiene un conjunto no será impar, ya que 2^n siempre es par.

Actividad

Hallamos los siguientes conjuntos:

- Dado el conjunto $A= \{\ 2,4,6\ \}$ escribe el conjunto partes de A
- Dado el conjunto $B=$ { Fuego, Tierra, Aire, Agua } escribe el conjunto partes de B
- Dado el conjunto $C= \{\ a,e,i,o,u\ \}$ escribe el conjunto partes de C

VALORACIÓN

La teoría de conjuntos se debe a una sola persona, George Cantor. La idea de infinito había sido de una profunda reflexión desde la época de los griegos (450 A.C). En la edad media la discusión del infinito había dado lugar a la comparación de conjuntos infinitos, con el trabajo de Cantor, la teoría de conjuntos se estableció sobre una base matemática adecuada. Los primeros trabajos de Cantor estuvieron relacionados con la teoría de números, de 1867 a 1871. En la actualidad se siguen manteniendo estos conceptos y se los relaciona en distintos campos, con un criterio matemático.

Bertrand Russel
1872 – 1970

Investigamos en qué consiste el tratado de las 6 partes sobre la teoría de conjuntos.

Averiguamos a qué se refiere la paradoja de Roussell.

¿Cómo influye la teoría de los conjuntos en las ciencias actuales?

¿En qué situaciones cotidianas se aplica la teoría de conjuntos?

PRODUCCIÓN

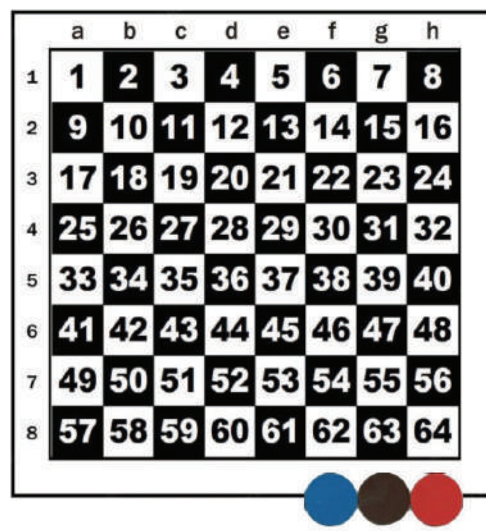
Diseñamos el tablero de la figura adjunta, similar a un tablero de ajedrez, con los siguientes materiales:

Una hoja de cartulina.

Lápiz.

Una hoja de papel.

Tres hojas de goma Eva de distinto color.



Dividimos la hoja de papel en 16 trozos y escribimos en cada uno un conjunto por comprensión distinto, cuyos elementos luego de ser transformados por extensión, estén en el intervalo del 1 al 64; luego recortamos las hojas de goma eva en forma de fichas.

El juego consiste en que, dentro de un grupo de 3 participantes, cada uno elige un papel y lo resuelve convirtiendo al conjunto por comprensión dado (ejemplo $A=\{x / x^2 -3x+2=0\}$) a un conjunto por extensión (o sea, $A=\{x=1,x=2\}$).

Luego ubicamos las fichas que representan cada uno a los elementos del conjunto (del ejemplo {1, 2}) en las casillas del tablero y si el proceso es correcto se apunta como respuesta correcta. Luego de turnarse entre los participantes.

El primero que complete 4 respuestas correctas se considera ganador.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

PRÁCTICA

Lucia trabaja en una prestigiosa heladería de la ciudad. Ella tiene la misión de programar la cantidad de helados que ha de producir al día siguiente según los pedidos que la gente le ha solicitado el día de hoy. Entre los sabores preferidos que ofrece son: fresa, coco, vainilla y chocolate, aunque la gente en varias situaciones solicita la combinación de ellas, es decir coco con vainilla, fresa con chocolate, etc. incluso llegando a combina todos los sabores. Ella ofrece hasta cuatro pequeñas porciones en un vaso, combinando sabores o simplemente un sabor único. Estas combinaciones de sabores sumado a una cantidad exacta de preparación de cada sabor, ha llevado a utilidades altas y resultados positivos pues los sobrantes son pocos y no se echan a perder.

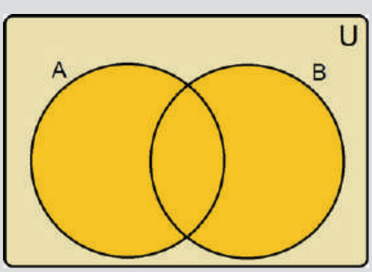
Actividad

Respondemos:

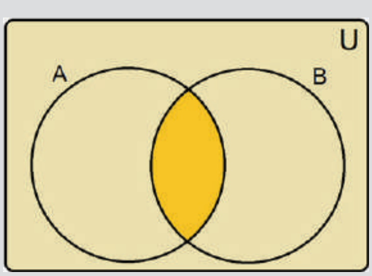
- ¿Qué beneficios conlleva este método de trabajo en lo económico?
- ¿Qué otro método usarías para registrar las ventas y utilizar estos datos para maximizar ganancias?

TEORÍA

UNIÓN



INTERSECCIÓN



1. Operaciones de conjuntos

Nos permiten obtener otros conjuntos en base a ciertas operaciones como: unión, intersección, complementación, diferencia, diferencia simétrica.

a) Unión

La unión de dos conjuntos A y B es la combinación sus elementos.

Definición. $AUB=\{x / x \in A \; W \; x \in B\}$ es decir $x \in AUB \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Ejemplo

De los conjuntos: $A=\{x \in R/(-2) < x \leq 3\}$ *y* $B=\{x \in R/2 \leq x < 5\}$, hallar la unión de ambas.

Los elementos de ambos conjuntos son: $A=\{-1,0,1,2,3\}$; $B=\{2,3,4\}$

La unión de ambas es: $AUB=\{-1,0,1,2,3,4\}$

b) Intersección

Dos conjuntos A y B formado por los elementos que son comunes.

Definición. $A \cap B=\{x / x \in A \wedge x \in B\}$ o bien $x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \cap x \in B$

Ejemplo

Sean los conjuntos: $R=\{x \in N / 3< x \leq 8\}$, $S = \{x \in N / 5 \leq x < 10\}$, hallar la intersección de ambas.

Los elementos de $R=\{4,5,6,7,8\}$, y $S=\{5,6,7,8,9\}$

La intersección de ambas es: $R \cap S=\{5,6,7,8\}$

c) Complemento

El complemento de un conjunto A son aquellos que pertenecen al conjunto universal U pero no Conjunto A.

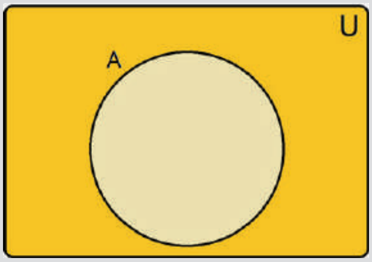
Definición. $A \subset U \rightarrow A^c = \{x \,/\, x \notin A\}$, *o bien* $x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $R=\{1,4,6\}$; $S=\{2,4,6\}$, además: $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Entonces: $R^c=\{2,3,5,7\}$ $S^c=\{1,3,5,7\}$

COMPLEMENTO



d) Diferencia

La diferencia de 2 conjuntos A y B son aquellos elementos que pertenecen al conjunto A pero no a B.

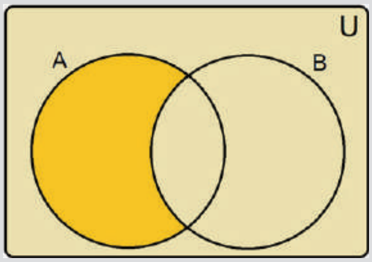
Definición. $A\text{-}B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$ *o bien* $x \in (A\text{-}B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Ejemplo:

Sea $A=\{2,4,6,8\}$ $B=\{1,2,6,7,9\}$, hallar $A\text{-}B$

Hallamos aquellos valores de A que no se repiten en B: $A\text{-}B=\{4,8\}$

DIFERENCIA



e) Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es otro conjunto que tiene por los elementos a los elementos de la reunión de las dos diferencias $A\text{-}B$ y $B\text{-}A$, es decir:

$A \Delta B=(A\text{-}B)\cup(B\text{-}A)$

$A \Delta B=(A\cup B)\text{-}(A\cup B)$

$A \Delta B=(A\cup B)\cap(A\cup B)^c$

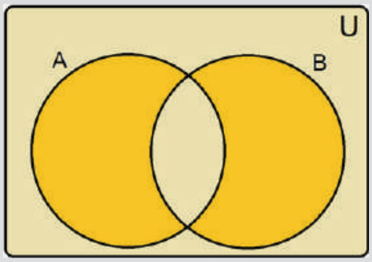
$A \Delta B=(A\cup B)\cap(A^c \cup B^c)$

También: $A \Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$

Ejemplo:

Sea los conjuntos $A=\{2,4,6,8\}$ $B=\{1,2,6,7,9\}$, entonces $A\Delta B=\{1,4,7,8,9\}$.

DIFERENCIA SIMÉTRICA



2. Leyes de operaciones de conjuntos

- Leyes de idempotencia $A\cup A=A$; $A\cap A=A$
- Leyes conmutativas $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$
- Leyes asociativas $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- Leyes distributivas $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- Leyes de absorción $A\cap(A\cup B)=A$; $A\cup(A\cap C)=A$; $A\cup U=U$; $A\cap\emptyset=\emptyset$
- Leyes de Morgan $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$; $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
- Leyes de complemento

  $A\cup A^c = U$; $A\cap A^c = \emptyset$; $(A^c)^c = A$; $A\cap A^c = \emptyset$; $U^c = \emptyset$; $\emptyset^c = U$
- Leyes de identidad $A\cup\emptyset=A$; $A\cap U=A$

A continuación, realizaremos ejemplos ilustrativos con el uso de estas leyes.

Ejemplo:

Demostrar: $(A\cap B)\cup(A\text{-}B)=A$

AFIRMACIONES	RAZONES
$(A\cap B)\cup(A\text{-}B)$	Definición de diferencia
$(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$	Ley distributiva
$A\cap(B\cup B^C)$	Ley de complemento $B\cup B^C=U$
$A\cap U$	Ley de identidad
A	

LEYES

Leyes de idempotencia

$A\cup A=A;\ A\cap A=A$

Leyes conmutativas

$A\cup B=B\cup A;\ A\cap B=B\cap A$

Leyes asociativas

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

Leyes distributivas

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Leyes de absorción

$A\cap(A\cup B)=A;$

$A\cup(A\cap C)=A;$

$A\cup U=U;\ A\cap\varnothing=\varnothing$

Leyes de Morgan

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c;$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Leyes de complemento

$A\cup A^c = U;\ \ A\cap A^c = \varnothing;$

$(A^c)^c = A;\ A\cap A^c = A\text{-}B;$

$U^c = \varnothing;\ \ \varnothing^c = U$

Leyes de identidad

$A\cup\varnothing=A;\ A\cap U=A$

Ejemplo:

Demostrar. $(A\cup B)\text{-}(C\text{-}A) = A\cup(B\text{-}C)$

AFIRMACIONES	RAZONES
$(A\cup B)\text{-}(C\text{-}A)$	Definición de diferencia
$(A\cup B)\cap(C\text{-}A)^C$	Definición de diferencia
$(A\cup B)\cap(C\cup A^C)^C$	Ley de Morgan
$(A\cup B)\cap(C^C\cup(A^C)^C)$	Leyes de complemento
$(A\cup B)\cap(C^C\cup A)$	Ley distributiva
$A\cup(B\cap C^C)$	Definición de diferencia
$A\cup(B\text{-}C)$	

Ejemplo:

Demostrar: $[(A\text{-}B)\cup B]\text{-}A = B\text{-}A$

AFIRMACIONES	RAZONES
$[(A\text{-}B)\ \cup B]\text{-}A$	Ley conmutativa
$[B\cup(A\text{-}B)]\text{-}A$	Definición de diferencia
$B\cup(A\cap B^C)\text{-}A$	Ley distributiva
$(B\cup A)\cap(B\cup B^C)\text{-}A$	Ley de complemento
$[(B\cup A)\cap(U)]\text{-}A$	Ley de identidad
$(B\cup A)\text{-}A$	Definición de diferencia
$(B\cup A)\cap A^C$	Ley distributiva
$(B\cap A^C)\cup(A\cap A^C)$	Leyes de complemento
$(B\cap A^C)\cup\varnothing$	Ley de identidad
$B\cap A^C$	Definición de diferencia
$B\text{-}A$	

Ejemplo:

Demostrar. $[A\Delta(B\text{-}A)]\text{-}B=A\text{-}B$

AFIRMACIONES	RAZONES
$[A\Delta(B\text{-}A)]\text{-}B$	Ley de complemento
$[A\Delta(B\cap A^C)]\cap B^C$	Definición de diferencia simétrica
$\{[A\cap(B\cap A^C)^C]\cup[(B\cap A^C)\cap A^C]\}\cap B^C$	Ley de Morgan, Ley asociativa
$\{[A\cap(B^C\cup A)]\cup[B\cap(A^C\cap A^C)]\}\cap B^C$	Ley de absorción, idempotencia
$\{(A\cup B)\cap(A\cup A^C)\}\cap B^C$	Ley complemento
$\{(A\cup B)\cap U\}\cup B^C$	Ley de identidad
$(A\cup B)\cap B^C$	Ley distributiva
$(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$	Ley de complemento
$(A\cap B^C)\cup\varnothing$	Ley de complemento
$(A\cap B^C)$	Ley de complemento
$A\text{-}B$	

Actividad

Resolvemos las siguientes demostraciones usando propiedades de conjuntos:

- $A \cap B = A - B^C$
- $A \cap B = B - A^C$
- $(A \cup B)^C \cap B = A \cup B$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

3. Cardinalidad de conjuntos

La cardinal de un conjunto es el número de elementos diferentes que posee el conjunto considerado, cuando se trata de objetos abstractos, para objetos concretos se toma en cuenta a todos.

Notación: $n(A)$: Número de elementos diferentes de A

PROPIEDADES

Sean A, B, C tres conjuntos dados, entonces:

1) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
2) $n(A\Delta B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
3) $n(AUB)=$
$n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
4) $n(A\cup B\cup C)=$
$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(A\cap C)-n(B\cap C)$
$+n(A\cap B\cap C)$

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $U=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{x\in / x^3 = x\}$, $B = \{x / x^2 \in U\}$, $C = \{x\in U\ 0 \le x < 7\}$

Hallar: a) $n(A-B)$, b) $n(A\Delta B)$, c) $n(B^c \Delta C^c)$

Tales conjuntos por extensión se convierten en:

$A=\{-1,0,1\} \to n(A) = 3$; $B=\{-2,-1,0,1,2,3\} \to n(B) = 6$; $C =\{0,1,2,3,4,5,6\} \to n(C) = 7$

Los complementos son: $B^c = \{4,5,6,7,8,9\} \to n(B^c) = 6$; $C^c =\{-2,-1,7,8,9\} \to n(C^c) = 5$

Luego: $A\cap B = \{-1,0,1\} \to n(A\cap B) = 3$

$A\cap C = \{0,1\} \to n(A\cap C) = 2$

$B\cap C = \{0,1,2,3\} \to n(B\cap C) = 4$

$B^c\cap C^c = \{7,8,9\} \to n(B^c\cap C^c) = 3$;

$A\cap B\cap C = \{0,1\} \to n(A\cap B\cap C) = 2$

Por tanto, se tiene:

a) $n(A-B) = n(A)-n(A\cap B) = 3-3 = 0$

b) $n(A\Delta B) = n(A\cup B)-n(A\cap B) = n(A)+n(B)-2n(A\cap B) = 3+6-2(3) = 3$

c) $n(B^c \Delta C^c)=n(B^c\cup C^c)-n(B^c\cap C^c) = n(B^c)+n(C^c)-2n(B^c\cap C^c) = 6+5-2(3) = 5$

Actividad

Resolvemos el siguiente ejercicio:

Se tiene los tres conjuntos A, B y C que cumplen los requisitos:

$n_{(A\cap B)} = 3$, $n_{(A\cap C)} =3$, $n_{(B\cap C)} = 4$, $n_{(A)} = 8$, $n_{(B)} = 12$, $n_{(c)} = 10$, $n_{(A\cap B\cap C)} = 1$

Se pide determinar

a) $n_{(A\cup B\cup C)}$, b) $n_{(A\cup B)}$, c) $n_{(B\cup C)}$ y d) $n_{(A\cup C)}$

4. Aplicación de la teoría de conjuntos en problemas cotidianos

Entre algunas de las aplicaciones están la organización y el cálculo de elementos cuando se tienen una o más respuestas para una serie de opciones.

Ejemplo:

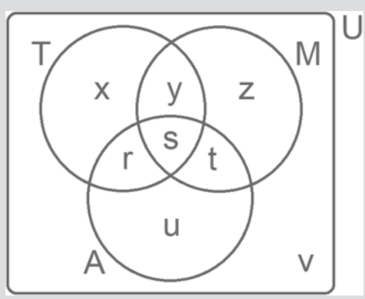
Un señor alimenta 245 palomas en la plaza con trigo, maíz y arroz. De las 245 aves, 85 prefirieron trigo, 105 maíz, 115 arroz; 155 palomas por trigo o maíz, 120 palomas solo por trigo o maíz, 25 por maíz y arroz, 15 por trigo y arroz.

a) ¿Cuántas palomas se quedaron sin comer?

b) ¿Cuántas comieron maíz y trigo?

Para resolver este tipo de ejercicios lo primero que hacemos es organizar gráficamente los conjuntos que intervienen en el problema y asignar una letra a cada espacio en la gráfica, tal como se muestra en la figura:

DIAGRAMA DE VENN



Donde: T=Trigo, M=Maiz, A=Arroz, U=universo de opciones

x = palomas que solo comieron trigo,

y = palomas que comieron trigo y arroz

z = palomas que solo comieron maiz,

r = palomas que comieron trigo y arroz

u = palomas que solo comieron arroz,

t = palomas que comieron maiz y arroz

s = palomas que comieron trigo,maiz y arroz,

v = palomas que no comieron nada

Ahora procedemos a diseñar las ecuaciones con los datos proporcionados, de la representación del diagrama de ven se obtiene:

$U=x+y+z+r+s+t+u+v=245$ .... (1)

$85=x+y+r+s$ .... (2)

$105=y+z+s+t$ .... (3)

$115=r+s+t+u$ .... (4)

$155= x+y+z+r+s+t$ .... (5)

$120=x+y+z$ .... (6)

$25=s+t$ .... (7)

$15=r+s$ .... (8)

Ahora resolvemos las ecuaciones para hallar los valores solicitados:

Sustituir (6) y (8) 3n (5): $155 = 120+15+t \rightarrow t = 155-135=20 \rightarrow t = 20$ .... (9)

(9)en (7): $25 = s+20 \rightarrow s = 25-20 = 5, s = 5$ .... (10)

(10)en (8): $15 = r+5 \rightarrow r = 15-5 = 10, r = 10$ .... (11)

(11),(10),(9)en 4: $115 = 10+5+20+u \rightarrow u = 115-35 = 80, u = 80$ .... (12)

(8)en (2): $85 = x+y+15 \rightarrow x+y = 85-15 = 70, x+y = 70$ .... (13)

(13)en (6): $120 = 70+z \rightarrow z = 120-70 = 50, z = 50$ .... (14)

(14)y (7)en (3):$105 = y+50+25 \rightarrow y = 105-75 = 30, y = 30$ .... (15)

(15)y (8)en (2): $85 = x+30+15 \rightarrow x = 85-45 = 40, x = 40$ .... (16)

(9),(10),(11),(12),(13),(14),(15),(16) en (1):

$245 = 40+30+50+10+5+20+80+v \rightarrow 245-235 = v \rightarrow v = 10$

Las respuestas a las preguntas del ejercicio son:

Palomas que no comieron (v) = 10 palomas

Palomas que comieron maíz y trigo $(s+y) = 30+5 = 35$ palomas

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios:

- Se le preguntó a un grupo de 10 estudiantes sobre sus preferencias por dos marcas de refrescos P y C, obteniéndose lo siguientes resultados: El número de estudiantes que prefirieron P, pero no C fue de 3. El número de estudiantes que no prefirieron P fueron 6.

  Se desea saber: a) ¿Cuántos de los encuestados prefirieron P? b) ¿Cuántos de los encuestados prefirieron C? c) ¿Cuántos de los encuestados prefirieron P o C?

- Determina el número de alumnos de una clase, si se sabe que cada uno participa en al menos una de los tres seminarios de ampliación de las asignaturas Matemáticas, Física o Química. 48 participan en el de Matemáticas, 45 en el de Física, 49 en el de Química, 28 en el de Matemáticas y Física, 26 en el de Matemáticas y Química, 28 en el de Física y Química y 18 en los tres seminarios. ¿Cuántos alumnos participan en los seminarios de Física y Matemáticas, pero no en el de Química? ¿Cuántos participan sólo en el de Química?

VALORACIÓN

La topología, el cálculo y la geometría tienen como base a los conjuntos, hasta crear algebra entorno a campos, anillos y grupos. Es utilizada en las ciencias y las matemáticas, como también la biología, física y química, ingenierías, ciencias computacionales y otros.

En informática ha crecido notoriamente el uso de la teoría de conjuntos, las bases de datos han crecido enormemente por los sistemas de información actuales como programas, aplicaciones, redes sociales, etc. y entender perfectamente la teoría de conjuntos es indispensable para obtener la información precisa mediante consultas, pues la necesidad de las empresas permite que se requiera información precisa y segmentada.

¿Fuera de las ciencias, en qué otros aspectos utilizarías la teoría de conjuntos y sus aplicaciones?

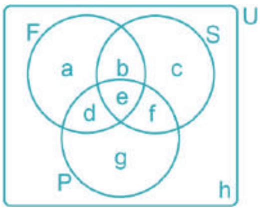
Dialogamos sobre la importancia de un conjunto en cada uno de los aspectos mencionados.

PRODUCCIÓN

Elaboramos una pequeña encuesta, a 40 personas entre estudiantes de tu colegio, maestras y maestros, padres de familia; similar al que se muestra en la figura y repartimos a las y los compañeros de clase. La encuesta debe tener lo siguiente:

- 1 pregunta junto a 3 opciones de respuestas que serán respondidas etiqueando el recuadro.
- La pregunta y las opciones están bajo su criterio, lo de la figura es un ejemplo.
- Si el estudiante no responde o deja en blanco los recuadros, se toma como respuesta ninguna.

Recopilamos la información de los cuestionarios, tabúlalos y calcula el valor de los elementos a,b,c,d,e,f,g y h. Considera que U (o universo) es la cantidad total de cuestionarios repartidos, F, S y P son los conjuntos del ejemplo (Fricase, Sajta de pollo y Pique macho) a, b, c, d, e, f y g son los elementos que son parte de las respuestas y h es la cantidad de cuestionario que no tienen respuesta alguna.



FUNCIONES Y LÍMITES

PRÁCTICA

Genaro es un excelente economista de una empresa muy reconocida en el ámbito alimenticio. Su precisión en estimaciones de ventas es impresionante. Su prioridad es cumplir metas y que no haya sobrantes de productos pues su fecha de vencimiento es relativamente corta, y no quiere perder materia prima invertida el proceso de elaboración de los productos que vende la empresa.

Su método de estimaciones de ventas se basa principalmente en datos recopilados de ventas anteriores en temporadas pasadas y estudios de mercado. Todo su trabajo se resume en una función matemática que es capaz de predecir la cantidad de clientes que estarían en las condiciones de comprar el producto en una fecha cualquiera.

Actividad

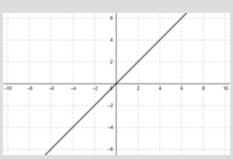
¿Cómo se utiliza una función matemática para predecir la cantidad de ventas en cualquier fecha?

¿Qué importancia le agregas al uso de las funciones matemáticas?

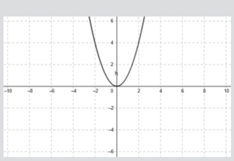
¿Qué otra forma le recomendarías hacer sus predicciones de ventas?

TEORÍA

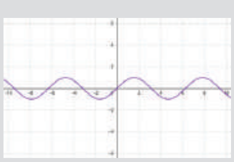
ALGUNAS GRÁFICAS DE FUNCIONES



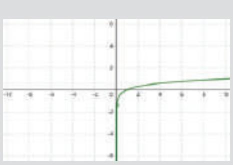
Lineal



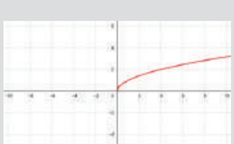
Cuadrática



Senoidal



Logarítmica



Irracional

1. Funciones

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto, denominado dominio, un solo valor $f_{(x)}$ de un segundo conjunto. Se denomina rango de la función, al conjunto de todos los valores obtenidos.

Es decir, en una función no existen parejas de elementos con el mismo primer componente.

2. Dominio, rango y gráfica de una función

a) Dominios Reales

El dominio es el conjunto de los primeros componentes de pares ordenados de una Función, se simboliza: D_f.

Para determinar los dominios reales de una función, es suficiente con evitar que el primer componente: x del par ordenado (x,y) esté afectado por las expresiones como:

$\frac{1}{0}$	División entre cero, no definido
$\sqrt[2a]{-a}$	Raíz par de números negativos
Log(-a)	Logaritmo de un número negativo

Ejemplos:

Determinar los dominios de las siguientes funciones:

1) $y=3x+1$

En este caso la variable x no está afectada por ninguna de las restricciones anteriores, por lo tanto, puede tomar cualquier valor real. El dominio es todo el conjunto de los números reales, $D_f: \forall x \in R$.

2) $y = \dfrac{5x}{x-3}$

Se debe evitar la división entre cero, entonces el denominador debe ser $\neq 0$, $x-3 \neq 0$ de donde $x \neq 3 \rightarrow D_f: \forall x \in R, x \neq 3$

3) $y = \sqrt{x-2}$

En la variable debe evitarse la raíz par de números negativos, entonces debe cumplir:

$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_f: \forall x \in R, x \geq 2$

4) $f(x)=Ln(x-3)$

Se debe evitar el logaritmo de negativos, entonces: $x-3>0 \rightarrow x>3 \rightarrow D_f: \forall x \in R: x>3$

b) Codominios Reales

El codominio real, o rango de una función, es el conjunto de los segundos componentes de los pares ordenados que forman la función.

En este caso se debe despejar la variable independiente para luego realizar el análisis correspondiente según sea el caso.

Ejemplos:

Determinar los codominios de las siguientes funciones:

$f(x)=y=x-7$

Despejar "x" en la expresión: $x=y+7$ (La expresión no esta sujeta a ninguna restricción) $C_f: \forall y \in R$

$f(x)=y=Log(1-x^2)$

Despejamos "x": $10^y = 1-x^2 \rightarrow x^2 = 1-10^y \rightarrow x = \sqrt{1-10^y}$, ahora evitamos la raíz cuadrada de números negativos, para ello en el radicando: $1-10^y>0 \rightarrow y<0 \rightarrow C_f: y \in R, y<0$

A CONSIDERAR

Las condiciones para determinar el codominio de funciones son las mismas que se utilizan para determinar los dominios.

$\dfrac{1}{0}$	División entre cero, no definido
$\sqrt[2a]{-a}$	Raíz par de números negativos
Log(-a)	Logaritmo de un número negativo

c) Gráfica de funciones

Para realizar las gráficas de funciones algebraicas será necesario considerar los conceptos de: dominio, codominio, intersecciones, simetrías, asíntotas y finalmente evaluar algunos pares de puntos.

Ejemplo:

Graficar la función: $y = \dfrac{2}{x+3}$, analizando sus características:

DOMINIO:

Evitando la división entre cero: $x + 3 \neq 0, x \neq -3$, $D_f: x \in R, x \neq -3$

CODOMINIO:

Despejamos x de la función: $y = \dfrac{2}{x+3} \rightarrow y(x+3) = 2 \rightarrow x+3 = \dfrac{2}{y} \rightarrow x = \dfrac{2}{y} - 3$ evitando la división entre cero: $y \neq 0$

INTERSECCIONES:

Intersección al eje "X" (y=0)

$$y = \frac{2}{x+3} \rightarrow 0 = \frac{2}{x+3} \rightarrow 0(x+3) = 2 \rightarrow 0 = 2\,? \rightarrow \textit{No existe intersección con el eje X}$$

Intersección al eje "Y" (x=0)

$$y = \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow \textit{Existe intersección al eje "Y"}$$

SIMETRÍAS

Simetría con el eje "X"

$$F_{(x,y)} = F_{(x,-y)}$$

$$y - \frac{2}{x+3} \neq -y - \frac{2}{x+3}$$

No existe simetría

Simetría con el eje "Y"

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,y)}$$

$$y - \frac{2}{x+3} \neq y - \frac{2}{-x+3}$$

No existe simetría

Simetría al origen

$$F_{(x,y)} = F_{(-x,-y)}$$

$$y - \frac{2}{x+3} \neq -y - \frac{2}{-x+3}$$

No existe simetría

ASÍNTOTAS

- Asíntotas Verticales

De la función: $y = \frac{2}{x+3}$, el denominador se debe igualar a cero: x+3=0 → x=-3, que es la asíntota vertical

- Asíntotas Horizontales

Despejamos "X" de la función original: $y(x+3) = 2 \rightarrow xy + 3y = 2 \rightarrow x = \frac{2-3y}{y}$

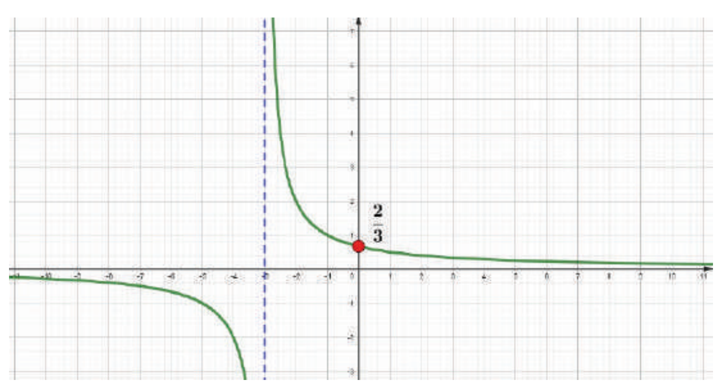
El denominador igualamos a cero: y=0 , Asíntota horizontal

PARES DE PUNTOS Y GRÁFICA FINAL

Hallamos algunos pares ordenados o puntos, tomando un valor cualquiera en "x" para calcular su correspondiente valor en "y", que nos permita identificar el comportamiento de la gráfica:

TABLA DE VALORES

x	$y = \frac{2}{x+3}$
-2	$y = \frac{2}{-2+3} = 2$
-1	$y = \frac{2}{-1+3} = 1$
0	$y = \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3} \equiv 0{,}666..$
1	$y = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
2	$y = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \equiv 0{,}4$



Actividad

Graficamos las siguientes funciones, determinando dominio y rango o codominio, en cada caso.

- $f_{(x)} = 3x - 1$
- $f_{(x)} = x^2 - 4x - 4$
- $f_{(x)} = \frac{1}{x^2 - x - 12}$
- $f_{(x)} = \sqrt{x-4}$
- $f_{(x)} = x^2 - 1$
- $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 4}$
- $f_{(x)} = \log{(x-5)}$
- $f_{(x)} = \log{(\sqrt{x} - 1)}$

3. Límites

El límite de una función Real se escribe de la siguiente manera:

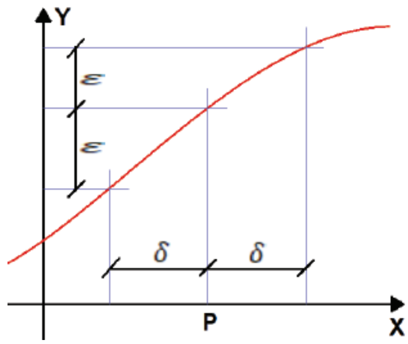
$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$$

Se dice que el límite de la función f(x); cuando x tiende hacia "a" es igual a L

Definición:

$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = L\,; Si\ \forall\epsilon > 0; existe\ \delta > 0\ tal\ que: |f_{(x)} - L| < \varepsilon; siempre\ que:$$

$$0 < |x - a| < \delta$$



4. Tipos de resolución de Límites

a) Límites algebraicos

Son límites de funciones algebraicas, sus indeterminaciones se resuelven aplicando técnicas algebraicas como ser: factorización, racionalización y otros.

Ejemplo:

Resolver los siguientes limites algebraicos

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Evaluamos en $x = 2$: $\lim_{x\to 2} \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} = ?$ y observamos que existe la indeterminación en ese punto, es decir, el resultado no está determinado.

Resolvemos el límite factorizando la expresión: $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

y luego simplificando factores iguales del numerador y el denominador, cuyo resultado es $\lim_{x\to 2} x+2$, y finalmente evaluamos el límite: x+2=2+2=4

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$

Evaluamos el límite: $\lim_{x\to 2} \frac{2^2-4}{2^2-6(2)+8} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{0} = ?\ indeterminación$

Factorizamos la función: $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$

Simplificamos la función: $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-4)}$

Evaluamos nuevamente: $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-4)} = \frac{(2+2)}{(2-4)} = \frac{4}{-2} = \mathbf{-2}$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

$Sean\ f_x\ y\ g_x\ dos\ funciones\ y\ k = constante:$

$Cumplen\ lo\ siguiente:$

$$\lim_{x\to a} k = k$$

$$\lim_{x\to a} k * f_x = k \lim_{x\to a} f_x$$

$$\lim_{x\to a}(f_x + g_x) = \lim_{x\to a} f_x + \lim_{x\to a} g_x$$

$$\lim_{x\to a}(f_x * g_x) = \lim_{x\to a} f_x * \lim_{x\to a} g_x$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_x}{g_x} = \frac{\lim_{x\ o} f_x}{\lim_{x\to 0} g_x}$$

$$\lim_{x\to a}(f_x)^n = \left(\lim_{x\to a} f_x\right)^n$$

$$\lim_{x\to a}(f_x)^{g_x} = \lim_{x\to a} f_x^{\lim_{x\to a} g_x}$$

INDETERMINACIONES

$Son\ operaciones\ no\ conocidas:$

- $\frac{0}{0} = ?$
- $\frac{\infty}{\infty} = ?$
- $0 * \infty = ?$
- $\infty^0 = ?$
- $\infty - \infty = ?$
- $1^\infty = ?$
- $0^0 = ?$

OPERACIONES CONOCIDAS:

- $0 + 0 = 0$
- $0 * 0 = 0$
- $\frac{0}{a} = 0$
- $\frac{a}{0} = \infty$
- $0^a = 0$
- $a^0 = 1$
- $\infty + 0 = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty * \infty = \infty$
- $\infty^\infty = \infty$
- $a^\infty = \infty, a > 1$
- $a^\infty = 0, a < 1$
- $\frac{\infty}{a} = \infty$
- $\frac{a}{\infty} = 0$
- $\infty^a = \infty$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $0^\infty = 0$
- $log(0) = \infty$
- $log(\infty) = \infty$
- $tan(0) = 0$
- $cotan(0) = \infty$
- $csc(0) = \infty$

b) Límites Trigonométricos

Son límites de funciones trigonométricas, cuya resolución se basa en las siguientes identidades:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1 \quad o \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

Ejemplo:

Resolver los siguientes limites trigonométricos:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2}$

Evaluando el límite: $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2}=\frac{1-2\cos(0)+\cos(2*0)}{0^2}=\frac{1-2+1}{0}=\frac{0}{0}=?\,indeterminación$

Aplicamos la identidad trigonométrica de $\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$: $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)-sen^2(x)}{x^2}$

Distribuimos el denominador: $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)}{x^2}-\frac{sen^2(x)}{x^2}$

Distribuimos el límite y factorizamos: $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^2}$

Evaluamos los límites: $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\right)^2-\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)^2=(0)^2-(1)^2=\mathbf{-1}$

c) Límites Exponenciales

Son límites de funciones exponenciales, donde la variable se encuentra en el exponente o dentro de una función logarítmica. Su resolución se basa en las siguientes identidades:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \quad o \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente limite exponencial: $\lim_{x\to 0}\frac{a^{u+x}+a^{u-x}-2a^u}{x^2}$

Evaluando el límite: $\lim_{x\to 0}\frac{a^{u+x}+a^{u-x}-2a^u}{x^2}=\frac{a^{u+(0)}+a^{u-(0)}-2a^u}{(0)^2}=\frac{a^u+a^u-2a^u}{0}=\frac{0}{0}=?\ indeterminado$

Distribuyendo el exponente: $\lim_{x\to 0}\frac{a^{u+x}+a^{u-x}-2a^u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^u\ a^x+\frac{a^u}{a^x}-2a^u}{x^2}$

Aplicando el común denominador: $\lim_{x\to o}\frac{\frac{a^u*a^x*a^x+a^u-2*a^u*a^x}{a^x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^u*a^{2x}-2*a^u*a^x+a^u}{a^x*x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^u(a^{2x}-2a^x+1)}{x^2*a^x}$

Agrupando términos y distribuyendo el límite: $a^u\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)^2}{x^2*a^x}=a^u\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)^2}{x^2}*\lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x}=a^u\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\right)^2*\lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x}$

Evaluando el límite: $a^u(\ln(a))^2*\frac{1}{a^0}=\boldsymbol{a^u\ln^2(a)}$

5. Límites Especiales

Los limites especiales, son limites cuyas indeterminaciones se resuelven de acuerdo a características de cada función, su análisis requiere de limites laterales.

Ejemplo:

Calcular el límite especial: $\lim_{x\to 0}|x|$

Calculando los limites laterales de la función valor absoluto

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}(+x)=0^+=0$	Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0^-=0$

Los limites laterales son iguales por izquierda y derecha, por tanto, el límite es “0”.

Ejemplo:

Calcular el límite especial: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + |x|}{1 + x}$

Calculando los limites laterales de acuerdo a características del valor absoluto:

Por la derecha: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \lvert x\rvert}{1 + x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + (+x)}{1 + (+x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1} = 1$	Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 + \lvert x\rvert}{1 + x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + (-x)}{1 + (-x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - x}{1 - x} = 1$

Los limites laterales son iguales por tanto el límite existe, es 1

Actividad

Resolvemos los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{sen(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}$
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5 - \sqrt{x^3 - 2}}{1 - \sqrt{x^2 - 8}}$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{x - a}$
- $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \sqrt{sen(x)}}{2x - \pi}$
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2(x)}{1 - \cos(x)}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - |x|}{x}$

VALORACIÓN

En las matemáticas babilónicas encontramos tablas con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. En la Grecia clásica también manejaron funciones particulares, incluso en un sentido moderno de relación entre los elementos de dos conjuntos y no sólo de fórmula.

En la actualidad las funciones son de uso frecuente, en tu aula, por ejemplo, la cantidad de sillas es correspondiente con la cantidad de estudiantes que hay.

- ¿Cuál es el dominio y cuál el rango?
- ¿Qué importancia le das al uso de las funciones?
- ¿Cuál es el concepto de variable dependiente y variable independiente?

PRODUCCIÓN

Diseñamos el tablero de la figura con los siguientes materiales:

- Media hoja de cartulina
- Post-it o notas adhesivas
- Marcadores
- Regla

$csc(0)$	a^0	$0 * \infty$	∞^0	$\infty - \infty$	$\tan(0)$
0^0	∞^a	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{a}$	$0 + 0$	0^a
$cotan(0)$	$\infty + 0$	$\infty + \infty$	$\infty * \infty$	∞^∞	$a^\infty\ a < 1$
$0 * 0$ 0	$log(\infty)$	0^∞	$a^\infty\ a > 1$	$\frac{\infty}{a}$	$\frac{a}{\infty}$
$log(0)$	$\frac{0}{\infty}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{a}{0}$	1^∞

El tablero contiene operaciones tanto conocidas, como no conocidas. El juego consiste en que cada alumno tome un color de nota adhesiva, y que, de forma secuencial, escriba la respuesta en la nota y vaya pegando (como en la figura) en el recuadro que cree que corresponda. Son 5 participantes y cada uno tiene 6 opciones de colocar las notas de forma rotativa, y el que haya colocado la mayor cantidad de respuestas correctas, gana el juego.

DERIVADAS

PRÁCTICA

Don Jacinto tiene una tienda de ferretería desde hace mucho tiempo, sus productos los trae directamente desde la fábrica y son especialmente para la obra fina, desde pinturas, estucos, cornisas, hasta cerámicas para piso y pared de cuartos de baño, cocina, patios, etc.

Le pidieron una cotización de cerámica para colocarla en el piso del patio de una casa con dimensiones curiosas: resulta que tiene la forma de un semicírculo y la cerámica de forma de rectángulo dentro del mismo, de tal modo que cubra la mayor área posible.

Debe calcular la cantidad de metros cuadrados de cerámica que debe vender para cubrir el espacio requerido.

Actividad

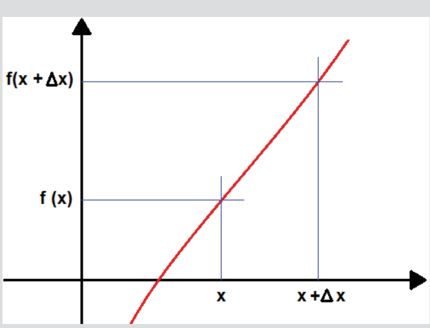
¿Cómo puede realizar el procedimiento para hallar el rectángulo que le propusieron?
¿Qué sugerencias le daría a Jacinto para evitar hacer tantas mediciones posibles para hallar esa área máxima solicitada?

TEORÍA

INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN

Si la variable independiente x recibe un incremento Δx, entonces la función $f_{(x)}$ también recibe un incremento de valor que es igual Δy, que es igual a $f_{(x+\Delta x)}$, siendo x su valor inicial.

Gráficamente:



1. Origen e importancia

Su origen es algo oscuro ya que se descubrió en el siglo XVIII, siendo los inventores Isaac Newton y Leibniz más o menos en los mismos años en Inglaterra y Alemania respectivamente. Inicialmente se centró su aplicación en la geometría y la mecánica, pero luego en otras ciencias como la física y química.

Su importancia es fundamental para el cálculo diferencial e integral. Algunos conceptos que nos ayudarán a comprender el significado de derivada son:

- El estudio de la variación de la función $f_{(x)}$
- También está el cálculo diferencial mediante técnicas para encontrar una medida de variación de una función $f_{(x)}$ desde la variación de x
- Esta medida de variación de x esta expresado como: $\Delta x = x_2 - x_1$, donde puede ser positivo o negativo

2. Definición

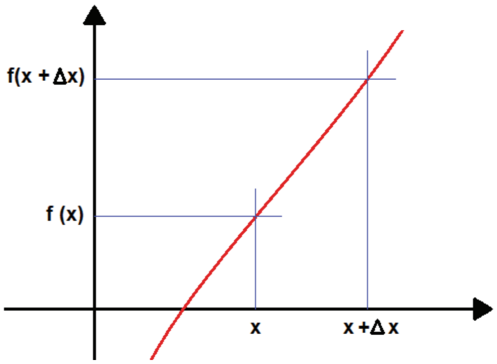
La derivada de una función con respecto a una variable independiente es la razón de cambio instantánea de la función con respecto a la variable independiente cuando esta tiende a cero. Su definición es consta del siguiente límite:

$$f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

O bien reemplazando: $\Delta x = h$

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Gráficamente:



NOTACIÓN

$f', y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, D_x y,$

Estas representan a la derivada, pero con distintas notaciones.

Ejemplo:

Hallar, por definición, la derivada de $f_{(x)} = 5x^2$

Por definición: $f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$

Aplicamos en el ejercicio: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h}$

Reducimos el límite: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x^2+2xh+h^2) - 5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x^2+10xh+5h^2-5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 5(2x+h)$

Evaluamos el límite: $f'_{(x)} = 5(2x+0) \to \boldsymbol{f'_{(x)}} = 10\boldsymbol{x}$

Ejemplo:

Hallar por definición la derivada de $f_{(x)} = sen(2x)$

Evaluamos: $f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} \to f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{sen[2(x+h)] - sen(x^2)}{h} = \frac{sen(2(x+0)) - sen(2x)}{0} = \frac{0}{0} ???$

Desarrollamos la función seno: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(2x+2h) - sen(2x)}{h} \to f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(2x)\cos(2h) + \cos(2x)sen(2h) - sen(2x)}{h}$

Factorizamos: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(2x)\, sen(2h) - sen(2x)[1-\cos(2h)]}{h}$

Distribuimos el límite: $f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(2x) * 2sen(2h)}{2h} - \lim_{h \to 0} \frac{sen(2x) * 2[1-\cos(2h)]}{2h}$

Llevamos al límite conocido: $f'_{(x)} = 2\cos(2x)\left[\lim_{h \to 0} \frac{sen(2h)}{2h}\right] - 2sen(2x) \lim_{h \to 0} \left[\frac{1-\cos(2h)}{2h}\right]$

Hacemos un cambio de variable: $= 2h \to h = \frac{u}{2}$, si $h \to 0, entonces: u = \frac{0}{2} \to u = 0, es\ decir, u\ tambien\ tiende\ a\ 0$

Evaluamos: $f'_{(x)} = 2\cos(2x)\,[\lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{u}] - 2sen(2x) \lim_{h \to 0} \left[\frac{1-\cos(u)}{u}\right] \to f'_{(x)} = 2\cos(2x)\,(1) - 2\cos(2x)\,[0]$

Efectuamos operaciones: $\boldsymbol{f'_{(x)}} = \mathbf{2\cos(2}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$

Actividad

Resolvemos las siguientes derivadas por definición:

- $f_{(x)} = 3^x$
- $f_{(x)} = \log(2x)$
- $f_{(x)} = 2tanx$
- $f_{(x)} = \ln(x^2)$
- $f_{(x)} = x^3$
- $f_{(x)} = \ln(2x-1)$
- $f_{(x)} = 2\cos(2x)$
- $f_{(x)} = \mathrm{x}^4$

PROPIEDADES

Sean las funciones:

$$u = u_{(x)}, v = v_{(x)}$$

Tenemos las siguientes propiedades:

Derivada de una suma o resta:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Derivada de una multiplicación:

$$(u * v)' = u * v' + u' * v$$

Derivada de una división:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - u * v'}{v^2}$$

Derivada de una potencia:

$$(u^m)' = m * u^{m-1} * u'$$

Derivada de una función dentro de otra (regla de la cadena):

$$\left(u_{(v)}\right)' = u' * v'$$

3. Derivadas de algunas funciones especiales

Hasta el momento conocemos que desde la definición podemos calcular la derivada de una función, pero si esta se presenta larga, resolver el límite puede resultar algo tedioso y complicado, por ello se muestra una tabla que simplifica este proceso de cálculo de derivadas complejas:

Sea: *y= f(x), k=constante*

Función	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n * x^{n-1}$
$y = k * g_{(x)}$	$y' = k * g'_{(x)}$
$y = \sqrt{g_{(x)}}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} * g'_{(x)}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x * \ln(a)$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln_a(x)$	$y' = \frac{1}{x ln(a)}$
$y = sen(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -sen(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = \sec^2(x)$

Ejemplo:

Hallar, por tablas, las derivadas de las siguientes funciones:

•) $y=5x^2$ Si por tablas: $y=x^n \rightarrow y'=n * x^{n-1}$, donde $n=2$, además $y = k*g_{(x)} \rightarrow y'= k*g'_{(x)}$, donde $k=5$, $g_{(x)} = x^2$

Reemplazamos: $y' = 5 * (x^2)' \rightarrow y' = 5 * 2 * x^{2-1} \rightarrow \boldsymbol{y' = 10x}$

•) $y = sen(2x^3 - 3)$

Por la regla de la cadena: $\left(u_{(v)}\right)' = u' * v'$

Además, por tablas: $y = sen(x) \rightarrow y' = \cos(x), y = x^n \rightarrow y' = n * x^{n-1}$

Aplicamos la regla de la cadena: $y = sen(2x^3 - 3) \rightarrow y' = \cos(2x^3 - 3) * (2x^3 - 3)'$

Derivamos el interior de la función seno: $y' = \cos(2x^3 - 3) * [2(x^3)' - (3)'] \rightarrow y' = \cos(2x^3 - 3) * [2(3x^{3-1}) - 0]$

Simplificando: $y' = \cos(2x^3 - 3) * [2(3x^2)] \rightarrow y' = \cos(2x^3 - 3) * 6x^2, o\ bien\ \boldsymbol{y' = 6x^2 \cos(2x^3 - 3)}$

•) $y = \sqrt{sen(2x)}$

Por la regla de la cadena: $\left(u_{(v)}\right)' = u' * v'$

Además, por tablas: $y = sen(x) \rightarrow y' = \cos(x), y = k * g_{(x)} \rightarrow y' = k * g'_{(x)}$

Ahora derivamos: $y = \sqrt{sen(2x)} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{sen(2x)}} * \left(sen(2x)\right)' \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{sen(2x)}} * (-\cos(2x)) * (2x)'$

Ordenamos y simplificamos: $y' = \frac{1}{2\sqrt{sen(2x)}} * (-\cos(2x)) * 2 \rightarrow \boldsymbol{y' = \frac{-\cos(2x)}{\sqrt{sen(2x)}}}$

Ejemplo:

Derivar la siguiente función: $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$

Aplicamos la regla de la cadena: $y' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} * \left[e^x + \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} * (0 + e^{2x} * (2))\right]$

Realizamos operaciones: $y' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} * \left[e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$

Sumamos fracciones: $y' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} * \left[\frac{e^x\sqrt{1+e^{2x}}+e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$

Factorizamos e^x: $y' = \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} * \left[\frac{e^x(\sqrt{1+e^{2x}}+e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$

Simplificamos numerador y denominador: $\boldsymbol{y'} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\sqrt{1+\boldsymbol{e^{2x}}}}$

¡PADRE DEL CÁLCULO!

Sucedió una situación sobre la notación utilizada en el análisis matemático y su nacimiento.

Sir Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) inventaron el Cálculo, pero de forma independiente en diferentes lugares y sin conocerse.

Newton llamó fluxión a las derivadas y Leibniz las llamó diferencias infinitesimales o cociente diferencial.

Se sabe que Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz, aunque Leibniz fue quien publicó primero sus resultados.

Aunque hayan tenido sus diferencias, sin duda ambos fueron la los precursores de la nueva forma de asimilar el Análisis Matemático.

4. Derivada en un punto

Aquí requiere el reemplazo del punto en la función ya derivada.

Ejemplo:

Derivar la siguiente función: $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}\right)$ para $x = 0$

Aplicamos la regla de la cadena: $\text{logaritmo} \rightarrow \text{raiz} \rightarrow \text{fraccion} \rightarrow \text{seno}$

$$y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}\right) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}} * \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}} * \frac{[1+sen(x)]' * [1-sen(x)] - [1+sen(x)] * [1-sen(x)]'}{[1-sen(x)]^2}$$

Derivamos el interior de la raíz y multiplicamos las raíces en el denominador:

$$y' = \frac{1}{2\left[\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}\right]} * \frac{cox(x) * [1-sen(x)] - [1+sen(x)] * [-\cos(x)]}{[1-sen(x)]^2}$$

Distribuimos en el numerador: $y' = \frac{\cos(x) - \cos(x)\,sen(x) + \cos(x) + \cos(x)\,sen(x)}{2[1+sen(x)][1-sen(x)]}$

Restamos en el numerador y multiplicamos en el denominador: $y' = \frac{2cosx}{2[1-sen^2(x)]} \rightarrow y' = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} \rightarrow \boldsymbol{y'} = \frac{1}{\boldsymbol{\cos(x)}}$

Evaluando en x=0

$\rightarrow$ $y' = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} \rightarrow y' = \boldsymbol{f'_{(x=0)}} = \mathbf{1}$

Actividad

Desarrollamos las siguientes derivadas utilizando tablas:

- $y = \sqrt[5]{x^2}$
- $y = \frac{x^3}{\ln(x)}$
- $y = sen(x^4 - 1)$
- $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}),\ x = 1$
- $y = \sqrt[4]{1-x^5}$
- $y = \frac{x^3}{\ln(x)}$
- $y = x^8 sen(x)\ln(x)$
- $y = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}\right),\ x = a$

CONCLUSIONES

$c' = 0, \ \forall c \in \mathbb{R}$

$x' = 1$

$[x^n]' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$

$m = f'(x_0)$

5. Aplicación de las derivadas

Desde la invención de la derivada, sus aplicaciones son diversas en todos los campos de la ciencia, partiendo de la misma definición de la derivada que es hallar la pendiente de una función en un punto cualquiera, hasta aquellas referidas a la geometría, ingenierías, economía, mecánica, etc.

a) Recta tangente

Es una línea que corta a la gráfica de una función en un solo punto. Para hallar esta recta se precisa conocer el punto donde intersecta y la pendiente del mismo.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente que intersecta a la función

$y = \frac{x^2}{4}$ en el punto $(2,1)$

Paso 1: Hallamos la derivada de la función: $y = \frac{x^2}{4} \rightarrow y' = \frac{2x}{4} \rightarrow y' = \frac{x}{2}$

Paso 2: Evaluamos el punto dado en la derivada: $y'_{x=2,y=1} = \frac{2}{2} = 1$

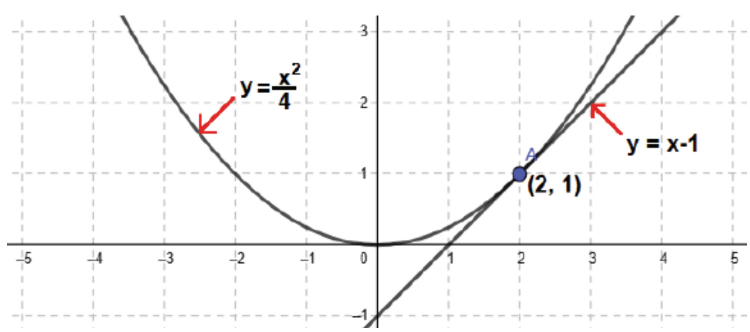
Paso 3: Por definición la pendiente es igual a la derivada en un punto, entonces $m = y' = 1$

Paso 4: Calculamos la ecuación característica de la recta mediante la ecuación punto-pendiente, es decir:

$(y - y_o = m(x - x_0)$, evaluando en el punto dado *(2,1)*, tenemos: *(y-1)=1(x-2)*

Simplificando: $y - 1 = x - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = x} - 1$

Gráficamente:



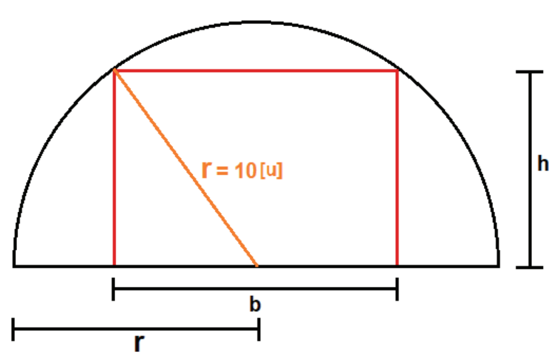
b) Geometría

Otra de las aplicaciones es la maximización de y minimización de áreas, volúmenes donde involucran figuras geométricas.

Ejemplo:

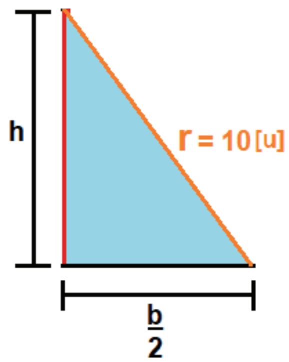
Hallar el área máxima de un rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio r=10[u].

Gráficamente:



Paso 1: La función a maximizar es el área: *A=b∗h (1)*

Paso 2: Ahora, el área depende de la base b y la altura h, lo que debemos hacer es que el área esté en función de una variable. Para ello utilizaremos datos de la gráfica:



Según el triángulo:

$$(h)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 \to h = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} \quad (2)$$

Reemplazando en (1):

$$A = b * \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2}$$

Paso 3: Derivamos la función a maximizar e igualamos a cero:

$$A' = \frac{1}{4} * \frac{8r^2b - 4b^3}{\sqrt{4r^2b^2 - b^4}} = 0 \to 8r^2b - 4b^3 = 0 \to b = \sqrt{2}r, \text{ pero } r = 10 \to b = 10\sqrt{2}[u]$$

En (2): $h = \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2} \to h = \frac{\sqrt{4(10)^2 - \left(10\sqrt{2}\right)^2}}{2} \to h = 5\sqrt{2}\ [u]$

Paso 4: Finalmente evaluamos el área maximizada a calcular:

En (1): $A_{max} = b * h \to A_{max} = \left(10\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right) \to \boldsymbol{A_{max}} = 100[\boldsymbol{u}]^2$

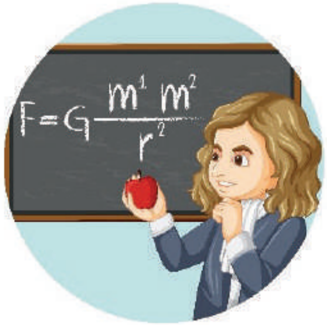
Actividad

Resolvemos:

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-4x+5$ con el punto $P_0\ (3,2)$
- Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y=2\sqrt{(x-4)}+3$ en el punto $P_0\ (2,2)$
- Halla el área máxima del rectángulo inscrito en un triángulo equilátero de lado 5
- Halla el área máxima del rectángulo inscrito en la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

VALORACIÓN

Isaac Newton y Gottfried Leibniz crearon el cálculo diferencial e integral de manera simultánea. Desarrollaron reglas para manipular las derivadas (reglas de derivación) e Isaac Barrow demostró que la derivación y la integración son operaciones inversas. Newton en 1665 derivaba funciones algebraicas y Leibniz en 1975 le da el carácter geométrico, además de dar el característico $\frac{dy}{dx}$



Desde entonces, su aplicación se extiende bastante en la Física, Matemática, Biología, Medicina, Arquitectura, Economía e Ingenierías.

- ¿En qué aspectos influye la derivada en las ciencias mencionadas?

PRODUCCIÓN

Averiguamos un poco y con material disponible a tu alcance, construimos el Péndulo de Newton.

- ¿Qué sucede con el péndulo?
- ¿Qué tipos de movimiento se puede describir?

INTEGRALES

PRÁCTICA

Virginia es una excelente ingeniera civil. Su especialidad en puentes la hace responsable de una obra muy grande.

Ella debe realizar los cálculos del puente que debe soportar todo el peso posible de los peatones y vehículos, para ello debe tener conocimientos suficientes en estructuras estáticas e isostáticas.

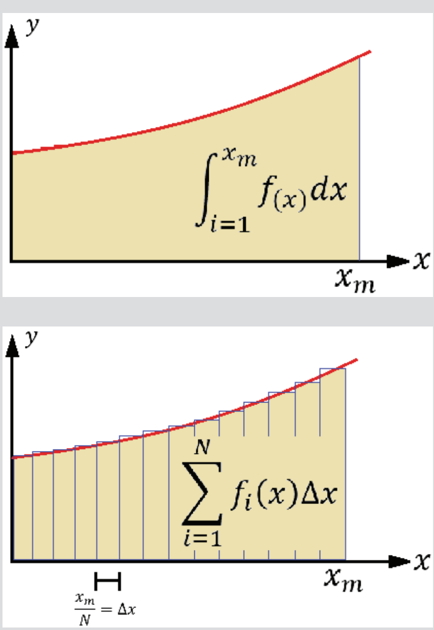
Para este tipo de estructuras, una herramienta básica es el cálculo diferencial e integral, pues mediante ello se puede calcular el centro de gravedad, centro de masa, momentos de inercia, flector e incluso los esfuerzos que ejercerán sobre la estructura, todo ello utilizando la integral de funciones. Con esta base, las estructuras tienden a ser más resistentes y no colapsar ante cualquier contingencia.

Actividad

Investigamos qué formulas se utilizan para calcular los elementos mencionados en el diseño de un puente.
¿Cuáles son los puentes más importantes de tu ciudad?

TEORÍA

ÁREA BAJO LA CURVA



El área bajo la curva es la suma de los pequeños rectángulos que forman el área a calcular (mientras más pequeños, mayor aproximación al área real).

1. Definición

Integrar es el proceso reciproco del de derivar, es decir dada una función $f_{(x)}$, se trata de buscar aquellas funciones $F_{(x)}$ que al ser derivadas conducen a $f_{(x)}$. Geométricamente es el área bajo la curva de una función.

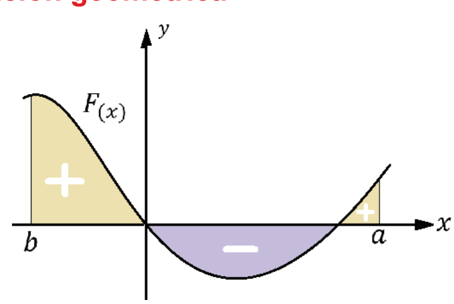
Si la función $f_{(x)}$ es la derivada de la función $F_{(x)}$, es decir: $F'_{(x)}=f_{(x)}$. Entonces $F_{(x)}$ se llama función primitiva de $f_{(x)}$, lo cual se simboliza por la expresión:

$$\int f_{(x)}dx = F_{(x)} + c \;;\; c = constante \qquad Donde: F'_{(x)} = f_{(x)}$$

El símbolo de la integral es "$\int$", y $f_{(x)}$ se llamará Integrando, cuyo resultado es la función $F_{(x)}$ o función primitiva que se llamará

INTEGRAL INDEFINIDA.

a) Interpretación geométrica



Es la representación del área limitada por la gráfica de la función, en un sistema de coordenadas cartesianas con signo positivo cuando la función toma valores positivos y signo negativo cuando toma valores negativos.

2. Integrales Indefinidas

Para representar la integral se emplea el símbolo $\int$ que tiene su origen en la inicial de la palabra suma y se representa como $F(x) = \int f(x)dx$, donde $F_{(x)}$ es la primitiva o antiderivada de $f(x)$ y $f(x)$ es el integrando. De modo que la integral indefinida se escribe como $\int f(x)dx = F_{(x)} + C$, donde C se denomina constante de integración, es una cantidad independiente de la variable de integración.

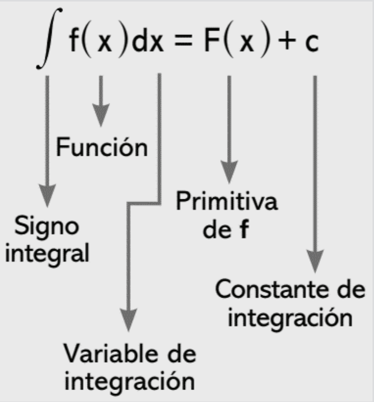
a) Funciones Primitivas

Es el proceso para hallar la función original, es decir, la función que precedió a una que ya ha sido derivada.

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$y = x^2$	$dy/dx = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2$
$y = x^2 + 5$	$dy/dx = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2 + 5$
$y = x^2 - \frac{3}{4}$	$dy/dx = 2x\,dy$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2 - \frac{3}{4}$

Generalizando de acuerdo con la tabla anterior se obtiene: $\int 2xdx = x^2 + C$, donde C es la constante de integración cuyo valor no es definido, salvo que se proporcione algún punto que pertenezca a la función.

PARTES DE LA INTEGRAL



b) Propiedades de las Integrales

1. $\left[\int f'_{(x)}dx\right]' = f_{(x)}$ La integral de la derivada de una función es la misma función
2. $\int a\, f_{(x)}dx = a \int f_{(x)}dx$ La integral de una constante por una función, es la constante por la integral de la función.
3. $\int (f_{(x)} + g_{(x)})dx = \int f_{(x)}dx + \int g_{(x)}dx$ La integral de una suma es la suma de integrales.

c) Integrales de algunas funciones especiales

Podemos calcular la integral de una función mediante la tabla proporcionada a continuación que simplifica este proceso de cálculo de integrales, tanto simples, como complejas:

Integral	Función primitiva
$\int x^m dx$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + c\,;m \neq -1$
$\int e^x dx$	$e^x - C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln(x) + C$
$\int sen(ax)dx$	$-\frac{\cos(ax)}{a} + C$
$\int \cos(ax)dx$	$\frac{sen(ax)}{a} + C$
$\int \tan(ax)dx$	$-\frac{1}{a}\ln(\cos(ax)) + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$

CONCLUSIONES

La integral es la inversa de la derivada.

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

La derivada es la inversa de la integral.

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

Ejemplo:

Calcular las siguientes integrales indefinidas

a) $\int 6x^5 dx = 6\int x^5 dx = 6 * \frac{x^6}{6} = \boldsymbol{x^6 + c}$

b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{5} dx =$

$$= \frac{1}{5}\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} * \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{5} * \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{20} x^{\frac{4}{3}}} + c$$

c) $\int x^5(x^2 + x^4 + x^3)dx = \int(x^7 + x^9 + x^8)dx =$

$\int x^7 dx + \int x^9 dx + \int x^8 dx = \boldsymbol{\frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^9}{9} + C}$

d) $\int 7^x dx = \boldsymbol{\frac{7^x}{ln7} + c}$

e) $\int(2^x + 4^x)dx = \boldsymbol{\frac{2^x}{Ln2} + \frac{4^x}{Ln4} + C}$

f) $\int sen(5x) - \cos(5x)\, dx = -\boldsymbol{\frac{co\,s(5x)}{5} + \frac{sen(5x)}{5} + c}$

Actividad

Determinamos las siguientes integrales

- $\int 7x^5\, dx$
- $\int (-3x + \sqrt[5]{x})dx$
- $\int x^3(x^2 - 4x + 3)dx$
- $\int \sqrt{x^2 - 1}dx$
- $\int e^{2x-100}x$
- $\int (x^2 + 7x^5\,)dx$
- $\int (\frac{4}{9x^6} + \frac{7}{\sqrt[8]{x^3}})dx$
- $\int \sqrt[5]{81x^{7/3}}dx$
- $\int x^2(x^2 + \sqrt{x})dx$
- $\int 3sen(3x)dx$

3. Métodos de Integración

a) Integración por sustitución o cambio de variable

Sea: $u=g(x)$, donde $g'(x)$ es continua en un intervalo, además sea $f(x)$ es continua sobre el rango correspondiente de g, y sea $F_{(x)}$ una antiderivada de $f_{(x)}$, entonces:

$$\int \boldsymbol{f[g(x)]\, g'(x)dx} = \int \boldsymbol{f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C}$$

NOTACIÓN

Cuando tenemos varias integrales indefinidas, podemos asumir que:

$C_1+C_2+C_3+...+C_n=C$

La suma de varias constantes de integración dará siempre una constante.

Ejemplo:

Utilizando el método de sustitución, integrar:

a) $\int(x+4)^7\, dx$

Sea el cambio de variable: $u=x+4$, derivando la expresión: $du=dx$

sustituyendo en la integral: $\int (u)^7 du = \frac{u^7}{7} + c$

Retornando a la variable original: $\int \boldsymbol{(x+4)^7 dx = \frac{(x+4)^7}{7} + C}$

b) $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$

Si: $u=x^2+4 \rightarrow du=2xdx$

Sustituyendo tenemos: $\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u|$

Volvemos a la variable original: $\int \boldsymbol{\frac{2x}{x^2+4} dx = Ln|x^2+4| + C}$

b) Integración por partes

Consiste en la aplicación de la fórmula: $\int udv=u*v-\int v*du$

Es el proceso que encuentra la integral de un producto de funciones en términos de la integral de sus derivadas o antiderivadas.

Ejemplo:

Calcular la integral por el método por partes:

a) $\int xe^{5x}\,dx$

Sea: $u=x$; $dv=e^{5x}$

Diferenciado (u) e integrando (dv):

$$du = dx; \int dv = \int e^{5x}dx\,;\ u = x;\ v = \frac{e^{5x}}{5}$$

Aplicamos la regla, tenemos:

$$uv - \int v\,du = x * \frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5} * dx = \frac{x * e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx$$

Aplicamos la integral exponencial conocida:

$$\int xe^{5x}dx = \frac{x * e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx \to \int xe^{5x}dx = \frac{x * e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} * \frac{e^{5x}}{5} + c$$

Simplificamos: $\boldsymbol{\int xe^{5x}dx = \frac{x * e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + c}$

b) $\int x^7 Lnx\,dx$

Sea: $u=\ln x$; $dv=x^7$

Diferenciado (u) e integrando (dv): (dv): $du = \frac{1}{u}dx;\ \int dv = \int x^7dx = \frac{x^8}{8}\ \to\ v = \frac{x^8}{8}$

Aplicamos la regla:

$$u * v - \int vdu = lnx * \frac{x^8}{8} - \int \frac{x^8}{8} * \frac{dx}{x} = lnx * \frac{x^8}{8} - \frac{1}{8}\int x^7dx$$

Integramos la potencia: $\boldsymbol{\int x^7 Lnx\,dx = \frac{x^8 lnx}{8} - \frac{x^8}{64} + c}$

POR PARTES

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

"Un día vi una vaca vestida de uniforme"

Esta es una estrategia para grabarse la fórmula de la integración por partes.

c) Integrales cuadráticas

Consiste en la aplicación de las siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = ln|g(x)|} \quad ; \quad \boldsymbol{\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}Arctg\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Ejemplos:

a) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 5}dx$

Sea: $u=x^3+5$ → derivando tenemos: $du=3x^2dx$ pertenece a la primera forma, entonces: $\boldsymbol{\int \frac{3x^2}{x^3 + 5}dx = Ln|x^3 + 5| + c}$

b) $\int \frac{1}{x^2 + 25}dx$

Por la forma de la integral, pertenece a la segunda forma: $\int \frac{1}{x^2 + 25}dx = \int \frac{1}{x^2 + 5^2}dx = \frac{1}{5}Arctg\left(\frac{x}{5}\right)$

c) $\int \frac{Cosx}{1 + Senx}dx$

Sea: $u=1+sen(x) \to du=cos(x)dx$, pertenece a la primera forma $\int \frac{Cosx}{1 + Senx}dx = Ln|1 + Senx| + c$

NOTACIÓN

Selecciona el método adecuado y resuelve:

$$\int \frac{5dx}{(3x-4)^2}$$

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{xdx}{(3x^2-4)^4}$$

d) Integración por sustitución trigonométrica

$$\textbf{Si}: \int f(\sqrt{\quad})dx \begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \to x = a * Sen\theta \\ \sqrt{a^2+x^2} \to x = a * Tg\theta \\ \sqrt{x^2+a^2} \to x = a * Sec\theta \end{cases}$$

La función a integrar contiene radicales, se utilizarán las siguientes sustituciones:

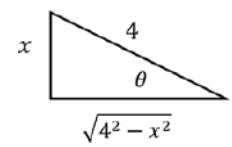
Ejemplo:

Calcular la integral de la siguiente función: $\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx$

Aplicamos el cambio de variable de integración: $x=4sen\theta \to dx=4cos\theta d\theta$

Reemplazamos el cambio: $\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx = \int \frac{4cos\theta d\theta}{\sqrt{4^2-(4sen\theta)^2}} = \int \frac{4cos\theta d\theta}{\sqrt{16-16sen^2\theta}} = \int \frac{4cos\theta d\theta}{\sqrt{16(1-sen^2\theta}} = \int \frac{4cos\theta d\theta}{4cos\theta} = \int d\theta = \theta$

Para retornar a la variable original, se construye el triángulo:



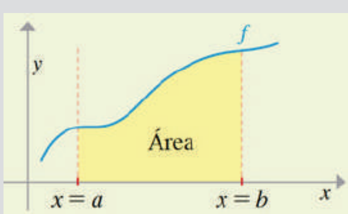
$$x = 4sen\theta \to \frac{x}{4} = sen\theta \to sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) = \theta$$

Finalmente, la integral será: $\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx = sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

4. Integrales Definidas

Es la integral calculada entre dos límites, la cual da como resultado un valor numérico, se aplicará a partir del Teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow:

NOTACIÓN



a: límite inferior.
b: límite superior.
F: primitiva de f.
F(a): Valor numérico de F en a
F(b): Valor numérico de F en b
La integral definida ya no lleva la constante de integración

$$\int_a^b f(x) = F|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo:

Calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\int_3^5 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{625-81}{4} = \frac{544}{4} = 136$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} senxdx = -Cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -Cos\frac{\pi}{4} - (-Cos0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

c) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

Sea: $u^2 = 1 + x^2 \to 2udu = 2xdx \to udu = xdx$

Reemplazamos y evaluamos la integral:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{u^2}udu = \int_0^1 u^2du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes integrales indefinidas

- $\int x^2 \ln(x)\, dx$
- $\int x^2e^xdx$
- $\int (x+1)^2e^xdx$
- $\int \ln(5x)dx$
- $\int e^x\cos(x)dx$
- $\int xcos(2x)dx$
- $\int \sec^3(x)dx$
- $\int 2xln(x)dx$
- $\int e^x(7+2x)dx$
- $\int e^x sen(x)dx$

Resolvemos las siguientes integrales definidas

- $\int_{-5}^{5} 5dx$
- $\int_{-3}^{4} (2x+3)dx$
- $\int_{-1}^{3} xdx$
- $\int_{\frac{1}{2}}^{4} x^3dx$

5. Aplicaciones de las Integrales

En esencia, una de las aplicaciones más importantes la integral es el cálculo del área bajo la curva de una o más funciones. El procedimiento es el siguiente:

Ejemplo:

Hallar el área comprendida entre las curvas: $y=x^2$; $y=x+2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$

Paso 1: graficamos e identificamos que función se encuentra arriba y abajo en el intervalo $a< x <b$ dado, en el ejercicio:

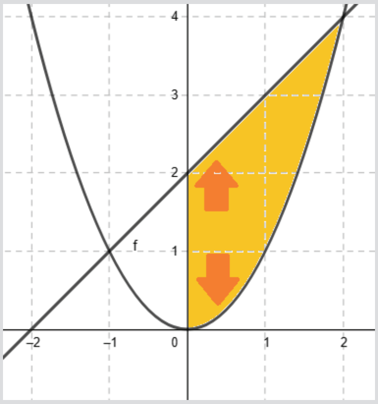
$$f_{superior} = x - 2; f_{inferior} = x^2$$

Paso 2: una vez identificado, procedemos a evaluar la integral en el intervalo dado en el ejercicio: $\int_a^b (f_{superior} - f_{inferior})dx$

$$A = \int_0^2 ((x+2) - x^2)dx = \int_0^2 xdx + 2\int_0^2 dx - \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 2(2-0) - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$A = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 2(2) - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = 2 + 4 - \frac{8}{3} \rightarrow A = \frac{10}{3}(u)^2 \text{ (área pedida)}$$

GRAFICANDO



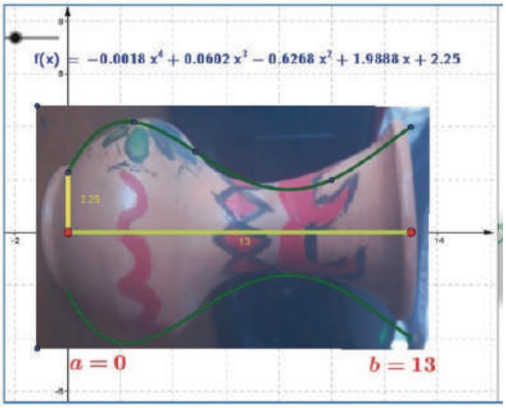
Actividad

Hallamos el área comprendida entre las siguientes funciones:

- $y = x;\ y = \log(x); 0 < x \leq 5$
- $y = x^2 - 2x + 2; y = 2 - x^2$ entre los puntos de intersección
- $y = sen(3x);\ y = 0;\ 0 \leq x \leq {}^{3\pi}/_2$
- $y = x^2 - 2; y = x^3 - 3; 0 \leq x \leq 10$

VALORACIÓN

En la tienda de nuestro barrio podemos encontrar agua embotellada. ¿Te diste cuenta qué forma tiene si la ves de perfil? Estas botellas fueron diseñadas para maximizar su capacidad minimizando costos de producción, de este modo se obtienen los diferentes frascos en que las empresas distribuyen su producto, aplican bastante los principios de Integración de funciones.



¿Cómo elaboran el modelo matemático, las empresas, para realizar frascos y otros envases para la distribución de sus productos?

¿En qué ciencias participa la integral?

¿De qué otra forma se puede calcular el área bajo la curva de una función?

PRODUCCIÓN

Elaboramos la ruleta de la figura con los siguientes materiales:

1 hoja de cartulina
1 hoja de cartón
Caja de colores
Lápices
Tijera

El juego consiste en que 4 participantes, cada uno de forma sucesiva, giran la ruleta dos veces y donde marque la flecha anota las funciones correspondientes (si repite la función, vuelve a girar) y para el intervalo: $0<x\leq 5$ debe hallar el área correspondiente entre las dos funciones seleccionadas. El primer participante que complete 4 áreas solicitadas gana el juego.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

ELIPSE E HIPÉRBOLA

La Elipse

Con los datos, hallar la ecuación de la elipse y trazar su gráfico.

a) $V(\pm 6;0)$ $\quad F(\pm 4;0)$

b) $V(\pm 3;0)$ $\quad F(\pm\sqrt{2};0)$

c) $V(0;\pm 7)$ $\quad F(0;\pm 5)$

d) $V(\pm\sqrt{5};0)$ $\quad F(0;\pm 3)$

e) $F(0;\pm 6), e=\frac{3}{4}$

f) $C(7;2)EM=8, Em=4, EF \parallel x$

Resolver y graficar los siguientes ejercicios:

a) Graficar la elipse $9x^2+16y^2=100$ con todos sus elementos.

b) Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (2,-6) y (2,6) y sus focos son (0,-5) y (0,5).

c) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (-2,0) y su excentricidad es $\frac{2}{3}$.

d) Los focos de una elipse son los puntos (0,-3) y (0,3) y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es 9. Hallar su ecuación.

e) Hallar la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyo eje principal se encuentra en el eje X. El eje menor es igual a 10 y la excentricidad es $\frac{12}{13}$.

f) Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse con centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0,-7) y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$

g) Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\sqrt{7}, \frac{2}{3}\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y a la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

La Hipérbola

Resolver y graficar los siguientes ejercicios:

a) Hallar la ecuación de una hipérbola de centro en el origen, focos sobre el eje Y, donde la longitud y el lado recto es $\frac{16}{3}$ y la pendiente de una de sus asíntotas es $\frac{3}{4}$.

b) Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{\sqrt{6}}{2}$ y que pasa por el punto (2,1)

c) El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso esta sobre el eje Y. Si un foco es el punto (0,4) y la excentricidad es igual a 2. Hallar su ecuación.

d) Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse $25x^2+9y^2=225$. Hallar la ecuación de la hipérbola con excentricidad $\frac{3}{4}$.

e) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $2x^2+3y^2=24$ y cuyos vértices están en los focos de la elipse.

f) Hallar el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola $x^2-4y^2=16$ y la recta $3x-2y+12=0$.

g) Los vértices de una hipérbola son los puntos (-3,-2) y (-3,2) la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar su ecuación.

h) El centro de una hipérbola es el punto (4,5) y uno de sus focos (8,5). Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación.

i) Las asíntotas de una hipérbola son $3x-4y-5=0$ y $3x+4y+11=0$, un foco es el punto (3,2), hallar su ecuación.

j) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas directrices son las rectas $y=1$ e $y=3$, que tiene como una asíntota la recta $2x-y-3=0$.

TEORÍA DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, \}$

$A = \{x \in U / x \text{ es vocal}\};$

$B = \{x \in U / x \text{ es consonante}\};$

$C = \{a, b, f, i\}$

Hallar:

a) $A \cap B \cap C$	g) $\overline{A} \cup \overline{C}$
b) $\overline{B \cup C}$	h) $\overline{B \triangle C}$
c) $A \triangle C$	i) $(B - C) \cup A$
d) $U \cap C$	j) $B \cup \varnothing$
e) $A \cap B$	k) $(A \cup B) \cap C$
f) $A - C$	l) $B \triangle (A \cup C)$

Resolver los problemas:

1. En un curso de 30 estudiantes, 16 preparan su proyecto de química, 12 estudiantes preparan su proyecto de física y 15 de aritmética.

Si: 3 estudiantes presentan los 3 proyectos, 5 estudiantes presentan sólo proyecto de aritmética y física, 4 estudiantes sólo presentan química y aritmética, 2 estudiantes sólo presentan física y química.

a) ¿Cuántos estudiantes sólo presentan química?

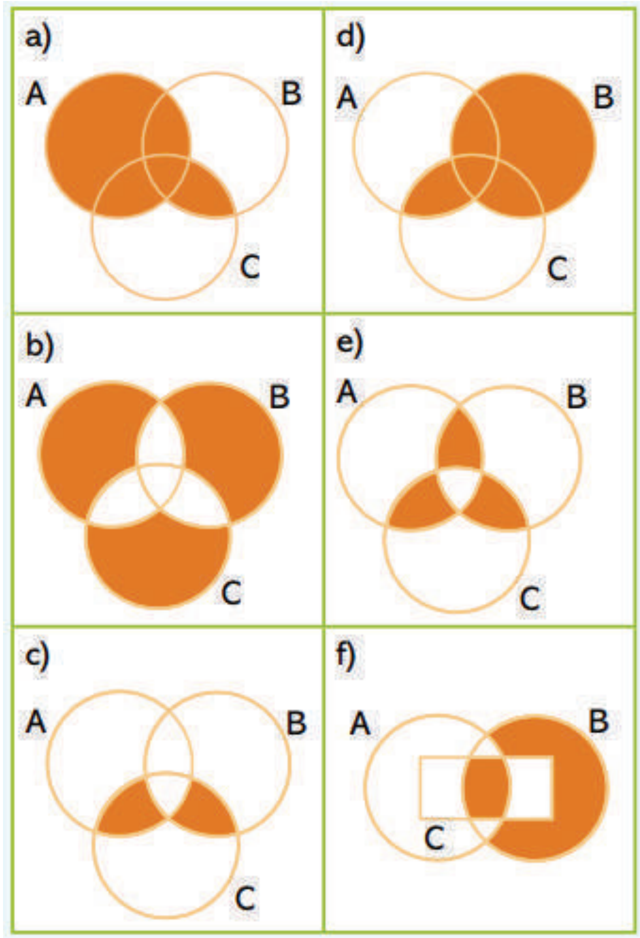
b) ¿Cuántas no presentan algún proyecto?

2. En un examen de admisión de un conservatorio de música, 120 estudiantes quedan asignados de la siguiente manera en instrumentos opcionales: Piano 60 estudiantes, trompeta 47 estudiantes y clarinete 68.

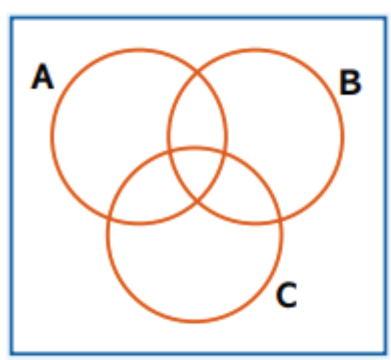
Si: 28 estudiantes asisten a las clases de tres instrumentos. 27 estudiantes a clarinete y piano. 4 estudiantes a piano y trompeta. Y 2 estudiantes a trompeta y clarinete. ¿Cuántos asisten sólo a trompeta?

3. El contador de una empresa farmacéutica presentó un informe con el fin de justificar su buen desempeño para conservar su puesto. Le dijo al presidente que: de las 500 farmacias en las que repartimos ayer, 281 adquirieron desoxitocilina, 196 adquirieron desoxitocilina y penicilina, 87 amoxicilina, 143 adquirieron desoxitocilina y amoxicilina y 36 farmacias adquirieron los tres tipos de medicamentos. El presidente despidió al contador ¿Por qué?

Indicar las operaciones que representan los diagramas de Venn



En el diagrama de Venn, representar en colores cada expresión.



a) $A \cap (B \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

d) $B \cup \overline{C}$

e) $\overline{A} \cup B$

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Límites

Utilizando una tabla de valores por aproximación, calcular el límite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(-x^2-5x+6)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{x^2-5x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x})$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4-x^3-2x)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+5x+6)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3x^4+x^3-2x}$

g) $f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<2\\ -x+2 & x>2\end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases}1 & x<-1\\ x^2 \text{ si} & -1\le x<1\\ 2 & x\ge 1\end{cases}$

Utilizar los teoremas de los límites, evaluar y justificar los resultados

a) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2+2x-8)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^3-10x-8)$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-3x+4)$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x+5}{3x+2}$

Resuelve los limites algebraicos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x+5}{x+7}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{5-\sqrt{16+x}}{3-\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{\sqrt{x}+7}-3}{x-4}$

Resuelve los limites trigonométricos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sen10x}{Sen\ 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sen10x}{Sen\ 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}Arcsenx$

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{Senx}{x-\pi}$

Resuelve los limites exponenciales:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^x-1}{2^x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$

Derivadas

Por definición hallar las derivadas

a) $(x)=x^2+3x+1$
b) $f(x)=\sqrt{x+7}$
c) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

Derivar las siguientes funciones

a) $f(x)=3^x+4$
b) $f(x)=x^3+x^2+x$
c) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$
d) $f(x)=Arcsen(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$
e) $f(x)=2lnx+xln2$
f) $f(x)=5Cosx+xCos10$
g) $f(x)=\ e^x+Cosx-Senx+Tanx$

Derivar por la regla del producto

a) $f(x) = x^3 \sin x + x^6 Cosx$
b) $f(x) = x^6 Lnx + e^x Cosx$
c) $f(x) = x^2 Senxln(x-1)$

Derivar por la regla de la cadena

a) $f(x) = Sen(x^5 + 1)$
b) $f(x) = (x^3 - 1)^7$
$f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$
c) $f(x) = e^{sen(x+4)}$
d) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 Arcsen(\frac{x}{a})$
e) $f(x) = \frac{1}{2}Ln\left(tan\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} * \frac{Cosx}{Sen^2x}$
f) $f(x) = \frac{m}{2}Ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a}Ln(\frac{x-a}{x+a})$
g) $f(x) = \frac{1}{2}Ln(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x})$
h) $f(x) = Sen(x^2 - x) - \frac{1}{3}Cos^3(x^3 - 1)$
i) $f(x) = Sen(x^{n-1} + 4) + Cos(x^5 + 2x + 3)$

Integrales

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int 7(x^5 +> 2x + 3)dx$
b) $\int (Senx + 3x)dx$
c) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}dx$
d) $\int \frac{1-x^4}{1+x^2}dx$
e) $\int \frac{6x^3}{x-1}dx$
f) $\int \sqrt{2x}dx$
g) $\int x^{1-n}dx$

Aplicando el método de sustitución, calcular:

a) $\int (x+7)^9 dx$
b) $\int x^2(1+x^3)dx$
c) $\int \frac{10x}{\sqrt{7-5x^2}}dx$
d) $\int \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx$
e) $\int \frac{Lnx}{x}dx$
f) $\int \frac{4senx}{5-2cosx}dx$
g) $\int \frac{Senx}{1+Cos^2x}dx$
h) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$

Aplicando el método por partes, calcular:

a) $\int xCosxdx$
b) $\int Lnx * x^2 dx$
c) $\int xe^{5x}dx$
d) $\int x^3 e^x dx$
e) $\int x * Arctanx\, dx$
f) $\int e^{2x} Cos3x\, dx$

Aplicando el método con expresiones cuadráticas, integrar

a) $\int \frac{4x^2}{x^4+1}dx$
b) $\int \frac{9x^4}{x^9-1}dx$
c) $\int \frac{x^5}{x^5+1}dx$

Aplicando el método de sustitución trigonométrica, calcular:

a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$
c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+x^2}}$

Usando el teorema fundamental del cálculo, integrar:

a) $\int_0^2 8x^2 dx$
b) $\int_2^5 6x^3 dx$
c) $\int_0^1 x\sqrt{x-1}dx$
d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} Senx\, dx$
e) $\int_2^5 (6x-3)dx$
f) $\int_3^7 (2x^3 - 1)dx$

Aplicaciones de la integral:

Hallar las áreas comprendidas entre las funciones e intervalos indicados:

a) $y = x^2 \quad ; \quad 0 \le x \le 2$
b) $y = 2^x \quad ; \quad 0 \le x \le 3$

Hallar las áreas comprendidas entre las funciones e intervalos indicados:

a) $y = x^2 \quad ; \quad y = 2x + 1$
b) $y = 9 - x^2 \quad ; \quad y = x + 3$
c) $y = x^2 \quad ; \quad y = \sqrt{x}$

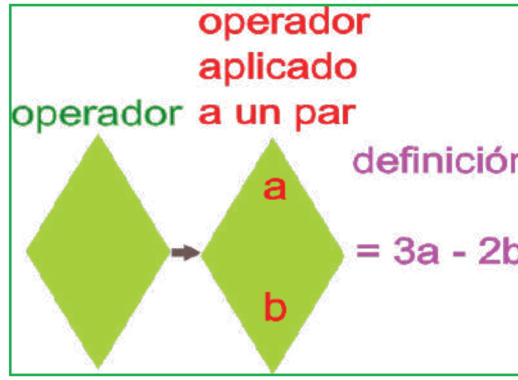
(Ejercicios y problemas recopilados)

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA

PRÁCTICA

Construyendo un operador binario

La suma, resta, multiplicación y división de números son algunos operadores binarios en $\mathbb{R}$. En general, un operador binario asocia a un par de números con un resultado, sus características son:(1) se aplica a un par de elementos, generalmente números; (2) asocia a dicho par de elementos un resultado a través de una definición o criterio de definición.



Con el concepto anterior es posible construir un operador binario, quizá sin mucho rigor matemático, pero brindando una idea fundamental de un operador. Muchas áreas de la tecnología tienen sus propios operadores como, por ejemplo: el álgebra relacional (σ, π, ...) fundamento para el Modelo de Base de Datos Relacional; los operadores lógicos (AND, OR,...) en el área de la electrónica digital e informática.

De un trozo de cartulina construye un rombo de cualquier tamaño, este será nuestro operador, luego coloca los elementos a los que aplicará nuestro operador, finalmente escriba una definición o criterio de definición para dicho operador (puede ser similar al ejemplo)

Actividad

Resolvemos: Si 

= 3a-2b, hallar a) 

b) 

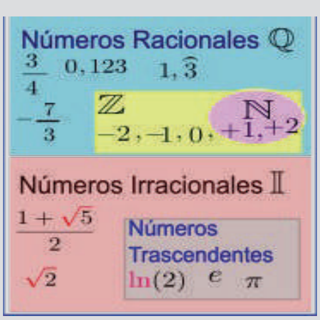
Construimos otro operador binario, luego proponemos como el ejercicio 1). Intercambiamos con las y los compañeros.

TEORÍA

1. Operaciones con números reales.

Para el estudio de las operaciones con números reales es necesario recurrir a los axiomas que sustentan las operaciones en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Los axiomas de adición, multiplicación y distribución sobre el conjunto de los números reales serán expuestos paulatinamente.

NÚMEROS REALES



DESAFÍO

Una de las clasificaciones aceptadas de los números reales es: números reales algebraicos y los números reales trascendentes.

Identifique y anote al menos 10 números trascendentes

Axiomas para la adición

A.1. $\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$ (Clausura)

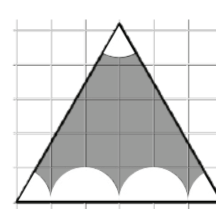
A.2. $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a+b=b+a$ (Conmutatividad)

A.3. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: \quad (a+b)+c=a+(b+c)$ (Asociatividad)

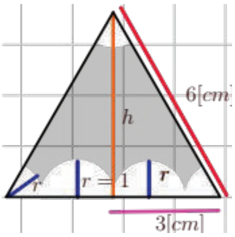
A.4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists 0 \in \mathbb{R}: \quad a+0=0+a=a$ (Neutro aditivo)

A.5. $\forall a \in \mathbb{R}: \exists -a \in \mathbb{R}: \quad a+(-a)=(-a)+a=0$ (Inverso aditivo)

Problema. El triángulo de la figura es equilátero de 6cm de lado. Todos los sectores circulares tienen el mismo radio ¿cuál es el valor del área sombreada?



Solución: El área de un triángulo será un , luego el área de un semicírculo será un $\mathbb{Q}$, la diferencia de dichas áreas será el área $\mathbb{I}$ sombreada y pertenecerá a los $\mathbb{R}$.



De acuerdo al problema, el radio vale 1 y los sectores circulares forman 3 semicírculos, entonces, el área sombreada será la diferencia entre el área del triángulo y los 3 semicírculos.

Área del triángulo

$$A_\triangle = \frac{b\cdot h}{2}$$

pero h es

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$$
$$h = \sqrt{3^2\cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

reemplazando

$$A_\triangle = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$
$$A_\triangle = 9\sqrt{3}$$

Área del semicírculo

$$A_\circ = \frac{\pi\cdot r^2}{2}$$

como r=1

$$A_\circ = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

hay 3 semicículos

$$A_T = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Área sombreada

$$A_s = 9\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}$$
$$A_s = \frac{18\sqrt{3} - 3\pi}{2}$$

factorizando 3

$$A_s = \frac{3(6\sqrt{3} - \pi)}{2}$$

Notemos que el resultado es un número real no trascendente sino algebraico.

Ejemplo: Hallar el valor de:

Se identifica que tiene cuatro términos sin signos de agrupación. Se recomienda aplicar el orden de operadores en cada término

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1} + 4,5 \div \frac{3}{2} + \frac{2}{1,3} - 1,0\hat{2} =$$ • ejercicio dado(expresión con 4 términos)

$$= \sqrt[3]{\frac{7-8}{8}} + \frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} \div \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{9}}}} - \frac{\overset{46}{\cancel{92}}}{\underset{45}{\cancel{90}}}$$

- Operando en la raíz y fracciones generatrices

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} + \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} - \frac{46}{45}$$

- En la raíz,dicisión y fracción compleja

$$= -\frac{1}{2} + 3 + \frac{3}{2} - \frac{46}{45}$$

- Raíz y simplificación

$$= \frac{-45 + 270 + 135 - 92}{90}$$
$$= \frac{268}{90} = \frac{134}{45} \cong 2.9\hat{7}$$

- Coún denominador

2. Exponentes y radicales.

Las transformaciones que se pueden realizar con los exponentes son denominadas leyes de los exponentes, ellos junto al grupo axiomático de los números reales permiten realizar simplificaciones y operaciones aritméticas o algebraicas.

Ejemplo: Simplificar $F = \dfrac{3^{n+3} + 3^{n+2} - 3^{n+1}}{3^{n+2} + 2\cdot 3^n}$

Solución: La propiedad simétrica de la igualdad permite usar las propiedades de derecha a izquierda; esto, permite simplificar o reducir cálculos en aritmética y álgebra

$$F = \frac{3^{n+3} + 3^{n+2} - 3^{n+1}}{3^{n+2} + 2\cdot 3^n}$$ • ejercicio dado

$$F = \frac{3^n\cdot 3^3 + 3^n\cdot 3^2 - 3^n\cdot 3}{3^n\cdot 3^2 + 2\cdot 3^n}$$ • $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

$$F = \frac{3\cdot 3^n(3^2 + 3 - 1)}{3^n(3^2 + 2)}$$ • factorizando: $3\cdot 3^n = 3^{n+1}$

$$F = \frac{3\cdot \cancel{3^n}\cancel{(3^2+2)}}{\cancel{3^n}\cancel{(3^2+2)}}$$ • operando para simplificar

$$F = 3$$

AXIOMAS

Axiomas de la multiplicación

Clausura

$\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\cdot b \in \mathbb{R}$

Conmutatividad

$\forall a, b \in \mathbb{R}:\ a\cdot b = b\cdot a$

Asociatividad

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

Neutro multiplicativo

$\forall a \in \mathbb{R} \exists 1 \in \mathbb{R}:$

$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

Inverso multiplicativo

$\forall a \in \mathbb{R} a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}:$

$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$

Axiomas de distributividad

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}:$

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Tambien

$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot b$

LEYES DE EXPONENTES

Leyes de exponentes

$\forall x, y, p \in \mathbb{N},\ ;\forall a, b \in \mathbb{R}$

$(a^y)^x = (a^x)^y = a^{x\cdot y}$

$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^y$

$\Rightarrow (a^x\cdot b^y)^p = a^{x\cdot p}\cdot b^{y\cdot p}$

$a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\quad b \neq 0$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\quad a \neq 0$

$a^{m^{n^p}} = a^{m^x} = a^z$

PROPIEDADES

Exponentes cero

si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0:\ a^0 = 1$

Exponente negativo

si $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0:\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

consecuencia: $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

Exponente fraccionario

si $m, n \in \mathbb{N}: a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

nota: $(a^x)^y \neq a^{x^y}$

PROPIEDADES

leyes de los radicales

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\ n\in\mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b\neq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot q]{a^{m\cdot q}}$$

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a^n}=|a| \quad \bullet \text{ si n es par}$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a \quad \bullet \text{ si n es impar}$$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizaciones

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^q}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-q}}}{\sqrt[n]{b^{n-q}}},\quad n>q$$

por su conjugada

$$\frac{z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$$

para $\pm$ de raíces cubicas

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$$

Ejemplo: si $xy^{-1}=3-x^{-1}y$ hallar $M=\dfrac{(x+y)^4+3x^2y^2}{4x^2y^2}$

En los ejercicios sujetos a una condición, es recomendable realizar

De la condición se tiene:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3 \quad \bullet \text{ por } a^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$x^2+y^2=3xy \quad \bullet \text{ por // } (xy)$$

$$x^2+2xy+y^2=5xy \quad \bullet \text{ por // } +2xy$$

$$(x+y)^2=5xy \quad \bullet \text{ factorización}$$

$$(x+y)^4=25x^2y^2 \quad \bullet \text{ por } ()^2$$

luego, M será:

$$M=\frac{25x^2y^2+3x^2y^2}{4x^2y^2} \quad \bullet \text{ por reemplazo}$$

$$M=\frac{28x^2y^2}{4x^2y^2} \quad \bullet \text{ por operación}$$

$$M=7$$

operaciones en dicha condición buscando una expresión que ayude a resolver el ejercicio dado.

Para las operaciones con radicales, es necesario recordar las formas de racionalización y las propiedades que gozan las raíces en números reales.

Ejemplo: Simplificar $\left[\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{3}}\right]\cdot 2^{-1}+\dfrac{1}{3}\sqrt{(-6)^2}$

Racionalice el denominador multiplicando por su conjugada, use productos notables, propiedad del exponente negativo y raíz de índice par.

$$\left[\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{3}}\right]\cdot 2^{-1}+\frac{1}{3}\sqrt{(-6)^2}= \quad \bullet \text{ ejercicio dado}$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}(1)+1}{2+\sqrt{3}}\right]\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot|-6| \quad \bullet \text{ por producto notable, } a^{-1} \text{ y } \sqrt{a}$$

$$=\left[\frac{4-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right]\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{6} \quad \bullet \text{ racionalización y simplificación}$$

$$=\left[\frac{8-8\sqrt{3}+2(\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}\right]\cdot\frac{1}{2}+2 \quad \bullet \text{ opercaciones en la fracción}$$

$$=\left[\frac{14-8\sqrt{3}}{1\cdot 2}\right]+2=\left[\frac{\cancel{2}(7-4\sqrt{3})}{\cancel{2}}\right]+2 \quad \bullet \text{ por operaciones}$$

$$=9-4\sqrt{3}$$

Actividad

Resolvemos:

- Si $x @ y = xy$∀, y ⍰ Z, hallar $-1 @ 6 =$
- Calcular $A=\dfrac{7^{n+3}-7^{n+1}}{3\cdot 2^4\cdot 7^{n+1}}$
- Si $2^{-x}=\dfrac{1}{3}$ calcular: $E=(4^x)^2+(8^x)^{\frac{1}{3}}+(16^x)^{\frac{1}{2}}$
- Simplificar $E=(x^a x^{\frac{1}{b}})^{-b}(x^{-\frac{1}{a}}x^b)^a$
- simplifique $S=\left[\dfrac{(x^2)^{-1}(x^{2^{-1}})(x^{-2})^{-1}}{(x^3)^{-1}(x^{3^{-1}})(x^{-3})^{-1}}\right]^6$

REPRESENTACIÓN CÓNICA

Teorema del resto. Sea *P(x)*, un polinomio. Si

P(x): (x-c),⍰ R(x)= P(c)

Para resíduos especiales. En

P(x)=d(x)·q(x)+r(x)

Si multiplicamos *M(x)* a *P(x)* y *q(x)*, tendremos:

$$r(x)=\frac{r'(x)}{M(x)}$$

3.Operaciones con expresiones algebraicas.

Son operaciones algebraicas la suma, resta, multiplicación, división y otras como fracciones algebraicas, radicales, exponentes; estos, en su forma combinada son de uso frecuente en las aulas universitarias.

Ejemplo: De la división $4\sqrt{3}x^4-4x^3+5\sqrt{3}x^2+5x+2$ *entre* $x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Halle la suma de coeficientes del cociente

La regla de Ruffini permite hallar el cociente y residuo cuando un polinomio se divide entre $x\pm a$

	$4\sqrt{3}$	-4	$5\sqrt{3}$	5	2
$\frac{\sqrt{3}}{3}$		4	0	-5	0
	$4\sqrt{3}$	0	$-5\sqrt{3}$	0	2

$$R=2$$

$$C_x=4\sqrt{3}x^3-5\sqrt{3}x$$

sumando coeficientes

$$4\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

Ejemplo: Hallar k para que $k^2x^2 - 10x \quad kx + 50$, entre $2kx - 5$ sea exacto

El teorema del resto nos permite hallar el residuo cuando evaluamos al dividendo en $P_{(a)}$ siendo el divisor es $x - a \Rightarrow 0$

$$\text{Divisor} = 0 \qquad 2kx - 5 = 0 \qquad x = \frac{5}{2k}$$

Evaluando el dividendo

$$R = 8k^2\left(\frac{5}{2k}\right)^2 - 10\cdot\frac{5}{2k} + k\cdot\frac{5}{2k} + 50$$

$$R = \cancel{8k^2}\left(\frac{25}{\cancel{4k^2}}\right) - \frac{\cancel{50}}{\cancel{2}k} + \frac{5\cancel{k}}{2\cancel{k}} + 50$$

$$R = \frac{205}{2} - \frac{25}{k}$$

Residuo cero

$$\frac{205}{2} - \frac{25}{k} = 0$$

$$\frac{205}{2} = \frac{25}{k}$$

$$k = \frac{10}{41}$$

Ejemplo: Determinar los dos números consecutivos: $x > y$, que cumplen la siguiente relación:

$$\left[\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right]\left[\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right]\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 5$$

Notemos que el ejercicio tiene una condición con igualdad, entonces, es válido aplicar axiomas y leyes de la igualdad en la condición luego de simplificarlo.

operando en la condición

$$\left[\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right]\left[\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right]\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 5$$

$$\left[\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)}\right]\left[\frac{(x+y)^2}{2xy}\right]\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 5 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x+y}{x-y} = 5$$

por leyes de igualdad

$$x + y = 5x - 5y$$

$$6y = 4x$$

$$3y = 2x$$

$$\therefore y = 2; x = 3$$

NOTA

Axiomas de igualdad

si $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a = a$ Reflexiva

$a = b \Rightarrow b = a$ simétrica

$a = b$ y $b = c \Rightarrow a = c$ transitividad

Teoremas de la igualdad

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a = b \Rightarrow a + c = b + c$

$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

si: $a = b$ y $c = d$

$\Rightarrow a + c = b + d$

si: $a = b$ y $c = d$

$\Rightarrow a - c = b - d$

si: $a = b$ y $c = d$

$\Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$

si: $a = b$ y $c = d$

$\Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ $(c \neq 0; d \neq 0)$

si: $a \cdot b = 0$

$\Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

VALORACIÓN

Actividad

En clase, conversamos sobre: ¿cómo influirán los conocimientos del manejo algebraico en un examen de admisión a una institución de educación superior? Tomamos nota sobre las opiniones de los compañeros.

....

....

....

PRODUCCIÓN

Producción Teórica: (Taller de Ejercicios). Resolvemos:

1) Para todo $n \neq 1$ se cumple $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{A}{n+1} + \dfrac{B}{n-1}$

calcule A+B (fracciones parciales)

2) Simplificar $\dfrac{(x-a)^2 + 2(a^2+x^2) + (x+a)^2}{(x+a)^2 - (x-a)^2}$

3) Hallar el resto de: (puede usar c.v.) $x^2 - 7x = u$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{x^2 - 7x + 11}$$

4) Calcular: $\dfrac{\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}-1}}$

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA: ECUACIONES

PRÁCTICA

Construimos una función, ecuación lineal (modelo lineal).

La construcción de modelos lineales a través de una función lineal requiere de: (1) identificar las cantidades cambiantes, luego, definir las variables (letras) que describan dichas cantidades (2) identificar la variable dependiente e independiente; los que serán variables de salida y entrada en el modelo (3) se identifica el valor inicial y la tasa de cambio del modelo lineal (4) escribir, en lo posible, una expresión (fórmula) para la función lineal, también puede ser por tabla de valores.

Alan es un estudiante universitario que planea pasar el verano en Cochabamba. Ahorró 3500 bolivianos para su estadía y prevé gastar 800 bolivianos cada semana en comida y actividades. ¿Escriba un modelo lineal que represente la situación? ¿escriba la función como ecuación, resuelve e interprete el resultado o raíz de la ecuación?

Si $f_{(x)} = 0$ resulta una ecuación, cuya solución representa el valor de la variable de entrada que hace cero la variable de salida, en nuestro caso, en cuántas semanas se acaba el ahorro de Alan

($t = 3\frac{1}{8}$ semanas)

Cantidades que cambian: (1) dinero restante del ahorro luego de algún gasto.; (2) tiempo en semanas

Variables de entrada y salida:

M: dinero restante (var. Salida o dependiente), luego, denotamos con *f( )*, una función

t: tiempo en semanas (variable entrada o independiente)

Variables de inicio: 2500 Bs

Tasa de cambio: Bs/semana.

Modelo lineal: $f_{(t)} = 2500 - 800t$

Ecuación: $2500 - 800t = 0 \Rightarrow t = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$

Actividad

Identificamos una situación cotidiana, luego:

- Construimos un modelo lineal e interpretamos algunos resultados proyectivos
- Escribimos como ecuación la función, resolvemos e interpretamos el resultado. Adicionalmente, graficamos en el plano cartesiano.

TEORÍA

DATOS

Ecuaciones Equivalentes

sea: $A_{(x)} = B_{(x)}$ una ecuación

$$\Rightarrow A_{(x)} \pm m = B_{(x)} \pm m$$
$$A_{(x)} \cdot m = B_{(x)} \cdot m$$
$$A_{(x)}/m = B_{(x)}/m;\ m \neq 0$$
$$\left[A_{(x)}\right]^m = \left[B_{(x)}\right]^m$$
$$\sqrt[m]{A_{(x)}} = \sqrt[m]{B_{(x)}}$$

son ec. equivalentes para m una cantidad o expresión independiente de x, pero:

$$A_{(x)} \cdot m = B_{(x)} \cdot m$$
$$A_{(x)}/m = B_{(x)}/m;\ m \neq 0$$
$$\left[A_{(x)}\right]^m = \left[B_{(x)}\right]^m$$
$$\sqrt[m]{A_{(x)}} = \sqrt[m]{B_{(x)}}$$

habrá soluciones extrañas si m depende de x

1. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Recordemos que una ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas que se cumple para ciertos valores de las variables. Los axiomas y teoremas de la igualdad permiten realizar operaciones sobre dichas igualdades.

$$\frac{\sqrt[n]{3+x}}{3} = \sqrt[n]{3x} - \frac{\sqrt[n]{3+x}}{x}$$

Ejemplo. Resolver

Multiplicar por el mínimo común múltiplo a la igualdad, luego aplique otras operaciones para obtener ecuaciones equivalentes hasta hallar la solución.

La prueba de la raíz (resultado) se deja al estudiante.

$$\frac{\sqrt[n]{3+x}}{3} = \sqrt[n]{3x} - \frac{\sqrt[n]{3+x}}{x}$$
$$x\sqrt[n]{3+x} = 3x\sqrt[n]{3x} - 3\sqrt[n]{3+x} \quad \bullet \text{ por } //3x$$
$$(3+x)\sqrt[n]{3+x} = 3x\sqrt[n]{3x} \quad \bullet \text{ por } //+3\sqrt[n]{3+x}$$
$$(3+x)^n(3+x) = (3x)^n(3x) \quad \bullet \text{ por } //()^n$$
$$(3+x)^{n+1} = (3x)^{n+1} \quad \bullet \text{ por ley de exp.}$$
$$3+x = 3x \quad \bullet \text{ por } //\sqrt[n+1]{\ }.$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Ejemplo. Resolver $2x^2 + 4x - 7\sqrt{x^2+2x+10} = -5$

Con atención se observa una cierta similitud en los términos del primer miembro, con algunos ajustes, esto puede usarse para un cambio de variable.

$2x^2+4x-7\sqrt{x^2+2x+10}=-5$

$2(\underbrace{x^2+2x+10}_{\text{c. de variable}}-10)-7\sqrt{\underbrace{x^2+2x+10}}=-5$

c.v: $u^2=x^2+2x+10 \Rightarrow u=\sqrt{x^2+2x+10}$

Observa que: $u>0$

$2(u^2-10)-7u=-5 \Rightarrow 2u^2-7u-15=0$

factorizando y resolviendo tenemos

$$(2u+3)(u-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} u_1=-\frac{3}{2} \text{ no: } u<0 \\ u_2=5 \text{ si: } u>0 \end{cases}$$

Volviendo a la variable original con $u=5$

$x^2+2x+10=5^2$

$x^2+2x-15=0$

factorizando

$(x+5)(x-3)=0$

por $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$

$x+5=0 \Rightarrow x_1=-5$

$x-3=0 \Rightarrow x_2=3$

Realiza la prueba

Ejemplo: Si α y β son soluciones de: $u^2-pu-q=0$, hallar $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

Como α y β son raíces de una ecuación cuadrática, se cumple:

suma y producto de raíces

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-p}{1}=p$$

$$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=\frac{-q}{1}=-q$$

Transformamos la expresión a resolver

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\cdot\beta}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

reemplazando $\alpha+\beta=p$ y $\alpha\cdot\beta=-q$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{p^2\quad 2q}{q}=\frac{p^2}{q}\quad 2$$

Los **sistemas de ecuaciones** pueden ser resueltos por diferentes métodos, se invita al estudiante y docente realizar un repaso rápido de los métodos existentes.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x^2+xy=3 & (1) \\ x^2+y^2=5 & (2) \end{cases}$

Es un sistema con polinomios homogéneos, en estos casos, uno de las formas es la estrategia del cambio de variable (c.v.) $y=t\cdot x$ luego el sistema será:

$$\begin{cases} x^2+x(tx)=3 \\ x^2+(tx)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+tx^2=3 & (3) \\ x^2+t^2x^2=5 & (4) \end{cases} \text{ dividiendo} \Rightarrow \frac{x^2+tx^2}{x^2+t^2x^2}=\frac{3}{5}$$

Resolvemos en t

$$\frac{x^2(1+t)}{x^2(1+t^2)}=\frac{3}{5}$$

$5+5t=3+3t^2$

$3t^2-5t-2=0$

$(3t+1)(t-2)=0$

luego

$t_1=-\frac{1}{3},\ t_2=2$

Reemplazamos t_1 en (4)

$x^2+\frac{1}{9}x^2=5$

$x^2=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}$

luego

$x_1=3\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x_2=-3\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Reemplazamos t_2 en (4)

$x^2+4x^2=5$

$5x^2=5$

$x=\sqrt{1}$

luego

$x_3=1$

$x_4=-1$

Calculamos y en el c.v. con t_1, x_1, x_2, luego t_2, x_3, x_4

con: $t_1,x_1,x_2 \Rightarrow y_1=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\rightsquigarrow y_2=-\frac{1}{3}\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}$

con: $t_2,x_3,x_4 \Rightarrow y_3=2\cdot 1=2; \rightsquigarrow y_4=2(-1)=-2$

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 3xy+2x+2y=12 & (2) \end{cases}$

Este sistema está formado por polinomios simétricos, por lo que se recomienda el c.v

$$x=u+v;\quad y=u-v$$

CAMBIO DE VARIABLES

Los cambios de variable permiten reducir la complejidad del ejercicio, se efectúa cuando existe cierta similitud ajustable en los términos del ejercicio planteado.

c.v. (expresión recíproca)

$$\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=v$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=\frac{1}{v}$$

para $v\neq 0$)

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

sea: $ax^2+bx+c=0$ la ec.

y sus raíces x_1, x_2

$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

formación de la ecuacion de 2do grado

$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1\cdot x_2)=0$

RAÍCES BICUADRÁTICAS

sea: $ax^4+bx^2+c=0$ la ec.

y sus raíces x_1,x_2,x_3,x_4

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{c}{4}$

$x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4=\frac{b}{a}$

formación de la ecuacion bicuadrática

$x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^2+$

$+(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)=0$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Consiste en transformar un sistema lineal en otro escalonado, se usa combinaciones entre sí sumándolas y/o retándolas; además de multiplicar, dividir por un número. Sea la ecuación:

$$\begin{cases} 2x+3y-7z=-1 & \text{A} \\ 3x+4y-6z=5 & \text{B} \\ 5x-2y+4z=-7 & \text{C} \end{cases}$$

anule los términos con 'x' en ecuación B y C. Se mantiene A

$$\begin{cases} 2x+\ 3y-\ 7z=-1 & \text{A} \\ -\quad y+\ 9z=13 & \text{B}' \\ -19y+43z=-9 & \text{C}' \end{cases}$$

B' y C' son ecuaciones que resultan de: B'=-3A+2B y C' = -5A+2C

$$\begin{cases} 2x+3y-\ 7z=-1 & \\ -\ y+\ 9z=13 & \\ -128z=-256 & \text{C}'' \end{cases}$$

C''=-19B'+C'; luego z=2, y=5, x=-1

$$\begin{cases} (u+v)^2+(u-v)^2+(u+v)+(u-v)=8 \\ 3(u+v)(u-v)+2(u+v)+2(u-v)=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2+u=4 & ③ \\ 3u^2-3v^2+4u=12 & ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2+v^2+u=4 \\ 3u^2-3v^2+4u=12 \end{cases} \quad //(3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3u^2+3v^2+3u=12 \\ \underline{3u^2-3v^2+4u=12} \end{cases}$$
$$6u^2+7u=24$$

Resolviendo:
$$6u^2+7u-24=0$$
$$(3u+8)(2u-3)=0$$
$$u_1=-\frac{8}{3};\ u_2=\frac{3}{2}$$

Calculamos los valores v en ③ (despejamos en $v^2=$)

$$\text{si: } u_1=\frac{3}{2} \Rightarrow v^2=-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+4 \Rightarrow v_1=\frac{1}{2}; \quad v_2=-\frac{1}{2}$$

$$\text{si: } u_2=-\frac{8}{3} \Rightarrow v^2=-\left(-\frac{8}{3}\right)^2-\left(-\frac{8}{3}\right)+4 \Rightarrow v_3=\frac{2}{3}i; \quad v_4=-\frac{2}{3}i$$

Calculamos los valoresde x, y en el c.v.

$$\text{con: } u_1=\frac{3}{2};\ v_1=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2; \quad y_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

$$\text{con: } u_1=\frac{3}{2};\ v_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x_2=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1; \quad y_2=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

$$\text{con: } u_2=-\frac{8}{3};\ v_3=\frac{2}{3}i \Rightarrow x_3=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}i; \quad y_3=-\frac{8}{3}-\frac{2}{3}i$$

$$\text{con: } u_2=-\frac{8}{3};\ v_4=-\frac{2}{3}i \Rightarrow x_4=-\frac{8}{3}-\frac{2}{3}i; \quad y_4=-\frac{8}{3}-\left(-\frac{2}{3}i\right)=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}i$$

Actividad

Resolvemos: a) $x+\sqrt{x-2}=4$ b) $\sqrt{x-1}=3+\sqrt{3x-2}$ c) $\sqrt{5+a}+\sqrt{a}=\dfrac{15}{\sqrt{3x-2}}$

d) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2y^2+xy=6 \\ x+y=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-3z=-4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases}$

PROPIEDADES

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple:

$a>b \Rightarrow a\pm c>b\pm c$

$a<b \Rightarrow a\pm c<b\pm c$

tambien en : $a\le x\le b$

$a\pm c\le x\pm c\le b\pm c$

$\therefore$ la desigualdad no cambia

$\forall a,b \in \mathbb{R} \wedge c\in\mathbb{R}^+$ se cumple:

$a>b \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

$a<b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

tambien en : $a\le x\le b$

$a\cdot c\le x\cdot c\le b\cdot c$

la desigualdad no cambia

$\forall a,b \in \mathbb{R} \wedge c\in\mathbb{R}^-$ se cumple:

$a>b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

$a<b \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

tambien en: $a<x<b$

$\Rightarrow a\cdot c>x\cdot c>b\cdot c$

la desigualdad cambia

2. Desigualdades e inecuaciones.

Al igual que las ecuaciones algebraicas, en las inecuaciones se puede usar diversas propiedades y leyes de las desigualdades para encontrar el conjunto de solución que satisfaga la desigualdad.

Ejemplo: Resolver $-2\le\dfrac{4-2x}{2}<1$

Una inecuación simultánea, puede resolverse separando en dos desigualdades o inecuaciones, también de forma directa, aislando la variable en el centro.

Aislando x en el centro

$-2\le\dfrac{4-2x}{2}<1$ • ejercicio dado

$-4\le 4-2x<2$ • multiplicando por 2

$-8\le -2x<-2$ • restando - 4

$4\ge x>2$ • multiplicando por $-\frac{1}{2}$

Cs: $x\in\,]2,4]$

Ejemplo: Determina la variación de $f_{(x)}=\dfrac{16}{x-3}$ si $x\in]5;11[$

Se trata de hallar el condominio de una función definido en un intervalo. Realizamos operaciones en las desigualdades.

$5<x<11$ • condición del ejrercicio

$2<x-3<8$ • restando 3

$\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{x-3}<\dfrac{1}{2}$ • su recíproco

$2<\dfrac{16}{x-3}<8$ • multiplicando por 16

Rpa.]2,8[

En las desigualdades reducibles a segundo grado es posible aplicar el método de los puntos críticos (P.C.) para hallar el conjunto de soluciones (Cs).

Ejemplo: Establecer el Conjunto Solución de la desigualdad.

$x^4+x^3-20x^2>0$ • refiriendo a cero

$x^2(x^2+x-20)>0$ • por factorización

$x^2(x+5)(x-4)>0$ • por factorización

A razón de $x^2>0, x\neq 0$ prescindimos de ella en los puntos críticos

luego: $x+5=0; x-4=0$

$\Rightarrow x=-5;\ x=4$ son Puntos Críticos

Evaluando en los intervalos

en I si: $x=-6$ un valor del intervalo

$\Rightarrow (-6)^2(-6+5)(-6-4)>0$ • V

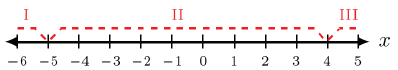
en II si: $x=-1$ un valor del intervalo

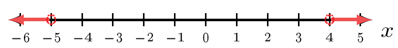
$\Rightarrow (-1)^2(-1+5)(-1-4)>0$ • F

en III si: $x=5$ un valor del intervalo

$\Rightarrow (5)^2+(5+5)(5-4)>0$ • V

Cs: $x\in]-\infty,-5[\cup]4,+\infty[$





Nota: Se puede verificar que: colocando los (+), (-), (+) en los intervalos (III, II, I) y tomando el intervalo de los (+) genera el mismo Cs.

En las inecuaciones racionales y polinómicas, se aplican los siguientes criterios:

(1) si $(x\pm a)^{2n}\cdot Q_{(x)} \gtreqless 0$ solo se considera a: $Q_{(x)}\gtreqless 0 \wedge (x\pm a)=0\in Cs$

(2) si $(x\pm a)^{2n}\cdot Q_{(x)} \lessgtr 0$ solo considera: $Q_{(x)}\lessgtr 0\wedge (x\pm a)\neq 0\in Cs; \mp a\notin Cs$

(3) si $(x\pm a)^{2n+1}\cdot Q_{(x)}\gtreqless 0$ se considera a:$(x\pm a)\cdot Q_{(x)}\gtreqless 0$

Ejemplo: Resolver $\dfrac{(x^3-27)(x^2-4)^2(x^2+4)}{(x^2-9)(x-1)^3}\leq 0$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)}{\cancel{(x-3)}(x+3)(x-1)^3}\leq 0$$ • por factorización

Excluimos del Cs los valores que hacen cero al denominador $x\neq 3; x\neq 1$

Excluimos el factor repetido: $(x-2)^2$, pero $x=2\in Cs$ en razón de $\leq$ (crit 1)

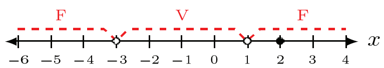
Excluimos el factor : $(x+2)^2$, pero $x=-2\in Cs$ en razón de criterio (1)

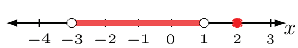
De $(x-1)^3$ se considera $(x-1)$ en razón del criterio (3)

Excluimos el factor: (x^2+3x+9), por ser polinomio positivo

Excluimos el factor: (x^2+4), por ser polinomio positivo, luego queda los factores:

$(x+3)=0; (x-1)=0\Rightarrow x=-3;\ x=1$(P.C.), luego $Cs: x\in]-3,1[\cup\{+2\}$





Ejemplo: Resolver $\left|\dfrac{x+1}{x}\right|>2$

Es posible resolver por, también elevando al cuadrado m/m

$$\left|\frac{x+1}{x}\right|^2>2^2$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-2^2>0$$

$$\left(\frac{x+1}{x}+2\right)\left(\frac{x+1}{x}-2\right)>0$$

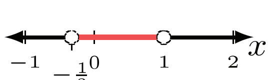
operando en los ( )

$$\frac{(3x+1)(-x+1)}{x^2}>0$$

Excluimos x^2, luego $x=0\notin Cs$

los P.C. son: $x=-1/3, x=1$

luego de evaluar los intervalos tenemos:



Cs $x\in]-\dfrac{1}{3},1[$

IMPORTANTE

Ecuaciones de 2do grado o mayor (por puntos críticos)

Una vez factorizado y referido a cero la inecuación, los factores no susceptibles a exclusión se resuelve como una ecuación cuyas raíces son los puntos críticos, éstos generan intervalos consecutivos que son señalados por (+), (-) alternativamente de derecha a izquierda. Los intervalos de solución se tomarán dependiendo a la desigualdad

si $P_{(x)}>0$, y $a_0>0$

las soluciones son intervalos marcados (+). para coeficiente principal > 0

si $P_{(x)}<0$, y $a_0>0$

las soluciones son los intervalos marcados (-) para coeficiente principal > 0

***Alternativamente,** se evaluará un valor cualquiera de un intervalo para verificar si cumple la desigualdad, luego el Cs serán los intervalos que dieron (V)*

Propiedades adicionales

La desigualdad no cambia

$*\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow a^2>0$ para: $x\neq 0$

así: $(x-a)^2>0; a\neq 0$

pero: $(x-a)^2\geq 0$

$*\forall a,b\in\mathbb{R}; a,b$ del mismo signo

$$a>b\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

$$a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

en: $a<x<b$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$$

$$*\text{si: } a>b\Rightarrow\begin{cases} a^{2n+1}>b^{2n+1}\\ \sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[n+1]{a}\end{cases}$$

Teoremas del Valor Absoluto

$|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a; a>0$

$|x|\geq a\Leftrightarrow x\geq a\vee x\leq -a$

$|x|\leq |a|\Leftrightarrow x^2\leq a^2$

$|a+b|\leq |a|+|b|$

$|a-b|\leq |a|+|b|$

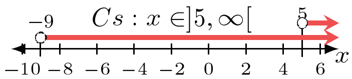
$|a|-|b|\leq |a-b|$

Ejemplo. Resolver $|2x+3|+1>|x-5|$

Para eliminar los signos de valor absoluto, analizamos los posibles cambios de signos en ellas, así tenemos (+) (+), (+) (-), (-) (-), (-) (+)

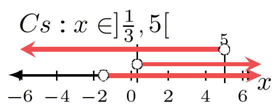
I) $(2x+3)+1>(x-5)$

$\Rightarrow x>-9$



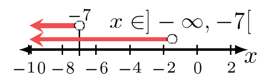
II) $(2x+3)+1>-(x-5)$

$\Rightarrow x>\dfrac{1}{3}$



III) $-(2x+3)+1>-(x-5)$

$\Rightarrow x<-7$



IV) $-(2x+3)+1>(x-5)$

$\Rightarrow x<1$ su $Cs=\emptyset$

finalmente Cs será

$x\in]-\infty,-7[\cup]\dfrac{1}{3},\infty[$

Nota: unimos los Cs de I, II, III, IV

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $x^4+9\geq 10x^2$ b) $\dfrac{x+1}{2-x}<\dfrac{x}{3+x}$ c) $\dfrac{x^2-x+2}{3-x}\geq 1$ d) $x^3+1>x^2+x$ e) $|x+4|\leq|2x-3|$

f) $\left|\dfrac{3x-1}{2x+1}\right|<2x-1$ g) $|3x+2|>x-1$ h) si $x\in]1,6[$ hallar la variación de $f_{(x)}=\dfrac{6+x}{x}$

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Teoremas en una igualdad

$x^a=x^b\Rightarrow a=b;\forall x\neq 0\wedge 1$

$x^a=y^a\Rightarrow x=y;\forall a\neq 0$

si: $a\neq b$ y $x\neq 0$

$\Rightarrow a^x=b^x\Rightarrow x=0$

$x^x=a^a\Leftrightarrow a=x$ analogía

$\log_b x=\log_b y\Rightarrow x=y$

Propiedades de los logaritmos

$\log_a a=1;\ \log_b 1=0$

$b^{\log_b x}=N;\ b^{\log_c x}=x^{\log_c b}$

$\log_b x+\log_b\Rightarrow\log_b(x\cdot y)$

$\log_b x-\log_b\Rightarrow\log_b(\dfrac{x}{y})$

$\log_b(x^y)\Rightarrow y\log_b x$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; c : nueva base

$\log_b^n(x^m)=\dfrac{m}{n}\log_b x$

$\dfrac{1}{\log_b x}=\log_x b$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Estas ecuaciones se reducirán a su mínima expresión aplicando sus propiedades para finalmente usar los teoremas de igualdad con exponentes y logaritmos

Ejemplo: Hallar 'x' en $2^{8^{n-30}}=4^{4^{n+20}}$

Es importante diferenciar $(x^a)^b\neq x^{a^b}$ también, usar las propiedades de los exponentes y los teoremas de igualdad con expresiones exponenciales

$2^{8^{n-30}}=4^{4^{n+20}}$

$2^{(2^3)^{n-30}}=4^{(2^2)^{n+20}}$ • por $8=2^3 y 4=2^2$

$2^{2^{3n-90}}=4^{2^{2n+40}}$ • por $(x^a)^b=x^{a\cdot b}$

$2^{2^{3n-90}}=(2^2)^{2^{2n+40}}$ • por $4=2^2$

$2^{2^{3n-90}}=2^{2^{2n+41}}$ • por $2^{2^{2n+40}\cdot 2^1}$

Igualando exponentes en:

$2^{2^{3n-90}}=2^{2^{2n+41}}$

$2^{3n-90}=2^{2n+41}$

$3n-90=2n+41$

$n=$

Ejemplo: Para $x\neq 0$, resolver $x^{4-x^{4-x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}=\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$

Como $x\neq 0$, entonces la ecuación en $\mathbb{R}$ será igual a algún número real, llamemos 'n' a dicho número, luego forme igualdades con cada dos miembros.

igualando a n la ecuación

$n=x^{4-x^{4-x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}=\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$

$n=x^{4-\overbrace{x^{4-x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}^{n}}=\sqrt[3]{x}^{\overbrace{\sqrt[3]{3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}^{n}}$

formando las igualdades

$n=x^{4-n}$...(1) $n=\left(\sqrt[3]{x}\right)^n$...(2)

En igualdad (2)

$n=\left(\sqrt[3]{x}\right)^n$

$\sqrt[n]{n}=\sqrt[3]{x}$

$(\sqrt[n]{n})^3=x$

$n^{3/n}=x$

Reemplazamos x en (1)

$n=\left(n^{3/n}\right)^{4-n}$

$n=(n)^{(12-3n)/n}$

$1=\dfrac{12-3n}{n}$

$n=3$

Finalmente sustituyendo $n=3$ en (1) o (2) $x=3$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $\begin{cases}\ln(x+y)+\ln(x-y)=\ln 56 & \text{I}\\ \dfrac{2^x}{2^y}=4 & \text{II}\end{cases}$

Con las propiedades de logaritmos y exponentes exprese el sistema en un sistema sin expresiones trascendentes, luego aplique cualquier método.

$$\begin{cases} \ln(x+y)+\ln(x-y)=\ln 56 \\ \dfrac{2^x}{2^y}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln[(x+y)(x-y)]=\ln 56 \\ 2^{x-y}=2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=56 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Factorice, divida las ecuaciones luego forme un nuevo sistema con el resultado.

$$\begin{cases} (x+y)(x-y)=56 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \dfrac{(x+y)(x-y)}{x-y}=\dfrac{56}{2} \right. \Rightarrow x+y=28 \text{ luego: } \begin{cases} x+y=28 \\ x-y=2 \end{cases}$$

resolviendo $x=15; y=13$

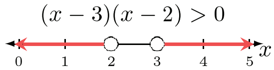
Ejemplo: Resolver la inecuación $\log_3\left(x^2-5x+6\right)<0$

Evalúe los valores admitidos según la definición del logaritmo, luego resuelva la inecuación de acuerdo a la base de dicho logaritmo.

$\log_3\left(x^2-5x+6\right)<0$

Por definición :

$$x^2-5x+6>0$$
$$(x-3)(x-2)>0$$



Resolvemos la inecuación

$$\log_3\left(x^2-5x+5\right)<\log_3 1$$
$$x^2-5x+6<1$$
$$x^2-5x+5<0$$

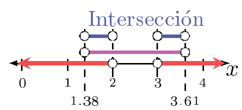
Hallamos raíces (P.C) en:

$$x^2-5x+5=0$$
$$x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\simeq 3,61$$

$$x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\simeq 1,38$$

la inecuación será:

$$(x-3,61)(x-1.38)<0$$



Luego la solución está formada por las intersecciones, así: Cs:

$$x\in]1,38;2[\cup]3;3,61[$$

PROPIEDADES

Cologaritmos y antilogaritmo

Cologaritmos

$colog_b x=\log_b(\frac{1}{x})$

$colog_b x=-\log_b x$

Antilogaritmo

$antilog_b x=b^x$

$\log_b(antilog_b x)=x$

$colog_b(\log_b x)=\dfrac{1}{x}$

Desigualdades logarítmicas

en: $\log_b a>\log_b c$

$\Rightarrow a>c$ si $b>1$

pero: $a<c$ si $0<b<1$

en: $\log_b a>c$

1ro. $a>0$por definición

2do. $a>b^c$ si $b>1$

pero: $a<b^c$ si $0<b<1$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x^2-5x}=64$ b) $2^{x^2-5x}=64$ c) $4^{\sqrt{x}}=32$ d) $2^{\log_2\sqrt{x-3}}=4$ e) $6=(2x-5)^{10}$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(5x^2+13x-2)=-2$ g) $\log(x+3)+\log x=1$ h) $\begin{cases} 3^{x-3y}=81 \\ \log_2 x+\log_2 y=0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^2=y^3 \end{cases}$

VALORACIÓN

La formación técnica y universitaria es vital para la productividad del país. Reflexione sobre la formación preuniversitaria o para centros de formación técnica (aspectos positivos, limitaciones y otros aspectos)

PRODUCCIÓN

Producción Aplicativa: Realizamos un formulario organizado de modo creativo y funcional.

Producción Teórica: Resolvemos

a) $\left|x^2-2x-3\right|<3$ b) $|3-x|>\sqrt{2-x}$ c) si $x=\log_2 3$ hallar $\log_{24} 64$

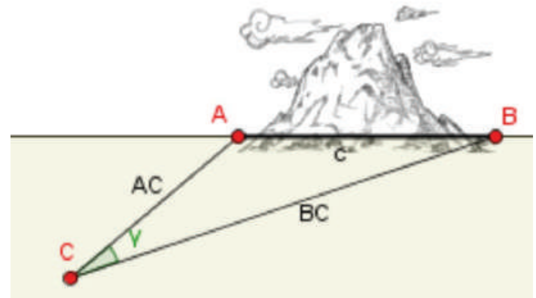
d) $2^{\log x}+2^{\log x+1}=e^{ln48}$ e) $\log_2 x^{\log_2 x}-\log x^5=-6$

ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA: TRIGONOMETRÍA

PRÁCTICA

Construyo triangulaciones.

La triangulación fue usada, inicialmente, para medir distancias luego para determinar ciertas ubicaciones en mapas cartográficas y para levantamientos topográficos. En la actualidad la triangulación junto a la trilaterización (métodos usados por el GPS) permite ubicar cualquier punto estático o móvil en la tierra, este proceso requiere la ayuda de al menos cuatro satélites.



En la Unidad Educativa escoja longitudes horizontales o verticales que desea medir, luego con datos reales (leídos por instrumentos como la cinta métrica, clinómetro u otro lector de ángulos) ensaye el proceso de triangulación con la orientación del profesor.

Posterior a la triangulación lleve a cabo la aplicación de las leyes trigonométricas para generar ideas sobre el uso de la trigonometría.

Actividad

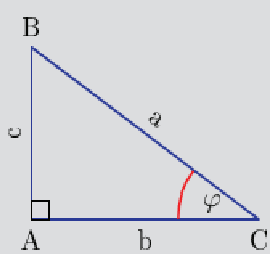
Realizamos el proceso de triangulación verificables en dibujo o esquema, luego de escoger una distancia horizontal o vertical que desee medir:

Obtenemos datos necesarios con los instrumentos que dispone, si no, asigna,mos datos aproximados.

Aplicamos la ley de senos, ley de cosenos en cada caso de triangulación, además de otras definiciones propias de la trigonometría y geometría que son necesarios para el cálculo de la distancia.

TEORÍA

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$\sin(\varphi) = \frac{c}{a}$ $\csc(\varphi) = \frac{a}{c}$

$\cos(\varphi) = \frac{b}{a}$ $\sec(\varphi) = \frac{a}{b}$

$\tan(\varphi) = \frac{c}{b}$ $\cot(\varphi) = \frac{b}{c}$

Teorema de Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2$

despejando:

$b^2 = a^2 - c^2$

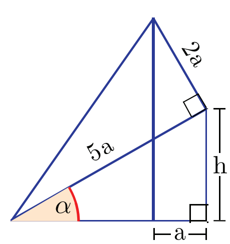
$c^2 = a^2 - b^2$

ángulos internos de un $\triangle$

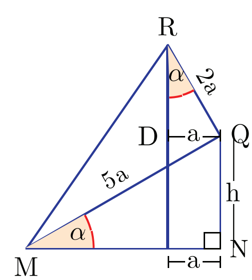
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

1. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos

Para resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos recurrimos a los conocimientos trigonométricos, geométricos y operaciones algebraicas.



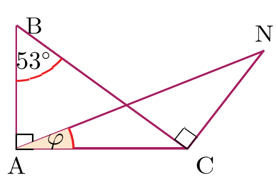
Existe ángulos congruentes debido a dos triángulos semejantes (MNQ y RDQ). Aplique una misma razón trigonométrica en dichos triángulos



Ejemplo. Calcular ‘h’ en

así: $\sin\alpha = \frac{h}{5a} = \frac{a}{2a} \Rightarrow h = \frac{5}{2}a = 2,5a$

Ejemplo: En el gráfico AB=CN calcular $\tan(\varphi)$



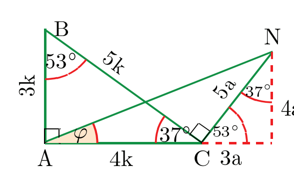
de la igualdad

$AB = CN$

$3k = 5a$

$\Rightarrow k = 5;\ a = 3$

Completamos el triángulo notable, luego debe aplicarse $\tan(\varphi)$ al triángulo rectángulo que se obtuvo al prolongar AC



luego

$NM = 4a = 12$

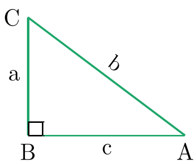
$AM = 4k + 3a = 29$

finalmente

$\tan(\varphi) = \frac{MN}{AM} = \frac{12}{29}$

Ejemplo: En un $\triangle$ ABC recto en B se cumple, $\frac{\tan^2 A-\cos^2 C}{2a}=\frac{\cot C\cdot\sin A}{3c}$ hallar $K=\sqrt{5}\tan A+2\sec C$

Es posible resolver por identidades trigonométricas, pero, se resolverá haciendo uso de un triángulo rectángulo como una estrategia viable.



de la condición

$$\frac{\tan^2 A-\cos^2 C}{\cot C\cdot\sin A}=\frac{2a}{3c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{2a}{3}$$

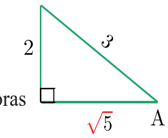
operando, tenemos

$$\frac{b^2-c^2}{b\cancel{c}}=\frac{2a}{3\cancel{c}}$$

por Teorema de Pitágoras

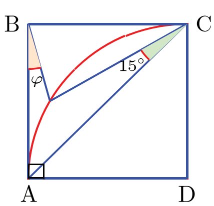
$$\frac{a^{\cancel{2}}}{b}=\frac{2\cancel{a}}{3}$$

$\Rightarrow a=2;\ b=3$

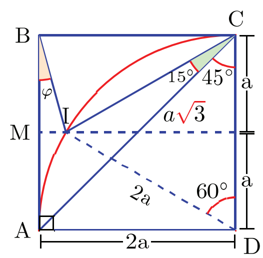


finalmente: $K=\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}+2\cdot\frac{3}{2}=2+3=5$

Ejemplo: Si ABCD es un cuadrado, calcular $\tan\varphi$ (ACD es un sector circular)



Ante la presencia de un círculo o parte de ella en un problema, este será resuelto dependiendo a como se le use el radio. En el ejercicio existe un ángulo de 15° y la diagonal del cuadrado. Con todo lo anterior traces líneas auxiliares.



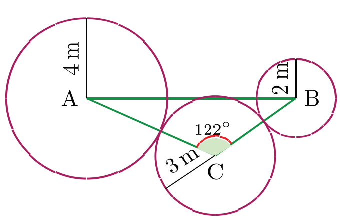
de la gráfica

$$\tan\varphi=\frac{MI}{BM}=\frac{2a-a\sqrt{3}}{a}$$

$$\tan\varphi=2-\sqrt{3}$$

Ejemplo: En el gráfico hallar AB

Use los radios para aplicar la ley de cosenos.



de la gráfica

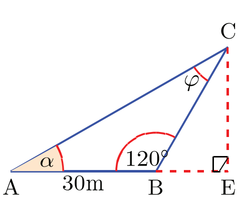
$$AB^2=AC^2+CB^2-2(AC)(CB)\cos(122^\circ)$$

$$AB^2=7^2+5^2-2(7)(5)\cos(122^\circ)$$

$$AB=10,54[u]$$

Ejemplo: En el gráfico hallar CE, siendo AB=30[m], $\alpha=30^\circ;\beta=\hat{B}=120^\circ$

De forma directa se observa que $CE=AC\sin\alpha$, luego AC=?



por propiedades

$$\alpha+\beta+\varphi=180^\circ$$

$$30^\circ+120^\circ+\varphi=180^\circ$$

$$\varphi=30^\circ$$

por la ley de senos:

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\varphi}$$

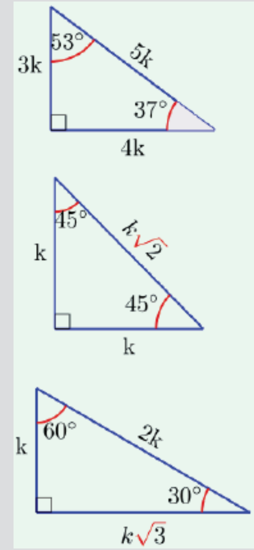
$$\frac{AC}{\sin 120^\circ}=\frac{30}{\sin 30^\circ}$$

$$AC=30\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=30\sqrt{3}$$

Finalmente $CE=AC\sin(30^\circ)\Rightarrow CE=30\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=15\sqrt{3}$

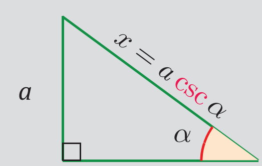
DATOS IMPORTANTES

Triángulos notables



Importante

Sí 'a' es dato conocido, entonces

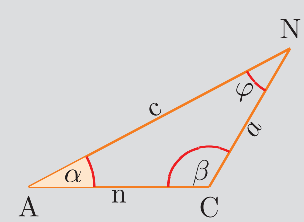


es así debido a:

$$\csc\alpha=\frac{x}{a}\Rightarrow x=a\csc\alpha$$

$$\cot\alpha=\frac{y}{a}\Rightarrow y=a\cot\alpha$$

Leyes trigonométricas



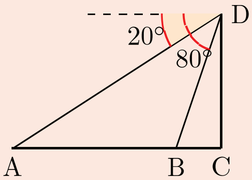
$$\frac{c}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin\varphi}$$

$$a^2=c^2+n^2-2cn\cos\alpha$$

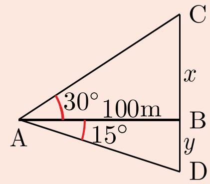
$$\frac{a-n}{a+n}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}\right)}$$

Actividad

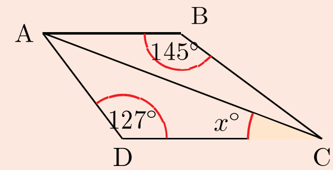
Resolvemos:

a) 

si DC=4km, Calcular AB

B) 

Calcular x+y=

c) 

si CD=15AB y AB//DC, hallar $E = 8\cot x°$

IDENTIDADES

Identidades Pitagóricas

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$
$$\tan^2\varphi + 1 = \sec^2\varphi$$
$$\cot^2\varphi + 1 = \csc^2\varphi$$

Identidades recíprocas

$$\sin\varphi \cdot \csc\varphi = 1$$
$$\cos\varphi \cdot \sec\varphi = 1$$
$$\tan\varphi \cdot \cot\varphi = 1$$

Identidades por cociente

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$
$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi$$

Identidades de suma y resta

$$\sin(\alpha \pm \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi \pm \cos\alpha\sin\varphi$$
$$\cos(\alpha \pm \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi \mp \sin\alpha\sin\varphi$$
$$\tan(\alpha \pm \varphi) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\varphi}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\varphi}$$

Identidades de ángulo medio

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Identidades del ángulo doble

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha -^2 \alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

2. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Las identidades trigonométricas permiten simplificar y demostrar igualdades con expresiones trigonométricas.

Ejemplo: Simplificar $\frac{1+\tan x}{1+\cot x}$

Use la identidad del cociente y realice operaciones algebraicas.

$$\frac{1+\tan x}{1+\cot x} = \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x(\cancel{\cos x+\sin x})}{\cos x(\cancel{\sin x+\cos x})} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Ejemplo: Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$

Se recomienda operar uno de los dos miembros para llegar al otro, así, la identidad queda demostrada. Sea M el primer miembro, reemplace la tangente por su identidad, opere hasta llegar a la expresión del segundo miembro.

$$M = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x - \cos x\sin x}{\cos x}}{\sin^3 x} = \frac{\cancel{\sin x}(1-\cos x)}{\cos x \sin^{\cancel{3}2} x}$$
$$= \frac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos x} = \frac{\cancel{1-\cos x}}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{1+\cos\ x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$$

Ejemplo: Demostrar $\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha-\varphi) = \sin^2\alpha - \sin^2\varphi$

Recordemos que la multiplicación de dos igualdades genera otra.

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi \\ \sin(\alpha-\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi\end{cases}$$
$$\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha-\varphi) = (\sin\alpha\cos\varphi)^2 - (\cos\alpha\sin\varphi)^2$$

aplique exponentes y reemplace por la identidad pitagórica los

$$\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha-\varphi) = \sin^2\alpha(1-\sin^2\varphi) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\varphi$$
$$= \sin^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha\sin^2\varphi} - \sin^2\varphi + \cancel{\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$$
$$= \sin^2\alpha - \sin^2\varphi$$

Nota: convendrá repasar algunas otras técnicas: amplificación de fracción, cambio de variable y otros en ejercicios diversos con el profesor de área.

Actividad

Simplificamos a) y b); demostramos las identidades c) y d)

a) $\frac{\sin^2 x \cdot \sec x}{\tan x}$ b) $\sin\varphi(\csc\varphi - \sin\varphi)$ c) $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

e) si: $\sin x = \frac{3}{5}$ hallar $\sin(x+y)$ y $\sin(x-y)$ f) si: $A = \sin(20° + x)\cos(10° + x)$

$B = \cos(20° + x)\sin(10° + x)$ hallar A+B=

3. Ecuaciones trigonométricas

Estas ecuaciones generan soluciones básicas y generales debido al periodo de cada función. Son soluciones básicas las que están dentro de periodo de la función, luego, para la solución general se suma K-veces su periodo a la o las soluciones básicas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $\dfrac{\tan 2x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + 4\sin\dfrac{x}{2} = 0$

Aplicando las identidades trigonométricas para simplificar y expresar en función de una sola razón trigonométrica o en producto de dos razones la ecuación.

$$\frac{\tan 2x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + 4\sin\frac{x}{2} = 0$$

$$\tan 2x + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \qquad \bullet \text{ m/m } \cos\frac{x}{2}$$

Sustituyendo por su identidad y operando

$\sqrt{(1-\cos x)/2}$; $\sqrt{(1+\cos x)/2}$; $(\sin 2x)/(\cos 2x)$

$$\Rightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + 2\sin x = 0$$

$$2\sin x(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$2\sin x = 0 \vee \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

en 2do factor (identidad sin^2)

$$\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

Hallamos solución principal

$$\cos x = -1 \vee \cos x = 1/2$$

$$x = \cos^{-1}(-1) \vee x = \cos^{-1}(1/2)$$

$$\Rightarrow x_1 = \pi \vee x_2 = \pi/3$$

Tambien, solución principal de:

$$2\sin x = 0 \Rightarrow x_3 = \sin^{-1}(0) = 0$$

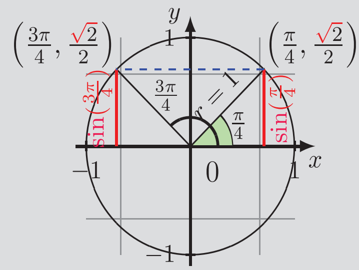
Finalmente:

Cs $= \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi + (-1)^k \cdot 0; k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots 0, \pi, 2\pi \ldots\}$

Cs $= \{x \in \mathbb{R}/x = 2k\pi \pm \pi; k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots \pi, 3\pi, 5\pi \ldots\}$

Cs $= \left\{x \in \mathbb{R}/x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\ldots \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3 \ldots\}$

SOLUCIONES BÁSICAS



solucion básica de: $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

es: $x_1 = \pi/4$ y $x_2 = 3\pi/4$

luego la solución general será:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

pero, si x_{sp}: solución principal

luego, la solución general será:

para: $\sin(x) = N; -\frac{\pi}{2} \leq x_{sp} \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Cs = \{K\pi + (-1)^k x_{sp}; k \in \mathbb{Z}\}$

para: $\cos(x) = N; 0 \leq x_{sp} \leq \pi$

$\Rightarrow Cs = \{2K\pi \pm x_{sp}; k \in \mathbb{Z}\}$

para: $\tan(x) = N; -\frac{\pi}{2} \leq x_{sp} \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Cs = \{K\pi + x_{sp}; k \in \mathbb{Z}\}$

Actividad

Resolvemos las siguientes ecuaciones (para el sistema de ecuaciones pide orientaciones al profesor)

a) $\dfrac{\cos x\sin 2x}{\tan x} - \sec x\cot x - 1 = 0$

b) $4\sec^2 x - 3 = 7\tan^2 x$

c) $\tan(\pi/4 - 3x) - \cot(2x) = 0$

d) $\tan(2x) + \cot x - 8\cos^2 x = 0$

e) $\begin{cases}\sin x + \sin y = 1\\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}\end{cases}$

f) $\begin{cases}\cos(x+y) = 1/2\\ \tan(x-y) = \sqrt{3}\end{cases}$

VALORACIÓN

Actividad

Realizamos una breve reflexión sobre el uso de la trigonometría en los métodos de triangulación y trilateración

....

....

PRODUCCIÓN

Producción Aplicativa: Realizamos un formulario trigonométrico organizado de modo creativo y funcional.

Producción Teórica: Con la ayuda del maestro, resolvemos:

a) Hallar los lados de los triángulos rectángulos ABC, rectos en B, sabiendo que la $\tan\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ y $b - c = 5$

b) En un triángulo rectángulo se inscribe un círculo, resolver el triángulo sabiendo que su ángulo agudo menor es 30° y su radio es 3 cm.

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Ministerio de Educación, (2023). *Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva*. La Paz – Bolivia.

Ministerio de Educación. (s.f.) *Prontuario de mis aprendizajes Matemática [En proceso de Publicación].*

Tintaya, L. (2015). *Matemáticas 6*. Editorial Bruño – Bolivia.

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México.

Londoño, N. & Bedoya, H. (2003), *Matemática Progresiva 6*. Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

Olmos, A. & Martínez, L. (2003). *Matemática Práctica 6*. Editorial Voluntad S.A. – Colombia.

Diccionario de Matemáticas (2000). Editorial Cultural S. A. Polígono Industrial Arroyomolinos – España.

Allen R, A. (1998). *Algebra Elemental*. Mexico: Prentice Hall.

Allen R, A., & Semmler, R. (2004). *Álgebra intermedia*. Mexico: Pearson Educación.

Choque, P. (2009). *Álgebra Pre-Universitaria*. La Paz: UMSA.

Facutad de Ciencias Puras y Naturales- UMSA. (s.f.). Preuniversitario. Obtenido de https://pre.fcpn.edu.bo/ fcyt-UMSS. (s.f.). SISTEMA SAGAA. Obtenido de http://sagaa.fcyt.umss.edu.bo/admision/examenes.php

Gutierrez, P., & Moreno, L. (2018). *La Práctica del Cálculo Diferencial e Intefral (Vol. I)*. Santa Cruz: El Jisunú.

Lexus. (2008). *Álgebra, Manual de preparación Pre-universitaria*. Lima-Perú: Lexus Editores S.A.

Siccha, M., & Ramírez, N. (2017). *Trigonometría plana y Esférica e Introducción al Cálculo*. Lima: Lumbreras.

Spiegel, M. (2007). *Álgebra Superior*. Mexico: McGraw-Hill.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **6TO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Física
Rodrigo Durval Achá Marin

Química
Miriam Virginia Barcaya Rosales

Lengua Castellana
Jacinta Lazcano Gutiérrez

Ciencias Sociales
Arturo Castrillo Del Castillo

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía
Rolando Miranda Quispe

Física
Miguel Angel Cayo Mendoza

Química
Ronald Quispe Lipa

Ciencias Sociales
Marybel Silvestre Huanca

Matemática
Sergio Porfidio Mendoza Suarez

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Romer Carmelo Pita Gomez

Física
Ted Aderly Valdez Alvan

Química
Romer Carmelo Pita Gomez

Lengua Castellana
Teddy Orlando Valeriano Condori

Ciencias Sociales
Amilcar Raul Zenteno Barrientos

Matemática
Justino Chipana Flores

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD

rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN