ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

PRIMER AÑO DE ESCOLARIDAD

1ER AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 1er año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Lionel Agati Danil Manriquez Gutierrez

DIAGRAMACIÓN:
Boris Milton Mamani Ichuta

Depósito legal:
4-1-575-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 1er año de escolaridad. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

Presentación 5

MATEMÁTICA 69

Primer trimestre

Los números enteros y su origen en nuestro contexto 70

Operaciones con números enteros aplicados a la cotidianidad 76

Nociones de geometría en nuestro entorno 82

Representación gráfica de las formas en el plano cartesiano 90

Segundo trimestre

Los números racionales 102

Operaciones con números racionales 108

Números decimales como consecuencia de los racionales 114

Operaciones combinadas con números enteros racionales y decimales 120

Razones, proporciones y regla de tres 124

Tercer trimestre

La forma, el número y semejanza en geometría 136

Perímetros, áreas y formas geométricas aplicadas a la vida cotidiana 148

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los "*Textos de aprendizaje 2025*", para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los "*Textos de aprendizaje 2025*" tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

LOS NÚMEROS ENTEROS Y SU ORIGEN EN NUESTRO CONTEXTO

PRÁCTICA

Los números enteros son esenciales en numerosas situaciones de nuestra vida cotidiana o en nuestro contexto.

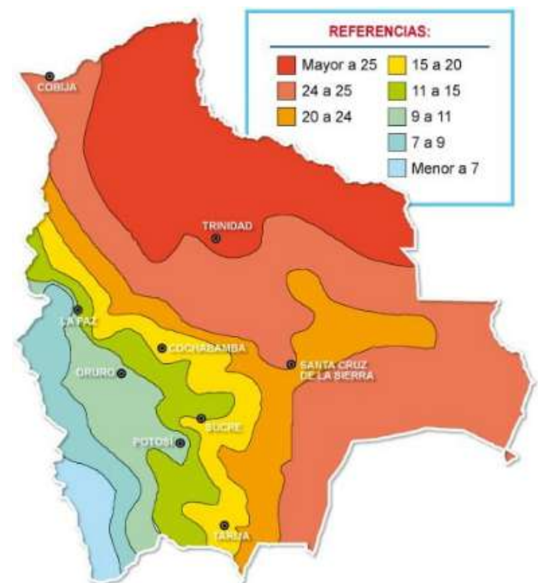
Sabemos que el Estado Plurinacional de Bolivia se divide por zonas geográficas, donde cada región muestra diferentes mediciones de temperatura, variedad en el tipo de economía, subida y bajada del precio del dólar en relación a nuestra moneda nacional, etc.

La imagen de la derecha nos indica las mediciones de la temperatura en Bolivia:

Ejemplo, Oruro y Potosí registran temperaturas entre 9 a 11 °C.

- La Paz registra una temperatura de ________________
- Sucre registra una temperatura de ________________
- Santa Cruz registra temperaturas de ________________
- ¿Qué ciudades registran temperaturas entre 15 a 20 °C?
- ¿Qué ciudades registran temperaturas entre 24 a 25 °C?

Temperaturas en el territorio Boliviano (ºC)



Fuente: Superintendencia Agraria de Bolivia

Tabla de posiciones fútbol Boliviano

Pos	Equipo	Pts	Pj	Pg	Pe	Pp	Gf	Gc
1	Bolivar	27	12	8	3	1	24	4
2	The Strongest	24	12	7	3	2	20	13
3	Real Tomayapo	21	13	6	3	4	17	13
4	Blooming	21	13	7	0	6	18	17
5	Oriente Petrolero	20	13	6	2	5	16	17
6	Wilstermann	19	13	5	4	4	10	8
7	Nacional Potosí	19	13	5	4	4	19	20
8	Always Ready	18	12	5	3	4	14	10
9	Aurora	17	13	3	8	2	17	15
10	Independiente	17	13	4	5	4	23	25
11	GV San José	15	13	4	3	6	17	19
12	U. de vinto	15	13	4	3	6	15	18
13	San Antonio	15	12	4	3	5	15	20
14	Guabirá	12	13	3	3	7	17	23
15	Royal Pari	10	13	2	4	7	12	19
16	Real Santa Cruz	9	13	2	3	8	11	24

Uno de los deportes más practicados y que tiene más aficionados en los nueve departamentos de Bolivia, es el fútbol.

La imagen nos muestra la tabla de posiciones jugadas hasta la décima fecha del torneo, donde hay un equipo que ocupa el primer lugar, otro equipo ocupa el segundo lugar y así sucesivamente hasta llegar al club que ocupa la última posición. De esta tabla podemos concluir que:

- El club Bolívar ocupa el primer lugar y tiene 27 puntos acumulados.
- El club Aurora tiene +8 goles de diferencia.
- El club Independiente tiene ________ goles de diferencia.
- ¿Qué club tiene la mayor cantidad de goles en contra? ____________
- ¿Qué equipo tiene la mayor cantidad de goles a favor? ____________

Factura de servicio de internet

Pag. 1/1

CÓDIGO SERVICIO	CANTIDAD	UNIDAD DE MEDIDA	DESCRIPCION	PRECIO UNITARIO	DESCUENTO	SUBTOTAL Bs.
			SERVICIO: INTERNET			
			PLAN: FIBRA HOGAR NUEVO - CANTIDAD DE LINEAS: 1			
			CARGOS		TOTAL Bs.:	149.00
103641	1	UNIDAD (SERVICIOS)	TARIFA BASICA INTERNET FIBRA (1)	149.00	0.00	149.00
			TOTAL SERVICIO: INTERNET			149.00
			SUBTOTAL Bs.			149.00

SON: CIENTO CUARENTA Y NUEVE 00/100 BOLIVIANOS.

CUOTAS FACTURADAS CON ANTERIORIDAD Bs.: 0.00
TOTAL Bs.: 149.00
MONTO GIFT CARD Bs.: 0.00
IMPORTE BASE PARA CREDITO FISCAL Bs.: 149.00

Los gastos por servicios básicos de una familia pueden variar mensualmente en el monto a pagar y en la cantidad de servicios. En la imagen de la izquierda se observa una factura por el servicio de internet.

Registremos algunos gastos aproximados por otros servicios usando números sin decimal:

- Servicio de internet Bs 149.
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

1. El origen de los números enteros

TEORÍA

a) Historia de su origen

En su evolución, el hombre empleó recursos para simplificar su conexión con los números.

La capacidad de contar que tiene el ser humano se fundamenta en la aparición del número. Se hizo hincapié en que el hombre llevaba a cabo marcas, aunque a veces se siguen realizando, con el propósito de representar ciertas cifras, ya que esta actividad, perdura desde tiempos inmemoriales y se estableció en cada cultura hindú, arábiga, china, romana y otras.

Los números enteros son un conjunto numérico que comprende a los números naturales, sus inversos negativos y el cero. Es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Dato curioso

Los números enteros negativos que se conocían como "números deudos o absurdos", proceden de una época en la que el interés primordial era la de enfrentar obstáculos.

Las primeras evidencias de su uso datan del siglo V en Oriente y en Occidente en siglo XVI.

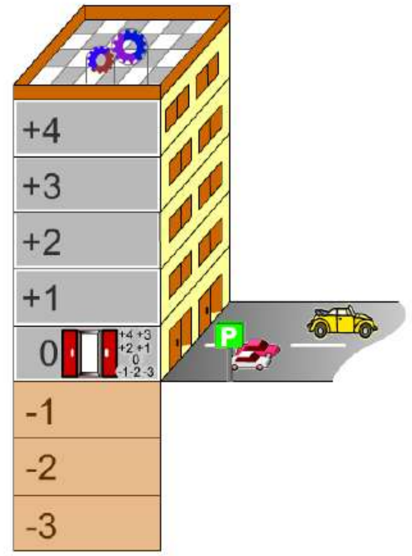
b) Los números enteros en nuestro contexto

En nuestro contexto y en nuestra realidad podemos observar situaciones descritas en el momento metodológico de la teoría. A continuación, analizamos los conceptos que encierra cada situación, los cuales revelan la necesidad de tener un conjunto diferente a los números naturales. Luego serán denominados el conjunto de los números enteros.

Situación 1: Concepto de "sobre o bajo un nivel de referencia"

Varios de nosotros vivimos en un edificio o una casa de pisos, entonces tendremos un esquema como la imagen de la derecha; en ella observamos:

- Un nivel de referencia (número cero), es la planta baja por estar al nivel de la superficie terrestre.
- Medidas bajo el nivel de referencia, parqueo de autos, subsuelos o depósitos y otros. Estas medidas usarán números con signo (-) por delante.
- Medidas sobre el nivel de referencia, los departamentos, la terraza y otros registrarán medidas con números precedidos por el signo (+) por delante.

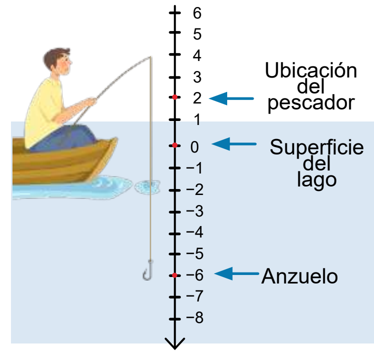


Fuente:https://www.pinterest.com/pin/626633735666626427/

Situación 2: Concepto de "sobre o debajo de un nivel de referencia"

En muchas poblaciones del oriente boliviano y parte del norte de La Paz, existe la pesca como medio de subsistencia. En la figura de la derecha tenemos un esquema de una situación de pesca.

- Definimos un nivel de referencia (nivel cero), superficie del lago o río.
- Medidas bajo el nivel de referencia, medida de profundidad del anzuelo. Esta medida usará números con el signo (−) por adelante.
- Medidas sobre el nivel de referencia, la ubicación del pescador sobre el nivel del lago, estas medidas con números precedidos por el signo (+) por delante.



Situación 3: Concepto de "ingreso y gasto"

Algunos gastos familiares pueden reflejarse en el pago de los servicios, como los servicios de agua, energía eléctrica, gas y otros:

- El nivel de referencia aceptado (número cero) es Bs 0.
- Los ingresos obtenidos por las familias en trabajos, negocios o prestación de servicios profesionales son positivos.
- Los gastos económicos por pago de vivienda, alimentación y otros evidenciados en facturas a pagar, son negativos.

Actividad

Completamos los siguientes enunciados:

1) Si en una región del altiplano boliviano la temperatura a las 16:00 es de +5 grados y por la noche baja 8 grados, la nueva temperatura es de ___________
2) En una región que se halla al nivel del mar se hace una excavación de un pozo de 6 metros de profundidad. Esta medida se expresa como ___________
3) Una persona tiene un saldo de Bs 80 y realiza compras en el supermercado por un valor de Bs 120. Su nuevo saldo se expresa como ___________
4) Una empresa nacional excavó pozos en la ciudad de Tarija, llego a una profundidad de 12 metros, el número se expresa como ___________

Características de los números enteros

- *Tiene infinitos números positivos y negativos.*
- *Tiene un orden de menor a mayor.*
- *Cada cifra posee un número anterior y un número posterior.*
- *El cero no tiene signo.*

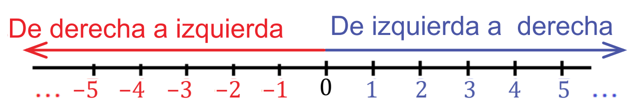
2. El conjunto de los números enteros

Para determinar el conjunto de los números enteros nos apoyaremos en los números naturales: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^{+} \cup \mathbb{N}^{-} \cup \{0\}$ asignándoles los signos + o – según corresponda a los números positivos y números negativos conforme a las situaciones o fenómenos que representan. Así, una cantidad negativa representará una cantidad bajo el nivel de referencia; también representará gastos económicos o pérdida y, un número positivo representará una cantidad sobre el nivel de referencia, ingresos o ganancias. De modo análogo, los números positivos y negativos asociarán la idea de una temperatura por encima o por debajo del nivel de referencia. El nivel de referencia se denomina cero.

Los números enteros son aquellos que están precedidos por el signo "+"," –" y "0", es decir, son el conjunto de números positivos, negativos y el cero. Está simbolizado por $\mathbb{Z}$ y se representa:

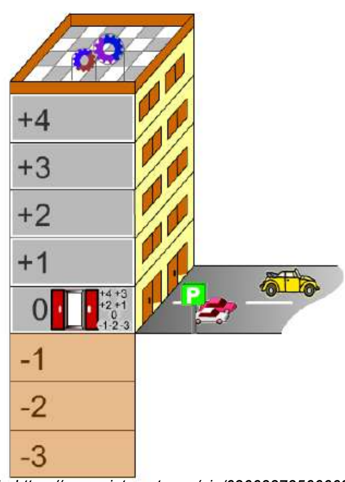
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

En la recta numérica los números enteros están dispuestos como sigue:



Ejemplo: Describiendo la realidad con los $\mathbb{Z}$.

En los siguientes casos de la realidad, cuantifica sus características con números positivos y negativos.



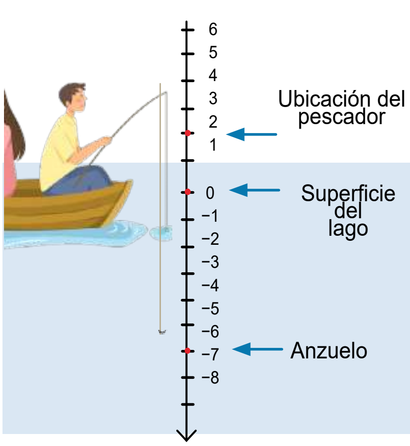
Fuente:https://www.pinterest.com/pin/626633735666626427/

Situación 1: El edificio de mi casa

Solución:

Terraza: +5
Departamento de mis papás: +4
Departamento de mi hermana: +3
Departamento de mi hermano: +2
Departamento donde vivo: +1
Planta baja, tienda y cuarto de servicio: 0
Garaje: −1
Subsuelo: −2
Depósitos: −3
El conjunto de números enteros del sistema sería:

$$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$$



Situación 2: Pescando en el lago Titicaca

Solución:

Ubicación del bote del pescador: +2 m
Superficie del lago: 0
Profundidad del anzuelo: −6 m
Profundidad máxima de pesca: −15 m
El conjunto de números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \{-15, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2\}$$

Situación 3: Los estudiantes de primero de secundaria recaudaron fondos para realizar una obra social, ayudar con los pagos de los servicios básicos de un compañero con dificultad económica.

Ítems de gastos o ingresos	Ingresos (Bs)	Gastos (Bs)
Cuotas	Bs +100	
Pago del servicio de gas.		Bs − 15
Pago del servicio de eléctrico.		Bs − 40
Premio del campeonato	Bs +120	

Solución:

Los ingresos están formados por:
cuotas de Bs +100, premio de Bs +120
Los gastos están formados por pagos:
gas Bs −15, electricidad Bs − 40.
Entonces el conjunto de números enteros está formado por:

$$\mathbb{Z} = \{-40, -15, +100, +120\}$$

Actividad

Investigamos sobre las temperaturas máximas y mínimas que se dan en cada departamento en los meses de diciembre y julio del año 2024.

La Paz: ____________________ Oruro: __________________ Potosí: __________________
Cochabamba: ________________ Tarija: __________________ Chuquisaca: ______________
Santa Cruz: __________________ Beni: ___________________ Pando: __________________

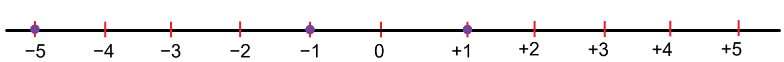
3. Representación de los números enteros en la recta numérica

Los números enteros se representan a partir de un punto en la recta numérica, para ello debemos identificar al número si es positivo o negativo y luego procedemos a colocar un punto notorio sobre dicha recta.

Ejemplo 1:

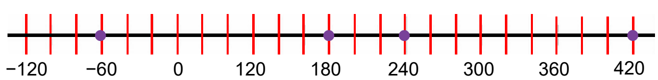
Representamos los números -5, -1 y +1.

Tomando en cuenta los números positivos y negativos, graficamos en la recta numérica



Ejemplo 2:

Ubicamos los siguientes números: $-60, +240, +180, +420$

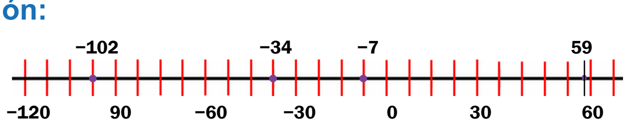


Ejemplo 3:

A continuación, se presentan los puntos de fusión y de ebullición de algunos elementos químicos, represente en la recta numérica.

Elemento	Punto de fusión [°C]	Punto de ebullición [°C]	Estado a temperatura ambiente
Cl_2 (cloro)	-102	-34	Gas
Br_2 (bromo)	-7	-59	Líquido

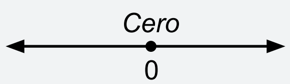
Solución:



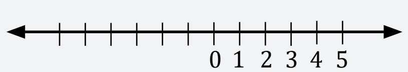
Construcción de una recta numérica

- *Trazamos una recta horizontal cualquiera.*

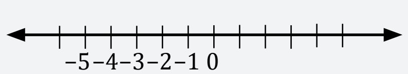
- *En un lugar sobre la recta, fije el punto cero.*



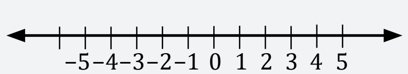
- *A una distancia conveniente desde el cero, escoja otro punto hacia la derecha, serán los enteros positivos.*



- *Gradúe la recta hacia la izquierda del cero y serán los enteros negativos.*



- *Anote los números positivos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda.*

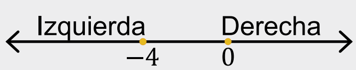


Curiosidades

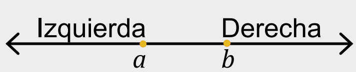
Los números enteros no se utilizan para contar, salvo si hablamos de cantidades que tenemos y cantidades que perdemos (números negativos). Esto se debe al hecho de que los números naturales siguen el Principio de Buena Ordenación, es decir, existe un primer número desde el que podemos empezar a contar. Los números enteros no siguen este principio, ya que se alejan infinitamente hacia la izquierda o hacia la derecha del 0.

Soy un número negativo

¿Seré mayor o menor que el cero?



Entonces: $-4 < 0$
Recuerda



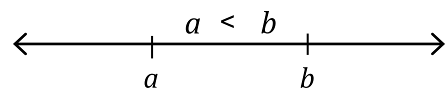
$b > a$. *Se lee:* b *es mayor que* a

Curiosidades

Los números enteros también pueden definir fechas que van antes del nacimiento de Cristo o después de su nacimiento, ya que este acontecimiento es tomado como el año 0.

Orden de los números enteros

Observando la recta numérica evidenciamos que: Todo número que está a la derecha es mayor que cualquiera de su izquierda. Entonces, un número en la recta numérica a la derecha del otro es mayor. Con el anterior criterio podemos ordenar dos o más números enteros de forma creciente o decreciente.

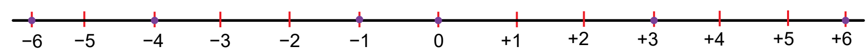


Ejemplo:

Ordenamos los siguientes números de forma creciente

$$-6, +6, -1, 0, +3, -4$$

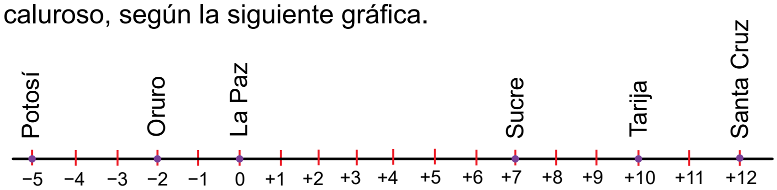
Primero representamos los números dados en la recta numérica, tomando en cuenta los negativos y positivos, para luego escoger el menor, es decir, el número más a la izquierda de todos; finalmente escribimos el orden haciendo uso del signo menor que (<).



El orden es: $-6 < -4 < -1 < 0 < +3 < +6$

Ejemplo:

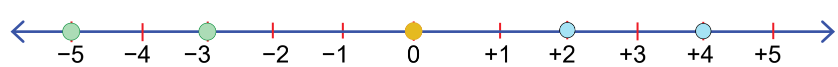
Una estudiante registró las temperaturas en diferentes momentos en las capitales de cada departamento, las temperaturas fueron tomadas en la época de invierno. Ordena los departamentos desde el más frío hasta el más caluroso, según la siguiente gráfica.



Solución: El orden sería: Potosí, Oruro, La Paz, Sucre, Tarija y Santa Cruz; porque: $-5\ ^\circ\text{C} < -2\ ^\circ\text{C} < 0\ ^\circ\text{C} < 7\ ^\circ\text{C} < 10\ ^\circ\text{C} < 12^\circ\ \text{C}$

Ejemplo:

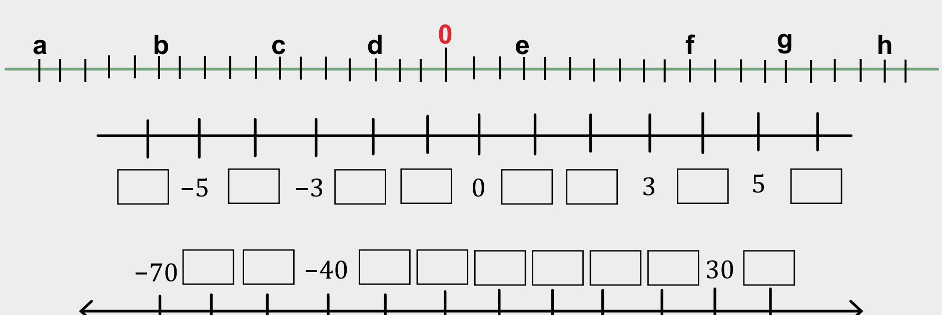
Ordenamos los siguientes números de forma decreciente:



Solución: El orden decreciente sería: $+4 > +2 > 0 > -3 > -5$

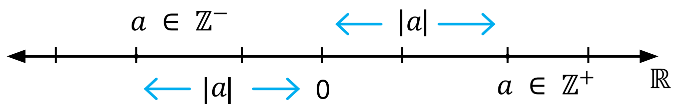
Actividad

Identificamos y escribimos debajo de cada letra y en el recuadro el número entero correspondiente.



Módulo o distancia: Valor absoluto

La distancia que existe entre un número y el cero se conoce como valor absoluto y se simboliza $|a|$, donde es un número o cantidad cualquiera. Gráficamente queda representado por:

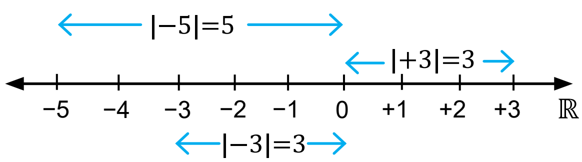


Notemos que el valor absoluto de dos números enteros opuestos, es el mismo, es decir: $|-3|=|+3|$

Ejemplo:

Hallar la distancia o valor absoluto de $-5,-3,+3$

Solución gráfica



Solución analítica

$|-3| = 3$
$|+3| = 3$
$|-5| = 5$

VALORACIÓN

Se ha mencionado previamente que la aplicación de los números enteros es variada, nos brinda la oportunidad de diferenciar la forma en que se registran algunas situaciones que experimentamos en el día a día, como: las deudas y haberes, las temperaturas sobre cero y las temperaturas bajo cero, las alturas sobre el nivel del mar y las profundidades, entre otras.

Tomando en cuenta conceptos, la aplicación de los números enteros en nuestro diario vivir, la ciencia y tecnología, describimos palabras propias la aplicación en los siguientes campos.

Transacciones financieras: ____________________
Resultados deportivos: ____________________
Pronósticos del tiempo: ____________________
Algunos eventos sucedidos antes de Cristo: ____________________

PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: De acuerdo a los resultados de la Copa América en en el año 1963, copia o pega en tu cuaderno la tabla de posiciones de las cuatro series para identificar las siguientes situaciones:

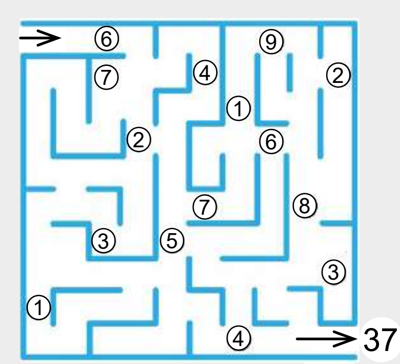
- Según los puntos acumulados, ¿que países clasificaron en primer lugar?
- ¿Qué países tienen mayor cantidad de goles anotados?
- ¿Cuál es la diferencia gol de los países que ocuparon los últimos lugares en todas las series?
- De la tabla de posiciones clasifica a los países de mayor puntaje acumulado al menor en una recta numérica.

Producción práctica: Resuelva los siguientes ejercicios y problemas.

1) Completa los siguientes enunciados:
   a) Mario debe al banco Bs 9500 y deposita la suma de Bs 8075, su nuevo saldo es de Bs __________
   b) Un coche avanza 150 metros hacia adelante pero luego retrocede 200 metros. Su ubicación con respecto al punto de partida es de __________ metros.

Reto matemático

Con un resaltador, recorre el laberinto de modo que sumando hasta la salida de 37.

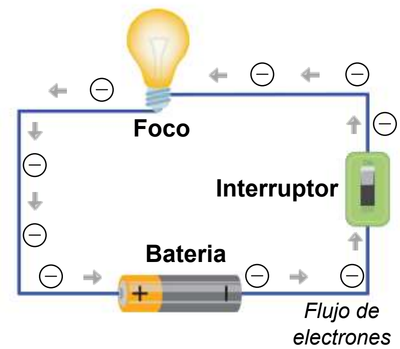


2) Representa en una recta numérica los siguientes números: $-6,+3,+1,-5,-10,+7,+8,-8,-2$
3) Ordena de mayor a menor los siguientes números: $-5,+4,+1,-4,-9,-7,+8,-6,+3,-1$
4) Ordena de menor a mayor los siguientes números: $+9,-4,-2,+1,-7,+6,-5,+4,+3,+11$
5) Encuentra y representa gráficamente los siguientes valores absolutos: $|-9|$, $|+10|$, $|-4|$, $|+7|$, $|-1|$, $|0|$

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS APLICADOS A LA COTIDIANIDAD

PRÁCTICA

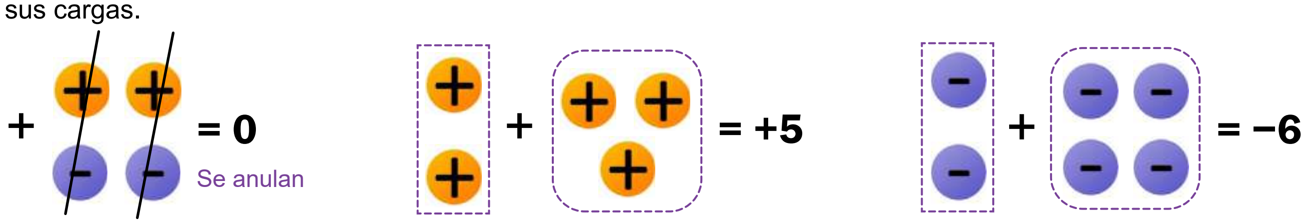
Realizamos un circuito simple para encender un foco de 1.5 o 3 voltios con pilas (batería) e investigamos sobre el flujo de electrones.



Materiales: Una porta pilas, dos pilas AA (baterías), porta foco, foco de 1.5 (para una pila AA) o 3 voltios (para dos pilas AA), interruptor y cable.
Procedimiento: Agarramos un trozo de cable y conectamos a un extremo del porta foco y el otro extremo a un terminal del interruptor, luego, otro trozo de cable conectamos desde el otro terminal del interruptor al porta pilas. Desde el segundo conector del porta foco conectamos un cable hasta el otro terminal del porta pilas. Vea la imagen de la derecha.

Modelo experimental: Jugando con las cargas (+) y (−)
Como se conoce, un electrón tiene carga negativa y un protón tiene carga positiva y sus cantidades están en un equilibrio ideal dentro del átomo. A nivel subatómico en la materia, cuando un átomo pierde electrones, entonces queda cargado positivamente; si el átomo gana electrones, entonces ese cuerpo queda cargado negativamente. Consideremos también que todos los cuerpos tienden a estar en estado neutro, igual, protones y neutrones.
Con lo anterior podemos generar un modelo ideal de reunir (sumar) cargas negativas y positivas con las siguientes premisas:

- Las cargas positivas y negativas reunidas se colocan en estado neutro, si están en cantidades iguales;entonces se anotará con el cero $(0 \in \mathbb{Z})$.
- Las cargas iguales reunidas aumentan su cantidad y se anotará con un número entero positivo o negativo, según sus cargas.

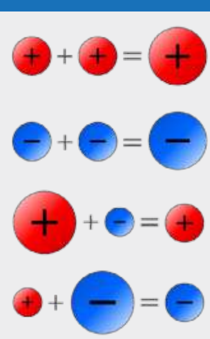


Actividad

Con un compañero de curso, recortamos varios círculos pequeños y marcamos con cargas positivas y negativas, luego, reproducimos los modelos $(1, 2, 3)$ de la imagen anterior y realizamos otros modelos de suma.
- ¿Qué sucede cuando reunimos cargas iguales?
....
- ¿Qué significa sumar cargas diferentes?
....
- Escribimos al menos tres conclusiones
....
....
....

TEORÍA

Reglas de signos



1. Adición y sustracción de números enteros

a) Adición de números enteros

Es una operación donde el resultado nos da otro número entero. El resultado de la suma dependerá si los números sumandos son del mismo signo o de diferentes signos, así tenemos la siguiente regla de signos:

- Para sumar números enteros con el mismo signo: se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo en el resultado, si son positivos el resultado será positivo y si son negativos será negativo.
- Para sumar números enteros con diferente signo, se restan sus valores absolutos, el signo del resultado es el de mayor valor absoluto, si es positivo será positivo y si es negativo será negativo.

Ejemplo:

Adición de números enteros con el mismo signo (+).

Si son números del mismo signo (+), entonces se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo positivo en el resultado.

$(+2)+(+3)=+2+3=+5$ $(+7)+(+8)=+7+8=+15$

$(+14)+(+9)=+14+9=+23$ $(+5)+(+15)=+5+15=+20$

$(+25)+(+35)=+25+35=+60$

Ejemplo:

Adición de números enteros con el mismo signo (−).

Si son números con igual signo (−), entonces se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo negativo en el resultado.

$(-1)+(-7)=-(1+7)=-8$ $(-10)+(-8)=-(10+8)=-18$

$(-4)+(-5)=-(4+5)=-9$ $(-44)+(-15)=-(44+15)=-59$

$(-3)+(-4)=-(3+4)=-7$ $(-23)+(-55)=-(23+55)=-78$

Ejemplo:

Adición de números enteros con signo distinto.

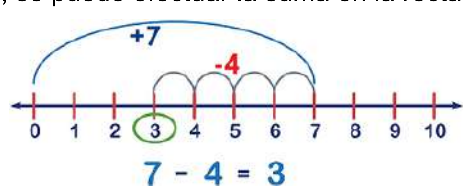
Si son números con signos diferentes, entonces se restan sus valores absolutos y el resultado lleva el signo del mayor valor absoluto, si el número mayor es positivo el resultado será positivo, si es negativo el resultado será negativo.

$(-2)+(+8)=-2+8=+6$ $(+5)+(-7)=+5-7=-2$

$(+13)+(-4)=+13-4=+9$ $(-24)+(+7)=-24+7=-17$

$(-33)+(+17)=-33+17=-16$ $(+52)+(-25)=+52-25=+27$

Alternativamente, se puede efectuar la suma en la recta real como sigue:



b) Sustracción de números enteros

Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo, así queda transformada la resta, en suma.

$$a-b=a+(-b)$$

Ejemplo:

Restamos los siguientes números enteros:

$$(+3)-(+7)=+3+(-7)=+3-7=-4$$
$$(+10)-(+6)=+10+(-6)=+10-6=+4$$

Para realizar adición y sustracción combinadas, debemos convertir cada resta en suma con el opuesto de su sustraendo, luego se suma los positivos por un lado y los negativos por el otro aprovechando la propiedad conmutativa; finalmente se resuelven dichos resultados parciales colocando el signo del número mayor.

Ejemplo:

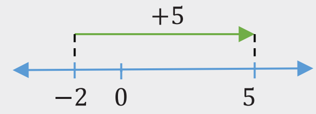
Sumamos y restamos los siguientes números enteros:

$$(+3)+(+5)-(+6)-(-9)=+3+5-6+9=+17-6=+11$$
$$-(+6)-(-12)+(+7)+(-9)=-6+12+7-9=+19-15=+4$$
$$+(-13)-(-10)+(+16)-(+18)=-13+10+16-18=+26-31=-5$$

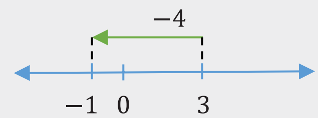
En la recta numérica

En la recta se ubica al primer sumando, nos desplazamos a la derecha si se añade una cantidad positiva y nos desplazamos a la izquierda si añadimos una cantidad negativa.

a) $(-2)+(+5)=3$



b) $(+3)+(-4)=-1$



BICENTENARIO DE BOLIVIA

Choque de signos

- *Si delante de un signo de agrupación está el signo positivo, se copia todos los números con su propio signo.*

$$+(a+b+c)=+a+b+c$$
$$+(a-b-c)=+a-b-c$$

- *Si delante de un signo de agrupación está el signo negativo, entonces se copian todos los números con signo cambiado.*

$$-(a+b+c)=-a-b-c$$
$$-(a-b-c)=-a+b+c$$

Reglas de signos

– *Multiplicación:*

$+$	$\cdot$	$+$	$=$	$+$
$-$	$\cdot$	$-$	$=$	$+$
$+$	$\cdot$	$-$	$=$	$-$
$-$	$\cdot$	$+$	$=$	$-$

– *División:*

$+$	$\div$	$+$	$=$	$+$
$-$	$\div$	$-$	$=$	$+$
$+$	$\div$	$-$	$=$	$-$
$-$	$\div$	$+$	$=$	$-$

Propiedades de la multiplicación

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ *se cumple:*

Clausura: $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}$

$$(+4)\cdot(-5) = -20;\ -20 \in \mathbb{Z}$$

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

$$(-6)\cdot(-4) = (-4)\cdot(-6)$$
$$+24 = +24$$

Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$$(-3)\cdot[(-4)\cdot(-5)]=[(-3)\cdot(-4)]\cdot(-5)$$
$$(-3)\cdot(+20) = (+12)\cdot(-5)$$
$$-60 = -60$$

Distributiva:

$$a\cdot(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(+6)\cdot(+4-5) = +6\cdot4-6\cdot5$$
$$(+6)\cdot(-1) = +24-30$$
$$-6 = -6$$

Elemento neutro:

$$(+5) \cdot 1 = +5;\ (-7) \cdot 1 = -7$$
$$a \cdot 1 = a$$

Elemento absorbente:

$$(+8)\cdot0=0 \qquad (-9)\cdot0=0$$
$$a \cdot 0 = 0$$

(Respecto a la adición o sustracción)

2. Multiplicación y división

El producto de dos o más números enteros, es otro número entero que resulta de aplicar la ley de signos y multiplicar los números como números naturales.

Ejemplo:

Resolvemos los siguientes productos con números enteros

$(+3)\cdot(-7)=-21$ $\qquad$ $(-5)\cdot(-9)=+45$

$(+10)\cdot(-20)=-200$ $\qquad$ $(-8)\cdot(+11)=-88$

$(+6)\cdot(-9)=-54$ $\qquad$ $(-12)\cdot(-10)=+120$

$(+11)\cdot(-15)=-165$ $\qquad$ $(-82)\cdot(+32)=-2624$

Ejemplo:

Determinamos los siguientes productos con números enteros aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

$$(+2)\cdot(+1-5+8-6) = +2-10+16-12=+18-22 = -4$$
$$(+2+7-8-9-3)\cdot(-4) = -8-28+32+36+12=+80-36 = +44$$
$$(-2)\cdot(5-4+2-1)+(-4+8-14)\cdot(-3) =$$
$$=-10+8-4+2+12-24+42=+64-38 = 26$$

La división de números enteros queda definida por:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists d \Rightarrow a \div b = d \Leftrightarrow b \neq 0 \wedge a = b \cdot d$$

Queda claro que la división entre cero no está definida.
Para dividir dos números enteros, se aplica la ley de signos y se dividen sus valores absolutos de los números dados.

Ejemplo:

Resolvemos las siguientes divisiones.

$24\div4 = 6$ $\qquad$ $36\div3 = 12$

$-54\div9 = -6$ $\qquad$ $-50\div5 = -10$

$65\div(-13) = -5$ $\qquad$ $155\div(-5) = -31$

$(-57)\div(-19) = +3$ $\qquad$ $(-42)\div(-7) = +6$

La división en los números enteros no goza de la propiedad de clausura, no es conmutativo tampoco es asociativo.

Actividad

Resolvemos las siguientes operaciones con números enteros

1) $+38-(+45)=$

2) $-40-(+30)=$

3) $(+17)-(+13)+(-5)=$

4) $(-4)\cdot(-8)=$

5) $(+15)\cdot(-40)=$

6) $(-3)\cdot(-3-4+2-9)=$

7) $(2+7-8-9+7-12)\cdot(-4)=$

8) $(-6)\cdot(9-8+12-10)+(-5+11-14)\cdot(-2)=$

9) $-405\div(-5)=$

10) $225\div75=$

11) $81\div3=$

12) $(-256)\div(-16)=$

13) $(-18)\div(+2)=$

14) $(+100)\div(+20)=$

Las operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división con o sin signos de agrupación siguen el orden descrito a la derecha.

Ejemplo:

Resolver $5\cdot(-4)-(-15+6)\div 3+[(-23+6)\cdot(-3+2)]=$

Resolvemos tomando en cuenta la jerarquía de las operaciones.

$=5\cdot(-4)-(-15+6)\div 3+[(-23+6)\cdot(-3+2)]$ *operando dentro el paréntesis*

$=5\cdot(-4)-(-9)\div 3+[(-17)\cdot(-1)]$ *operando dentro el corchete*

$=5\cdot(-4)-(-9)\div 3+[+17]$ *multiplicando y dividiendo*

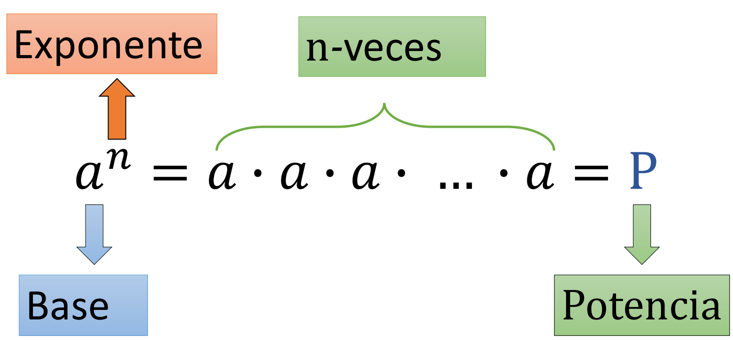
$=-20+3+17$ *suma de signos iguales*

$=-20+20$ *suma de número opuestos*

$=0$ *resultado*

3. Potenciación y radicación

a) Potenciación: Es la operación abreviada de la multiplicación de un número por sí mismo una o varias veces, sus partes son:



Ejemplo:

Resolvemos las siguientes potencias:

a) $(+3)^3=(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)=+27$

b) $(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-32$

Para una solución abreviada de una potencia se considera su comportamiento de signos, esto depende del signo de su base y la potencia par o impar.

Algunas operaciones requieren el uso de las propiedades de la potenciación, como los siguientes ejercicios.

Ejemplo:

Resolvemos el siguiente ejercicio utilizando propiedades

$$\{[(-2)^2]^3\}^4\cdot[(-2)^5\cdot(-2)^3]^{-3}=$$

$\{[(-2)^2]^3\}^4\cdot[(-2)^5\cdot(-2)^3]^{-3}=$ *operando las potencias*

$=(-2)^{24}\cdot[(-2)^{-15}\cdot(-2)^{-9}]$ *operando dentro el corchete*

$=(-2)^{24}\cdot[(-2)^{-15-9}]$ *sumando exponentes*

$=(-2)^{24}\cdot(-2)^{-24}$ *restando exponentes*

$=(-2)^{24-24}=(-2)^0$ *exponente cero*

$=1$

Secuencia lógica de las operaciones

Para realizar operaciones combinadas, debemos tomar en cuenta la jerarquía de las operaciones aritméticas.

Signos de agrupación
Corchetes, paréntesis y llaves
[] () {}

Potencias y raíces
x^2 $\sqrt{\ }$

Multiplicación y división
$\times$ ó $\cdot$ $\div$ ó $/$

Adición y sustracción
$+$ $-$

Propiedades

Base elevado a cualquier número n:
$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\dots\cdot a\ ;n\in\mathbb{Z}^+$

Exponente cero: $a^0=1$

$5^0=1$ $(-10)^0=1$

Producto de base iguales:
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$(-4)^7\cdot(-4)^4=(-4)^{7+4}=$

$=(-4)^{11}=-4\,194\,304$

Potencia de otra potencia:
$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

$(5^2)^2=5^4=625$

Potencia de un producto:

$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

$(3\cdot 2)^3=3^3\cdot 2^3=27\cdot 8=216$

Reglas de signos

$(+)^{par}=+$

$(+)^{impar}=+$

$(-)^{par}=+$

$(-)^{impar}=-$

Reto

Acomoda los números del 1 al 3 sin repetir en la fila ni columna, toma en cuenta la operación de referencia.

2−		2
2÷	3÷	
	1−	

Comportamiento de la raíz

$$\sqrt[par]{+} = +$$

$$\sqrt[par]{-} = \notin \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[impar]{+} = +$$

$$\sqrt[impar]{-} = -$$

Propiedades

− *Producto dentro de la raíz:*

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

$$\sqrt[3]{-8\cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27}$$
$$= (-2)\cdot 3 = -6$$

− *Cociente dentro de la raíz:*

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-4}{2} = -2$$

− *Potencias dentro de la raíz*

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}}$$

$$\sqrt[3]{(-3)^9} = \left(\sqrt[3]{-3}\right)^9 = (-3)^3 = -27$$

− *Raíces anidadas:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n\cdot m]{\boldsymbol{a}}$$

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas, debemos priorizar la secuencia lógica de las operaciones aritméticas sobre todo con los signos de agrupación de acuerdo al siguiente orden:

1º *Se calculan las potencias y raíces (sólo raíz principal)*

2º *Se realizan multiplicaciones y divisiones.*

3º *Se realizan las sumas y restas.*

Si se tiene operaciones dentro del radical, se calcula con el anterior orden.

Ejemplo:

Resolvemos: $E = \dfrac{2^3\cdot 3^9\cdot(-2)^{12}\cdot 3^4\cdot(-2)}{3^6\cdot(-2)^{10}\cdot 3^5\cdot(-2)^3}$

Identificamos las propiedades para resolver paso a paso

$$= \frac{2^3\cdot 3^{13}\cdot(-2)^{13}}{3^{11}\cdot(-2)^{13}} \quad \textit{producto de bases iguales}$$

$$= 2^3\cdot 3^2\cdot(-2)^0 \quad \textit{cociente de bases iguales}$$

$$= 72 \quad \textit{resultado}$$

b) Radicación: Es una operación inversa a la potenciación ya que la raíz enésima exacta de un número entero es otro número entero que elevado a un exponente (índice del radical) sea igual al primero.

$$\text{Si } a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z} \text{ y } n>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Longrightarrow b^n = a$$

En esta unidad temática se trabajará con números enteros, por lo tanto, todas las raíces serán exactas.

Ejemplo:

Resolvemos los siguientes radicales $\sqrt{16}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[4]{625}$

$$\sqrt{16} = 4 \Longrightarrow 4^2 = 16 \qquad \sqrt[3]{27} = 3 \Longrightarrow 3^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{625} = 5 \Longrightarrow 5^4 = 625 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2 \Longrightarrow (-2)^5 = -32$$

Se debe analizar cuidadosamente el radicando y el índice de la raíz, debido a que no existen raíces de cantidades negativas si el índice es par.

Ejemplo:

Resolvemos los siguientes radicales $\sqrt{-9}, \sqrt[3]{-125}$

$\sqrt{-9} = \notin \mathbb{Z}$ base negativa e índice par, la raíz no existe.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ base negativa e índice impar, la raíz existe y tiene el mismo signo.

Ejemplo:

Resolvemos los siguientes radicales:

$$\sqrt{50}\div\sqrt{2} = \sqrt{50\div 2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-2\cdot 4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9\ ;\ \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Para resolver cálculos con operaciones combinadas se toma en cuenta el orden de operadores descritos a la izquierda.

Ejemplo:

Resolvemos $\sqrt{33-8} + \sqrt[3]{3\cdot 7 - 29} - (-2)^4 + (3\cdot 4 - 7)^2$

$$= \sqrt{25} + \sqrt[3]{21-29} - (-2)^4 + (12-7)^2$$

$$= \sqrt{25} + \sqrt[3]{-8} - (-2)^4 + (5)^2$$

$$= 5 - 2 - 16 + 25 = 30 - 18 = 12$$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Los números enteros son muy utilizados y aplicados a situaciones de nuestro diario vivir.

Problema 1. Delma tenía Bs 50 en el banco, durante los tres primeros meses depositó Bs 1200 cada mes, en los tres siguientes meses retiró del banco Bs 750 cada mes. Se desea saber cuál es el saldo al final de los seis meses.

¿Qué me piden y cuáles son los datos? Ejecuto el plan (analizo y resuelvo)	
Monto inicial en el banco:	50
Depósitos (+) al banco:	$3 \cdot 1200 = 3600$
Retiros (−) del banco:	$3 \cdot 750 = 2250$
Saldo en el banco:	$50 + 3600 - 2250 = 1400$
Saldo en el banco Bs 1400	

Para resolver un problema

Paso 1: *entender el problema*
- *¿Qué nos pide?*
- *¿Cuáles son las condiciones y los datos del problema?*

Paso 2: *configurar un plan.*
- *Ensayo y error*
- *Buscar un patrón o fórmula*
- *Hacer una lista.*
- *Resolver un problema más simple.*
- *Hacer una figura o diagrama.*

Paso 3: *ejecutar el plan.*
- *Implementar la o las estrategias*

Paso 4: *mirar hacia atrás.*
- *¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?*

5. Cálculo mental con números enteros

El cálculo mental es el uso de ciertas habilidades y destrezas con las que se realizan operaciones matemáticas, sin usar lápiz y papel o una calculadora, la capacidad de calcular mentalmente es útil en la escuela y en la vida diaria, además de apoyar la memoria funcional para casos similares en la cotidianidad.

Ejemplo: ¿Qué es más barato?, comprar 10 cajitas de goma de mascar por Bs 8 o comprar 10 cajitas individuales a Bs 2 cada uno. Calcular mentalmente permite estimar rápidamente que cada paquete de la caja cuesta menos que los paquetes individuales porque $10 \cdot 2 = 20$ y la caja solo cuesta Bs 8.

VALORACIÓN

Actividad

“Los cálculos mentales no solo incrementan la capacidad de razonamiento y agilidad mental, también ayudan en la toma de decisiones rápidas y precisas en diversas situaciones”. Desde tu punto de vista, ¿por qué es muy importante el cálculo mental?

………

………

PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: En grupos de trabajo comunitario, exponemos la importancia de la secuencia lógica de las operaciones aritméticas.

Producción práctica: Con desarrollo, resolvemos los siguientes ejercicios y problemas.

1) $(3 \cdot 4 - 10)^2 + 4^3 \div (15 - 7) - 6 \cdot (12 \div 4 - 5 + 3)^2 + 12 \div (20 \div 5) - \sqrt{81} =$

2) $12 + (10 - 8)^2 - (20 \div 10 - 5)^2 - 6 \div \sqrt{36} - 20 \div 2^2 - 9 \cdot 5^0 + \sqrt{100} =$

3) $1^{10} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} + \sqrt[4]{16} + \sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{-512} \div \left[5^2 - \sqrt{36} - \sqrt{16} - \sqrt{121} + (-2)^3\right] =$

4) $5^2 - \sqrt[3]{20 + 7} \cdot \sqrt[3]{6 + 2} - (5 - 3)^5 \div \sqrt{10 + 6} - \sqrt[10]{1} - \sqrt{100} \div \sqrt{21 + 4} - \sqrt{8 + 8} =$

5) $1 - \sqrt{25 + 25 + 31} - 3^2 + 4^3 + \sqrt{27 + 9} + (5 - 2)^2 - (-2)^6 =$

6) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{121 - 21} + (3 - 5)^2 + (2^2 + 1)^2 - (3^2 - 1) + \sqrt{250 + 10 - 4} - \sqrt{90 + 5 + 5} - \sqrt[3]{1000} =$

7) Se tiene 6 billetes de Bs 200, 8 billetes de Bs 100, 4 billetes de Bs 50, 5 billetes de Bs 20, 3 billetes de Bs 10 y 9 monedas de Bs 5 ¿cuánto dinero se tiene en total?

8) Adolfo recibe su sueldo mensual de Bs 5050, gasta en servicios médicos la suma de Bs 570, compra en el supermercado por un valor de Bs 1595, gasta en pago de pensiones de sus dos hijos la suma de Bs 1440, paga al banco por una deuda anterior Bs 857, ¿cuánto es el saldo de su sueldo?

NOCIONES DE GEOMETRÍA EN NUESTRO ENTORNO

PRÁCTICA

En la variedad de contextos de nuestro Estado Plurinacional de Bolivia se observa diferentes tipos de construcciones donde se ve implícita la geometría, por ejemplo, el puente de las Américas de la ciudad de La Paz.

Investigando sus medidas

Investiga que dimensiones tiene el puente de las Américas, longitud, ancho, altura, etc.

Modelo experimental: Realiza un esquema o dibujo.

Una vez que hemos investigado las dimensiones del puente, realizamos un dibujo o esquema en una hoja de cualquier tamaño, debemos visualizar muy detalladamente las rectas horizontales, oblicuas y diagonales.

Fuente:https://elpotosi.net/nacional/20210504_gobierno-dispone-patrullaje-en-el-puente-de-las-americas-en-la-paz.html

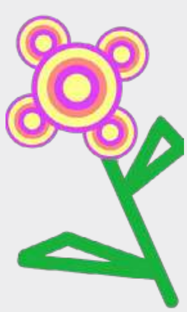
Actividad

Entre pares, tomamos medidas de longitud en [cm] de las rectas y la medida en grados sexagesimales de los ángulos en la réplica que se construyó, luego anotamos:

- Medidas de longitud en [cm]: ____
- Medidas de ángulos en [°]: ____

TEORÍA

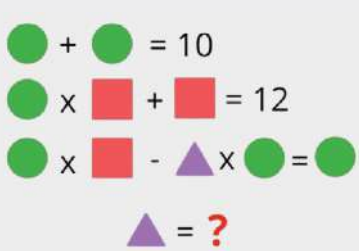
Geometría



Palabra griega, que significa medición de la Tierra, estudia las propiedades de las figuras geométricas usadas para medir extensiones.

Reglas de signos

Averigua cuánto es el valor de cada figura.

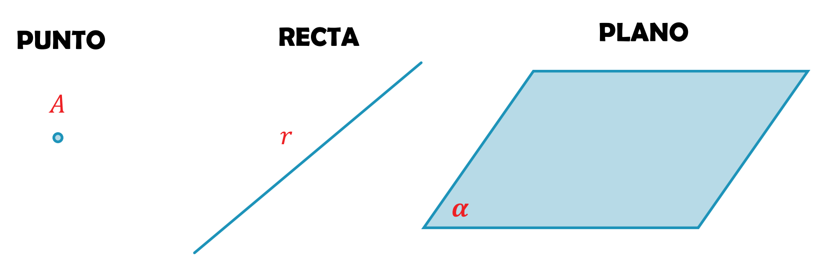


1. Elementos básicos de la geometría plana

Los elementos básicos y fundamentales de la geometría, como el punto, la recta y el plano, no poseen una definición, surgen como una abstracción mental de la realidad o entorno, así, por ejemplo, el hilo de una plomada nos refiere a la idea de una recta, la tabla de una mesa nos brinda la idea de un plano. Estas ideas geométricas (punto, recta y plano) pueden ser referenciados o representados por una notación simbólica, es decir, se puede representar gráficamente y nombrarlos.

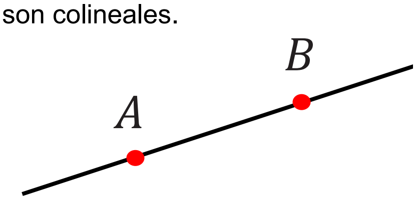
a) El punto, la recta y el plano

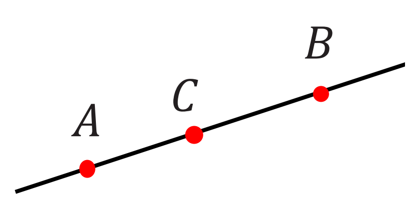
En la realidad existen diferentes objetos que nos sugieren las nociones de punto, recta y plano. Así, en la imagen de abajo se puede observar una idea intuitiva o primitiva acerca del punto, la recta y el plano, su representación y notación será:



Es importarte notar que los tres elementos básicos tienen su forma de nombrar y representar.

Las propiedades de pertenencia (estar en) y colinealidad (entre) pueden referirse como: el punto A, B pertenece a la recta o pasa por dos puntos A y B (estar en), mientras que, el punto C está entre A y B refiere a que A, B, C son colineales.





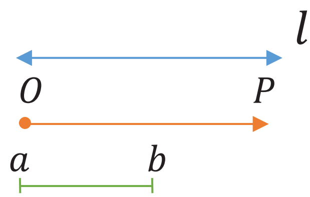
2. La recta, semirrecta y segmento

Una línea recta está formada por una sucesión de puntos que siguen una misma dirección, no tiene principio ni final y se extiende hacia el infinito en ambos sentidos.
Una semirrecta se considera como parte de una recta, es decir que una semirrecta tiene un punto de inicio pero no tiene un punto final, además toda semirrecta tiene dirección.
Un segmento es otra parte de una recta. Los segmentos son partes determinados por un tamaño definido: es decir, tienen un punto inicial y un punto final.

La recta l

La semirecta $\overrightarrow{OP}$

El segmento $\overline{ab}$

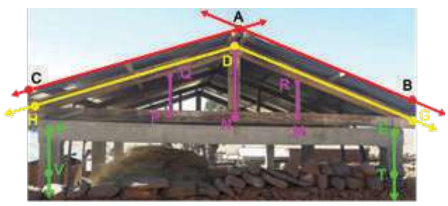


Ejemplo: en la imagen nombramos los elementos básicos de la geometría.

Rectas: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$

Semirrectas: $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{FV}, \overrightarrow{ET}$

Segmentos: $\overline{RM}, \overline{DN}, \overline{QP}$



3. Operaciones con segmentos

En la adición se unen los segmentos sumandos: uno a continuación del otro obteniendo así, el segmento suma que comprende desde el punto inicial del primer segmento hasta el punto final del último segmento sumando.

En la sustracción de segmentos, se traza el segmento minuendo y se superpone el segmento sustraendo haciendo coincidir su punto inicial con el punto inicial del minuendo, la parte que queda sin superposición o superpuesta es el segmento diferencia.

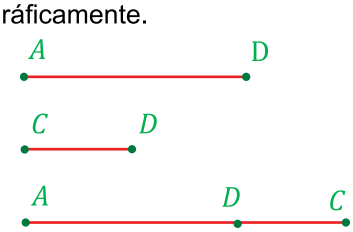
La multiplicación de un segmento por un número natural, simplemente se repite el segmento dado tantas veces indica el número multiplicador.

Para dividir un segmento por un número, se divide la medida del segmento dado tantas veces como indica el número divisor y uno de ellos es el cociente o resultado.

Ejemplo:

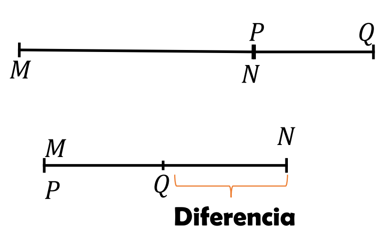
Efectúa la suma de segmentos analítica y gráficamente.

$$\overline{AD} = 30 \text{ mm}$$
$$\overline{CD} = 15 \text{ mm}$$
$$\overline{AD} + \overline{CD} = 30 \text{ mm} + 15 \text{ mm}$$
$$\overline{AD} + \overline{CD} = 45 \text{ mm}$$



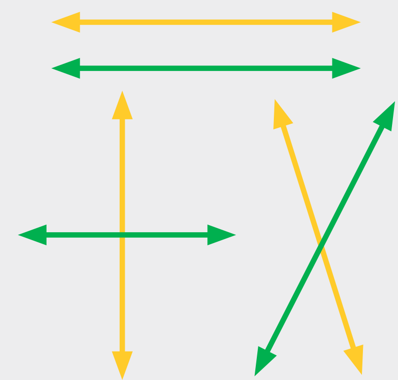
Ejemplo:
Hallar la sustracción de segmentos analítica y gráficamente.

$$\overline{MN} = 50 \text{ mm}$$
$$\overline{PQ} = 25 \text{ mm}$$
$$\overline{MN} - \overline{PQ} = 50 \text{ mm} - 25 \text{ mm}$$
$$\overline{MN} - \overline{PQ} = 25 \text{ mm}$$



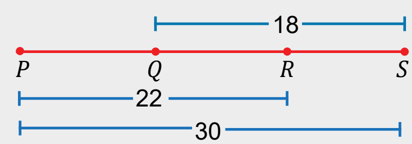
Posiciones de la recta

Una recta respecto a la otra puede ser perpendicular, paralela o intersecada.



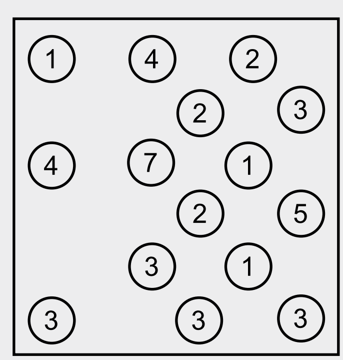
Reto geométrico

De la siguiente gráfica, hallar $\overline{PM}$ siendo M punto medio de $\overline{QR}$.



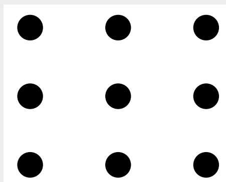
Reto geométrico

Debes conectar los números mediante líneas que no sean horizontales, verticales ni diagonales, tampoco pueden cruzarse, el número de referencia indica cuántas líneas salen y llegan a cada número de destino.



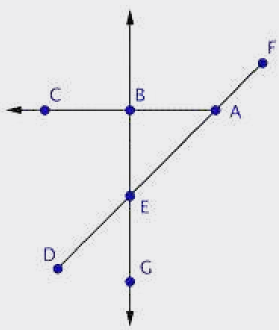
Reto geométrico

Une los 9 puntos solo con 4 líneas, sin pasar dos veces por el mismo punto ni levantar el lápiz.



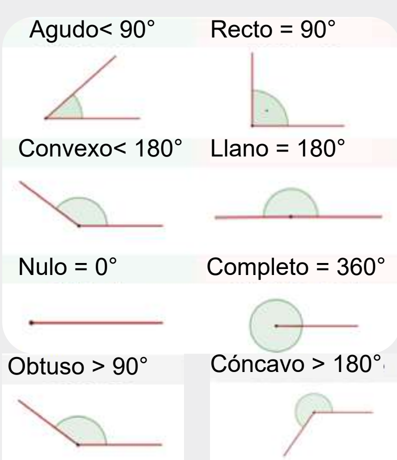
Ángulos

Identifica cuántos ángulos tiene la siguiente figura.

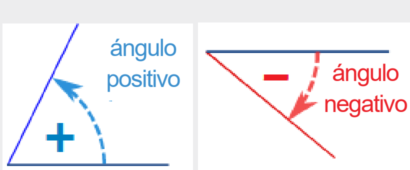


Clasificación

Los ángulos se clasifican en:



Tipo de ángulos



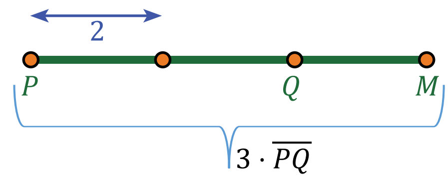
Ejemplo:

Calcula la multiplicación de segmentos analítica y gráficamente

$\overline{PQ} = 2$

$\overline{PM} = 3 \cdot \overline{PQ}$

$\overline{PM} = 3 \cdot 2 = 6\text{u}$



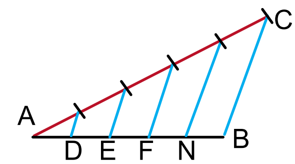
Ejemplo:

Encuentra la división de segmentos analítica y gráficamente

$\overline{AB} = 20$

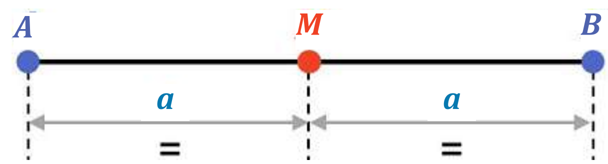
$\overline{AD} = \overline{AB} \div 5$

$\overline{AD} = 20 \div 5 = 4\text{u}$



a) Punto medio de un segmento

El punto medio en un segmento es el que lo divide en dos partes iguales. En ese caso, el punto medio es único y equidista de los extremos del segmento.



Ejemplo:

Sean los puntos A, B, C y D colineales, $\overline{BD} = 5, \overline{CD} = 3$ y B punto medio de $\overline{AC}$, calcula $\overline{AD}$

$\overline{BD} = 5 \quad \overline{AB} = \overline{BC}$

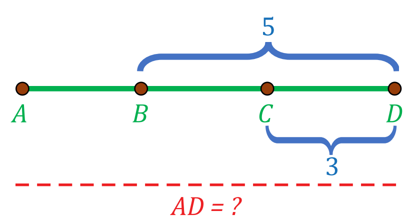
$\overline{CD} = 3 \quad \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

$\overline{AD} = ? \quad \overline{AB} = \overline{BC} = 5 - 3 = 2$

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$

$\overline{AD} = 2 + 5 = 7$

$\overline{AD} = 7$

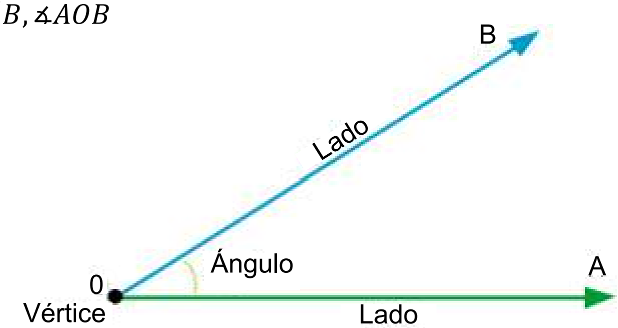


4. Definición de ángulo

El ángulo es la abertura comprendida entre dos semirrectas (lados) con un origen común llamado vértice. Los ángulos parten de un punto y generan una abertura llamada ángulo.

Para nombrar un ángulo se utilizan diversas formas, como ser:

$\hat{A}, \alpha, A\hat{O}B, \measuredangle AOB$



Existen dos tipos de ángulos, positivos y negativos.

Cuando el giro de la semirrecta es en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, se considera un ángulo positivo, y si el giro de la semirrecta es en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj es un ángulo negativo.

a) Medida sexagesimal de un ángulo

En el sistema sexagesimal, la unidad de medida del ángulo es el grado sexagesimal (°), este resulta de dividir una vuelta (circunferencia) en 360 partes. En la figura de la derecha se observa 90 particiones de una cuarta vuelta, si tomamos una partición resulta igualmente un grado sexagesimal (1°). Se tiene medidas más pequeñas que son el minuto y el segundo, los cuales generan las siguientes equivalencias.

$$1^{o} = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^{o} = 3600''$$

Ejemplo:

Trazamos el siguiente ángulo, 30^{o}.
Primero dibujamos la línea de tierra o línea inicial, seguidamente colocamos el transportador haciendo coincidir el origen con el punto de referencia del transportador, finalmente medimos 30º.

b) Operaciones básicas con ángulos

Para obtener gráficamente la suma de ángulos, se traza uno de los ángulos, luego a partir del lado final de este ángulo se traza el siguiente ángulo. Para restar ángulos, se traza el ángulo minuendo, luego se sobrepone el ángulo sustraendo a partir del lado final del ángulo minuendo, la diferencia de ángulos está entre el lado inicial del minuendo y el lado final del sustraendo. El producto de un ángulo por un número se obtiene multiplicando el ángulo por el número, su gráfica se traza dado en forma consecutiva tantas veces indica el número multiplicador. De igual manera en la división, se divide el ángulo dado por el número divisor.

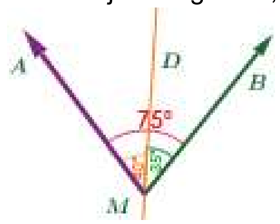
Ejemplo:

Hallamos el ángulo que forman las manecillas del reloj en la gráfica, si sus aberturas miden $35°$ y $40°$ con MD.

$\measuredangle BMD = 35^{o}$ $\quad \measuredangle AMB = 35^{o} + 40^{o}$

$\measuredangle AMD = 40^{o}$ $\quad \measuredangle AMB = 75^{o}$

$\measuredangle AMB = ?$



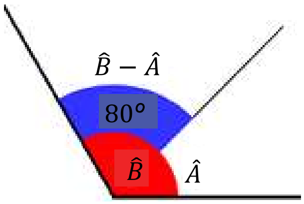
Ejemplo:

hallamos la medida del ángulo $\hat{B} - \hat{A}$, si los ángulos de la gráfica miden:

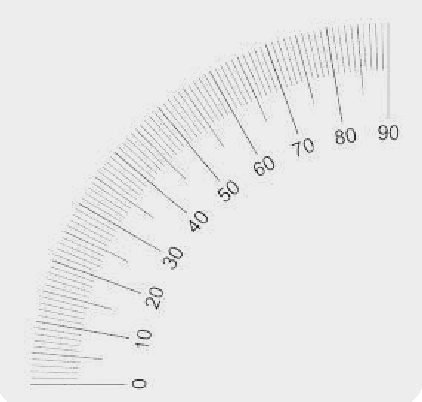
$\hat{A} = 45^{o}$ $\quad \hat{B} - \hat{A} = 125^{o} - 45^{o}$

$\hat{B} = 125^{o}$ $\quad \hat{B} - \hat{A} = 80^{o}$

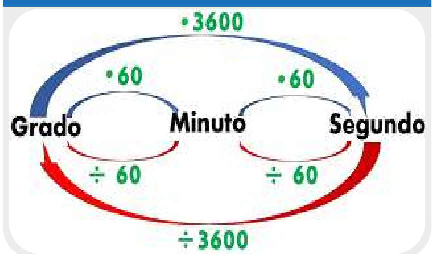
$\hat{B} - \hat{A} = ?$



Grado sexagesimal

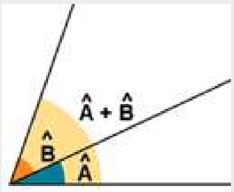


Transformación de unidades sexagesimales

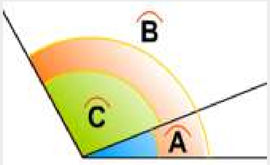


Operaciones con ángulos

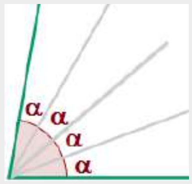
Suma de ángulos:



Resta de ángulos:



Multiplicación



Actividad

Encontramos el valor de los siguientes ángulos gráfica y analíticamente, sabiendo que:

$\alpha = 80^{o}$ $\quad \beta = 65^{o}$ $\quad \gamma = 30^{o}$ $\quad \lambda = 55^{o}$ $\quad \theta = 25^{o}$

1) $\alpha + \beta =$
2) $\lambda + \theta =$
3) $\alpha - \theta =$
4) $\beta - \gamma =$
5) $\alpha + \beta + \lambda =$
6) $\lambda + \theta + \gamma =$
7) $\alpha + \lambda - \theta =$
8) $\gamma + \lambda - \alpha =$
9) $3 \cdot \theta =$
10) $4 \cdot \gamma =$
11) $\alpha \div 2 =$
12) $\lambda \div 5 =$

Ángulos fraccionarios

Escritura correcta de un ángulo fraccionario:

$56^\circ\ 65'72'' = 56^\circ + 60' + 5' + 60'' + 12'' =$
$= 56^\circ + 1^\circ + 5' + 1' + 12'' = 57^\circ\ 6'\ 12''$

$35{,}5^\circ\ 26{,}5' = 35^\circ + 0.5^\circ + 26' + 0{,}5' =$
$= 35^\circ + 30' + 26' + 30'' = 35^\circ\ 56'\ 30''$

Suma:

+	234°	34'	26"
	12°	47'	53"
+	246°	81'	~~79"~~
		1'	19"
+	246°	~~82'~~	19"
	1°	22'	
	247°	**22'**	**19"**

Resta:

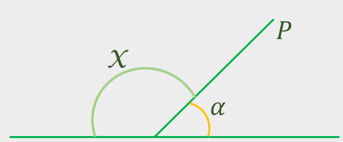
	37°	73'	
	~~38°~~	~~13'~~	41"
-	25°	47'	6"
	12°	26'	35"

Multiplicación:

27°	18'	34"
×	4	
108°	72'	136"
	2'	16"
108°	74'	16"
1°	14'	
109°	14'	16"

Ángulos de 90° y 180°

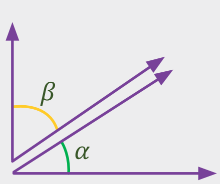
Encontramos el ángulo suplementario de 53°.



$\alpha + x = 180^\circ$
$x = 180^\circ - 53^\circ$
$x = 127^\circ$

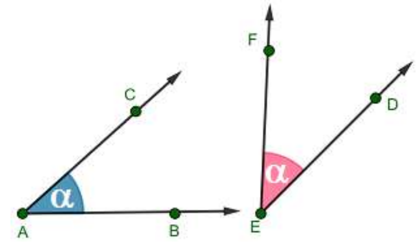
Hallamos el ángulo complementario de 44°.

$\alpha + \beta = 90^\circ$
$\beta = 90^\circ - 44^\circ$
$\beta = 46^\circ$



c) Congruencia de ángulos

En geometría dos objetos son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño, pero en lugares o posiciones diferentes.



Como se observa, ambos objetos geométricos poseen lados homólogos paralelos, entonces generan el mismo ángulo, entonces tienen la misma forma, por ambas condiciones se dice que son congruentes.

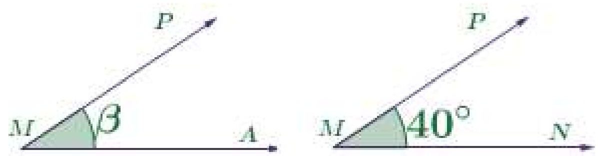
$$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle DEF$$

Ejemplo:

Por congruencia, hallemos β

$\measuredangle AMP \equiv \measuredangle NMP$

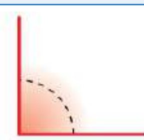
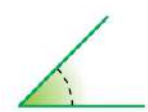
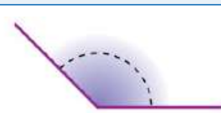
$\beta = 40^\circ$



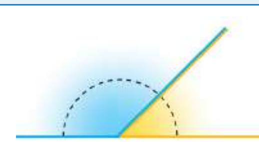
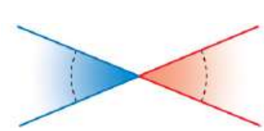
5. Clasificación de ángulos

Los ángulos pueden clasificar de diferentes maneras, por la medida de sus ángulos, según su relación con otros ángulos y por su posición que ocupen por el vértice o la suma de entre ellos.

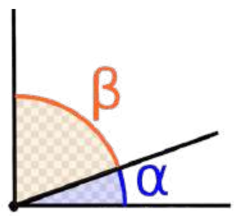
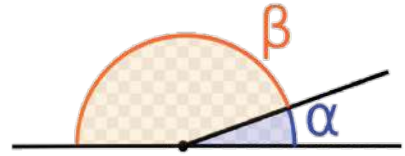
a) Clasificación según sus medidas: Según la medida que tiene un ángulo, se clasifican en recto, agudo, obtuso y llano.

Ángulo recto	Ángulo obtuso
 $\hat{A} = 90^\circ$	 $\hat{A} < 90^\circ$
Ángulo obtuso	**Ángulo llano**
 $\hat{A} > 90^\circ$	 $\hat{A} = 180^\circ$

b) Clasificación según su posición: Según la posición de un ángulo con respecto a otro, se clasifica en:

Ángulos consecutivos	Opuestos en el vértice
 Son aquellos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común.	 Los ángulos opuestos por el vértice son aquellos que comparten el mismo vértice y cuyos lados están dispuestos en direcciones opuestas. Estos ángulos son congruentes entre sí.

c) Según la suma con otro ángulo: Según el resultado de la suma de dos ángulos, se clasifican en:

Ángulo complementario	Ángulo suplementario
 $\boxed{\alpha+\beta=90^\circ}$ $C=90^\circ-\alpha$	 $\boxed{\alpha+\beta=180^\circ}$ $S=180^\circ-\alpha$

A continuación, resolveremos ejercicios aplicando las propiedades asociadas a la clasificación de los ángulos.
Hallaremos los valores de X en los siguientes ejercicios:

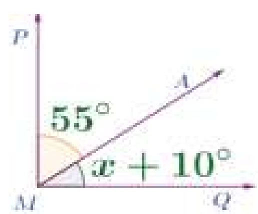
Ejemplo:

Utilizando ángulos complementarios.

$\measuredangle AMP = 55^\circ$ $\quad$ $55^\circ + x + 10^\circ = 90^\circ$

$\measuredangle AMQ = x+10^\circ$ $\quad$ $x = 90^\circ - 55^\circ - 10^\circ$

$\measuredangle AMP + \measuredangle AMQ = 90^\circ$ $\quad$ $x = 25^\circ$



Ejemplo:

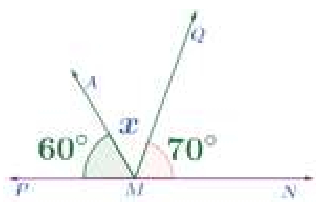
Utilizando ángulos suplementarios.

$\measuredangle AMP = 60^\circ$ $\quad$ $60^\circ + x + 70^\circ = 180^\circ$

$\measuredangle AMQ = x$ $\quad$ $x = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ$

$\measuredangle NMQ = 70^\circ$ $\quad$ $x = 50^\circ$

$\measuredangle AMP + \measuredangle AMQ + \measuredangle NMQ = 180^\circ$



Ejemplo:

Utilizando ángulos opuestos por el vértice.

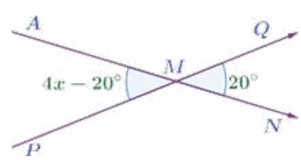
$\measuredangle AMP = 4x - 20^\circ$ $\quad$ $4x - 20^\circ = 20^\circ$

$\measuredangle NMQ = 20^\circ$ $\quad$ $4x = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

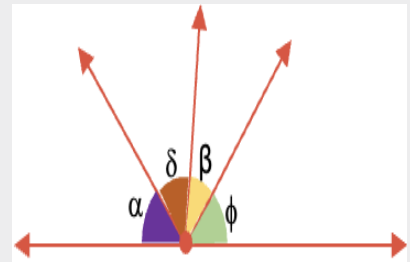
$\measuredangle AMQ = \measuredangle NMP$ $\quad$ $x = \frac{40^\circ}{4} = 10^\circ$

$\measuredangle AMP = \measuredangle NMQ$

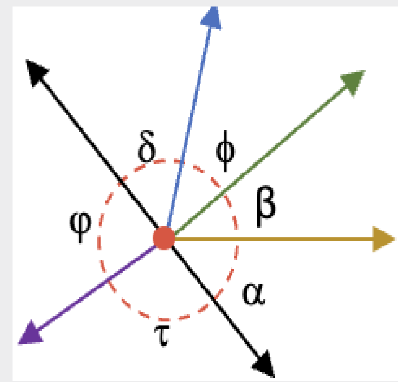
$x = 10^\circ$



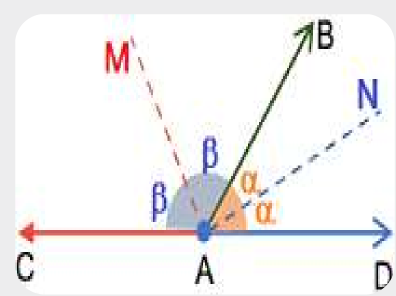
Ángulo sobre la recta



Ángulos con vértice común



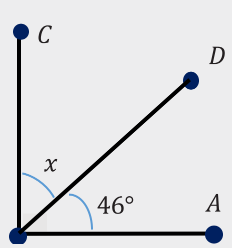
Bisectriz de un ángulo suplementario



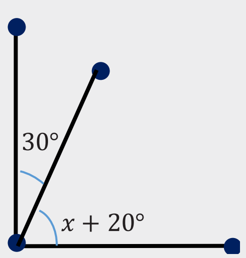
Actividad

Encontremos el valor de x en las siguientes figuras:

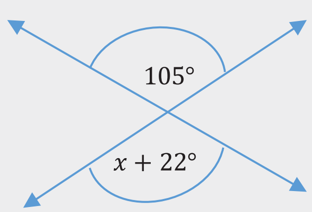
1)



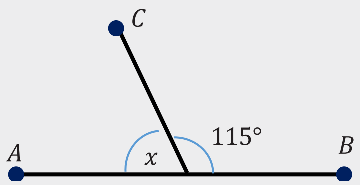
2)



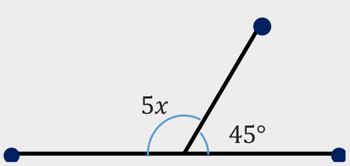
3)



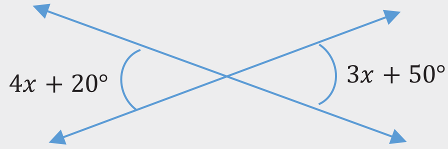
4)



5)



6)

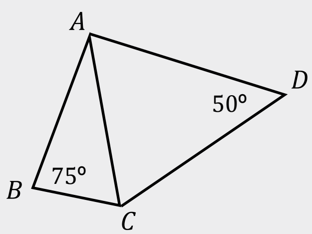


6. Problemas con ángulos y segmentos aplicados al contexto

En los diferentes contextos, en especial, en los objetos creados por el hombre, la geometría elemental está presente, por lo que podemos encontrar variedad de ejemplos, alguno de ellos los presentamos a continuación.

Reto

De la figura se sabe que $AD = DC$, $AB = AC$ *¿Cuánto mide el ángulo* $\measuredangle BAD$*?*



Ejemplo:

Una persona desea construir una escalera con 15 escalones para subir al segundo piso de su vivienda, como se muestra en la figura. Calculemos la altura del primer piso y la distancia de la pared al primer escalón.

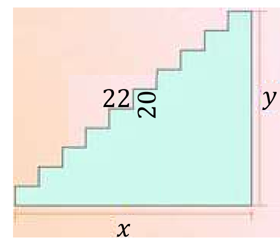
Identificamos los datos y la suma de las medidas como segmentos apilados.

$h_e = 22cm$ $\quad$ $x = 20 + 20 + ... + 20$

$x_e = 20cm$ $\quad$ $x = 15 \cdot 20 = 300$ cm

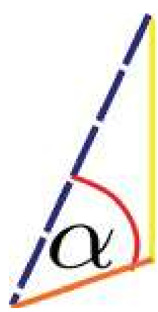
$x = ?$ $\quad$ $y = 22 + 22 + ... + 22$

$y = ?$ $\quad$ $y = 15 \cdot 22 = 330$ cm



Ejemplo:

En el área rural, los postes de energía eléctrica poseen tirantes de acero, como se muestra en la fotografía de la izquierda. Con la ayuda de algún instrumento o algún método heurístico, determinamos de forma aproximada los ángulos sabiendo que α y β son complementarios.



Identificando la propiedad de congruencia cuando los lados homólogos de dos ángulos son paralelos, entonces se elabora un plan:

Primero, plantamos una estaca de madera lo más vertical posible, de modo que coincida con el tirante de acero a cualquier distancia (segmento de color amarillo).

Segundo, con dos hilos o cuerdas delgadas, formamos el ángulo sujetando sus extremos a la estaca, haciendo una marca en el vértice de dicho ángulo formado.

Tercero, extraemos cuidadosamente la estaca plantada, de modo que la réplica creada para el ángulo no se distorsione y estemos en la posibilidad de medir con un transportador.

Finalmente, si $\alpha = 47°$ entonces β será: $\beta = 90° - 47° = 43°$ aproximadamente.

Ejemplo:

En la fotografía se muestra la mitad de una puerta hecha con tubos de acero. Calculamos la longitud total de tubos de acero que se usó, sabiendo las medidas dadas en imagen.

Datos e incógnita:

Altura: $b = 90$ cm $\quad$ $x = 2 \cdot 70 + 2 \cdot 70 + 2 \cdot 70 + 2 \cdot 70$

Largo: $a = 70$ cm $\quad$ $x = 140 + 140 + 140 + 140$

$x = ?$ $\quad$ $x = 560$ cm

$y = ?$ $\quad$ $y = 12 \cdot (3 \cdot 90)$

$y = 12 \cdot 270$

$y = 3240$ cm

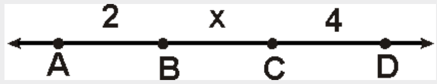
Longitud total de los tubos:

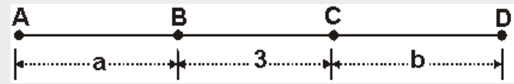
$$T = x + y$$
$$T = 560 + 3240$$
$$T = 3 \text{ cm}$$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios sobre segmentos:

1) En una recta, los puntos A, B, y C son consecutivos. Si $AB = CD$ y $AD + BC = 16$, halla BD.
2) Halla el valor de x, sabiendo que $AC \cdot CD = 20$

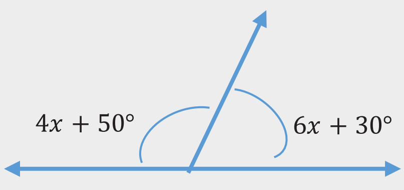


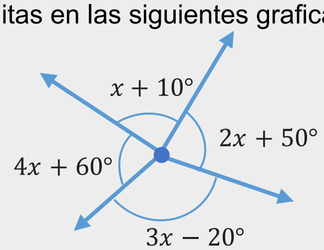


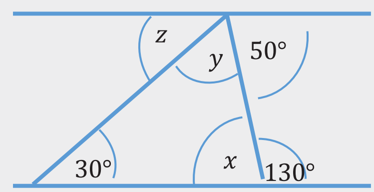
3) Sobre una recta se colocan puntos consecutivos A, B, C, D, tal que $AC+ BD=7$ y $BC = 3$, calcula AD. (Ver figura de arriba a la derecha)
4) En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, y C, si $AB+ AC=28$, encuentra AM siendo M el punto medio de BC.

Entre pares, resolvemos los siguientes ejercicios sobre ángulos.

5) Calculamos la diferencia entre el suplemento del complemento de 65° y el complemento de 55°.
6) Si el suplemento de un ángulo es igual a 116°, calcular el complemento de dicho ángulo.
7) Halla los valores de las incógnitas en las siguientes graficas:







VALORACIÓN

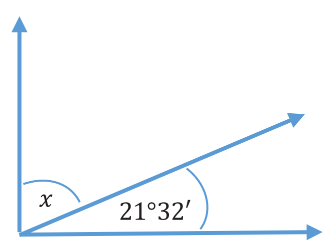
En clases conversamos y respondemos a la pregunta ¿en qué actividades cotidianas podrían colaborar los conocimientos adquiridos sobre elementos básicos de la geometría? Tomemos nota sobre lo que dicen nuestros compañeros en el aula.

____
____
____

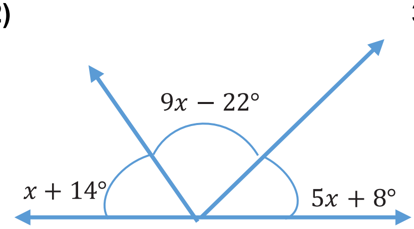
PRODUCCIÓN

Producción aplicativa: En comunidades de aprendizaje, exponemos y debatimos sobre el uso y aplicación de la geometría en nuestro contexto.
Producción práctica: Resuelve los siguientes ejercicios.

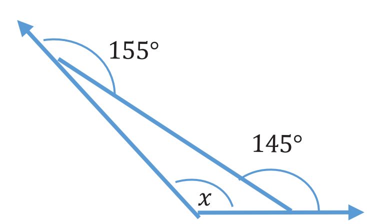
1)



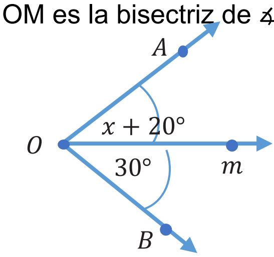
2)



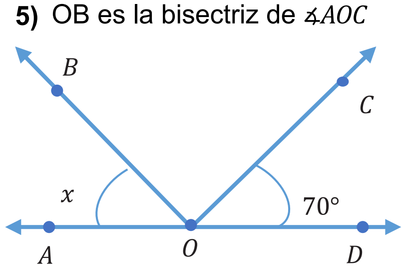
3)



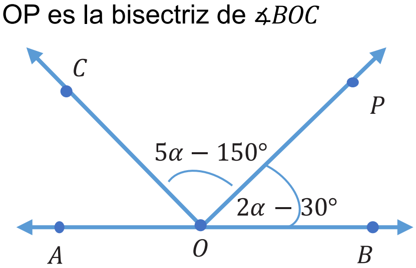
4) OM es la bisectriz de $\measuredangle AOB$



5) OB es la bisectriz de $\measuredangle AOC$



6) OP es la bisectriz de $\measuredangle BOC$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FORMAS EN EL PLANO CARTESIANO

PRÁCTICA

Construyendo un modelo de ejes referenciales

En los predios de la unidad educativa, en un espacio plano con preferencia en el espacio deportivo, extienda dos líneas referenciales y perpendiculares como el de la imagen (derecha). Puede usar cuerdas u otro material para atarlas a una piedra o a una estaca; se deja libre dicha construcción.

A continuación, construimos una escuadra (90°) de cualquier material, relativamente grande, al que llamaremos escuadrón, también debemos tener como materiales auxiliares: el metro o cinta métrica, cuerdas de colores, lana o hilo grueso y un estuche geométrico.

Modelo experimental: "Comunico mi ubicación"

Por lo general nuestra cancha está diseñada en base a cuadrados de concreto, que nos ayuda a determinar puntos de referencia. Nos ubicamos en una intersección en cualquier punto del plano (cancha deportiva), colocamos bajo nuestros pies el escuadrón de forma que sus lados sean paralelos a los ejes referenciales, luego desprende lana, hilo o cuerda de los extremos del escuadrón de tal forma que se intersecten con los ejes referenciales a 90° (verificar con la escuadra del estuche geométrico). Medimos con cinta métrica desde el origen de los ejes referenciales hasta cada intersección del eje con los hilos desprendidos del escuadrón en [cm]. Finalmente, comunicamos o escribimos dos medidas, dichos valores representarán las coordenadas de nuestra posición en el plano; podemos nombrar a uno de los ejes referenciales con el nombre de abscisas y al otro como ordenadas.

Fuente: fotografía propia

Fuente: fotografía propia

Actividad

Trabajando entre pares, registramos las coordenadas de la posición de varios objetos o de compañeros que estén ubicados en el plano, anotamos en nuestro cuaderno, por ejemplo: Posición en el plano de Aneth, abscisas a 34 cm y ordenadas a 45 cm.

____

____

____

____

TEORÍA

René Descartes

Filósofo, matemático y físico francés considerado el padre de la geometría analítica y la filosofía moderna. Logró trasladar matemáticamente la geometría analítica al plano bidimensional de la geometría plana y dio origen al sistema de coordenadas.

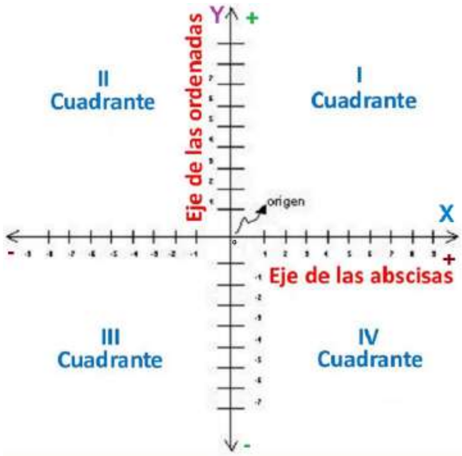
1. Plano cartesiano

El plano junto a los ejes referenciales, vistos en el momento metodológico de la práctica, conforman el plano cartesiano, es decir, es un plano que tiene dos ejes perpendiculares (ejes referenciales), el eje horizontal recibe el nombre de abscisa o simplemente eje 'X' y la recta vertical es el eje de las ordenadas o eje 'Y'. La intersección de los ejes es el origen de coordenadas.

Los ejes del plano deben ser perpendiculares (90°) entre sí, cada una de ellas tienen semiejes positivo y negativo como la recta numérica, La finalidad del plano cartesiano es describir la posición o ubicación de un punto en el plano, dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes, los cuales son numeradas en el sentido anti horario con números romanos ($\mathrm{I, II, III, IV}$).

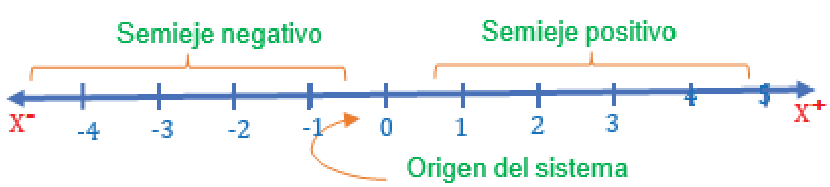
El plano cartesiano también sirve para analizar matemáticamente figuras geométricas como la parábola, la hipérbola, la línea recta, la circunferencia y la elipse, también de realizar operaciones como distancia entre dos puntos, punto medio o división en partes iguales de un segmento, pendiente e inclinación de una recta, ángulo entre dos rectas, área poligonal, las cuales forman parte de la geometría analítica.

A continuación, en la siguiente gráfica observaremos los elementos que tiene el sistema de coordenadas cartesianas:



Construcción del sistema de coordenadas cartesianas

Al ser los primeros contactos del estudiante con un sistema de coordenadas, a continuación, pasemos a detallar la conformación del eje X del sistema de coordenadas cartesianas.

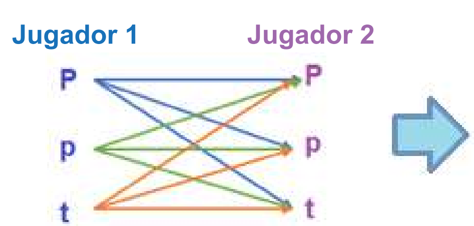


Trazamos una recta horizontal, en dicha recta, marque un punto que será el origen del eje X, a partir del origen escoja una unidad de medida que formará parte de la escala de unidades de dicho eje; con la unidad de medida gradúe la recta con números positivos, a la derecha del cero y con números negativos a la izquierda.

De modo análogo se construye el eje Y o eje de las ordenadas del sistema.

2. Par ordenado

Para acercarnos a este concepto, usaremos los resultados posibles del juego piedra, papel o tijera. A continuación, se observa cuántas parejas se pueden formar.



Posibles resutados

(P, P); (P, p); (P, t)

(p, P); (p, p); (p, t)

(t, P); (t, p); (t, t)

Las parejas formadas por los resultados obtenidos del juego, es semejante a un par ordenado, pues el resultado de piedra – papel es muy diferente a papel – piedra.

Un par ordenado es una pareja de números escritos de la forma (a, b), representa la coordenada de un punto en el plano, es decir, el primer número es el primer componente y se registra en el eje de las abscisas o eje horizontal (eje X), mientras que el segundo componente se grafica en el eje de las ordenadas o eje vertical (eje Y).

Un ejemplo de par ordenado de números enteros positivos en matemática es: (3, 5). Este par ordenado representa dos números enteros positivos, donde 3 es el primer elemento (coordenada X) y 5 es el segundo elemento (coordenada Y).

Sistema de orientación

Fuente:https://es.pinterest.com/pin/640144534555162674/

El sistema de orientación o puntos cardinales, son elementos fundamentales de orientación que nos brindan la posibilidad de localizarnos en cualquier lugar del planeta. El Este es el lugar por el cual sale el sol, el Oeste el lugar en el que se oculta el sol, el Norte el lugar en el que se oculta el sol al mediodía, y el Sur es la dirección opuesta al Norte.

Sistema de coordenadas geográficas

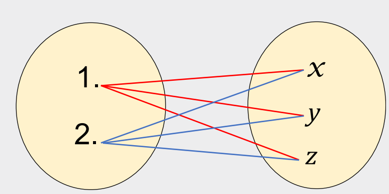
Es un sistema de coordenadas que expresa la posición de un objeto o persona en la tierra a través de una latitud y longitud.

Latitud, en términos sencillos, expresa qué tan al norte o que tan al sur se encuentra un punto sobre la tierra. Es semejante al eje Y.

Longitud, expresa qué tan al este o al oeste se encuentra un punto en la tierra.

Los ejes referenciales que usa son la línea del Ecuador y el meridiano de Greenwich.

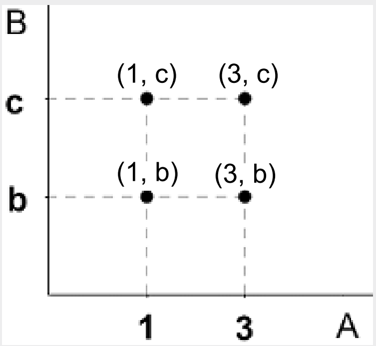
Conjuntos



Representación de pares ordenados en un diagrama de conjuntos.

Producto cartesiano

Son pares ordenados con elementos de dos conjuntos y se representa por $A \times B$, si los conjuntos son A y B.
Sea. $A = \{1, 3\}$ y $B = \{b, c\}$
El producto cartesiano será:
$A \times B = \{(1, b), (1, c), (3, b), (3, c)\}$



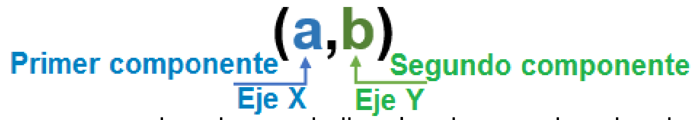
Método Ruler

También conocido como el medidor de emociones para niños y jóvenes.
Las siglas RULER corresponden en inglés a reconocer, entender, etiquetar, expresar y regular (recognizing, understanding, labeling, expressing y regulating)

- *Reconocer las emociones propias y las de los demás.*
- *Comprender las causas y consecuencias de las emociones.*
- *Etiquetar las emociones.*
- *Expresar adecuadamente las emociones.*
- *Regular las emociones efectivamente.*

Fuente:https://iccsi.com.ar/programa-ruler-inteligencia-emocional/

Un par ordenado se escribe de la siguiente manera:

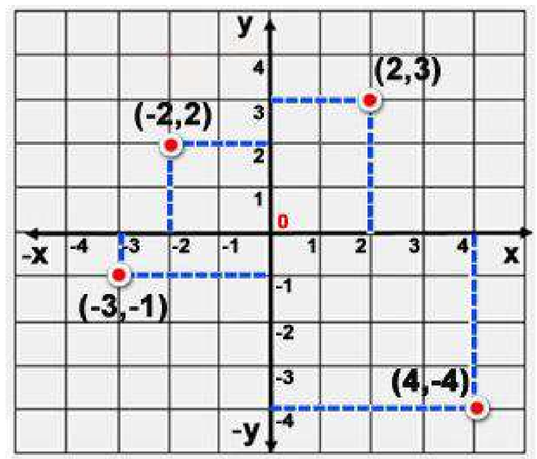


Utilizamos un par ordenado para indicar las dos coordenadas de un punto o de un objeto en el plano. El primer componente se representa en la coordenada del eje X y el segundo componente se grafica en la coordenada del eje Y.

Ejemplo:

Ubicamos los siguientes pares ordenados $(2, 3)$, $(-2, 2)$, $(-3, -1)$ y $(4, -4)$ en el plano cartesiano.

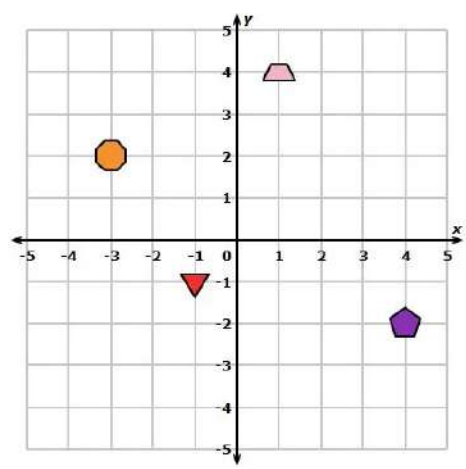
Ubicamos el primer par ordenado $(2, 3)$, en primer lugar recorremos desde el origen dos casillas a la derecha en el eje X, seguidamente subimos tres casillas hacia arriba en el eje Y, dibujamos un punto que representa la intersección de ambas líneas horizontal y vertical, de esa manera encontramos el punto $(2, 3)$. El mismo procedimiento se sigue para representar las otras coordenadas.



Ejemplo:

Anotemos las coordenadas de las siguientes figuras geométricas ubicadas en el plano cartesiano.

Sabemos que un sistema de coordenadas sirve para determinar la posición de un objeto o de una persona, entonces ubiquemos e identifiquemos los números que le corresponden a cada figura para formar el par ordenado: primero, el número del eje X, luego el número del eje Y, así las coordenadas serán:



Triángulo: $(-1, -1)$
Pentágono: $(4, -2)$
Octágono: $(-3, 2)$
Trapecio: $(1, 4)$

La suma y resta de pares ordenados se realiza de componente a componente y la multiplicación sólo se realiza por un escalar, vale decir:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$
$$(a, b) - (c, d) = (a-c, b-d)$$
$$k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$$

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones con pares ordenados.

$$(2, 3)+(1, 5)=(2+1, 3+5)=(3, 8)$$
$$(4, 3)-(2, 4)=(4-2, 3-4)=(2,-1)$$
$$3 \cdot (4, 5)=(3 \cdot 4, 3 \cdot 5)=(12, 15)$$

Igualdad de los pares ordenados

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales, si sus primeras y segundas componentes son iguales, entonces representan la misma posición en el plano cartesiano, así tenemos:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo:

Calculemos:

$$a + b + c + d + m + n + p$$

Usando la igualdad de coordenadas, se tiene las siguientes equivalencias.

$(-2, n)=(c, c + 3)$; $(c, m + 1)=(b -5, 5)$; $(d + 2, 3)=(a, b)$

$(p-2, b-5)=(a-7, n-3)$; $(n + 2, d + 2)=(p + 4, b + 1)$

Igualando las primeras componentes:

$-2 = c$	$c = b-5$	$d + 2 = a$
$c = -2$	$-2 = b - 5$	$d + 2 = 4$
$b = -2 + 5$	$d = 2$	

$p-2 = a-7$	$n + 2 = p + 4$	$b=3$
$-1-2 = a-7$	$1 + 2 = p + 4$	
$a = -1 - 2+7$	$p = 1 + 2 - 4$	
$a = 4$	$p = -1$	

Igualando las segundas componentes:

$n = c+3$	$m+1 = 5$	$3 = b$
$n = -2+3$	$m = 5-1$	$b = 3$
$n = 1$	$m = 4$	

$b-5 = n-3$	$d+2 = b+1$
$3-5 = n-3$	$d+2 = 3+1$
$n = -3-3+5$	$d = 3+1-2$
$n = 1$	$d = 2$

$$a + b + c + d + m + n + p = 4 + 3 -2 + 2 + 4 + 1-1 = 14-3 = 11$$

Igualdad de un par ordenado

Si $(a+1, 5)=(8, b-3)$

Se cumple:

$a+1 = 8 \wedge 5 = b-3$

$a = 8-1 \wedge b = 5+3$

$a = 7 \wedge b = 8$

Para tomar en cuenta

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 *admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."*

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos hechos se utilizará el punto decimal como separador.

***Ejemplo*:**

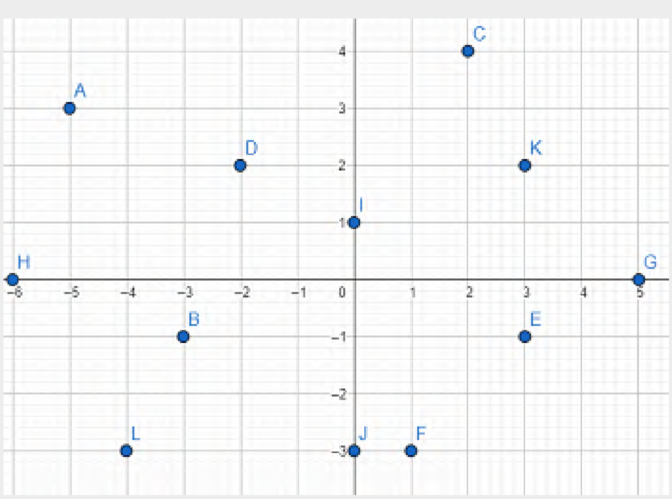
$3.14;\ 0.71; -0.5; ....$

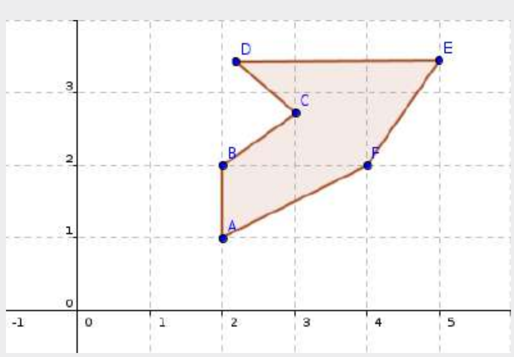
Actividad

1) Ubicamos los siguientes pares ordenados en el plano cartesiano:

$(-3, 4), (2, 3), (0, 4),(-3, 0),(2, 5),(3, 6),(5, -2),(-4, -4)$

2) En los siguientes sistemas de coordenadas reconocemos los puntos que se dan como referencia.

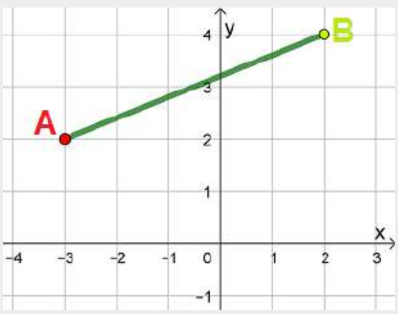




Reto geométrico

Dibuja un cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio, triángulo y un paralelogramo.

Operaciones



Tomando en cuenta el gráfico determinamos las coordenadas de los puntos:

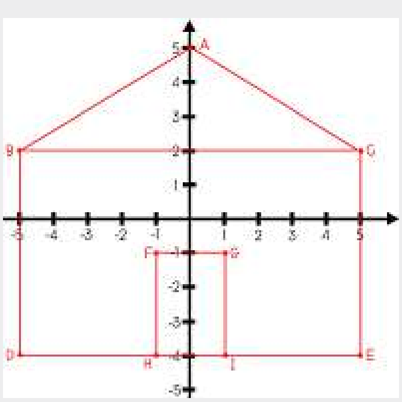
$A(-3, 2) \quad B(2, 4)$

Realizamos las siguientes operaciones:

$A + B = (-3, 2) + (2, 4)$
$A + B = (-3 + 2, 2 + 4) = (-1, 6)$
$A - B = (-3, 2) - (2, 4)$
$2 \cdot A = 2 \cdot (-3, 2) = (-6, 4)$
$4 \cdot B = 4 \cdot (2, 4) = (8, 16)$

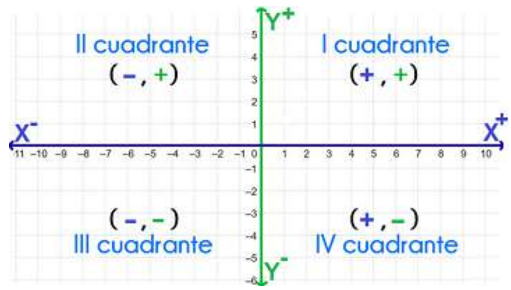
Reto cartesiano

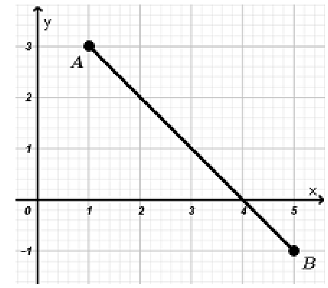
Identificamos los puntos de la figura del plano cartesiano.



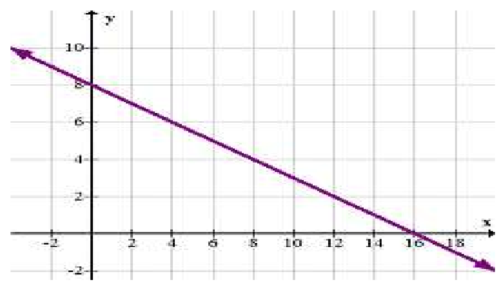
3. Puntos, segmentos, rectas y polígonos

Punto: Es el par ordenado (x, y) en el plano cartesiano, el cual se ubica en uno de los cuatro cuadrantes, la representación en uno de los cuadrantes dependerá de los signos de sus coordenadas.
Segmento: Es la parte de una recta delimitada por dos puntos. El segmento tiene principio y final. A y B se llaman extremos del segmento.





Línea recta: Es una sucesión de infinitos puntos (no tiene principio ni final, es decir, no tiene límites) en la que los puntos están trazados en una misma dirección.

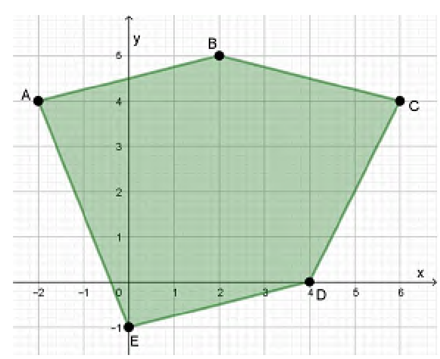


Polígono: En el plano cartesiano, el polígono sigue siendo una figura cerrada formado por varios lados (segmentos), es decir, varios segmentos unidos unos a continuación de otros hasta formar una figura cerrada.

Ejemplo:

Representamos los siguientes puntos para unir los segmentos para que se forme un polígono:

$A(-2, 4)$ $\quad$ $B(2, 5)$
$C(6, 4)$ $\quad$ $D(4, 0)$
$E(0, -1)$

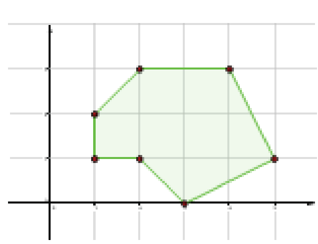


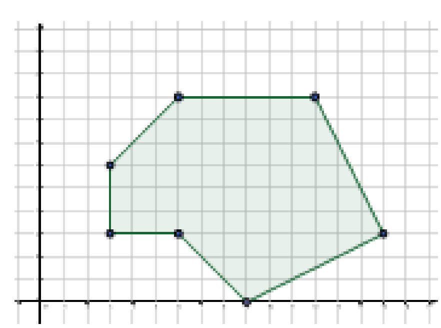
Uniendo los segmentos en el plano cartesiano, se formó un polígono de 5 lados y de 5 vértices.

Ejemplo:

Formemos un polígono con los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 3)$, $D(4, 3)$, $E(5, 1)$ $F(3, 0)$, $G(2, 1)$, luego realizamos la operación $3(a, b)$ para graficar nuevamente.

$$A'(3, 3), B'(3, 6), C'(6, 9), D'(12, 9), E'(15, 3), F'(9, 0), G'(6, 3)$$





4. Distancias entre dos puntos en rectas horizontales y verticales

Para determinar la distancia entre dos puntos de un segmento, es necesario considerar el punto de inicio y el punto final, es decir, dado dos puntos colineales o dos puntos extremos de un segmento, el punto de la izquierda será el punto inicial y el de la derecha será el punto final.

La distancia entre dos puntos queda definida como el valor absoluto de la diferencia entre el punto final y el punto inicial.

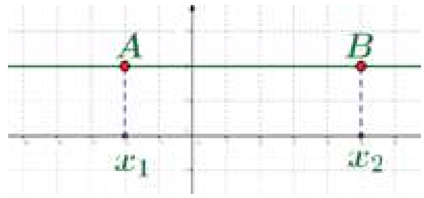
a) Distancias horizontales

Distancia a partir del punto inicial:

$$d_{\overline{AB}} = |x_2 - x_1|$$

Distancia a partir del punto final:

$$d_{\overline{BA}} = |x_1 - x_2|$$



Ejemplo:

Hallamos la distancia horizontal entre los puntos.

$A(-1,-1)$ y $B(3,-1)$.

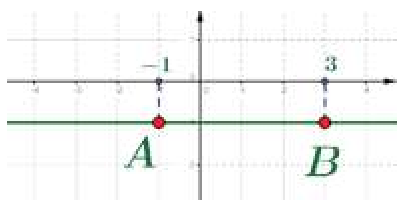
Graficamos las coordenadas y aplicando la fórmula.

Punto inicial: $x_2 = 3$
Punto final: $x_1 = -1$

$d_{\overline{AB}} = |x_2 - x_1|$ $\quad d_{\overline{AB}} = |3 - (-1)|$

$d_{\overline{AB}} = |3 + 1|$

$d_{\overline{AB}} = |4| = 4$ $\quad d_{\overline{AB}} = 4$



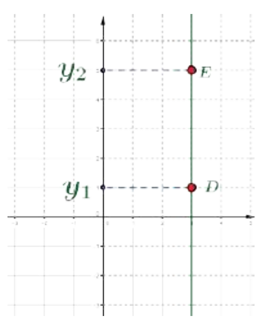
b) Distancias verticales

Distancia a partir del punto inicial:

$$d_{\overline{ED}} = |y_2 - y_1|$$

Distancia a partir del punto final:

$$d_{\overline{DE}} = |y_1 - y_2|$$



Ejemplo:

Hallamos la distancia vertical entre los puntos $D(-2, 3)$ y $E(-2, -7)$.

Graficamos las coordenadas y aplicando la fórmula.

Punto inicial: $y_2 = -7$

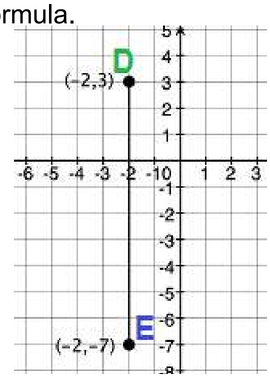
Punto final: $y_1 = 3$

$d_{\overline{DE}} = |y_1 - y_2|$

$d_{\overline{DE}} = |3 - (-7)|$

$d_{\overline{DE}} = |3 + 7|$

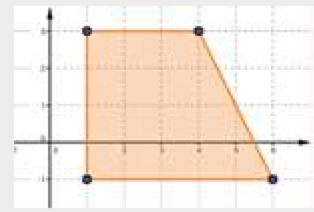
$d_{\overline{DE}} = |10| = 10$

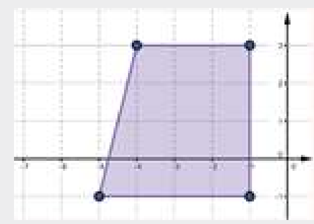


Tomando en cuenta los dos anteriores ejemplos, tanto la distancia horizontal como vertical, representan las unidades medidas entre los puntos del segmento, simplemente es la diferencia de coordenadas en el eje X y Y, vale decir; restamos las coordenadas de las abscisas para la distancia horizontal y las ordenadas para la distancia vertical.

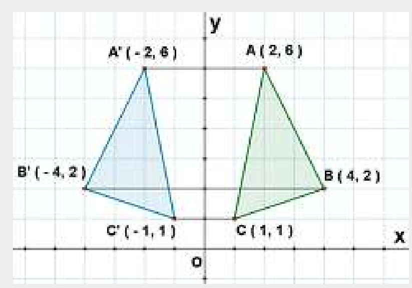
Simetría axial

La simetría axial con respecto al eje 'Y' es cuando la primera componente de la coordenada cambia de signo, es decir $P(x, y)$ tendrá simetría respecto al eje 'Y' en $P'(-x, y)$.



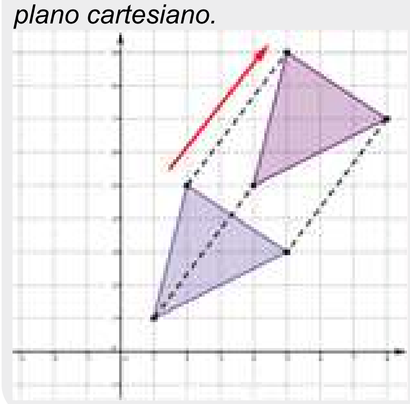


A continuación, vemos la simetría en el eje X.



Reto geométrico

Junto a tu compañera o compañero investiga qué tipo de transformación ha sufrido la siguiente figura geométrica en el plano cartesiano.



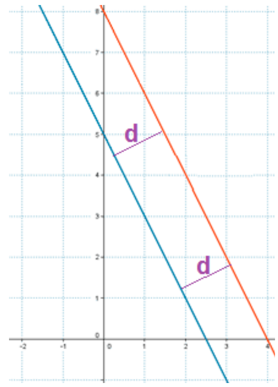
Reto cartesiano

De la siguiente figura, deduce ¿cuántas rectas paralelas y perpendiculares existen?

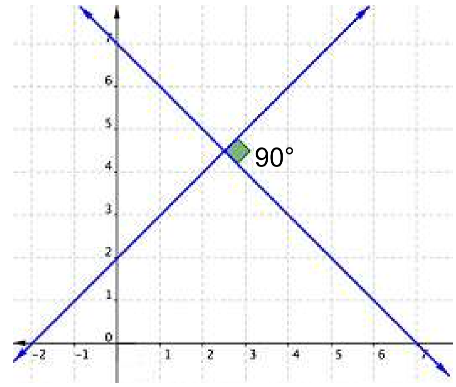
Fuente:https://oboi-3d.ru/image/data/carpet/detskie/ves-yolye-dorozhki/CPDT-033.jpg

5. Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas cuando no se cortan y tienen la misma distancia en cualquier punto; son perpendiculares cuando se cortan formando un ángulo recto.



Son paralelas:
$l_1 \parallel l_2$



Son perpendiculares:
$l_1 \perp l_2$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios

1) Hallamos la distancia entre los puntos:
a) $A(-2,3), B(5,3)$ b) $C(-2,-3),\ D(-2,5)$ c) $E(4,0),\ F(0,0)$

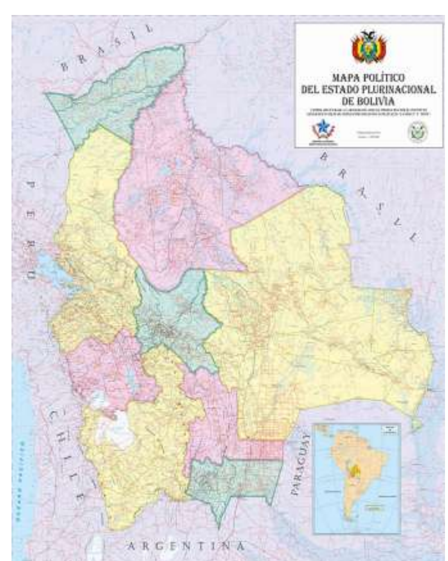
2) Del polígono formado por los puntos $A(2,3), B(-2,3), C(-1,-1), D(2,-1)$ halla la gráfica del otro polígono resultante de multiplicar por 2 a cada punto.

3) Trazamos dos rectas paralelas y dos perpendiculares, luego en cada par de intersección medimos las distancias. Después de comparar los resultados, elaboramos una conclusión..

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Ubicación de un punto en el sistema de coordenadas geográficas**,** para ubicar un lugar en dicho sistema, primero debemos identificar la línea del Ecuador y los paralelos, estas líneas imaginarias dividen a la tierra en latitudes tanto hacia el norte como al sur, se expresa en grados; se trazará una línea horizontal que pasa por el punto que se desea ubicar. En segundo lugar, identificamos el meridiano de Greenwich y la distancia de este meridiano a otro se denomina longitud y se expresa en grados de 0° a 180°, se traza una línea vertical por el punto que se quiere ubicar.

La intersección de ambas líneas nos dará la ubicación que se busca y se expresará como: latitud norte o sur, longitud este u oeste.



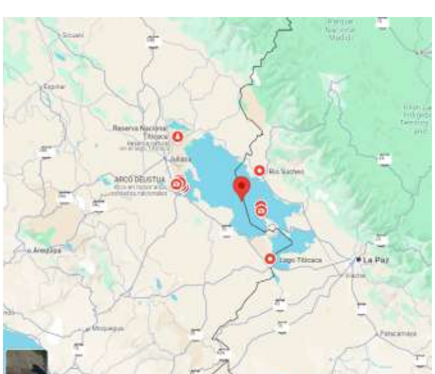
Fuente:https://www10.igmbolivia.gob.bo/wp-content/uploads/2022/07/politico.jpg

Ejemplo:

Hallamos la ubicación geográfica del lago Titicaca.

Trazamos una recta horizontal como se observa en el mapa de la derecha, luego trazamos otra línea vertical que también pase por el lago Titicaca. La intersección de dicha línea es la coordenada geográfica del lago:

Latitud: 16° S
Longitud: 69° O



16"00'00'.0"S 69"00'00.0"W

Ahora verificamos, ingresando al buscador del celular o de computadora, anotemos en Google Maps las coordenadas halladas en el sistema de coordenadas geográficas y se situará en el punto buscado, con el símbolo de objeto ubicado nos señala el lago Titicaca.

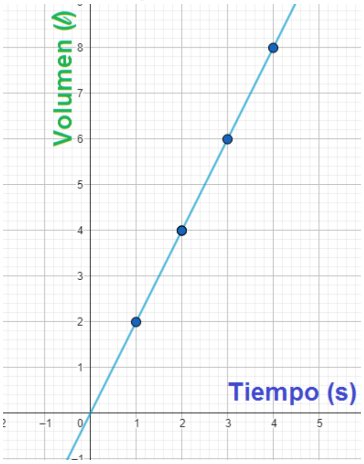
Ejemplo:

Se está llenando un tanque de agua, de tal manera que cada segundo se aumenta 2 litros de agua, se tiene registrado del primer al cuarto segundo en el siguiente cuadro. Representamos la información en el plano cartesiano.

Tiempo	$1\ [s]$	$2\ [s]$	$3\ [s]$	$4\ [s]$
Volumen	2 litros	4 litros	6 litros	8 litros

Formamos los pares ordenados de la información obtenida de la tabla, luego graficamos las coordenadas para unir los puntos y así obtendremos la representación gráfica de dicho fenómeno.

Tiempo	$1\ [s]$	$2\ [s]$	$3\ [s]$	$4\ [s]$
Volumen	2 litros	4 litros	6 litros	8 litros
Pares	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(3, 6)$	$(4, 8)$



Bolivia

Existe varias formas de expresar las coordenadas geográficas, por ejemplo, la latitud y longitud de Bolivia puede ser expresada por:
Estándar decimal simple
−16.290 154 −63.588 653
Grados decimales (GD)
16.2902° *S* 63.5887° *O*
Grados, Minutos Decimales (GMD) 16°17.409' *S* 63°35.319' *O*
Grados, Minutos y Segundos (GMS) 16°17'24.6'' *S* 63°35'19.2'' *O*

VALORACIÓN

También se encuentran planos y coordenadas en el GPS. El GPS no muestra coordenadas cartesianas, aunque en la pantalla del celular podamos ver un plano, la tierra es esférica y el GPS se geo localiza utilizando satélites sobre la superficie de la tierra. Los valores que utiliza el GPS son los de la latitud (lo mucho o poco que estemos al norte o al sur del ecuador), y la longitud (que mide si estamos al este o al oeste del meridiano de Greenwich).

En clases, conversamos y debatimos sobre cómo los sistemas de coordenadas ayudan a nuestra comunidad en el diario vivir y al desarrollo social, cultural productivo y tecnológico.

____

____

____

PRODUCCIÓN

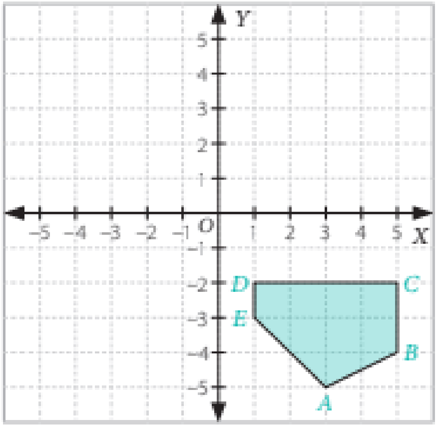
Producción práctica: Resolvamos los siguientes ejercicios y problemas.

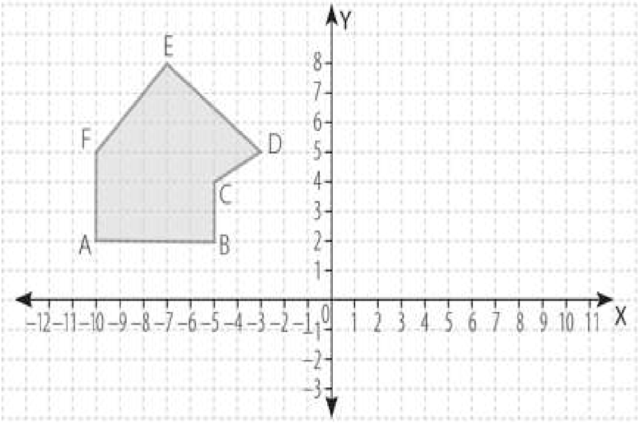
1) Gráficamos el siguiente polígono: $A(-4,\ 6);\ B(3, 2);\ C(-7,\ -4);\ D(6,\ -6)$

2) Identificamos el nombre de las siguientes figuras que se dan en el plano cartesiano:

a) $A(2, 3);\ B(1, 5);\ C(-3, -1)$ b) $P(4, 2);\ Q(-2, 2);\ R(-2, -2);\ S(4,\ -2)$

3) En el siguiente plano cartesiano, trasladamos la figura del tercer cuadrante a los otros cuadrantes, de igual manera trasladamos la figura del segundo cuadrante al primer cuadrante, indicando las coordenadas en cada cuadrante.





REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

LOS NÚMEROS ENTEROS Y SU ORIGEN EN NUESTRO CONTEXTO

El conjunto de los números enteros

1) Un edificio cuenta con 7 plantas y 4 sótanos, exprese el conjunto de números enteros correspondiente a los pisos o plantas del edificio.

2) Ordena de forma creciente las siguientes cifras: 34, 56, −2, 3, −10, 31, −21, −33, 98, −100, 78, −25, 0, 27.

3) En la ciudad de Oruro, la temperatura cambió de 3°C bajo cero a 17°C, exprese con números enteros la variación de temperatura.

Orden de los $\mathbb{Z}$ y su representación numérica

4) Represente los siguientes números en la recta numérica: 3, 5, −2, 1, −10, 11, 2, −3, 9, −1, −8, −5, 0, 7.

5) En un sorteo, Juan ganó 10 Bs, Aneth perdió 3 Bs, Luís se endeudó 5 Bs, Mario no ganó ni perdió y Delma extravió su moneda de 2 Bs; represente dichas cantidades en la recta numérica y ordene de menor a mayor.

6) Registre todas medidas de las montañas más altas de Bolivia, luego represente en una recta numérica y ordene de mayor a menor.

7) Escriba <,> o = en cada espacio.

$-3\_\_\_+3$ $\quad |-10|\_\_\_|+10|$ $\quad -15\_\_\_0$ $\quad |-4|\_\_\_0$ $\quad 0\_\_\_-1$

Valor absoluto

8) Halla el valor de: $|-4|+|-2|+|+3|-|-5|=$

9) Encuentra el valor de: $-|-1|+|-3|-|-2|-|+6|-|+8|-|-9|=$

LOS NÚMEROS ENTEROS Y SU ORIGEN EN NUESTRO CONTEXTO

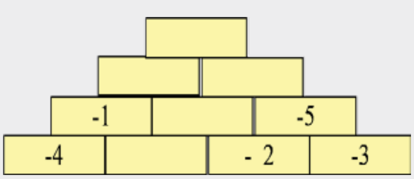
Operaciones con números enteros aplicados a la cotidianidad

1) Completa con los números adecuados para hacer cumplir las igualdades.

$-23+\_\_=0$ $\quad \_\_+(-35)=28$ $\quad \_\_+13+7=0$ $\quad -35+\_\_+5=-100$

2) Para ir de paseo las y los estudiantes de 4º de secundaria, llevan 24 naranjas, 48 plátanos y 60 dulces, si cada 6 naranjas costaron Bs. 2, cada 4 plátanos Bs. 1 y cada 3 dulces 50 ctvs., ¿cuánto gastaron en total?

Reto matemático



Completa la pirámide con los números adecuados de modo que cada ladrillo sea la suma de los dos de abajo.

Adición y sustracción

3) $45+37-87+124-76+28-46=$

4) $1+(7-3)-(8-2)+(17+3)-(21-10)=$

5) $12+(17-4)-(18-10)+(23+2)-(31-11)=$

6) $-(37+2)-(15-7)+(33+12)-10=$

7) $100-(34-5)-(4+3-56)+(45-20)=$

8) $45+(3+4-2)-(46-45+8)+(35-29)=$

Cálculo con signos de agrupación

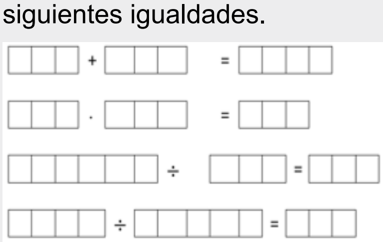
9) $6+\{-5-[4+10+(-3+5-1)]-7+12\}=$

10) $30+[-1-\{8-2-(6-28-15)+5+(-3+1-13)\}]=$

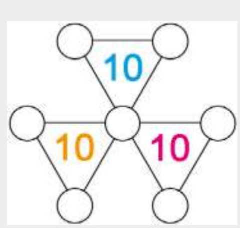
11) $5+(9-1-6)+\{2-(3-7+5)-[6-4-(12-20-21)]+15\}=$

Razonamiento matemático

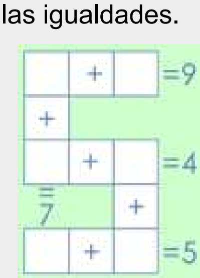
Coloca letras que representen números para hacer cumplir las siguientes igualdades.



Coloca las cifras del 1 al 7 sin repetir de modo que sumando de los números de referencia.



Coloca cifras adecuadas para que nos de las igualdades.



12) Realiza la siguiente multiplicación de números enteros:

a) $(+3)\cdot(-7)=$ d) $(+13)\cdot(-10)=$ g) $(-5)\cdot(-9)=$
b) $(+10)\cdot(+20)=$ e) $(+7)\cdot(-9)=$ h) $(-20)\cdot(-20)=$
c) $(-4)\cdot(-8)=$ f) $(+15)\cdot(-40)=$ i) $(-8)\cdot(+8)=$

13) Encuentra los resultados de las siguientes divisiones:

a) $144\div 9=$ d) $-405\div(-5)=$ g) $126\div\ =6$
b) $-55\div 11=$ e) $(-256)\div(-16)=$ h) $-125\div 25=$
c) $230\div 23=$ f) $(-2)\div(-5)=$ i) $(-220)\div(-44)=$

Operaciones combinadas

14) $(3+2-1)\cdot(1+4-2-7)-(-1-4+6)\cdot(7+8-9+4-1-2+4)=$

15) $2\cdot(13+5-12)+(-2)\cdot(6-5+7-8+2)+3\cdot(5+7-9)=$

16) $2-(5+4-3)+2\cdot(3+5\cdot 2-10)+12\div(8+12-14)=$

17) $9\cdot 4\div 6-4\cdot(12-3\cdot 6-2)+(4+6\cdot 5-3\cdot 6)-12-7\cdot(8-5-6)=$

18) $120\div 2\div 6+(20\div 5\cdot 4-3\cdot 6)-10\cdot 2+(5\cdot 6\div 3)-(-12-7\cdot 4-6)+(17-15)=$

19) $120\div(23+7-10)-5\cdot(18-20)+(14+25-42)\cdot(2-9+4)-15=$

Operaciones con raíces y potencias

20) Encuentra el resultado de las siguientes potencias:

a) $5^2-3^2-4^2=$ d) $6^2-3^3-2^3+1^4=$ g) $(-1)^2+(-3)^2-2^2=$

b) $(-1)^2\cdot(-4)^2\cdot(-4)^2=$ e) $(-2)^3\cdot(-3)^3=$ h) $4^3-3^4+5^2-2^3=$

c) $3^2-2^2-(-4)^3=$ f) $5^2-3^3-(-2)^3+1^7=$ i) $4^4-4^3+4^2-4^1=$

21) Determina el resultado de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{625\div 25}=$ d) $\sqrt{5\cdot 3+3\cdot 18-5}=$ g) $\sqrt{15\cdot 3-3\cdot 2-3}=$
b) $\sqrt{111-11}=$ e) $\sqrt{80\div 5+42\div 7-60\div 10}=$ h) $\sqrt[3]{123-50-9}=$
c) $\sqrt{34+50-3}=$ f) $\sqrt{200-16\div 4}=$ i) $\sqrt[4]{2\cdot 3-4\cdot 1+10+2^2}$

22) $1-\sqrt{25+25+31}-3^2+4^3+\sqrt{27+9}+(5-2)^2-(-2)^6=$

23) $\sqrt{169}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{144}\div(3\cdot 2^2)-6\cdot\sqrt{25+11}+\sqrt[3]{512}-2^3\cdot 5\div\sqrt{90+10}-\sqrt[3]{8}=$

24) $7\cdot 5+\sqrt{70+11}+\sqrt[3]{64}-\sqrt{256}-\sqrt{100}-\sqrt[3]{216}-\left(\sqrt{36}+\sqrt{90+9+1}-\sqrt{10+6}\right)=$

25) $\sqrt{27+9}+\sqrt{144}+\left(3^2-\sqrt{49}\right)^2-\sqrt{72+9}-10\div\sqrt{80+20}-10\cdot 2\div 2^2-\sqrt[3]{729}=$

26) $1^9+(6+2^2-2^3)^2+(3^2-1)-\sqrt{36}\cdot\left(\sqrt{144}\div\sqrt{36}-\sqrt{1}\right)^4+\sqrt{144}\div\left(5^2-\sqrt{121}-\sqrt{100}\right)=$

27) $17\cdot\sqrt{4}+\sqrt{800-175}-\sqrt{40-4}\cdot\left(\sqrt{144}\div 2\right)-\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{512}+10\cdot\sqrt{10+6}\div(3^2-1)+\sqrt{25}=$

28) $(10\cdot 4+3^2)-\sqrt{49}\cdot\sqrt{20-4}-\sqrt{121}\cdot\sqrt[3]{8}-3^4\div(2^3+1)-\sqrt{120-20}\cdot\sqrt{5-4}+\sqrt{360+40}=$

29) $\sqrt{3^2-5}+2\cdot\sqrt{576}\div\sqrt{36}-5\cdot\sqrt[3]{-8}\cdot 2^2-\sqrt{144}-6\cdot\sqrt{16}+2^6\div\sqrt{16}+\sqrt{225}\cdot(-2)^3\div\sqrt{16}=$

30) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{121-21}+(3-5)^2+(2^2+1)^2-(3^2-1)+\sqrt{250+10-4}-\sqrt{90+5+5}-\sqrt[3]{1000}=$

GEOMETRÍA

Operaciones con segmentos

1) En la siguiente figura cada cuadradito representa 1 unidad, halla las siguientes operaciones con segmentos:

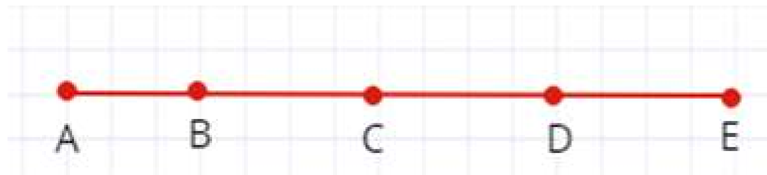
a) $\overline{BC}+\overline{DE}=$

b) $\overline{AD}-\overline{CE}=$

c) $\overline{AD}+\overline{BE}-\overline{CD}=$

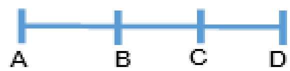
d) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=$

e) $\overline{AB}+\overline{CE}-\overline{BC}-\overline{DE}=$

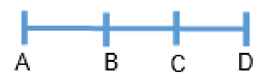


2) Encuentra la longitud de los siguientes segmentos.

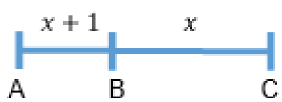
a) Si $\overline{AB}=3, \overline{BC}=5$ y $\overline{AD}=10$ calcula $\overline{CD}$



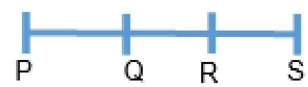
d) Si $\overline{AC}=\overline{BD}=5$ y $\overline{AD}=8$ halla $\overline{BC}$



b) Calcula el valor de x, si $\overline{AC}=11$



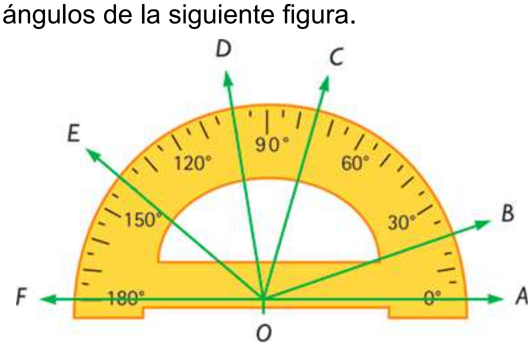
e) Si $\overline{PR}=\overline{QS}=7$ y $\overline{PS}=10$ halla $\overline{QR}$



Operaciones con ángulos

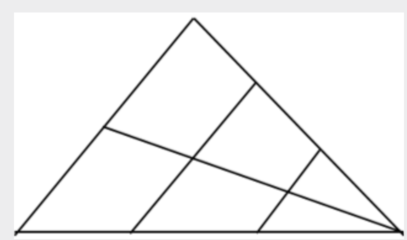
3) Gráfica los siguientes ángulos: 30º,70º,125º,189º,230º

4) Identifica los ángulos de la siguiente figura.



Reto matemático

Cuántos triángulos hay en la siguiente figura.



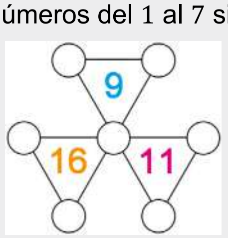
5) Encuentra correctamente el resultado de las siguientes operaciones con ángulos.

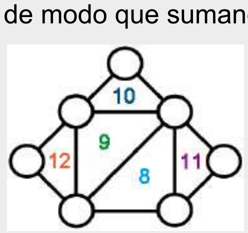
$$\begin{array}{rrr} 23^\circ & 15' & 38'' \\ +\ 57^\circ & 51' & 12'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 83^\circ & 45' & 38'' \\ +\ 17^\circ & 21' & 42'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 93^\circ & 15' & 38'' \\ -\ 57^\circ & 51' & 12'' \\ \hline \end{array}$$

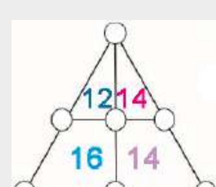
$$\begin{array}{rrr} 103^\circ & 35' & 18'' \\ -\ 11^\circ & 43' & 42'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 32^\circ & 22' & 35'' \\ \times & & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 36^\circ & 42' & 50'' \\ \times & & 6 \\ \hline \end{array}$$

Razonamiento matemático

Coloca los números del 1 al 7 sin repetir, de modo que sumando nos de las cifras de referencia.







REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FORMAS

Plano cartesiano

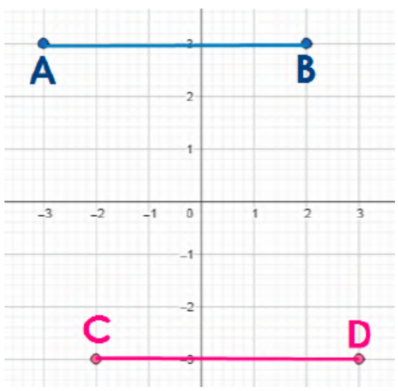
1) Representa los siguientes puntos en el plano cartesiano:

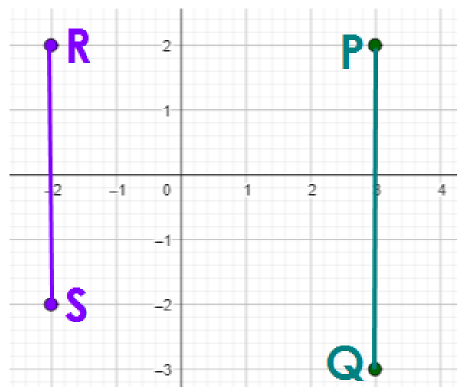
a) $(1, 8); (3, 1); (-2, 0); (1, -5); (-3, 5)$
b) $(-4, 2); (-3, -1); (0, -9); (1, 2); (-1, 9)$
c) $(1, -3); (-1, -4); (2, 5); (4, 1); (-3, 1); (-5; 5)$
d) $(5, -6); (-6, -3); (4, 1); (-1, -3); (2, -5); (5, 4)$
e) $(-5, 0); (-3, -2); (0, -2); (3, -4); (-2, 1);\ (4, 3)$

2) Indica si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares.

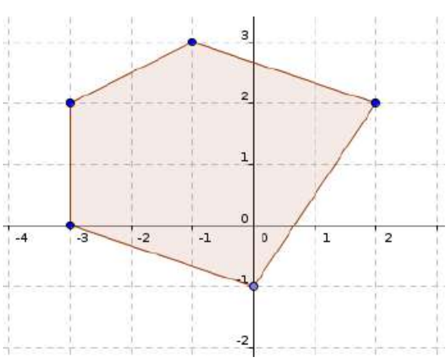
a) La recta $\overrightarrow{AB}$ y la recta $\overrightarrow{CD}$ que pasa por los puntos $A(-6{,}6); B(2{,}10)$ y $C(-8,-2); D(4{,}6)$
b) La recta $\overrightarrow{DE}$ y la recta $\overrightarrow{FG}$ que pasa por los puntos $D(6{,}0); E(-6{,}6)$ y $F(8{,}4); D(4{,}6)$
c) La recta $\overrightarrow{MN}$ y la recta $\overrightarrow{OP}$ que pasa por los puntos $M(4{,}4); N(6{,}6)$ y $O(4{,}2); P(2{,}4)$
d) La recta $\overrightarrow{AB}$ y la recta $\overrightarrow{CD}$ que pasa por los puntos $A(4{,}0); B(2{,}4)$ y $C(0{,}2); D(-2{,}6)$
e) La recta $\overrightarrow{DE}$ y la recta $\overrightarrow{FG}$ que pasa por los puntos $D(4{,}0); E(-4{,}2)$ y $F(0{,}2); D(-8{,}4)$

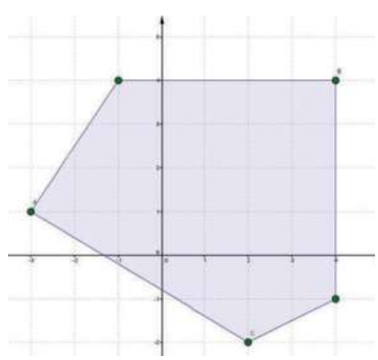
3) Halla las distancias horizontales y verticales de las siguientes rectas:

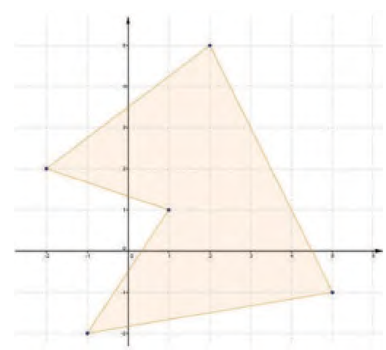




4) Identifica los puntos de las siguientes figuras geométricas ubicadas en el plano cartesiano.

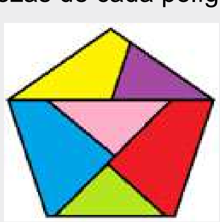


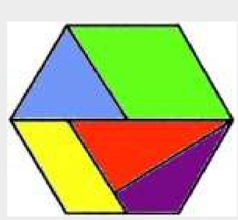


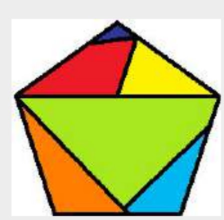


Razonamiento matemático

Con todas las piezas de cada polígono, arma un cuadrado.







LOS NÚMEROS RACIONALES

PRÁCTICA

Entre Gisela y Mayela, ambas estudiantes de 1º de secundaria, se ponen de acuerdo en realizar ciertas actividades durante un día. Gisela estudia 5 horas, destina 2 horas para alimentarse, se recrea 3 horas, hace sus tareas escolares en 4 horas, mira televisión 1 hora y duerme 9 horas. Mayela estudia 6 horas, destina 1 hora para alimentarse, 3 horas para recrearse, utiliza 4 horas para realizar sus tareas escolares, mira televisión 1 hora y duerme 9 horas.

Estas actividades se pueden expresar como fracciones sabiendo que el día tiene 24 horas. En algún momento de nuestras vidas nos organizamos para realizar ciertas actividades y para ello destinamos ciertas horas.

Fuente:https://bayanbox.ir/view/2662869597494788425/13.jpg

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en función de la lectura anterior:

- ¿Cómo organizaron sus actividades en función de las 24 horas?
- ¿Crees que es necesario tener horarios para realizar ciertas actividades en el día a día?
- ¿En qué actividades de la vida diaria se pueden emplear los números racionales?

____

____

TEORÍA

Acertijos fraccionarios

- *Soy menos de 3 enteros. Soy más que un entero. Puedes hacerme de 3 mitades. ¿Quién soy?*
- *¿Cuánto es la mitad de la cuarta parte de 12?*
- *¿Cuánto es la tercera parte de la tercera parte de 27?*
- *¿Cuál es la fracción que es igual a un medio de la mitad de un cuarto?*
- *Si tengo medio litro de jugo y lo vierto en dos vasos iguales, ¿cuántos mililitros habrá en cada vaso?*
- *¿Cómo se puede repartir una torta en 8 partes con solo 3 cortes?*

Fuente:https://www.freepik.es/fotos-premium/pastel-chocolate-glaseado-chocolate-virutas-chocolate_40692794.htm

1. Origen de los números racionales

Las matemáticas nacieron por la necesidad de contar, operar, repartir y otras actividades que el hombre consideraba importante para realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. En cierto momento surgió la necesidad de repartir un pan en varios pedazos para compartir entre todos y los egipcios fueron una civilización que utilizaron fracciones para resolver problemas de repartición de alimentos entre varios hombres, de la misma manera los babilonios empleaban fracciones cuyo denominador era potencia de 60.
Los números racionales son importantes en la vida cotidiana para realizar compras o ventas de productos agrícolas, productos cárnicos, productos lácteos, repartir un pastel en un cumpleaños, repartir una pizza o repartir una fruta en partes iguales además de ser importante en otras actividades que se desarrollan de manera habitual.

2. El conjunto de los números racionales

Se considera número racional a todo número que se representa como el cociente de dos números enteros, con denominador diferente de cero, se expresa como fracción de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b}; b \neq 0}$$

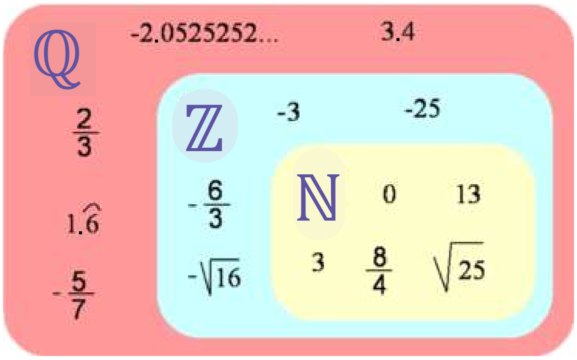
Donde a y b son números enteros y b es diferente de cero.
Simbólicamente se representa:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$$

Algunos ejemplos de números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{\ldots, -\frac{3}{5}, \ldots, -1 \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, 0, \ldots \frac{3}{4}, \ldots 1, \ldots 1\frac{1}{3}, \ldots 3, \ldots\right\}$$

Ahora veremos los números racionales:

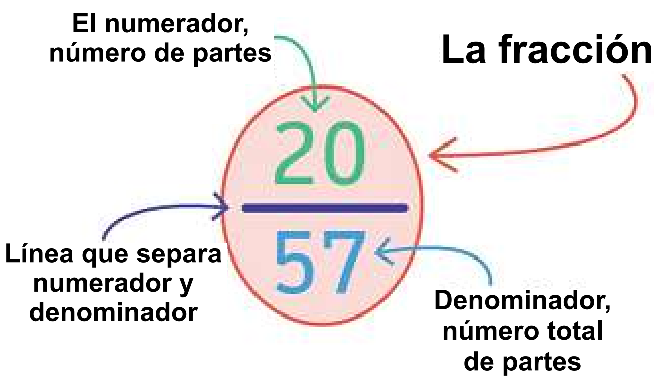


Recuerda

Los números naturales ℕ comprenden todos los números positivos.
Los números enteros ℤ comprenden todos los números negativos, el cero y los números positivos.
Los números racionales ℚ comprenden a todos los números representados como una fracción.

Elementos de la fracción

Toda fracción tiene los siguientes elementos; numerador, línea de fracción y denominador.
Las fracciones se emplean para mostrar las partes de un todo.



Numerador, es el número de partes seleccionadas y está ubicada en la parte superior de la fracción.

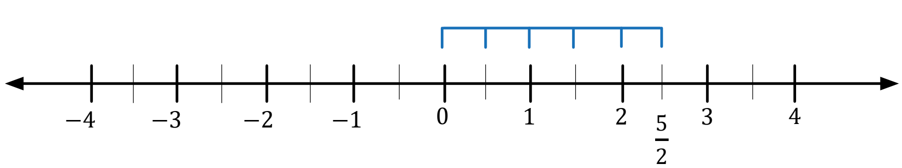
Denominador, es el número de partes iguales en la que se divide la unidad y se encuentra en la parte inferior de la fracción.

3. Los números racionales en la recta numérica

Para representar un número racional $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, es necesario dividir cada unidad en b partes iguales y se toman a de esas partes.

Ejemplo:

Representamos en la recta numérica el número racional $\frac{5}{2}$



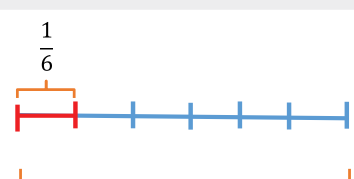
Para tomar en cuenta

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando, en cuenta estos hechos se utilizara el punto decimal como separador. Ejemplo:

$3.14;\ 0.71;\ -0.5;\ ....$



Actividad

Representa los siguientes números racionales, en la recta numérica:

1) $\frac{1}{3}$	**4)** $\frac{3}{7}$	**7)** $\frac{9}{2}$	**10)** $\frac{7}{8}$	**13)** $\frac{8}{3}$	**16)** $-\frac{5}{8}$
2) $-\frac{2}{3}$	**5)** $-\frac{3}{5}$	**8)** $-\frac{1}{9}$	**11)** $-\frac{3}{6}$	**14)** $-\frac{7}{2}$	**17)** $1\frac{3}{8}$
3) $1\frac{3}{4}$	**6)** $2\frac{1}{5}$	**9)** $-2\frac{1}{8}$	**12)** $3\frac{5}{6}$	**15)** $-4\frac{2}{7}$	

Todo por igual

¿Cómo dividir una manzana en tres partes iguales?

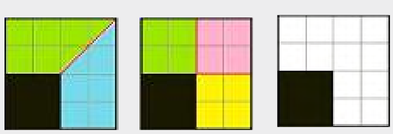
Dato

Una de las aplicaciones de las fracciones en música es en la lectura del pentagrama donde existen notas de tres cuartos.

Reto matemático

Como podemos pintar la tercera figura para seguir la secuencia de las dos primeras.

Misma área y forma



2 **3** **4?**

4. Representación gráfica y relación de orden de los números racionales

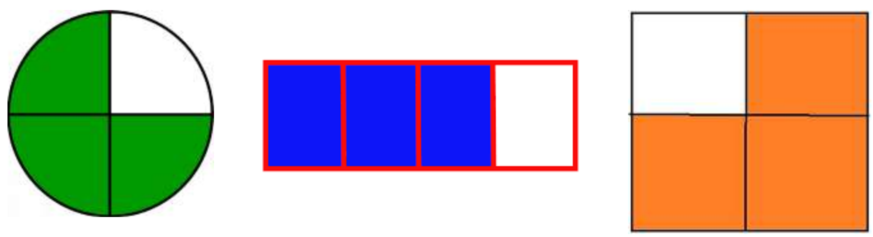
Para representar gráficamente los números racionales se emplean figuras geométricas, generalmente se utilizan los rectángulos o circunferencias, pero es posible el empleo de otras figuras geométricas como el triángulo, el hexágono, entre otros.

Ejemplo:

Realizamos la representación del número racional.

Para representar el número racional seguiremos los siguientes pasos: $\frac{3}{4}$

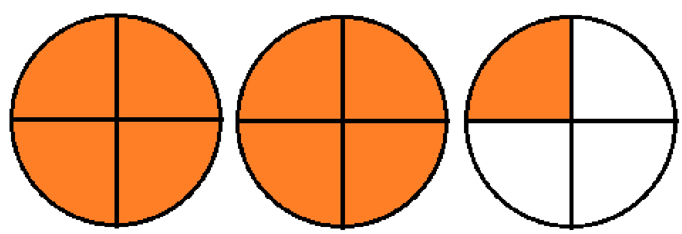
- Dibujamos una circunferencia, un rectángulo o un cuadrado, vemos que el denominador es 4, por tanto, lo dividimos entre 4.
- Como el numerador es 3, pintamos 3 partes.
- La parte coloreada es $\frac{3}{4}$



Ejemplo:

Realizamos la representación gráfica del número racional $2\frac{1}{4}$

Representamos la parte entera con dos círculos coloreados y un tercer círculo lo dividimos en cuatro partes iguales y pintamos una parte.

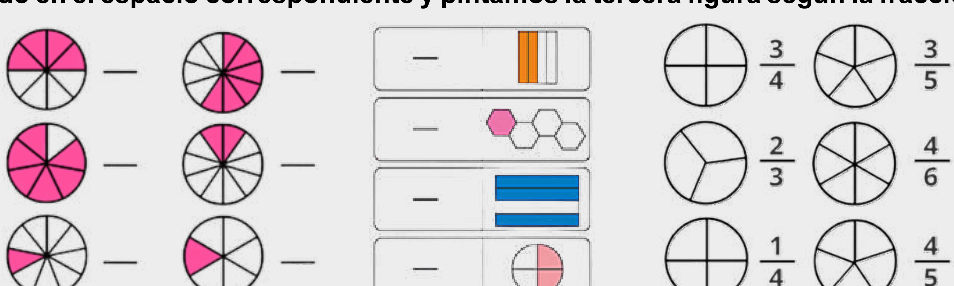


Actividad

1) Representamos gráficamente mediante figuras geométricas los siguientes números racionales:

a) $\frac{5}{6}$	c) $\frac{5}{9}$	e) $\frac{2}{8}$	g) $\frac{1}{5}$	i) $1\frac{2}{3}$	k) $1\frac{3}{7}$
b) $\frac{3}{4}$	d) $\frac{4}{7}$	f) $\frac{3}{10}$	h) $\frac{2}{3}$	j) $2\frac{1}{4}$	l) $3\frac{1}{2}$

2) Identificamos la fracción representada en las dos primeras figuras de cada fila, escribimos el resultado en el espacio correspondiente y pintamos la tercera figura según la fracción nos indique.



5. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción significa convertirla en otra fracción equivalente más simple, cuyo numerador y denominador sean primos entre sí, reduciéndolos a su más mínima expresión mediante la división, debemos tomar en cuenta que para simplificar tanto el numerador como el denominador se divide por el mismo número.

Fracción equivalente

Son aquellas fracciones que representan la misma cantidad aunque el numerador y el denominador sean diferentes. Son equivalentes, si el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, es igual al producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

En símbolos tenemos:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c}$$

Ejemplo:

Comprobamos si las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{3}{5}=\frac{9}{15}\quad\Rightarrow\quad 3\cdot 15=9\cdot 5$$

$$\boxed{45=45}$$

Ejemplo:

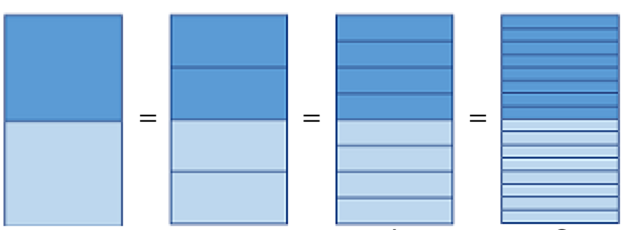
Averigüemos si las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{2}{7}=\frac{4}{6}\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 6=7\cdot 4$$

$$\boxed{12\neq 28}$$

Las fracciones dadas en este ejemplo no son equivalentes.

Ejemplo: Veamos si las siguientes fracciones son equivalentes.



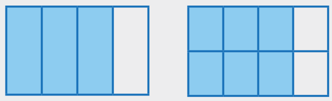
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$$

A simple vista y tomando en cuenta las fracciones, se dice que las fracciones son equivalentes.

Errores al simplificar

1. *Un error común al simplificar es dividir el numerador por un número y el denominador por otro número diferente.*
2. *Otro error común, es no simplificar a su mínima expresión, es decir, simplificar la fracción hasta que no se pueda.*
3. *Tomando en cuenta que puedes simplificar usando números primos o números compuestos, otro error común es querer dividir solo por 2, 3, 4, 5 y 6, ya que para simplificar fracciones a su más mínima expresión en ocasiones es necesario dividir por números grandes como 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 …*

Toma nota



$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$3\cdot 8=6\cdot 4$$

$$24=24$$

$$\frac{3}{4}\ y\ \frac{6}{8}$$

Son fracciones equivalentes

Actividad

1) Comprobamos si las siguientes fracciones son equivalentes:

a) $\frac{4}{7}=\frac{16}{28}$ b) $\frac{5}{8}=\frac{40}{64}$ c) $\frac{3}{11}=\frac{6}{22}$ d) $\frac{7}{9}=\frac{35}{55}$

2) Multiplicamos y dividimos por la cantidad indicada, tanto el numerador como el denominador de la fracción para encontrar fracciones equivalentes:

a) $\frac{7^{\cdot 6}}{9_{\cdot 6}}=$ d) $\frac{5^{\cdot 3}}{6_{\cdot 3}}=$ g) $\frac{8^{\cdot 3}}{13_{\cdot 3}}=$ j) $\frac{11^{\cdot 2}}{23_{\cdot 2}}=$

b) $\frac{5^{\cdot 7}}{9_{\cdot 7}}=$ e) $\frac{33^{\cdot 4}}{25_{\cdot 4}}=$ h) $\frac{14^{\div 7}}{35_{\div 7}}=$ k) $\frac{42^{\div 3}}{15_{\div 3}}=$

c) $\frac{44^{\div 11}}{77_{\div 11}}=$ f) $\frac{48^{\div 8}}{80_{\div 8}}=$ i) $\frac{120^{\div 10}}{130_{\div 10}}=$ l) $\frac{55^{\div 11}}{66_{\div 11}}=$

Para simplificar o reducir una fracción, es importante tomar en cuenta los criterios de divisibilidad, ya que se tiene que dividir el numerador y el denominador por los factores comunes que tienen ambos números, otro método para simplificar es el de utilizar divisiones sucesivas hasta convertirlos en números primos entre sí.

Criterios de divisibilidad

Para simplificar fracciones debemos tener en cuenta los criterios de divisibilidad.

Por ejemplo:

$$\frac{24}{108} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{12}{54} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{6}{27} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{2}{9}$$

Ejemplo:

Simplifiquemos la siguiente fracción.

$\frac{20}{24} =$ Sacando mitades a ambos números, tenemos: $\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{24}^{12}} = \frac{10}{12}$

Seguimos simplificando con mitades: $\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{12}^{6}} = \frac{5}{6}$

Ejemplo:

Simplifiquemos la siguiente fracción.

$\frac{45}{60} =$ Sacando terceras a ambos números, tenemos: $\frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{60}^{20}} = \frac{15}{20}$

Seguimos simplificando con quintas: $\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{20}^{4}} = \frac{3}{4}$

Ahora apliquemos el método de divisiones sucesivas:

Ejemplo:

Simplifiquemos las siguientes fracciones.Para simplificar mediante divisiones sucesivas debemos tomar en cuenta los criterios de divisibilidad (división por 2, 3, 5, etc.)

$$\frac{50}{60} = \frac{50 \div 2}{60 \div 2} = \frac{25 \div 5}{30 \div 5} = \frac{5}{6} \qquad \frac{52}{44} = \frac{52 \div 2}{44 \div 2} = \frac{26 \div 2}{22 \div 2} = \frac{13}{11}$$

$$\frac{36}{24} = \frac{36 \div 2}{24 \div 2} = \frac{18 \div 2}{12 \div 2} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2} \qquad \frac{34}{51} = \frac{34 \div 17}{51 \div 17} = \frac{2}{3}$$

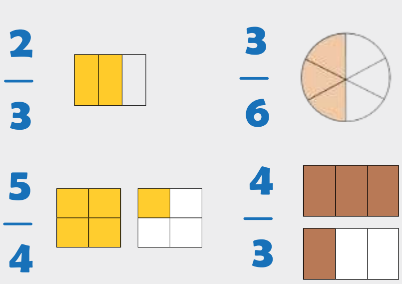
Actividad

Simplificamos las siguientes fracciones por el método que más convenga:

1) $\frac{10}{12} =$	**5)** $\frac{17}{51} =$	**9)** $\frac{60}{88} =$	**14)** $\frac{25}{75} =$
2) $\frac{12}{16} =$	**6)** $\frac{18}{54} =$	**10)** $\frac{36}{81} =$	**15)** $\frac{35}{55} =$
3) $\frac{30}{48} =$	**7)** $\frac{48}{120} =$	**11)** $\frac{75}{150} =$	**16)** $\frac{33}{121} =$
4) $\frac{66}{78} =$	**8)** $\frac{30}{45} =$	**12)** $\frac{27}{243} =$	**17)** $\frac{100}{90} =$

6. Fracciones propias, impropias y mixtas

Propia e impropia



Fracciones propias. Son aquellas fracciones cuyo numerador es menor que el denominador: $n<d$

Las siguientes fracciones son propias ya que los numeradores son menores a los denominadores.

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{7}{10}, \frac{3}{13}, \frac{1}{5}, \frac{4}{9}, \frac{8}{21}$$

Fracciones impropias. Son fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador: $n>d$

Las siguientes fracciones son impropias ya que los numeradores son mayores a los denominadores.

$$\frac{5}{4}, \frac{15}{11}, \frac{9}{7}, \frac{17}{8}, \frac{12}{5}, \frac{16}{13}, \frac{4}{3}, \frac{7}{2}$$

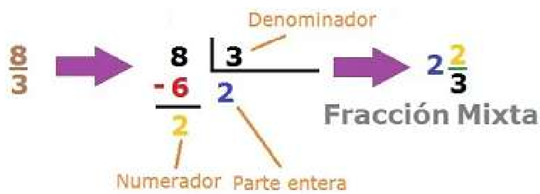
Fracciones mixtas. Las fracciones impropias son las que dan origen a los llamados números mixtos o fracciones mixtas, porque constan de una parte entera y una parte fraccionaria propia.

Las siguientes fracciones son mixtas porque tienen una parte entera y otra fraccionaria.

$$1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{3}, -1\frac{4}{7}, -3\frac{7}{8}, 4\frac{2}{5}, 5\frac{5}{7}, -1\frac{4}{13}, -2\frac{17}{21}$$

Conversión de fracción impropia a mixta

Para convertir una fracción impropia a una fracción mixta, se divide el numerador entre el denominador. El cociente será la parte entera del número y el residuo será el numerador de la fracción restante y así tendremos la fracción mixta.



Conversión de fracción mixta a impropia

Para convertir una fracción mixta a fracción impropia, debemos multiplicar la parte entera por el denominador, este resultado se suma al numerador, este número se copia al numerador manteniendo el denominador.

$$a\frac{n}{d} = \frac{a \cdot d + n}{d} \quad \Longrightarrow \quad 1\frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

Tipos de fracciones

Fracciones aparentes, *son aquellas fracciones en las que el numerador es igual al denominador o es un múltiplo de este. Ejemplos:*

$$\frac{3}{3} = 1; \frac{10}{5} = 2; -\frac{20}{5} = -4$$

Toda fracción aparente tiene como denominador 1.

$$\frac{1}{1}; \quad \frac{2}{1}; \quad \frac{4}{1}; \quad -\frac{5}{1}$$

Fracciones homogéneas o semejantes, *son fracciones que tienen un mismo denominador.*

$$\frac{1}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad -\frac{2}{5}; \quad 1\frac{4}{5}; \quad -2\frac{1}{5}$$

Fracciones heterogéneas o no semejantes, *son fracciones que tienen diferentes denominadores.*

$$\frac{2}{7}; \frac{5}{9}; -\frac{4}{11}; 1\frac{2}{13}; -2\frac{1}{6}$$

Actividad

1) Convertimos las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas:

a) $\frac{6}{5} =$ **b)** $\frac{13}{4} =$ **c)** $\frac{17}{5} =$ **d)** $\frac{13}{2} =$ **e)** $\frac{24}{7} =$ **f)** $\frac{56}{9} =$

2) Convertimos las siguientes fracciones mixtas a fracciones impropias:

a) $1\frac{2}{7} =$ **b)** $3\frac{1}{5} =$ **c)** $8\frac{5}{6} =$ **d)** $5\frac{1}{9} =$ **e)** $4\frac{3}{8} =$ **f)** $2\frac{3}{4} =$

3) Escribimos de forma directa las siguientes fracciones mixtas:

a) $1 + \frac{2}{9} =$ **b)** $8 + \frac{3}{4} =$ **c)** $5 + \frac{2}{3} =$ **d)** $3 + \frac{7}{8} =$ **e)** $2 + \frac{3}{5} =$ **f)** $-1 - \frac{2}{5} =$

VALORACIÓN

Las fracciones forman parte de nuestra vida cotidiana, ya que se encuentran presentes en múltiples situaciones. Por ejemplo, al dividir un pastel en partes iguales, al expresar porcentajes, o al indicar la hora, estamos utilizando conceptos de fracciones y números racionales.

Respondemos las preguntas acerca de la aplicación de los números racionales.

- ¿Por qué es importante el empleo de números racionales en nuestra vida cotidiana?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se pueden aplicar al emplear los números racionales?

PRODUCCIÓN

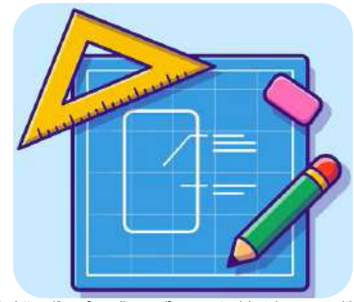
Buscamos en cualquier medio, noticias, artículos deportivos, científicos, culturales, tecnológicos o económicos donde se puede ver la aplicación de los números racionales.

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

PRÁCTICA

Aneth cuenta con Bs 200 para realizar algunas compras en la librería de su barrio, sobre material escolar para el segundo trimestre. Compra un libro con tres octavas partes de su dinero, un estuche geométrico con la quinta parte, un lápiz de color negro, azul y rojo con tres décimos y finalmente compra una goma de borrar con los siete décimos de su dinero.

Una vez finalizadas las compras retorna feliz porque aún tiene un saldo que puede disponer en sus gastos de la semana.



Fuente:https://img.freepik.com/free-vector/sketch-paper-with-pencil-ruler-eraser-cartoon_138676-2084.jpg?size=626&ext=jpg

Actividad

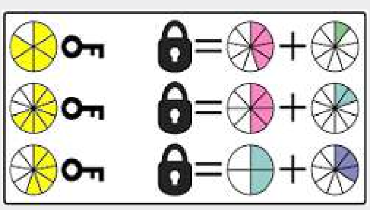
Respondemos las siguientes preguntas, tomando en cuenta el anterior problema:

- ¿Cuánto dinero gastó Aneth en las compras realizadas y cuánto es el saldo?
- ¿Cuánto cuesta cada objeto?
- ¿Crees que es necesario el uso y conocimiento de los números racionales para este tipo de problemas?
- ¿Qué operaciones aritméticas utiliza Aneth para saber el saldo que tiene de dinero?

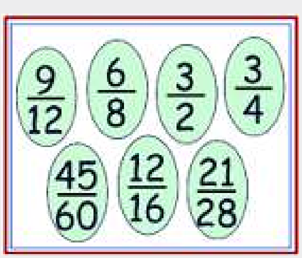
TEORÍA

Reto

1. *Mediante una línea, conecta cada llave con su candado para hacer cumplir las igualdades.*



2. *Descubre a la fracción intrusa.*



3. *Descubre la fracción que falta en las siguientes series de fracciones.*

1. Adición y sustracción de números racionales

En las operaciones de adición de números racionales existen dos casos en las que podemos sumar o restar fracciones:

- Adición de fracciones homogéneas o semejantes, cuando todas las fracciones tienen el mismo denominador.
- Adición de fracciones heterogéneas o no semejantes, cuando todas las fracciones tienen diferente denominador.

Adición y sustracción de fracciones homogéneas

Para sumar o restar dos o más fracciones homogéneas, se suman o se restan los numeradores manteniendo el denominador.
Simbólicamente tenemos:

$$\boxed{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}}$$

Ejemplo:

Sumamos y restamos las siguientes fracciones:

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$

2) $\frac{8}{5}+\frac{7}{5}=\frac{8+7}{5}=\frac{15}{5}=3$

3) $\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=\frac{5-2}{4}=\frac{3}{4}$

4) $\frac{13}{11}-\frac{2}{11}=\frac{13-2}{11}=\frac{11}{11}=1$

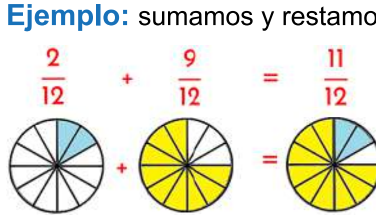
5) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+3+5}{4}=\frac{9}{4}$

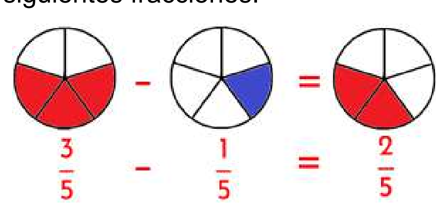
6) $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4+5+1}{7}=\frac{10}{7}$

7) $\frac{11}{6}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=\frac{11-1-5}{6}=\frac{5}{6}$

8) $\frac{3}{8}-\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3-2-1}{8}=\frac{0}{8}=0$

Ejemplo: sumamos y restamos las siguientes fracciones:





Adición y sustracción de fracciones heterogéneas

Para sumar y restar fracciones heterogéneas o no semejantes, se reducen los denominadores al común denominador (mínimo común múltiplo), se suman o restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas. Simbólicamente se tiene:

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}$$

Para sumar y restar dos o más fracciones heterogéneas seguimos los siguientes pasos:

1. Descomponemos en factores primos los denominadores para obtener el común denominador (mínimo común múltiplo).
2. Se divide el común denominador entre el denominador de la primera fracción y se multiplica por su numerador respectivo, este proceso se hace también con la otra fracción.
3. En la nueva fracción, se mantiene el común denominador y en el numerador se suman o se restan los resultados.
4. Si es posible se simplifica la fracción resultante hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo:

Sumamos las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

Hallamos el M.C.D. o m.c.m. de $(4{,}6)$ m.c.m. $(4{,}6)=12$

$$\frac{3^{\cdot 3}}{4_{\cdot 3}}+\frac{1^{\cdot 2}}{6_{\cdot 2}}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$$

Ejemplo:

Sumamos las siguientes fracciones: $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}$

Hallamos el M.C.D. o m.c.m. de $(5{,}2)$ m.c.m. $(5{,}2)=10$

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=\frac{(10\div 5)\cdot 2+(10\div 2)\cdot 3}{10}=\frac{4+15}{10}=\frac{19}{10}$$

Ejemplo:

Restamos las siguientes fracciones: $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}$

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 5-8\cdot 3}{8\cdot 5}=\frac{25-24}{40}=\frac{1}{40}$$

Ejemplo:

Restamos las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}-\frac{9}{7}$

$$\frac{3}{4}-\frac{9}{7}=\frac{3\cdot 7-4\cdot 9}{4\cdot 7}=\frac{21-36}{28}=-\frac{15}{28}$$

Método mariposa

Para la suma:

$$\frac{2}{6}+\frac{5}{2}=\frac{4+30}{12}=\frac{34}{12}$$

Para la resta:

$$\frac{8}{3}-\frac{5}{7}=\frac{56-15}{21}=\frac{41}{21}$$

m.c.m. o M.C.D.

Aplicando descomposición factorial de números primos, encontramos el M.C.D. o m.c.m. de:

1)

4	**6**	**2**
2	**3**	**2**
1	**3**	**3**
	1	

m.c.m. $(4{,}6)=2\cdot 2\cdot 3=12$

2)

5	**2**	**2**
5	**1**	**5**
1		

m.c.m. $(5{,}2)=2\cdot 5=10$

Actividad

Encontramos el resultado de las siguientes fracciones:

1) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{10}{7}=$

2) $\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=$

3) $-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=$

4) $\frac{12}{5}-\frac{6}{5}=$

5) $\frac{3}{5}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}=$

6) $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}=$

7) $\frac{23}{4}+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=$

8) $\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{6}=$

9) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{2}-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=$

Para tomar en cuenta

- *Se sobreentiende que todo número entero tiene a la unidad como denominador, por eso este tipo de número se llaman fracciones aparentes.*
- *Si una fracción no lleva signo, se sobreentiende que es positiva.*

Ley de signos

- *Primero debemos multiplicar los signos de las fracciones.*
- *Obtenemos el numerador multiplicando los numeradores.*
- *Obtenemos el denominador multiplicando los denominadores entre sí.*
- *Simplifiquemos el producto hasta obtener una fracción irreducible.*

+	·	+	=	+
−	·	−	=	+
+	·	−	=	−
−	·	+	=	−

2. Multiplicación y división de números racionales

Multiplicación de números racionales

El producto de dos o más fracciones es igual a otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores de los factores y el denominador es igual al producto de los denominadores.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Ley de signos en la multiplicación

En toda multiplicación de fracciones, primero se deben multiplicar los signos y luego los factores de la fracción.

Ejemplo:

Multiplicamos las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28}$$

$$\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{3}{12}\right)=-\frac{4\cdot 3}{9\cdot 12}=-\frac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{108}^{9}}=-\frac{1}{9}$$

$$\left(-1\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=+\frac{15}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{15\cdot 4}{8\cdot 5}=\frac{\cancel{60}^{3}}{\cancel{40}^{2}}=\frac{3}{2}$$

$$2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{22}=\frac{11}{4}\cdot\frac{8}{22}=\frac{\cancel{11}^{1}\cdot\cancel{8}_{2}}{\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{22}^{2}}=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}^{1}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\left(-1\frac{8}{13}\right)\cdot\left(-\frac{26}{63}\right)=+\frac{21}{13}\cdot\frac{26}{63}=\frac{\cancel{21}^{1}\cdot\cancel{26}_{2}}{\cancel{13}_{1}\cdot\cancel{63}^{3}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{15}{75}\cdot 3=\frac{15}{75}\cdot\frac{3}{1}=\frac{\cancel{15}^{1}\cdot 3}{\cancel{75}_{15}\cdot 1}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{15}^{5}}=\frac{1}{5}$$

Actividad

Multiplicamos las siguientes fracciones:

1) $\frac{7}{16}\cdot\frac{8}{14}=$

2) $\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{12}=$

3) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{15}{6}\right)=$

4) $\left(-\frac{51}{39}\right)\cdot\left(-\frac{25}{40}\right)=$

5) $5\cdot\left(-\frac{14}{15}\right)\cdot\left(-\frac{30}{70}\right)$

6) $3\cdot\frac{18}{90}\cdot\frac{70}{14}=$

7) $\frac{57}{38}\cdot\frac{32}{64}\cdot\frac{2}{4}=$

8) $\frac{13}{24}\cdot\frac{12}{39}\cdot\left(-\frac{6}{20}\right)=$

División de números racionales

La división de un número racional (entero o fraccionario) por un número fraccionario es igual a la multiplicación del número dado por el inverso del divisor, vale decir.

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

Ejemplo:

Multiplicamos las siguientes fracciones:

$$\frac{10}{26}\div\frac{5}{39}=\frac{10}{26}\cdot\frac{39}{5}=\frac{\cancel{10}^{2}\cdot\cancel{39}_{3}}{\cancel{26}_{2}\cdot\cancel{5}^{1}}=\frac{3}{1}=3$$

$$\frac{20}{45}\div\frac{15}{30}=\frac{20}{45}\cdot\frac{30}{15}=\frac{\cancel{20}^{4}\cdot\cancel{30}^{2}}{\cancel{45}_{9}\cdot\cancel{15}^{1}}=\frac{4\cdot 2}{9}=\frac{8}{9}$$

Ejemplo:

Apliquemos otro método para dividir fracciones, se puede multiplicar de forma cruzada el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \qquad\qquad \frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{10}{21}$$

m.c.m. o M.C.D.

Otra forma de dividir fracciones es multiplicando de forma cruzada.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Actividad

Dividimos las siguientes fracciones, por el método que más convenga:

1) $\frac{3}{8} \div \frac{9}{16} =$

2) $\frac{8}{15} \div \frac{32}{60} =$

3) $\left(-\frac{8}{15}\right) \div \left(-1\frac{3}{5}\right) =$

4) $\frac{4}{9} \div \frac{14}{42} =$

5) $\frac{15}{80} \div \frac{105}{56} =$

6) $\left(-1\frac{3}{5}\right) \div \left(-2\frac{1}{7}\right) =$

7) $\frac{11}{39} \div \frac{55}{78} =$

8) $5 \div \frac{10}{15} =$

9) $\left(2\frac{1}{15}\right) \div \left(-2\frac{3}{5}\right) =$

10) $\frac{12}{35} \div \frac{36}{70} =$

11) $5 \div \frac{55}{78} =$

3. Potenciación y radicación de números racionales

Potenciación de números racionales

Es una operación abreviada de la multiplicación, la base se repite tantas veces como indica el exponente que tiene la fracción.
Simbólicamente se tiene.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n veces}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n veces}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ley de signos

Se tiene las siguientes propiedades:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

Elementos de la potenciación:

Exponente

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Base Potencia

Signos de la potenciación de números racionales

- Si la base es (+) y el exponente es par o impar, el signo de la potencia siempre será (+).
- Si la base es (−) y el exponente es par, la potencia (+).
- Si la base es (−) y el exponente es impar, la potencia será (−).

Ejemplo:

Calculamos la potencia de la siguiente fracción:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{81}{16} \qquad \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1^3}{5^3} = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{1}{125}$$

Regla de signos

$$(+)^{par} = +$$
$$(+)^{impar} = +$$
$$(-)^{par} = +$$
$$(-)^{impar} = -$$

Actividad

Encontramos la potencia de las siguientes fracciones:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

2) $\left(1\frac{2}{5}\right)^2 =$

3) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 =$

4) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^3 =$

5) $\left(\frac{5}{7}\right)^4 =$

6) $\left(-1\frac{3}{7}\right)^4 =$

7) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 =$

8) $\left(3\frac{2}{5}\right)^4 =$

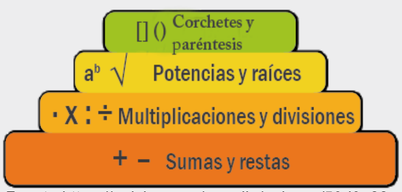
Regla de signos

Tomando en cuenta el signo de la base y el índice de la raíz podemos decir:

$$\sqrt[par]{+} = +$$
$$\sqrt[par]{-} = \nexists$$
$$\sqrt[impar]{+} = +$$
$$\sqrt[impar]{-} = -$$

Secuencia lógica de las operaciones

Debemos jerarquizar las operaciones aritméticas en ejercicios combinados, operamos de arriba hacia abajo.



Fuente:https://quizizz.com/_media/quizzes/50d0e88a-0b25-455e-8b74-009138ec462a_900_900

Radicación de números racionales

La raíz es considerada como la operación inversa de la potenciación, donde se extrae la raíz enésima de un número, concretamente consiste en calcular la base de una potencia conociendo su exponente.

Índice

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{216}} = -\frac{3}{6} \rightarrow \text{Raíz}$$

Radical →

Cantidad subradical

Cálculo de radicales

Para calcular la raíz de una fracción, se encuentra por separado las raíces del numerador y del denominador, pero debemos tomar en cuenta los signos de la cantidad subradical y el índice de la raíz.

Ejemplo:

Hallemos las raíces de las siguientes fracciones:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} \qquad \sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{121}} = \frac{6}{11}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{-\frac{343}{125}} = -\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{7}{5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{3}{10} \qquad \sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = -\frac{2}{3}$$

4. Operaciones combinadas

Para resolver ejercicios con operaciones combinadas, debemos tomar en cuenta la jerarquía de las operaciones, tal como se ve en recuadro de la izquierda.

Ejemplo: Encontremos el resultado de las siguientes fracciones:

1) $$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}+\frac{5}{7}\div\frac{25}{14}-\frac{1}{2}=\frac{24}{36}+\frac{70}{175}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{20+12-15}{30}=\frac{32-15}{30}=\frac{17}{30}$$

2) $$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right]^2-\sqrt{\frac{9}{4}}=\left[\frac{3+2-1}{6}\right]^2-\frac{3}{2}=\left[\frac{4}{6}\right]^2-\frac{3}{2}=\left[\frac{2}{3}\right]^2-\frac{3}{2}=\frac{4}{9}-\frac{3}{2}=\frac{8-27}{18}=-\frac{19}{18}$$

3) $$\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{49}{9}}-\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{36}{64}}+\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{4}{3}-\frac{7}{3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{8}+1=\frac{4}{3}-\frac{7}{3}-\frac{25}{20}+\frac{12}{24}+1$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{7}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{16-28-15+6+12}{12}=\frac{34-43}{12}=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$$

Actividad

Resolvemos las siguientes operaciones combinadas con fracciones:

1) $1-\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{20}+\frac{75}{70}\div\frac{25}{140}-1\frac{1}{2}=$

2) $\left(-\frac{16}{33}\right)\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right]+\sqrt{\frac{4}{9}}=$

3) $\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{4}{16}}-\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=$

5) $\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{4}-\left(\frac{1}{4}\div\frac{3}{10}-\frac{1}{5}\right)+\frac{7}{15}=$

6) $1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{16}{25}}-\sqrt{\frac{4}{81}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{4}{9}}\div\sqrt{\frac{64}{225}}+\left(\frac{2}{5}\right)^0=$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{25}{4}}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{25}{4}}-\sqrt{\frac{1}{16}}$

Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver cualquier problema matemático con números racionales, debemos leer y comprender el problema, luego elegimos una estrategia de resolución o un plan para resolver el problema.

Ejemplo: Resolvemos el siguiente problema.

José Antonio compró una memoria USB de 32 gigabytes de capacidad para almacenar datos de música, videos, fotografías e información de su escuela. Utiliza un medio del almacenamiento para música, un cuarto para fotos y un octavo para videos. ¿Qué cantidad de memoria está ocupada?

Almacenamiento de USB: 32

Almacenamiento de música: $\frac{1}{2}$

Almacenamiento de fotos: $\frac{1}{4}$

Almacenamiento de videos: $\frac{1}{8}$

Operación

$$32-\frac{1}{2}\cdot 32-\frac{1}{4}\cdot 32-\frac{1}{8}\cdot 32$$
$$= 32-16-8-4$$
$$= 32-28$$
$$= 4 \text{ gigabytes libre}$$

Así: $32-4=28$

28 gigabytes ocupado

Ejemplo:

Se distribuyen víveres en una localidad de la ciudad de Oruro, en una cantidad de 360 quintales de harina y 240 quintales de arroz entre los barrios de la periferia, de manera que al Barrio A le toca un tercio, al Barrio B le toca un cuarto y el saldo es para el barrio C. ¿Qué cantidad de víveres le toca a cada barrio?

Total de quintales: $360+240=600\,qq$

Zona A: $\frac{1}{3}\cdot 600=200qq$ **Zona B:** $\frac{1}{4}\cdot 600=150qq$ **Zona C:** $600-200-150=250qq$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas

1) Un vendedor ambulante recibe los dos quintos de lo que vende de lunes a viernes y tres quintos si es sábado o domingo. El lunes vendió Bs 1200, el martes Bs 1250, el miércoles Bs 960, el jueves Bs 1000, el viernes Bs 1240, el sábado Bs 810 y el domingo Bs 780. Halla el monto de su comisión de cada día y de toda la semana.

2) Se reparte una propiedad de 600 hectáreas entre tres hermanos, a Mario le toca las dos quintas partes, a Delma le toca una quinta parte y el resto para Aneth, ¿cuántas hectáreas le toca a cada uno?

3) Rider gasta un tercio en compras de alimentos, dos terceras partes en material de escritorio y una quinta parte en pagos extras si sueldo del mes es de Bs 4500, ¿cuánto gasta en cada rubro?

VALORACIÓN

Los números racionales son conocidos desde la antigüedad y su estudio continúa en el tiempo debido a su importancia en las diferentes situaciones de nuestra vida diaria. Los números racionales permiten expresar medidas, son fundamentales porque nos permiten representar cantidades fraccionarias de manera precisa.

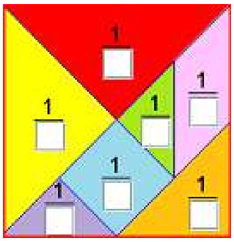
Respondamos la pregunta y realizamos la actividad.

- ¿Por qué es importante realizar operaciones con números racionales en la vida cotidiana?
- Exhibimos algunos ejemplos concretos sobre el uso y manejo de situaciones de la vida cotidiana en que realizamos operaciones con números racionales, son las compras en el mercado, en la tiendita de la esquina, en un reloj, en las raciones de comida, en la medición de listones de construcción, cintas métricas, al dividir o repartir propiedades, dinero, objetos, y otros. Menciona dos ejemplos más.

PRODUCCIÓN

Elaboramos un tangram con materiales reciclables como cartón u otros para identificar las partes del mismo.

- ¿Cuántas partes del tangram son equivalentes?
- ¿Cuántas y qué partes del tangram son los más grandes?
- ¿Cuántas y qué partes del tangram son los más pequeños?
- Ordena las piezas del tangram según las fracciones que representa de menor a mayor.
- ¿Cuál es el M.C.D. o m.c.m. de todas las fracciones del tangram?
- Todas las partes del tangram representan a la ___________



NÚMEROS DECIMALES COMO CONSECUENCIA DE LOS RACIONALES

PRÁCTICA

Jenny fue a la tienda a comprar algunos alimentos para preparar el desayuno para ella y para su hermana Graciela, compró 5 huevos a Bs 7.50, un kilogramo de azúcar a Bs 6.50, una bolsa de fideos de 400 gramos a Bs 3.70, cinco panes a Bs 2.50. Para pagar lo que había adquirido sacó un billete de Bs 50. La señora que atiende la tienda le dio el cambio correspondiente con monedas.

Actividad

Analizamos la lectura anterior y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto cuesta cada producto que se compró?
- ¿Cuánto es el total de gasto por las compras?
- ¿Cuánto de cambio recibió Jenny?
- Los productos comprados duran por lo general 2 días, ¿cuánto gastan a la semana de lunes a viernes?

TEORÍA

Dato histórico

Los números decimales eran conocidos por árabes y chinos, se atribuye generalmente al científico y matemático belga Simon Stevin (1548−1620), la introducción de los números decimales:

El suizo Jobs Burgi (1552−1632) simplifico la notación del número decimal.

Fue el matemático escocés John Napier (1550−1617) quién popularizó la escritura actual que conocemos con la coma decimal. Por ejemplo, el número decimal:

John Napier: 923,456
Simon Stevin:923(0) 4(1) 5(2) 6(3)
Jobs Burgi: 923º456

Clasificación de los decimales

1. Números decimales en la comunidad

Se aplican de manera constante en la vida cotidiana de las personas, como el de realizar compra de productos, pago de servicios básicos, en la compra de carburantes, medición de estaturas de las y los estudiantes de mi curso, medición de longitudes, distancias y otros objetos que existen en nuestro contexto. Con lo anteriormente expuesto afirmamos que los números decimales son importantes en nuestra comunidad para realizar diferentes actividades que beneficien al desarrollo de nuestro país.

2. Definición de números decimales

Son aquellos números que se encuentran entre dos números enteros y expresan una fracción de la unidad. Se utilizan para representar números más pequeños que la unidad. Están compuestos, por una parte entera y la otra parte decimal, estas dos partes están separadas por una coma o punto decimal.

Parte entera ← 173.902 → Parte decimal
Punto decimal

Descomposición polinómica de los números decimales

Se dividen en dos partes, la parte entera y la parte decimal, separados por el punto decimal, donde la parte decimal se divide en:

Parte entera	Coma decimal o punto	décimos	centésimos	milésimos	diezmilésimos	cienmilésimos	millonésimos
8	·	5	3	7			

Se lee ocho enteros, quinientos treinta y siete milésimos.

Clasificación de los números decimales

Se clasifican en decimal exacto, decimal periódico puro y decimal periódico mixto.

3. Conversión de fracciones a decimal exacto o periódico

Conversión de fracción a decimal exacto

Para convertir una fracción propia o impropia a un número decimal exacto, dividimos el numerador entre el denominador, el resultado es un decimal.

Ejemplo:

Convertimos las siguientes fracciones a decimales exactos. Para este tipo de ejercicios, utilizamos la división normal de aritmética.

$$\frac{3}{4} = \Rightarrow \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 4 \\ 20 & 0.75 \\ (0) & \end{array}$$

$$\frac{3}{5} = \Rightarrow \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 5 \\ (0) & 0.6 \end{array}$$

$$\frac{17}{4} = \Rightarrow \frac{17}{4} = 4.25$$

$$\begin{array}{l|l} 17 & 4 \\ 10 & 4.25 \\ 20 & \\ (0) & \end{array}$$

Conversión de fracción a decimal periódico puro

Se considera un decimal periódico puro, cuando la parte decimal está formada por uno o más números repetidos indefinidamente.

$$\boxed{0.44444\ldots = 0.\widehat{4}} \qquad \boxed{1.73737373\ldots = 1.\widehat{73}}$$

Ejemplo:

Convertimos las siguientes fracciones a decimales periódicos puros.

$$\frac{11}{3} = \Rightarrow \frac{11}{3} = 3.666\ldots = 3.\widehat{6}$$

$$\begin{array}{l|l} 11 & 3 \\ 20 & 3.666\ldots \\ 20 & \\ 20\ldots & \end{array}$$

$$\frac{80}{11} = \Rightarrow \frac{80}{11} = 7.272727\ldots = 7.\widehat{27}$$

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ 30 & 7.2727\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 80\ldots & \end{array}$$

Conversión de fracción a decimal periódico mixto

Se considera un decimal periódico mixto, cuando la parte decimal está formada por un número que no se repite y recibe el nombre de anteperiodo, y una parte decimal que se repite indefinidamente.

$$\boxed{0.56666\ldots = 0.5\widehat{6}} \qquad \boxed{2.7352525252\ldots = 0.73\widehat{52}}$$

Ejemplo:

Convertimos las siguientes fracciones a decimales periódicos mixtos.

$$\frac{70}{12} = \qquad \frac{70}{12} = 0.583333\ldots = 0.58\widehat{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 70 & 12 \\ 100 & 0.58333\ldots \\ 40 & \\ 40\ldots & \end{array}$$

$$\frac{8}{9} = \qquad \frac{8}{9} = 0.583333\ldots = 0.58\widehat{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 50 & 6 \\ 20 & 0.8333\ldots \\ 20 & \\ 20\ldots & \end{array}$$

Curiosidades de los números decimales

A veces parecen mágicos y no "tan racionales", a veces nos dan sorpresas, pero no son tan inesperados. Por ejemplo:
Si dividimos 10 *entre 81 el resultado es* 0.1234567890 *y tiene como periodo las cifras desde el cero hasta el nueve.*

$$\frac{10}{81} = 0.\overline{1234567890}$$

Si aumentamos un cero al numerador y un nueve entre el 81, *sucederá lo siguiente:*

$$\frac{100}{891} = 0.112233445566778899OO\ldots$$

Si aumentamos un cero al numerador y un nueve entre el 891, tendrá la forma:

$$\frac{1000}{8991} = 0.111222333444555666777888999000\ldots$$

Actividad

Transformamos las siguientes fracciones a decimales:

1) $\frac{4}{5} =$ 3) $\frac{13}{3} =$ 5) $1\frac{2}{5} =$ 7) $\frac{7}{12} =$ 9) $\frac{11}{6} =$

2) $\frac{8}{5} =$ 4) $\frac{13}{9} =$ 6) $2\frac{1}{6} =$ 8) $\frac{23}{25} =$ 10) $\frac{7}{18} =$

Adición y sustracción

Para sumar o restar números decimales, se debe agrupar en dos columnas, una de sumas y otra de restas, luego se debe ordenar las columnas haciendo coincidir los puntos decimales y realizar las operaciones indicadas. Para finalmente hallar el resultado.

Ejemplo:

Calculamos el valor de los siguientes números decimales:

1) $3.45 + 4.56 + 1.01=$

$$\begin{array}{r} 3.45 \\ +\ 4.56 \\ 1.01 \\ \hline 9.02 \end{array}$$

2) $4.75 - 2.56 =$

$$\begin{array}{r} 4.75 \\ -\ 2.56 \\ \hline 2.19 \end{array}$$

3) $13.957 - 12.67 =$

$$\begin{array}{r} 13.957 \\ -\ 12.670 \\ \hline 1.287 \end{array}$$

4) $6.553 + 4.1 + 3.45 - 1.41 - 3.6 - 2.12 =$

$$\begin{array}{r} 6.553 \\ +\ 4.1 \\ 3.45 \\ \hline 14.103 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.41 \\ -\ 3.60 \\ 2.12 \\ \hline 7.13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14.103 \\ -\ 7.13 \\ \hline 6.973 \end{array}$$

Actividad

Hallamos el resultado de las siguientes operaciones con decimales:

1) $3.25+1.87+3.45 - 3.22=$
2) $1.1+2.3 - 3.2 - 4.5+5.1=$
3) $14.751+5.4 - 19.01=$
4) $5.24-[7.467-(2.501+3.21)+1.29-2.2]=$
5) $3.123+2.345+1.12-2.3-3.123=$
6) $4.879+2.346+2.201-6.54=$
7) $5.242+2.612+3.301-7.53=$

Multiplicación y división de números decimales

Multiplicación

Los números decimales, se multiplican como si fueran números naturales y en el resultado se agrega la coma decimal contando desde la derecha la cantidad de cifras decimales que tienen todos los factores antes de llegar a la parte entera.

Ejemplo:

Calculamos el valor de los siguientes números decimales:

1) $641.85 \cdot 4 =$

$$\begin{array}{r} 641.85 \\ \times\ 4 \\ \hline 2567.40 \end{array}$$

Tiene 2 decimales

Colocamos el punto para que haya 2 decimales

2) $73.24 \cdot 5.1 =$

$$\begin{array}{r} 73.24 \\ \times\ 5.1 \\ \hline 7324 \\ +\ 36620 \\ \hline 373.524 \end{array}$$

2 decimales

+1 decimales

Colocamos el punto para que haya 3 decimales

3) $93.7 \cdot 3.5 =$

$$\begin{array}{r} 93.17 \\ \times\ 3.5 \\ \hline 46585 \\ +\ 27951 \\ \hline 326.095 \end{array}$$

4) $3.75 \cdot 1.35 =$

$$\begin{array}{l} 3.75 \\ \times\ 1.35 \\ \hline 0.1875 \\ 1.125 \\ +\ 3.75 \\ \hline 5.0625 \end{array}$$

Actividad

Multiplicamos los siguientes números decimales:

1) $(13.23 \cdot 4.1)=$
2) $(0.45 \cdot 1.1176)=$
3) $(23.678 \cdot 6.457)=$
4) $(8.01 \cdot 2.01)=$
5) $(1.4361 \cdot 1.69)=$
6) $(2.1445 \cdot 2.154)=$
7) $(3.6 \cdot 25.15)=$
8) $(0.23 \cdot 10.121)=$
9) $(1.1111 \cdot 1.1)=$

División

a) División de un número decimal entre un número entero

Se divide como si fueran números enteros, al bajar la primera cifra decimal se coloca el punto decimal en el cociente prosiguiendo con la división. Si la parte entera del dividendo es menor que el divisor, se escribe 0 y punto en el cociente, se continúa con la división como si fueran números naturales.

1) $4.5 \div 2 =$

```
4 . 5   | 2
0   5     2 . 2 5
    1 0
     (0)
```

2) $75.2 \div 8 =$

```
7 5 . 2 | 8
  3   2   9 . 4
      0
```

3) $2.856 \div 2 =$

```
2 . 8 5 6 | 2
0   8        1 . 4 2 8
    0 5
      1 6
        0
```

b) División de un número entero entre un número decimal

Para efectuar una división así, se convierte el divisor en número entero, para tal efecto se multiplica al dividendo y al divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor, luego se procede a realizar la división como números naturales.

1) $21 \div 2.5 =$

$21 \cdot 10 \div 2.5 \cdot 10 = 210 \div 25$

```
210 | 25
100   8.4
 (0)
```

2) $69 \div 0.6 =$

$69 \cdot 10 \div 0.6 \cdot 10 = 690 \div 6$

```
69 | 6
09   1.15
30
(0)
```

3) $91 \div 0.7 =$

$91 \cdot 10 \div 0.7 \cdot 10 = 910 \div 7$

```
910 | 7
 21   130
 00
 (0)
```

c) División de un número decimal entre otro número decimal

Se convierte el divisor en un número entero multiplicando el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor, luego se divide como en los casos anteriores.

1) $26.1 \div 0.3 =$

$26.1 \cdot 10 \div 0.3 \cdot 10 = 261 \div 3$

```
26´1 | 3
  21   87
  (0)
```

$26.1 \div 0.3 = 87$

2) $9.728 \div 6.4 =$

$9.728 \cdot 10 \div 6.4 \cdot 10 = 97.28 \div 64$

```
97.28 | 64
 332    1.52
  128
  (0)
```

$9.728 \div 6.4 = 1.52$

3) $6.3 \div 0.02 =$

$6.3 \cdot 100 \div 0.02 \cdot 100 = 63 \div 2$

```
630 | 2
03    315
 10
 (0)
```

$6.3 \div 0.02 = 315$

4) $85.2 \div 0.9 =$

$85.2 \cdot 10 \div 0.9 \cdot 10 = 852 \div 9$

```
85´2 | 9
  42   94.666…
  60       .
  60       .
  60       .
```

$85.2 \div 0.9 = 94.666...$

A tomar en cuenta

Cuando dividimos números decimales entre decimales, a veces es más cómodo trabajar transformándolos a fracciones. Por ejemplo:

$$0.5 \div 0.2 = \frac{5}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot 10} = \frac{5}{2}$$

$$2.8 \div 1.2 = \frac{28}{10} \div \frac{12}{10} = \frac{28 \cdot 10}{12 \cdot 10} = \frac{7}{3}$$

$$6{,}3 \div 0{,}02 = \frac{63}{10} \div \frac{2}{100} = \frac{63 \cdot 100}{2 \cdot 10}$$

$$= 315$$

Actividad

Resolvemos las divisiones de los siguientes decimales:

1) $69.7 \div 6 =$
2) $125.4 \div 2 =$
3) $256.9 \div 3 =$
4) $138.7 \div 5 =$
5) $256.69 \div 7 =$
6) $75 \div 0.3 =$
7) $123 \div 1.2$
8) $435 \div 0.05 =$
9) $769.2 \div 0.002 =$
10) $1.256 \div 1.6 =$
11) $0.235 \div 0.5 =$
12) $5.237 \div 0.6 =$
13) $44.72 \div 1.4 =$
14) $176.75 \div 12.5 =$
15) $6.537 \div 1.5 =$

5. Fracción generatriz

La fracción irreducible que da origen a un número decimal recibe el nombre de fracción generatriz. Para encontrar el número decimal que corresponde a una fracción generatriz se divide el numerador por el denominador de la fracción irreducible.

Fracción generatriz

Una fracción generatriz es como una forma de expresar números decimales mediante una fracción irreducible. En la que el numerador y el denominador no tienen divisores en común, lo que significa que no se puede simplificar más.

$$0.5 = \frac{1}{2} \qquad 1.\overset{\frown}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2.3\overset{\frown}{57} = \frac{389}{165}$$

De número decimal a fracción

De decimal exacto:

$$2.\boxed{5} = \frac{25}{1\boxed{0}} = \frac{5}{2}$$

$$0.\boxed{45} = \frac{45}{1\boxed{00}} = \frac{9}{20}$$

De decimal periódico puro:

$$0.\boxed{\overset{\frown}{7}} = \frac{7-0}{\boxed{9}} = \frac{7}{9}$$

$$1.\boxed{\overset{\frown}{18}} = \frac{118-1}{\boxed{99}} = \frac{117}{99} = \frac{13}{11}$$

De decimal periódico mixto:

$$0.\boxed{2}\boxed{\overset{\frown}{4}} = \frac{24-2}{\boxed{9}\boxed{0}} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

$$1.\boxed{5}\boxed{\overset{\frown}{7}} = \frac{157-15}{\boxed{9}\boxed{0}} = \frac{142}{90} = \frac{71}{45}$$

Fracción decimal

Las fracciones decimales son aquellas en donde el denominador es una potencia de diez.

$$\frac{3}{10} \qquad \frac{15}{1000}$$

$$\frac{10}{10} \qquad \frac{8}{100}$$

a. Fracción generatriz de un número decimal exacto

Si el número decimal es exacto, se escribe el número decimal en el numerador de una fracción, sin la coma decimal, luego se anota en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Ejemplo:

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$0.2 = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{10}^5} = \frac{1}{5} \qquad 1.25 = \frac{\cancel{125}^5}{\cancel{100}^4} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$3.125 = \frac{\cancel{3125}^{25}}{\cancel{1000}^8} = \frac{25}{8} \qquad -1.323 = -\frac{1323}{1000}$$

b. Fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Es igual a una fracción que tiene como numerador a todo el número sin la coma decimal, a este número se le resta la parte no periódica y como denominador tantos nueves como dígitos tenga el período.

Ejemplo:

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$0.4444\ldots = 0.\overset{\frown}{4} = \frac{4-0}{9} = \frac{4}{9} \qquad 1.5555\ldots = 1.\overset{\frown}{5} = \frac{15-1}{9} = \frac{14}{9}$$

Ejemplo:

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$3.15151515\ldots = 3.\overset{\frown}{15} = \frac{315-3}{99} = \frac{\cancel{312}^{104}}{\cancel{99}^{33}} = \frac{104}{33}$$

$$-2.\overset{\frown}{234} = -\frac{2234-2}{999} = -\frac{\cancel{2232}^{248}}{\cancel{999}^{111}} = -\frac{248}{111}$$

c. Fracción generatriz de un número decimal periódico mixto

Es igual a una fracción que tiene como numerador a todo el número sin el punto decimal, a este número se le resta la parte no periódica y como denominador tantos nueves como dígitos tenga el período, seguidos de tantos ceros como número de dígitos tenga la parte no periódica.

Ejemplo:

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$0.177777\ldots = 0.1\overset{\frown}{7} = \frac{17-1}{90} = \frac{\cancel{16}^8}{\cancel{90}^{45}} = \frac{8}{45}$$

$$2.988888\ldots = 2.9\overset{\frown}{8} = \frac{298-29}{90} = \frac{269}{90}$$

Ejemplo:

Convertimos el siguiente decimal a una fracción.

$$1.356666\ldots = 1.35\overset{\frown}{6} = \frac{1356-135}{900} = \frac{\cancel{1221}^{407}}{\cancel{900}^{300}} = \frac{407}{300}$$

$$-0.7585858\ldots = -0.7\overset{\frown}{58} = -\frac{758-7}{990} = -\frac{751}{990}$$

Ejemplo:

Transformamos los siguientes decimales a fracciones.

$$0.45 = \frac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{100}^{20}} = \frac{9}{20} \qquad 14.361 = \frac{14361}{1000}$$

$$5.545454\ldots = 5.\widehat{54} = \frac{554-5}{99} = \frac{\cancel{549}^{61}}{\cancel{99}^{11}} = \frac{61}{11}$$

$$-2.6018888\ldots = -2.601\widehat{8} = -\frac{26018-2601}{9000} = -\frac{23417}{9000}$$

BICENTENARIO DE BOLIVIA

Actividad

Encontramos la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

1) 0.56=
2) 1.64=
3) 2.43=
4) 6.39=
5) 12.26=
6) 35.91=
7) −1.47=
8) −3.35=
9) 7.3333...=
10) 0.7777...=
11) 3.565656...=
12) 10.727272...=
13) 1.234234...=
14) 0.353535...=
15) −0.323232...=
16) −1.971971...=
17) 0.34444...=
18) 1.526666...=
19) 2.3454545...=
20) 6.038888...=
21) 7.025555...=
22) 9.09999...=
23) −0.12222...=
24) −1.38888...=

VALORACIÓN

Es importante conocer y manejar los números decimales, debido a que están presentes en actividades de nuestra vida diaria.

La mayoría de las y los adolescentes de cierta zona en el municipio, participan de los juegos deportivos estudiantiles del distrito en las disciplinas de fútbol, fútbol de salón, básquetbol y voleibol. Las y los participantes se preparan muy duro para esta competencia, tal es el caso de Freddy, un joven con muchas condiciones, mide 1.88 m, se prepara para básquetbol. Su alimentación es muy saludable, consume fibras, frutas, proteínas y mucho líquido, toma 4.5 litros de agua al día, su entrenamiento es excelente. El último mes estuvo entrenando 5.5 horas diarias.

Fuente:https://premiumsportsbo.com/el-basquet-hace-gestiones-para-traer-a-sus-tres-extranjeros/

Algunos ejemplos comunes del uso de números decimales incluyen: medir la dosis de un jarabe según la receta, determinar precios y pesos en una carnicería, leer la temperatura en un termómetro, o pesar productos en una balanza, entre otros.

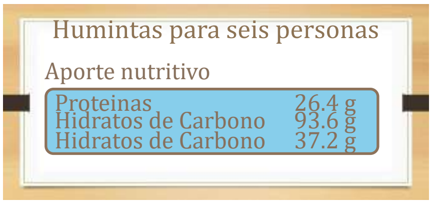
Fuente:http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica_NEE/balanza_con_decimales.jpg

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante el empleo de números decimales en nuestra vida cotidiana?
- ¿Cuál es el aporte científico, cultural y económico cuando se trabaja y se usa números decimales?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se puede aplicar al emplear los números decimales?
- ¿Cuántas cifras decimales se debería manejar para expresar cierta información en cualquier campo profesional, tecnológico o productivo?

PRODUCCIÓN

Elaboramos una lista de las cantidades necesarias de proteínas, carbohidratos, vitaminas y minerales como el calcio y sodio que necesita a diario el cuerpo humano.



También elaboramos una lista de materiales escolares de la presente gestión, indicando la cantidad y los precios correspondientes a cada producto, luego calculamos el total de costos.

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS RACIONALES Y DECIMALES

PRÁCTICA

Esta situación es insólita, pero podría suceder:
Ximena trabaja como agente inmobiliario. Al día le pagan por comisiones de acomodo de casas, departamentos o terrenos, ya sea en venta, alquiler o anticrético, por viáticos le cancelan Bs 50, los dos primeros días de la semana trabajó de manera puntual acomodando dos departamentos en venta, por lo que recibió el cuadrado del dos por ciento de la venta por cada departamento, el tercer día acomodo una casa en anticrético por lo que recibió el pago de la raíz cuadrada de un cuarto del uno por ciento del anticrético y el cuarto día apenas acomodo un terreno y le pagaron 0.02 por ciento del monto acordado con el comprador del terreno.

Fuente:https://cdn.cosmicjs.com/a6e6bdf0-e75c-11ec-9447-f98173199613-shutterstock1504943465.jpg

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Según la lectura, cuánto le pagaron a Ximena por el tercer día de trabajo?
- ¿Cuánto le pagaron a Ximena por el cuarto día de trabajo?
- ¿Cuánto por los dos días?
- ¿Qué operaciones se tiene que realizar para calcular el dinero que recibió Ximena en total?
- ¿Es conveniente trabajar en este rubro y por que?

TEORÍA

Reto

Un estudiante invita a su casa a 5 compañeros para realizar la tarea de matemática, dispone de una caja de galletas que contiene la mitad de galletas que contenía al principio para invitar a sus compañeros. Les propone un reto que consiste en adivinar la cantidad de galletas que aún tiene el cajón con las siguientes pistas:

- *Menos de tres decenas*
- *Ordenados en filas de 5*
- *Si reparten entre todos, sobraría uno.*
- *¿Cuántas galletas tiene la caja?*
- *¿Cuántas galletas contenía la caja inicialmente?*
- *¿A cuánto le toca a da uno?*

1. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Para realizar de manera correcta las operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales, es necesario recordar la jerarquía que tienen las operaciones aritméticas.

Jerarquía de operaciones

Para realizar operaciones combinadas seguiremos los pasos:
1º Se efectúan las operaciones que están en el interior de los signos de agrupación (paréntesis “( )”, corchetes “[ ]”, llaves “{ }”).
2º Seguidamente se efectúan las operaciones de potencias y raíces o al revés, raíces y potencias.
3º A continuación, realizaremos las operaciones de los productos y divisiones o viceversa.
4º Finalmente se realizan sumas y restas, hasta encontrar el resultado final (Se debe colocar el signo del número mayor).

Ejemplo:

Resolvemos el siguiente ejercicio:

$$1+\frac{1}{2}+0.4-1.2= \quad \text{Transformamos los números decimales}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{4}{10}-\frac{12}{10} \quad \text{Sacamos el mcm y operamos}$$

$$=\frac{10+5+4-12}{10} \quad \text{Realizamos sumas y restas}$$

$$=\frac{19-12}{10} \quad \text{Restamos para obtener el resultado}$$

$$=\frac{7}{10} \quad \text{Resultado}$$

Ejemplo:

Resolvemos las siguientes operaciones combinadas:

$$\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{9}{16}}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(0.75\cdot 0.8\widehat{3}\right)= \quad \text{Potencias, raíces y decimales}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\left(\frac{75}{100}\cdot\frac{83-8}{90}\right) \quad \text{Restamos la fracción}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\left(\frac{75}{100}\cdot\frac{75}{90}\right) \quad \text{Simplificamos las fracciones}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{8} \quad \text{Sacamos el mcm y operamos}$$

$$=\frac{7+6-2+5}{8} \quad \text{Realizamos sumas y restas}$$

$$=\frac{18-2}{8} \quad \text{Restamos para obtener el resultado}$$

$$=\frac{16}{8}=2 \quad \text{Resultado}$$

Ejemplo:

Resolvemos el siguiente ejercicio.

$$\sqrt{1+\frac{7}{9}}-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(0.4\cdot 0.8\widehat{3}\right)-\sqrt{0.\widehat{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{16}{9}}-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(0.4\cdot 0.8\widehat{3}\right)-\sqrt{\frac{4-0}{9}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{9}-\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{83-8}{90}\right)-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{9}-\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{75}{90}\right)-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{12-1-3-6}{9}=\frac{12-10}{9}=\frac{2}{9}$$

Ejemplo:

Resolvemos el siguiente ejercicio.

$$\left[\frac{3+5+1}{20+5}\right]^{\frac{1}{2}}+\sqrt{1-\frac{9}{25}}-0.4=\left[\frac{9}{25}\right]^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{16}{25}}-\frac{4}{10}=\sqrt{\frac{9}{25}}+\sqrt{\frac{16}{25}}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3+4-2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Jugando con fracciones

¿Te aburren las fracciones?
*Te propongo un juego: Voy a mostrarte una **identidad** para que puedas sacarles más provecho a las fracciones. Algunos lo llaman la **FÓRMULA FELIZ.***

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}$$

Puedes sustituir la letra por cualquier número natural. Por ejemplo, si n = 4 se cumple que:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4(4+1)}+\frac{1}{4+1}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$$

Ahora podrías volver a transformar la fracción un quinto y modificar otra vez la igualdad. Las matemáticas son para jugar:

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5(5+1)}+\frac{1}{5+1}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}$$

(Recuperado de www.soymatematicas.com)

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios combinados:

1) $\frac{7}{14}-6-\sqrt{\frac{1}{4}}+0.\widehat{6}+5.\widehat{3}+1=$

2) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}+0.\widehat{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}\div\left[\frac{3}{10}-\frac{3}{7}\right]-1.7\widehat{5}=$

3) $\sqrt{1-\frac{16}{25}}\div\sqrt{\frac{1}{4}}+1.\widehat{3}-(0.5\cdot 1.2)=$

4) $\frac{41}{27}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{11}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=$

5) $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{81}{16}}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\div\sqrt[3]{\frac{8}{125}}-\frac{8}{16}+2=$

6) $0.\widehat{3}+\frac{51}{4}\cdot\frac{2}{17}+\sqrt{\frac{36}{49}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}-1=$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{3}\div\left(\frac{2}{3}\right)^2-\sqrt{\frac{4}{9}}+\frac{6}{4}\div\sqrt{\frac{1}{16}}-0.58\widehat{3}=$

8) $\sqrt{\frac{9}{16}}+2.\widehat{6}-(0.5\div 1.2)\cdot 6+1.\widehat{3}-\sqrt{2+\frac{1}{4}}=$

2. Notación científica

Es una manera de escribir abreviadamente números grandes y pequeños mediante potencias de diez. Representar un número en notación científica consiste en escribir como un número entero o decimal con una sola cifra entera comprendida de 1 al 9 multiplicado por una potencia de 10 positiva o negativa.

Fracción decimal

- *Si los ceros están a la derecha se empieza a contar a partir del segundo número y la potencia de diez será positiva.*

$$6190000$$
$$\downarrow$$
$$6.19 \cdot 10^{6}$$

- *Si los ceros están a la izquierda se empieza a contar todos los ceros hasta encontrar el primer número distinto de cero y la potencia será negativa.*

$$0.000619$$
$$\downarrow$$
$$6.19 \cdot 10^{-4}$$

Reglas para escribir en notación científica

Para escribir en notación científica se consideran los siguientes aspectos:

a) Si el número es 10 o más se debe mover el punto hacia la izquierda y la potencia de diez será positiva.

$100000 = 1 \cdot 10^5$
$11000 = 1.1 \cdot 10^4$
$267800000 = 2.678 \cdot 10^8$
$2300000 = 2.3 \cdot 10^6$
$123000 = 1.23 \cdot 10^5$
$7023400000 = 7.0234 \cdot 10^9$

b) Si el número es menor a 1 se debe mover la coma a la derecha y la potencia de diez será negativa.

Ejemplo:
Escribimos las siguientes cantidades empleando notación científica.

$2.34 \cdot 10^5 = 234000$ $\quad$ $2.356 \cdot 10^6 = 2356000$ $\quad$ $3.988 \cdot 10^3 = 3988$

$3.2 \cdot 10^{-3} = 0.0032$ $\quad$ $1.1 \cdot 10^{-4} = 0.00011$ $\quad$ $2.79 \cdot 10^{-5} = 0.0000279$

Actividad

Escribimos en notación científica los siguientes números:

1) $34000000 =$
2) $53120000 =$
3) $2220000 =$
4) $10100000000 =$
5) $67090000 =$
6) $982000000 =$
7) $0.000023 =$
8) $0.0000179 =$
9) $0.0000067 =$
10) $0.00003540 =$
11) $0.000000000657 =$
12) $0.000000238917 =$

Operaciones con notación científica

a) Adición y sustracción

Para sumar y restar cantidades escritas en notación científica, los exponentes de las potencias de diez deben ser semejantes, luego se procede a realizar las operaciones de suma o resta manteniendo las potencias de diez. Si los exponentes de las potencias de diez no son iguales, se deben realizar operaciones hasta convertir en una sola potencia para sumar o restar sin dificultad.

Ejemplo:
Sumar y restar los siguientes números en notación científica:

$3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5 = 11 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5 = 7 \cdot 10^5$

$8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3} = 12 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3}$

Ejemplo:
Sumar y restar los siguientes números en notación científica:

$5 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^8 =$

$= 0.5 \cdot 10^{7+1} + 0.006 \cdot 10^{5+3} - 0.04 \cdot 10^{6+2} + 3 \cdot 10^8$

$= 0.5 \cdot 10^8 + 0.006 \cdot 10^8 - 0.04 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^8$

$= 3.506 \cdot 10^8 - 0.04 \cdot 10^8 = 3.466 \cdot 10^8$

Operaciones con notación científica

Debemos tomar en cuenta las mantisas y exponente 10.

$$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a+b) \cdot 10^n$$

$$a \cdot 10^n - b \cdot 10^n = (a-b) \cdot 10^n$$

$$(a \cdot 10^m) \cdot (b \cdot 10^n) = (a \cdot b) \cdot 10^{m+n}$$

$$\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}$$

b) Multiplicación

Se multiplican las mantisas y los exponentes de las potencias de diez se suman.

$(3 \cdot 10^4)\cdot(6 \cdot 10^2) = (3 \cdot 6)\cdot 10^{4+2} = 18 \cdot 10^6$

$(-2 \cdot 10^5)\cdot(-4 \cdot 10^3) = (2 \cdot 4) \cdot 10^{5+3} = 8 \cdot 10^8$

$(1.3 \cdot 10^2)\cdot(2 \cdot 10^7) = (1.3 \cdot 2)\cdot 10^{2+7} = 2.6 \cdot 10^9$

$(2.5 \cdot 10^3)\cdot(3.3 \cdot 10^4) = (2.5 \cdot 3.3) \cdot 10^{3+4} = 8.25 \cdot 10^7$

c) División

Se dividen las mantisas y los exponentes de las potencias de diez se restan.

$$\frac{9 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} = \frac{9}{3} \cdot 10^{12-8} = 3 \cdot 10^4 \qquad \frac{36 \cdot 10^{23}}{4 \cdot 10^{18}} = \frac{36}{4} \cdot 10^{23-18} = 9 \cdot 10^5$$

Actividad

Realizamos las siguientes operaciones indicadas con notación científica:

1) $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 =$

2) $(2 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^7) =$

3) $2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-2} =$

4) $(-4 \cdot 10^4) \cdot (3 \cdot 10^5) =$

5) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 =$

6) $(-6 \cdot 10^{-3}) \cdot (-3 \cdot 10^{-6}) =$

7) $4 \cdot 10^5 + 2.1 \cdot 10^4 - 6.2 \cdot 10^3 - 1.2 \cdot 10^4 =$

8) $(1.2 \cdot 10^{12}) \cdot (6.7 \cdot 10^{-9}) =$

9) $\frac{5 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^3} =$ **10)** $\frac{56 \cdot 10^{13}}{7 \cdot 10^8} =$ **11)** $\frac{125 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{-2}} =$ **12)** $\frac{1.2 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^5} =$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

La cantidad de glóbulos rojos que tenemos es bastante, una gotita de sangre de 1 mm³ contiene 5 millones de estos corpúsculos. Si el cuerpo de una persona contiene 4 litros de sangre. ¿Cuál es la cantidad de glóbulos rojos que tiene? Exprese el resultado en notación científica.

$4l = 4000000 \text{ mm}^3 = 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$ No. de glóbulos rojos: $N = (4 \cdot 10^6)\cdot(5 \cdot 10^6) = (4 \cdot 5) \cdot 10^{6+6} = 20 \cdot 10^{12} = 2 \cdot 10^{13}$

Una persona tiene aproximadamente $2 \cdot 10^{13}$ glóbulos rojos.

VALORACIÓN

Si vemos la imagen de la derecha, observamos el sistema planetario, con la posición más cercana y más lejana que existe al sol, ahora debemos responder de manera reflexiva, analítica y critica a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el planeta más lejano y el más cercano al sol?
- ¿Qué lugar ocupa nuestro planeta y cuál es la distancia al sol?
- ¿Cómo se expresan las distancias entre los planetas del sistema solar?
- ¿Por qué es importante el empleo de la notación científica en la vida cotidiana?

PRODUCCIÓN

- Elaboramos un esquema mental sobre notación científica, con objetos reales del contexto, exponiendo los saberes y conocimientos adquiridos en el desarrollo del tema.
- Buscamos en el periódico o en noticias digitales sobre el uso de la notación científica en nuestro contexto.
- Citamos s concretos de la aplicación de la notación científica en Astronomía, Biología, Física y Química.

RAZONES, PROPORCIONES Y REGLA DE TRES

PRÁCTICA

Adolfo tiene en su granja una gallina y 7 pollitos que alimenta con maíz, cuyo costo por libra es de Bs 2.5. Él desea viajar a la ciudad para visitar algunos familiares por unos días, por lo que solicita la ayuda a una de sus vecinas e indica lo siguiente:

- Si tarda una semana necesitará 8 libras de maíz.
- Si tarda diez días necesitará 12 libras de maíz.
- Si tarda dos semanas necesitarás 16 libras de maíz para alimentar a su gallina y a los pollitos.

Fuente: OpenAI, 2024

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- Según la lectura, ¿cuál es el costo de las 8 libras de maíz?
- Suponiendo que son 12 libras de maíz, lo necesario para alimentar a los pollitos, ¿cuánto sería el costo?
- ¿Cuál es el precio de las 16 libras de maíz?
- ¿Cuántas libras de maíz se compraría con un billete de Bs 50?

TEORÍA

Razón

Es una comparación entre dos o más cantidades. Esta comparación se puede hacer mediante una diferencia, en tal caso se llama "razón aritmética", o mediante una división en tal caso se llama "razón geométrica".

Ejemplo de razón aritmética:

$$a = b = d$$

Ejemplo de razón geométrica:

$$a \div b \qquad a/b \qquad \frac{a}{b}$$

Analogía

Responde a las siguientes analogías:

- *Noche es a luna, como sol es a* __________________
- *Guante es a mano, como zapato es a* ________________
- *León es a selva, como tiburón es a* _______________
- *Lápiz es a dibujar, como tijera es a* ________________

1. Razones y proporciones

Razón

Se denomina razón o relación entre dos cantidades al valor que resulta de comparar dichas cantidades mediante la operación de división.

La razón entre a y b, siendo b un número diferente de cero, se denota:

$$r = \frac{a}{b}$$ Se lee "a es a b"

a: es el antecedente
b: es el consecuente

Ejemplo:
La razón entre 12 y 6 se escribe:

$$r = \frac{12}{6}$$ Se lee "doce es a seis"

$$r = 2$$ La razón sería 2.

Ejemplo:
La razón de los números pares en relación a los dígitos del 1 al 9:

$$r = \frac{4}{9}$$ Se lee "hay 4 números pares de un total de 9"

Ejemplo:
La razón de los múltiplos de 4 en relación a los números del 11 al 20:

$$r = \frac{3}{10}$$ "Hay 3 números múltiplos de 4 de posibles 10"

Ejemplo:
La razón de los múltiplos de 10 comprendidos entre los números del 120 al 150, incluyendo ambos extremos:

$$r = \frac{4}{31}$$ "Hay 4 números múltiplos de 10 de 31 números"

Proporción

Es la comparación de dos razones iguales. En toda proporción los productos de términos obtenidos en forma cruzada son iguales. Los términos de una proporción son los medios y los extremos. Simbólicamente se representa:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Dónde: a, d Son los extremos de la proporción.
b, c Son los medios de la proporción.

Ejemplo:

$\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$ Se lee 3 es a 7, como 12 es a 28

Propiedad fundamental de las proporciones

Dos razones son proporcionales si cumplen con la relación siguiente:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad a\cdot d=b\cdot c$$

Ejemplo:
Averiguamos si las siguientes razones son proporcionales.

$$\frac{3}{5}=\frac{21}{35} \quad \Rightarrow \quad 3\cdot 35=5\cdot 21$$

$$105=105$$

Las razones son proporcionales.

Ejemplo:
Determinamos si las siguientes razones son proporcionales.

$$\frac{2}{7}=\frac{14}{49} \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 49=7\cdot 14$$

$$98=98$$

Reto

Mario tiene 12 canicas rojas y 8 canicas negras, utilizando razones podemos concluir:

Razón aritmética:

$$12-8=4$$

"Mario tiene 4 canicas rojas más que canicas negras"

Razón geométrica:

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

Mario, por cada tres canicas rojas, tiene dos canicas negras.

"El número de canicas rojas y el número de canicas negras están en relación de 3 a 2"

Realiza el mismo análisis del siguiente problema:
Aneth tiene 24 chocolates y 16 dulces.

Actividad

Encontramos la razón de los siguientes enunciados:

1) Números impares en relación a los números del 1 al 9.
2) Números primos en relación a los números del 1 al 15.
3) Números múltiplos de 7 en relación a los números del 15 al 37.

Comprobamos la propiedad fundamental en las proporciones y completamos la siguiente tabla:

$\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$	$5\cdot 30=6\cdot 25$ $150=150$	5 es a 6, como 25 es a 30
$\frac{12}{30}=\frac{10}{25}$		
$\frac{9}{16}=\frac{27}{48}$		
$\frac{4}{11}=\frac{88}{242}$		
$\frac{2}{13}=\frac{20}{130}$		
$\frac{5}{12}=\frac{20}{48}$		

Cálculo del término desconocido de una proporción

Si en una proporción existe un término desconocido, se multiplica en forma cruzada los términos de la proporción y se despeja el término desconocido.

Ejemplo:

Determinamos el valor de x en la siguiente proporción.

$\frac{x}{3} = \frac{35}{15}$ Multiplicamos en forma de cruz

$15x = 3 \cdot 35$ Despejamos la variable x

$x = \frac{3 \cdot 35}{15}$ Simplificamos y encontramos el resultado

$x = 7$ Valor de la variable x

Dato

Otro método para encontrar los valores de x, es multiplicar o dividir por cierta cantidad:

$$\frac{x}{14} = \frac{3}{7}$$

$$x = 2 \cdot 3 = 6$$

Actividad

Encontramos el valor de x en las siguientes proporciones:

1) $\frac{x}{14} = \frac{3}{7}$

2) $\frac{55}{44} = \frac{x}{4}$

3) $\frac{x}{10} = \frac{33}{5}$

4) $\frac{x}{36} = \frac{5}{12}$

5) $\frac{10}{x} = \frac{30}{6}$

6) $\frac{x}{10} = \frac{4}{20}$

7) $\frac{40}{x} = \frac{16}{4}$

8) $\frac{50}{x} = \frac{10}{2}$

9) $\frac{x}{6} = \frac{35}{42}$

10) $\frac{2}{x} = \frac{14}{70}$

11) $\frac{8}{14} = \frac{x}{7}$

12) $\frac{13}{39} = \frac{x}{3}$

13) $\frac{x}{15} = \frac{40}{300}$

14) $\frac{2x}{20} = \frac{100}{5}$

15) $\frac{3x}{150} = \frac{6}{25}$

16) $\frac{7x}{21} = \frac{9}{3}$

2. Magnitudes proporcionales

Dos magnitudes que están relacionadas entre sí se dice que son proporcionales cuando al aumentar una de las variables la otra aumenta o disminuye proporcionalmente. Hay dos tipos de magnitudes: Directas e Inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar o disminuir una de ellas, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. Si se multiplica una de ellas por un número la otra también queda multiplicada por el mismo número, si al dividir una de ellas por un número la otra queda también dividida por el mismo número.

Ejemplo:

Se compran 100 naranjas a Bs 40, halla el valor para comprar 150 naranjas.

$\div 2$ $\div 2$ $\div 5 \cdot 2$ $\cdot 20$ $\div 4 \cdot 3$

Naranjas	100	50	25	10	200	150
Costo	40	20	10	4	80	60

$\div 2$ $\div 2$ $\div 5 \cdot 2$ $\cdot 20$ $\div 4 \cdot 3$

Con Bs 60 se puede comprar 150 unidades de naranjas.
Las magnitudes son directamente proporcionales, a mayor cantidad de naranjas se paga mayor precio.

Actividad

Completamos las siguientes tablas sobre magnitudes directamente proporcionales:

1)

Balones	3	6	9	12	15	18
Monto	200					

2)

Dulces	5	10	15	20	30	50
Costo	12					

3)

Distancia	10	20	30		50	200
Tiempo	20					

4)

Poleras	1		3		5	10
Costo	16					

5)

Peso	3	6	9	12	15	18
Objetos	200					

6)

Litros de leche	1		3		5
Precio litro de leche (Bs.)	7	14		28	

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una magnitud, la otra magnitud disminuye o viceversa. Si se multiplica una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida por el mismo número, si al dividir una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

Si dos hombres hacen una obra en 30 días, ¿cuántos días tardan 20 obreros?

$\cdot 2 \quad \div 2 \cdot 3 \quad \div 3 \cdot 5 \quad \div 5 \cdot 6 \quad \div 3 \cdot 5$

Hombres	2	4	6	10	12	20
No. días	30	15	10	6	5	3

$\div 2 \quad \cdot 2 \div 3 \quad \cdot 3 \div 5 \quad \cdot 5 \div 6 \quad \cdot 3 \div 5$

20 obreros tardarán 3 días.

Las magnitudes son inversamente proporcionales a mayor cantidad de obreros menos días para realizar la obra.

Magnitudes

Magnitudes directas:
"Si una de las magnitudes aumenta la otra también aumenta".
Magnitudes inversas:
"Si una de las magnitudes aumenta la otra disminuye".

Actividad

Completamos las siguientes tablas de magnitudes inversamente proporcionales:

1)

Jugadores	2	5	4	10	15	20
Monto	250	100				

2)

Personal	2	5	10	15	20	50
Días	250					

4)

Víveres	800	600	400	200	100	50
Obreros	20					

5)

Fruta	1000	800	600	300	200	100
Niños	50					

3. Porcentaje

O tanto por ciento, representa un valor en relación a 100 dentro de una proporción. Calcular porcentajes es una forma de aplicar la proporcionalidad directa cuando comparamos cantidades y sus fracciones equivalentes. El porcentaje se simboliza con el signo "%". Existen dos métodos principales para calcular porcentajes:

Ejemplo:

Hallamos el 30% de 600.

Primer método: Directa

$$\frac{30}{10\cancel{0}} \cdot 60\cancel{0} = 30 \cdot 6 = 180$$

Segundo método: Proporciones

$$\frac{600}{100} = \frac{x}{30} \qquad x = \frac{60\cancel{0} \cdot 30}{10\cancel{0}} = 180$$

Ejemplo:

En un curso de 36 estudiantes, 9 estudiantes faltaron a clases ¿Cuál es el porcentaje de asistencia y cuál es el porcentaje de inasistencia?

Primer método: Directa

$$\frac{9}{36} \cdot 100 = \frac{900}{36} = 25\%$$

Segundo método: Proporciones

$$\frac{9}{36} = \frac{x}{100} \qquad x = \frac{100 \cdot 9}{36} = 25\%$$

El porcentaje de inasistencia fue de 25%. Por lo tanto, el porcentaje de asistentes es de 75%.

Para reconocer la magnitud, se debe tomar en cuenta algunas palabras clave, por ejemplo:

Magnitudes directas:

Compras, costos, pagos, bonos, cantidades, transacciones bancarias, distancia–tiempo, precios, unidades de longitud, etc.

Magnitudes inversas:

Trabajadores, máquinas, cámaras fotográficas, obras–día, raciones por día, víveres, velocidad–distancia, velocidad–tiempo, etc.

Actividad

Calculamos el porcentaje en los siguientes problemas:

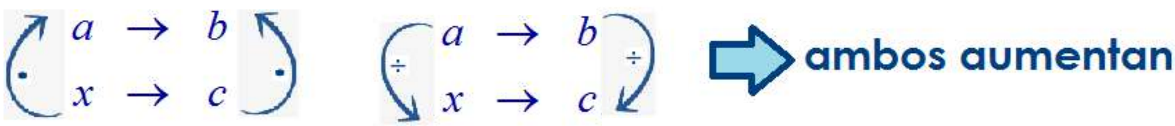
1) Hallar el 2% de 400.
2) Hallar el 22% de 6400.
3) Hallar el 5% de 70.
4) En un curso de 30 estudiantes, 6 reprobaron el área de matemática. Determinar el % de estudiantes reprobados.
5) Aneth abonó a una entidad bancaria Bs 600 para amortizar un préstamo de Bs 1500. ¿Qué porcentaje pagó?
6) Javier tiene un empleo donde le pagan el 2% de comisión por las ventas que realiza en el día. ¿Cuánto le corresponde si vende en el día Bs. 1250?
7) En una tienda se ha cancelado Bs 142.50 por la compra de un pantalón pero con una rebaja del 5%. ¿Cuál es el precio original del pantalón?
8) Si el precio de compra de un artículo es de Bs. 540, ¿a cómo hay que vender para ganar el 10%?

4. Regla de tres simple

Es una forma sencilla de resolver problemas de proporcionalidad en la que se tiene tres datos conocidos y una incógnita. Recordemos que una incógnita es una cantidad desconocida, generalmente se representa con las últimas letras del abecedario. La regla de tres es simple cuando solamente intervienen en ella dos magnitudes, las cuales pueden ser directas o inversas.

Regla de tres simple directa

Es directa cuando las magnitudes que la componen son directamente proporcionales, para formar la proporción se igualan ambas razones en forma directa, según corresponde en cada magnitud, al aumentar una magnitud la otra también aumenta, al disminuir una magnitud la otra también disminuye.



Regla de tres simple directa

Para resolver problemas aplicando regla de tres simple directa, podemos tomar en cuenta el siguiente esquema:

Magnitud A	Magnitud B
a	b
c	x

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Ejemplo:
Si 8 lb de arroz tiene un costo de Bs 32. ¿Cuánto hay que pagar por 15 lb?

$$\begin{array}{l} 8lb \rightarrow 32\text{ Bs} \\ 15lb \rightarrow x \end{array} \qquad \frac{8}{15} = \frac{32}{x} \qquad x = \frac{15 \cdot \cancel{32}^{4}}{\cancel{8}^{1}} = 15 \cdot 4 = 60\text{ Bs}$$

Se necesitan Bs 60 para comprar 15 libras de arroz.

Ejemplo:
Si 5 obreros cavan una zanja de 700 m de largo. ¿Cuánto cavarán 8 obreros?

$$\begin{array}{l} 5o \rightarrow 700\text{m} \\ 8o \rightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{8 \cdot \cancel{700}^{140}}{\cancel{5}^{1}} = 8 \cdot 140 = 1120\text{ m}$$

Los 8 obreros cavarán una zanja de 1120 m.

Ejemplo:
Para la alimentación de 120 soldados se necesitan 50 kg de arroz para una semana. Si en la siguiente semana, se incrementan 30 soldados. ¿Cuántos kg de arroz se requerirán?

$$\begin{array}{l} 120s \rightarrow 50\text{kg} \\ 150s \rightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{{}^{25}\cancel{50} \cdot \cancel{150}^{5}}{\cancel{120}^{\cancel{4}}{}_{2}} = \frac{25 \cdot 5}{2} = 62.50\text{ kg}$$

Para alimentar a los 150 soldados se necesitarán 62.50 kg.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres simple directa:

1) Para comprar una docena de naranjas se requieren 8 Bs. ¿Cuánto se necesitará para comprar 96 naranjas?
2) Para el asfaltado de 6 cuadras de una calle fueron necesarias 14 horas. ¿Qué tiempo requerirá para asfaltar 15 cuadras en otra calle?
3) Un automóvil tarda 3 horas en desplazarse 240 kilómetros con una velocidad constante, ¿en cuántas horas se desplazará 400 kilómetros si mantiene la misma velocidad?
4) Si un maple de 30 huevos cuesta Bs 28, ¿cuánto costarán 10 unidades de huevo?
5) La arroba de maíz tiene un precio de Bs 45, ¿cuánto habrá que pagar por 15 libras de maíz?
6) José trabaja los sábados cortando el césped a sus vecinos. Sabiendo que trabaja todos los sábados las mismas horas y que por cada 6 días cobra 150 bolivianos, ¿cuánto cobra José por 15 días de trabajo?

Regla de tres simple, inversa

Es inversa cuando las magnitudes que la componen son inversamente proporcionales. Para formar la proporción se iguala la razón directa de la primera magnitud con la razón inversa de la segunda magnitud. Al aumentar una magnitud, la otra disminuye o al disminuir la otra magnitud, la otra aumenta.

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ x & \rightarrow & c \end{array} \;\; \cdot \;\; \div \qquad \div \;\; \begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ x & \rightarrow & c \end{array} \;\; \cdot$$

si uno aumenta el otro disminuye

Ejemplo:
Seis obreros tienen previsto acabar una obra en 15 días, si uno de los obreros se retira. ¿En qué tiempo se terminará la obra?

$$\begin{array}{l} 6o \rightarrow 15d \\ 5o \rightarrow x \end{array} \qquad \frac{6}{5} = \frac{x}{15} \qquad x = \frac{6 \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}^{1}} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ d}$$

Podemos afirmar, los 5 obreros acabarán la obra en 18 días.

Ejemplo:
Para una guarnición de 75 hombres existen provisiones para 10 días. Si se aumentan 25 hombres, ¿para cuántos días alcanzarán las provisiones?

$$\begin{array}{l} 75h \rightarrow 10d \\ 100h \rightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{\cancel{75}_{15} \cdot \cancel{10}^{1}}{\cancel{100}^{\cancel{10}_{2}}} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ d}$$

Podemos decir, las provisiones alcanzarán para siete días y medio si se aumentan 25 hombres.

Ejemplo:
Si 5 máquinas realizan un trabajo en 24 horas, ¿cuántas máquinas son necesarias para realizar el trabajo en 8 horas?

$$\begin{array}{l} 5\text{maq} \rightarrow 24\text{h} \\ x \rightarrow 8\text{h} \end{array} \qquad x = \frac{5 \cdot \cancel{24}^{3}}{\cancel{8}^{1}} = 5 \cdot 3 = 15 \text{ maq}$$

Podemos decir, para terminar en 8 horas necesitamos 15 máquinas.

Regla de tres simple inversa

Podemos tomar en cuenta el siguiente esquema:

Magnitud A	Magnitud B
a	b
c	x

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres simple inversa:

1) Una cierta cantidad de alimentos puede abastecer a 18 personas durante 7 días, ¿a cuántas personas puede abastecer si se aumentan 45 personas más?
2) Un obrero necesita trabajar 32 horas para cumplir con un pedido. Si se emplean 4 obreros, ¿en cuánto tiempo acabará el trabajo?
3) Un albañil tarda 8 horas en construir 4 m² de pared, ¿cuánto tardará en realizar 16 m² de pared?
4) Un camión se desplaza de una ciudad a otra durante 3 horas a una velocidad de 60 km/h, ¿qué tiempo empleará en desplazarse la misma distancia con una velocidad de 90 km/h?
5) 3 trabajadores tardan 10 días en construir un muro, ¿cuántos días tardarán 6 trabajadores en construir el mismo muro?
6) En un hotel hay tres jardineros que riegan y cuidan todos los jardines en 6 horas durante el invierno. Si durante el verano se aumentan 3 jardineros más, ¿en cuánto tiempo regarán y cuidarán los jardines del hotel?
7) El equipo de fútbol del colegio hará un regalo a su entrenadora. Al principio se juntan 4 compañeros para pagar cada uno Bs 10, pero al final son 8 compañeros los que se juntan para pagar el regalo, ¿cuánto dinero tendrá que poner cada uno?
8) Doce exploradores llevan una cantidad de alimentos para 24 días, pero el primer día se encuentran con otros 6 exploradores, perdidos y sin alimentos. ¿Para cuántos días les alcanzarán los alimentos?

5. Regla de tres compuesta

Es compuesta cuando en el problema intervienen tres o más magnitudes, estas magnitudes pueden ser directa o inversamente proporcionales. Para resolver una regla de tres compuesta se puede proceder a solucionar tomando las magnitudes que intervienen de dos en dos, en comparación con la magnitud que tiene la variable a determinar, considerando que las demás se mantienen constantes, existe una forma práctica de resolver o determinar directamente el valor de variable buscada.

Para resolver un problema aplicando regla de tres compuesta, hay que seguir los siguientes pasos:

- Primero, identificamos las variables y las magnitudes, si son directas o inversas.
- Se observa la relación de proporcionalidad entre las magnitudes y la incógnita, si es directa o inversa aplicamos como en la regla de tres simple, colocando signo (+) a las cantidades que se multiplican y (–) a las que se dividen.

Ejemplo:

10 obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan una obra en 30 días, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar la misma obra 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

Obreros		Días		Horas
+10	→	+30	→	+8
-5	→	x	→	-10

menos obreros más días
magnitud inversa

más horas menos días
magnitud inversa

$$\frac{x}{30}=\frac{10}{5}\cdot\frac{8}{10} \qquad x=\frac{10\cdot\cancel{30}_6\cdot 8}{\cancel{5}_1\cdot 10}=6\cdot 8=48$$

Los 5 obreros tardarán 48 días en terminar la obra trabajando 10 horas diarias.

Ejemplo:

Seis obreros trabajando 8 horas por día hacen una zanja de 30 m de largo, 1.20 m de ancho y 60 cm de profundidad en 3 días. Si se aumentan dos obreros más para hacer otra zanja de 40 m de largo, 1.50 m de ancho y de un metro de profundidad, ¿cuántos días necesitarán si trabajan 10 horas diarias?

$$\dot{6}\text{o}\to 30\text{ m}\to 1.20\text{ m}\to 60\text{ cm}\to \dot{3}\text{ d}\to \dot{8}\text{ hd}$$

$$8\text{o}\to \underset{\cdot}{40}\text{ m}\to \underset{\cdot}{1.50}\text{ m}\to \underset{\cdot}{100}\text{ cm}\to x\to 10\text{ hd}$$

$$x=\frac{6\cdot 40\cdot 1.50\cdot 100\cdot 3\cdot 8}{8\cdot 30\cdot 1.20\cdot 60\cdot 10}=5$$

Los 7 obreros trabajando 10 horas diarias terminarán en 5 días.

Primer método

Debemos tomar en cuenta la siguiente referencia:

Arriba: Menos (−)
Directamente proporcionales
Abajo más (+)
Arriba más (+)
Inversamente proporcionales
Abajo menos (−)

Segundo método

Si las magnitudes son directamente proporcionales se coloca el punto debajo de la magnitud que corresponde. Si las magnitudes son inversamente proporcionales se coloca el punto encima de la magnitud que corresponde.

$$\dot{a}\to\ b\to\ c\to\ \dot{d}$$

$$e\to\ \underset{\cdot}{f}\to\ \underset{\cdot}{g}\to\ x$$

El valor de la variable es igual al producto de todas las magnitudes marcadas con el punto dividido por el producto de todas las magnitudes que no tiene marca.

$$x=\frac{a\cdot f\cdot g\cdot d}{e\cdot b\cdot c}$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas de regla de tres compuesta por cualquier método:

1) Siete obreros que trabajan 8 horas diarias construyen un muro de 32 m de largo en 10 días. Si 2 obreros se retiran y la empresa hace trabajar a los obreros restantes 10 horas por día para construir un muro de 40 m de largo, ¿en qué tiempo terminarán?

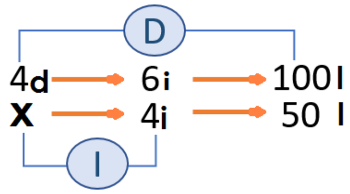
2) En un campamento de 300 jóvenes hay víveres para 10 días a razón de 3 raciones por día para cada uno. Si a última hora se retiran 50 jóvenes y deciden aumentar a 4 raciones por día, ¿cuántos días les durarán los víveres?

3) Una empresa se compromete a hacer una obra en 24 días empleando para ello a 10 obreros que trabajarán durante 6 días a razón de 8 horas diarias; pero la empresa decide adelantar la culminación de la obra en 8 días, para ello los obreros trabajarán 12 horas diarias y se requiere saber cuantos obreros se tiene que aumentar.

6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las razones, proporciones, porcentajes, regla de tres simple directa, inversa y regla de tres compuesta, son las temáticas de uso común cotidiano en diferentes actividades que realizamos en diferentes rubros, en nuestro contexto, en el campo de la producción y en el campo de la tecnología, su uso abarca diferentes situaciones que nos permiten calcular la magnitud que desconocemos.

Problema: En 4 días, 6 impresoras han impreso 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si tenemos 4 impresoras?
Las magnitudes que tenemos en el problema son: días, impresoras y libros. La relación entre ellas es:



Problema: Ruben tiene un dispositivo de almacenamiento (USB) de 8 Gigabytes, desea almacenar archivos de música, cada 2 archivos de música ocupan aproximadamente 10 Megabytes. Si Ruben desea almacenar 500 archivos de música. ¿Qué porcentaje y cuántos megabytes ocuparán los archivos los de música?

$$2a \rightarrow 10\text{MB} \qquad \frac{2}{500}=\frac{10}{x} \qquad x=\frac{500\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}^{1}}=500\cdot 5=2500\text{ MB}$$
$$500a \rightarrow x$$

Calculamos la cantidad de Megabytes:

$$8\cancel{\text{GB}}\cdot\frac{1024\text{MB}}{1\cancel{\text{GB}}}=8192\text{ MB}$$

Ahora halamos el porcentaje que ocupará los 500 archivos:

$$8192\text{ MB}\rightarrow 100\% \qquad x=\frac{2500\cdot 100}{8192}=30.51\%$$
$$2500\text{ MB}\rightarrow x$$

500 archivos de música representan aproximadamente el 30.51% del total de la capacidad de almacenamiento.

Equivalencias

Toma en cuenta las siguientes equivalencias.

$$1\text{ GB}=1024\text{ MB}$$
$$1\text{ MB}=1024\text{ KB}$$

VALORACIÓN

Razones, proporciones y proporcionalidad han sido conceptos problematizados desde los procesos de la aplicación y se identifica la importancia del conocimiento sobre los números racionales para el desarrollo del conjunto de habilidades necesarias en el razonamiento proporcional. Los porcentajes están relacionados con las fracciones y los decimales.

Es importante realizar una reflexión en función de lo aprendido.

- ¿Cuál es la importancia de aprender razones y proporciones?
- ¿Por qué es importante el empleo de la regla de tres simple o compuesta en nuestro contexto?
- ¿Cómo nos ayuda la regla de tres en la resolución de problemas en nuestra región o de nuestra comunidad?

PRODUCCIÓN

- Con ejemplos concretos anotando en nuestro cuaderno, explica tres situaciones donde hayas utilizado razones proporcionales, regla de tres simple, regla de tres compuesta y porcentajes.
- Anotamos en nuestro cuaderno las razones proporcionales entre las cantidades de varones y mujeres que están en tu curso.
- En nuestro cuaderno realizamos una tabla para anotar la cantidad de recreo que reciben tu y 4 compañeros, realiza una comparación proporcional y calcula cuánto dinero reciben tu y tus compañeros en una semana, en el mes y anualmente.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

NÚMEROS RACIONALES

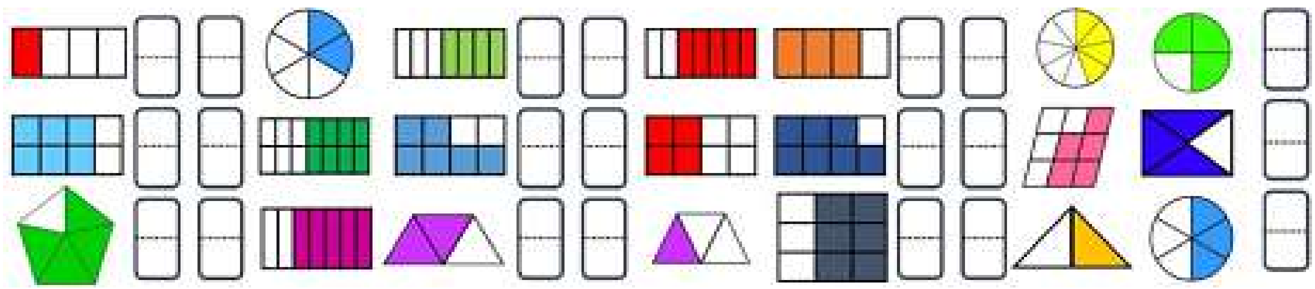
Representación gráfica y relación de orden de los números racionales

Represente los siguientes números racionales:

1) $\frac{3}{7}$ **2)** $\frac{2}{5}$ **3)** $\frac{15}{4}$ **4)** $1\frac{5}{8}$ **5)** $-\frac{2}{9}$ **6)** $-2\frac{1}{5}$

Observa las siguientes figuras y completa la fracción que representa:

7)



Equivalencia de números racionales

Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones:

8) $\frac{5}{4}=\frac{30}{24}$ **10)** $\frac{7}{9}=\frac{63}{81}$ **12)** $\frac{4}{3}=\frac{240}{180}$ **14)** $\frac{15}{34}=\frac{75}{170}$

9) $\frac{5}{4}=\frac{30}{24}$ **11)** $\frac{12}{17}=\frac{36}{51}$ **13)** $\frac{26}{6}=\frac{104}{24}$ **15)** $\frac{14}{37}=\frac{12}{20}$

Simplificación de fracciones

Simplifica las siguientes fracciones:

16) $\frac{14}{35}=$ **18)** $\frac{135}{150}=$ **20)** $\frac{120}{180}=$ **22)** $\frac{200}{360}=$ **24)** $\frac{12}{60}=$

17) $\frac{10}{48}=$ **19)** $\frac{80}{160}=$ **21)** $\frac{24}{72}=$ **23)** $\frac{40}{240}=$ **25)** $\frac{33}{121}=$

Fracciones propias, impropias y mixtas

Convierte las siguientes fracciones mixtas a fracciones propias:

26) $1\frac{4}{5}=$ **27)** $2\frac{3}{4}=$ **28)** $3\frac{2}{3}=$ **29)** $-1\frac{7}{9}=$ **30)** $-2\frac{3}{7}=$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Adición y sustracción

Realiza las siguientes operaciones con números racionales:

1) $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=$ **4)** $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=$ **7)** $1\frac{1}{10}+2\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-2\frac{1}{10}-\frac{7}{10}=$

2) $1-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=$ **5)** $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{6}=$ **8)** $1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1\frac{1}{5}-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}=$

3) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{2}-\frac{1}{5}=$ **6)** $1\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}=$ **9)** $5\frac{1}{5}-1\frac{1}{2}-2\frac{1}{10}-1\frac{1}{5}+2=$

Multiplicación de números racionales

Multiplica las siguientes fracciones:

10) $\left(-\frac{14}{15}\right)\cdot\left(-\frac{30}{70}\right)=$ **11)** $\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-6\frac{1}{4}\right)=$ **12)** $\frac{13}{17}\cdot\left(-\frac{51}{39}\right)\cdot\left(-\frac{25}{40}\right)=$

División de números racionales

Divide las siguientes fracciones:

13) $\frac{2}{7} \div \frac{10}{14} =$ **14)** $\frac{3}{8} \div \frac{9}{16} =$ **15)** $\left(-\frac{8}{15}\right) \div \left(-1\frac{3}{5}\right) =$ **16)** $\left(1\frac{5}{6}\right) \div \left(2\frac{9}{12}\right) =$

Potenciación de números racionales

Encuentra la potencia de las siguientes fracciones:

17) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$ **18)** $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ **19)** $\left(\frac{5}{7}\right)^4 =$ **20)** $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 =$ **21)** $\left(-\frac{6}{7}\right)^2 =$

Radicación de números racionales

Calcula las raíces de los siguientes radicales con fracciones:

22) $\sqrt{\frac{169}{225}} =$ **23)** $\sqrt{\frac{64}{121}}$ **24)** $\sqrt[3]{-\frac{27}{343}} =$ **25)** $\sqrt[4]{\frac{81}{10000}} =$ **26)** $\sqrt{2\frac{1}{4}} =$

Problemas aplicados al contexto y a la tecnología

Resolver los siguientes problemas:

27) En un evento deportivo las dos terceras partes son personas mayores y el resto niños que no pagan su entrada. En boletería dicen que han ingresado 1250 personas en forma gratuita. ¿Cuánto público ha asistido al evento?

28) El colegio compra dos tercios de pupitres, un cuarto de mesas y dos quintos en vitrinas para libros, si en total se compraron 600 muebles, ¿cuánto de cada rubro se compró?

29) En un salón de fiestas se ve que las dos quintas partes de invitados son adultos y el resto son jóvenes, si en la fiesta hay 1200 personas, ¿cuántos adultos y jóvenes son?

30) En una campaña de solidaridad con los enfermos de un hospital, Rider ha recaudado Bs 1200, Adolfo ha recolectado los dos tercios de lo que recolecto Rider, Jacinto tiene la mitad de lo que tiene Adolfo y Delma recaudó un equivalente a una cuarta parte de lo que recolectó Adolfo. ¿Cuánto han recaudado todos juntos?

31) Se reparte una propiedad de 600 hectáreas entre dos hermanos: a Mario le toca las dos quintas partes y el resto para Aneth, ¿cuántas hectáreas le toca a cada uno?

NÚMEROS DECIMALES COMO CONSECUENCIA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Transforma las siguientes fracciones en números decimales y menciona el tipo de decimal que es:

1) $\frac{2}{5} =$ **2)** $\frac{3}{7} =$ **3)** $\frac{5}{9} =$ **4)** $\frac{13}{40} =$ **5)** $\frac{5}{24} =$

Operaciones con números decimales

Adición y sustracción de números decimales

Sumar y restar los siguientes decimales:

6) $0.356-0.123+3.25+1.87+3.45-3.22=$ **7)** $4.121+2.314+1.12-3.3-3.13-0.9=$

8) $1.3-0.1+3.01-2.7+3.5-3.2+1.9-0.66=$ **9)** $14.751+5.4-19.01-10.01+12.1-1.1=$

Multiplicación de números decimales

Multiplicar los siguientes números decimales:

10) $(21.13 \cdot 7.12)=$ **11)** $(0.76 \cdot 0.78)=$ **12)** $(3.25 \cdot 2.11)=$ **13)** $(23.678 \cdot 6.45)=$

División de números decimales

Dividir los siguientes decimales:

14) $(558.3 \div 3)=$ **15)** $(12.72 \div 6.1)=$ **16)** $(1356 \div 7.2)=$ **17)** $(114.7 \div 4.2)=$

Fracción generatriz

Encontrar la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

18) $0.4 =$ **19)** $1.35 =$ **20)** $0.\overset{\frown}{8} =$ **21)** $1.\overset{\frown}{25} =$ **22)** $1.5\overset{\frown}{78} =$

23) $0.125 =$ **24)** $2.8 =$ **25)** $2.\overset{\frown}{67}=$ **26)** $0.1\overset{\frown}{4} =$ **27)** $2.23\overset{\frown}{43}=$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES Y DECIMALES

Resuelve las siguientes operaciones combinadas de números racionales y decimales:

1) $\sqrt{\frac{5}{4}+5-\left[\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}\right]}$

2) $\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{8}\div\frac{5}{2}}-\sqrt{5+\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{49}{16}}}$

3) $\left[\sqrt[3]{5-\frac{13}{8}}\cdot\sqrt{2-0,\widehat{2}}+\frac{1}{2}\right]^2-\sqrt{\frac{625}{16}}$

4) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\sqrt{\frac{1}{9}}\right]^4+\sqrt{\frac{45}{20}}-\left[\frac{1.\widehat{6}}{2.\widehat{3}}\right]-\sqrt{1-\frac{75}{196}}=$

5) $\dfrac{\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\left[\left(\frac{7}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{49}{81}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}\div\sqrt{\frac{30}{50}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{16}{18}}}-\dfrac{\left[\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right]^2}{\left[1+\frac{17}{64}\right]^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{\frac{4}{7}}^{\,0}=$

6) $\dfrac{\sqrt{\frac{7}{4}\cdot\left(4-\frac{6}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{11}\right)}-\sqrt{1}}{\left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\sqrt{\frac{25}{64}}}=$

Notación científica

Escribe en notación científica los siguientes números:

1) $4500000=$ **3)** $125600000=$ 5) $920100000000=$ **7)** $203000000=$

2) $0.000045=$ **4)** $0.00001232=$ **6)** $0.000000001=$ **8)** $0.00000901=$

Operaciones con notación científica

Encuentra el resultado de las siguientes cantidades en notación científica:

1) $3.4\cdot10^6+2.5\cdot10^6+5.4\cdot10^6-9.8\cdot10^6=$

2) $13.2\cdot10^{-5}+12.4\cdot10^{-6}-1.4\cdot10^{-4}=$

3) $(1.2\cdot10^6)\cdot(2.4\cdot10^8)=$

4) $(7.6\cdot10^{-2}))\cdot(4.9\cdot10^{-3})=$

5) $\dfrac{8.324\cdot10^{-5}}{4.221\cdot10^{-9}}=$

6) $5.4\cdot10^8+9.3\cdot10^7-7.3\cdot10^6+3.88\cdot10^5-4.56\cdot10^8=$

7) $2.3\cdot10^{10}-32.7\cdot10^9+23.9\cdot10^8-0.8\cdot10^{11}-1.6\cdot10^9=$

8) $(3.65\cdot10^7)\cdot(1.1\cdot10^{-5})=$

9) $\dfrac{5.7510^5}{2.3\cdot10^{-2}}=$

RAZONES, PROPORCIONES Y REGLA DE TRES

Razones y proporciones

Comprobar mediante la propiedad fundamental de proporcionalidad las siguientes razones:

1) $\frac{3}{2}=\frac{75}{50}$ **3)** $\frac{8}{15}=\frac{24}{45}$ **5)** $\frac{6}{13}=\frac{36}{78}$ **7)** $\frac{33}{44}=\frac{3}{4}$

2) $\frac{12}{7}=\frac{60}{35}$ **4)** $\frac{5}{8}=\frac{35}{56}$ **6)** $\frac{6}{16}=\frac{24}{64}$ **8)** $\frac{9}{34}=\frac{18}{68}$

Encontrar el valor de x en las siguientes razones proporcionales:

9) $\frac{8}{10}=\frac{x}{5}$ **11)** $\frac{12}{16}=\frac{x}{80}$ **13)** $\frac{x}{35}=\frac{16}{140}$ **15)** $\frac{23}{46}=\frac{x}{8}$

10) $\frac{120}{x}=\frac{240}{22}$ **12)** $\frac{15}{x}=\frac{45}{60}$ **14)** $\frac{650}{2600}=\frac{25}{x}$ **16)** $\frac{3x}{4}=\frac{12}{16}$

Magnitudes directamente proporcionales

Completar las siguientes tablas:

1)

Precio (Bs)	10				
Aceite (litro)	1	2	5	10	20

2)

Manzanas	1	2	4	10	24
Precio (Bs)		4			

3)

Distancia (m)	2	5	8	10	30
Tiempo (s)	4				

4)

Manzanas	2	3	5	8	10
Precio (Bs)	240				

Magnitudes inversamente proporcionales

Completar las siguientes tablas

1)

Obreros	1	2	5	10	15
Dias de trab.	4				

2)

Obreros	2	4	5	8	10
Dias de trab.	10				

3)

Jóvenes	10	20	15	30	50
Raciones/día	4				

4)

Jóvenes	6				
Raciones/día	1	3	5	10	20

Porcentajes

Encontrar el porcentaje en los siguientes problemas:

1) Encuentra el 35% de 450 **2)** Halla el 80% de 2200 **3)** Halla el 15% de 675

4) Un padre de familia distribuye su sueldo de Bs 3450 de la siguiente manera: 60% para alimentación, 15% para servicios básicos, 12% para estudios de los hijos y el saldo para otros gastos. Halla el monto que corresponde a cada rubro.

5) Se compra un coche en Bs 6800 y después de un año se lo vende en Bs 6222. ¿Qué porcentaje se ha perdido respecto al precio de compra?

Regla de tres simple directa

Resolver los siguientes problemas:

1) Un tren recorre 1400 km en 8 horas. ¿Cuántos km avanzará, a la misma velocidad en 3 horas?

2) 14 metros de tela costaron Bs 392. ¿Cuántos metros de la misma tela se podrán comprar con Bs 252?

3) Si una docena y media de manzanas cuesta Bs 7.20, ¿cuánto cuesta una manzana?

4) 10 obreros abren una zanja de 800 m de largo, ¿cuánto abrirán 13 obreros?

Regla de tres simple inversa

Resolver los siguientes problemas:

1) Para construir un edificio en 100 días son necesarios 36 obreros. ¿Cuántos se necesitarán para construirlo en 60 días?

2) Un obrero necesita trabajar 32 horas para cumplir un pedido. Si se emplean 4 obreros, ¿cuánto tiempo emplearán para ejecutar el mismo trabajo?

3) Para construir una pared se necesitan 2 obreros para realizarlo en 6 días, ¿cuántos obreros se necesitan para levantar la pared en 2 días?

4) Doce exploradores llevan una cantidad de alimentos para 24 días, pero el primer día se encuentran con otros 6 exploradores, perdidos y sin alimentos. ¿Para cuántos días les alcanzarán los alimentos?

Regla de tres compuesta

Resolver los siguientes problemas:

1) Cinco máquinas hacen un trabajo en 12 días funcionando 9 horas al día, ¿cuántos días deben trabajar 9 máquinas funcionando 6 horas al día?

2) En 4 días trabajando 8 horas día 3 hornos industriales producen 8400 panes. Si uno de los hornos sufre un desperfecto, ¿cuántos panes producen los otros hornos en 7 días a razón de 10 horas día?

3) Nueve obreros trabajando 8 horas día levantan en 10 días un muro de 3 m de alto y 60 m de largo, ¿cuántos obreros se necesitan para hacer un muro de 2.20 m de alto y 320 m de largo, en 6 días trabajando 16 horas día?

4) En un campamento de 400 jóvenes hay víveres para 15 días a razón de 3 raciones por día para cada uno. Si a última hora se aumentan 50 jóvenes y deciden aumentar a 4 raciones por día, ¿cuántos días les durará los víveres?

5) Cuatro obreros, en 12 días y trabajando 9 horas diarias, levantan un muro de 60 m de largo, 1.5 m de alto y 25 cm de ancho. ¿Cuántos obreros se requerirán para levantar otro muro de 45 m de largo, 2.5 m de alto y 40 cm de ancho, si tienen que levantarlo en 15 días trabajando 8 horas diaria?

6) Una patrulla de 20 jóvenes voluntarios tiene víveres para 6 días, a razón de 4 raciones por día cuando trabajan en una zona de desastre. Si se aumentan 5 voluntarios desde el primer día y deciden reducir su alimentación a 3 raciones diarias. ¿Qué tiempo les durarán los víveres?

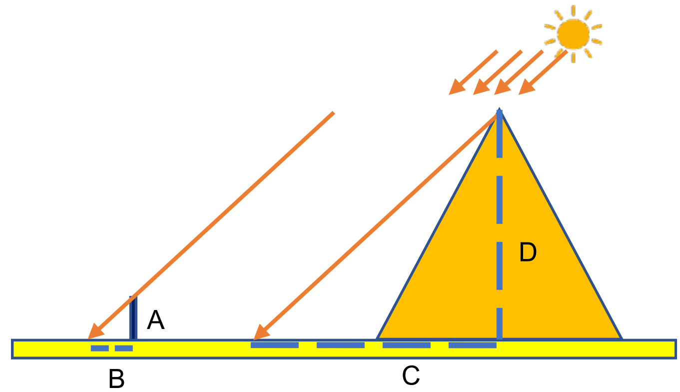
LA FORMA, EL NÚMERO Y SEMEJANZA EN GEOMETRÍA

PRÁCTICA

La pirámide de Keops fue construida por los antiguos egipcios. Un matemático griego de nombre Thales de Mileto coloca una vara en el suelo de forma perpendicular. Conociendo su altura midió su sombra y teniendo la distancia del centro de la pirámide al lugar donde cae la sombra proyectada por la pirámide, aplica la relación:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

Con lo cual determinó la altura que tiene la pirámide de Keops.



Actividad

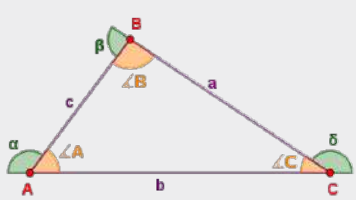
Realizamos las siguientes actividades:

- Calculamos la altura de un poste de luz en tu barrio.
- Ahora probemos con el cálculo de la altura de un edificio, un árbol u otros que no se puedan calcular de manera inmediata.

TEORÍA

Reto

Observa el triángulo:



Considerando el triángulo anterior, analizamos y escribimos los siguientes elementos:

Vértices: ……………………

Lados: ………………………

Segmentos: …………………

Ángulos internos:

……………………………………

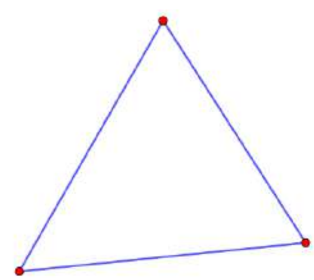
Ángulos externos:

……………………………………

1. Triángulos y su clasificación

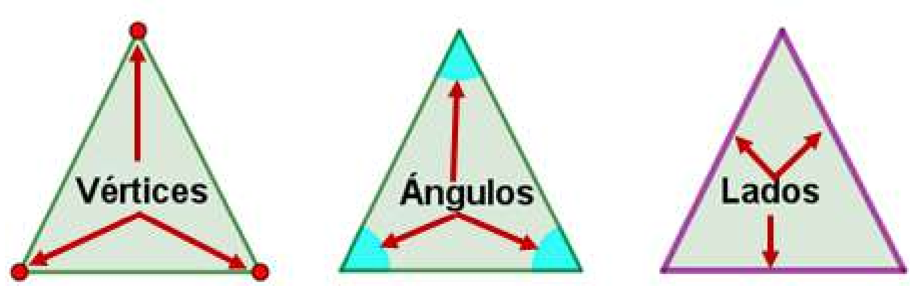
a) Definición

Se llama triángulo a la figura formada por la unión de segmentos determinados al unir tres puntos no colineales.



b) Elementos de un triángulo

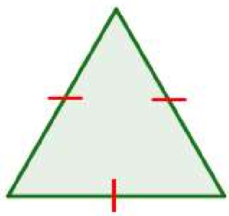
Los elementos de un triángulo son: vértices, lados y ángulos interiores



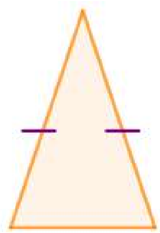
c) Clasificación

Los triángulos se clasifican por sus lados y por sus ángulos.

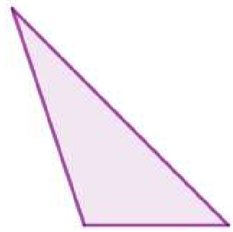
- **Por sus lados,** se clasifican en: Equilátero, Isósceles y Escaleno.



Triángulo equilátero
3 lados iguales

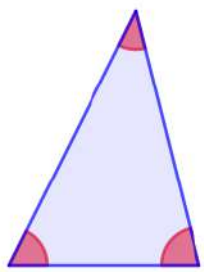


Triángulo isósceles
2 lados iguales

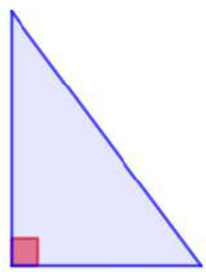


Triángulo escaleno
3 lados diferentes

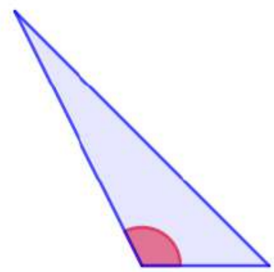
- **Por sus ángulos,** los triángulos se clasifican en: Acutángulo, rectángulo y oblicuángulo.



Triángulo acutángulo
3 ángulos menores a 90°



Triángulo rectángulo
1 ángulo igual a 90°



Triángulo obtusángulo
1 ángulo mayor a 90°

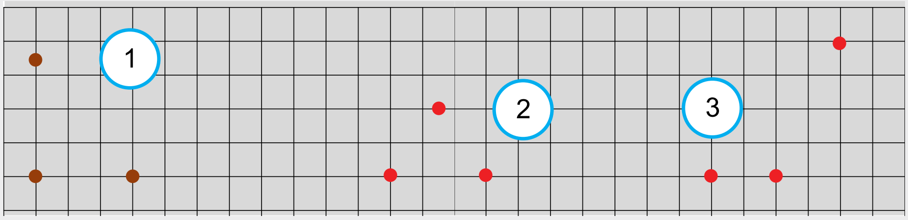
Usos y aplicaciones

Los segmentos, ángulos y triángulos son muy usados en la vida diaria, basta observar a nuestro entorno para identificar las formas y se presentan en diferentes aplicaciones como en ingeniería y la arquitectura, etc.

Puentes Trillizos, La Paz

Actividad

Trazamos los segmentos determinados por los puntos y, con instrumentos geométricos, medimos sus lados y ángulos, completamos la tabla con SI o NO según corresponda:



Triángulo	Escaleno	Isósceles	Equilátero	Acutángulo	Obtusángulo	Rectángulo
1						
2						
3						

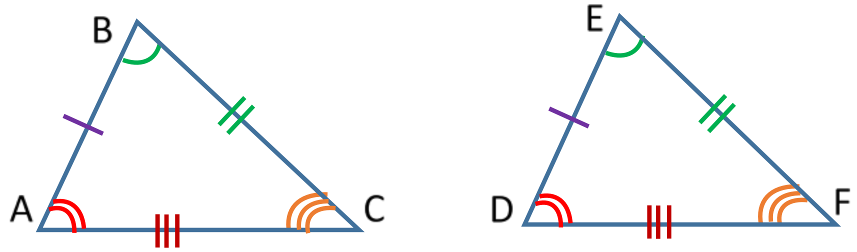
Dato curioso

El triángulo es una figura que aparece frecuentemente en el campo de la ingeniería, por ejemplo, en las estructuras de los puentes, en la agrimensura para medir terrenos, en la navegación, en el cálculo de distancias, etc.

San José de Chiquitos, Bolivia

2. Congruencia de triángulos en el entorno

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

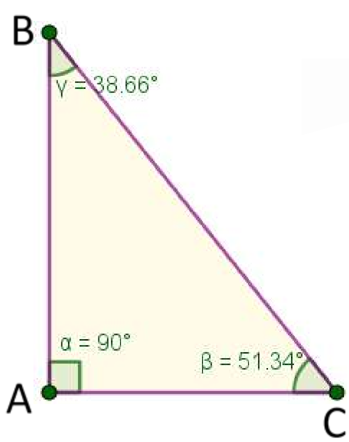


Si el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF, la relación se escribe así:

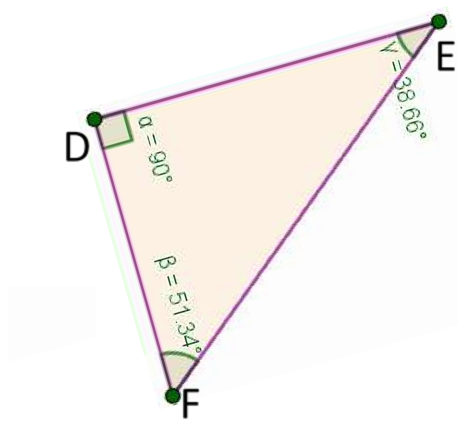
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Ejemplo:

Considerando los siguientes triángulos, se puede evidenciar que los lados de los dos triángulos son iguales, así como sus ángulos correspondientes. Se puede concluir que:



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$



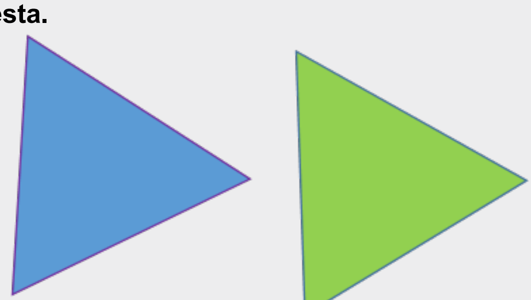
Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

1) Analizamos la imagen y respondamos:

- ¿Cuántos triángulos se pueden encontrar en las estructuras de los juegos?
- ¿Qué tipo de triángulos son?
- ¿Qué otras figuras planas se pueden identificar?

2) ¿Son congruentes los siguientes triángulos? Justifiquemos la respuesta.



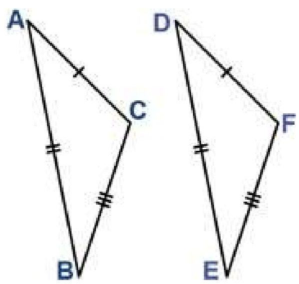
3. Criterios para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA)

En general, se puede construir un triángulo si se conoce:

- Las medidas de dos de sus lados y del ángulo formado por ellos.
- Las medidas de dos de sus ángulos y el lado adyacente a ellos.
- Las medidas de sus tres lados.
- Sabemos que dos triángulos son congruentes si sus tres lados y sus tres ángulos coinciden perfectamente, de ahí que podemos afirmar los criterios:

- **LLL: lado, lado, lado**

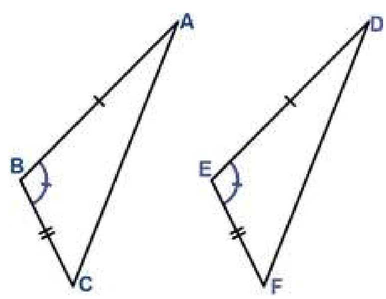
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \cong \overline{DE}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \overline{CA} \cong \overline{FD}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

- **LAL: lado, ángulo, lado**

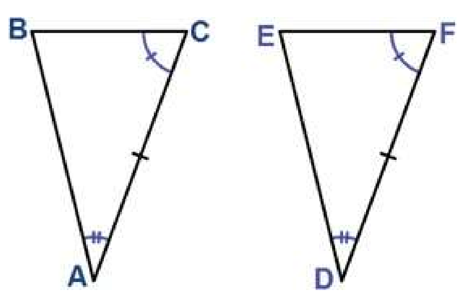
Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo formado por ellos son respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \cong \overline{DE}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

- **ALA: ángulo, lado, ángulo**

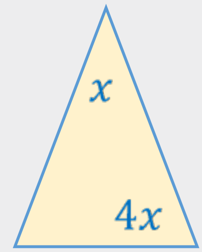
Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle EFD\\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Reto

En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?



Fuente: Solucionario de Matemática, Tomo 1.

Actividad

Realizamos la siguiente actividad:

Trazamos 3 pares de triángulos, con sus medidas correspondientes: ángulos y lados, luego determinamos si son semejantes o no.

4. Planteamiento y resolución de problemas relacionados a la congruencia de triángulos

Frecuentemente encontramos situaciones en que debemos reproducir la forma y el tamaño de algún objeto, ya sea para reemplazarlo, para fabricar otros, etc. Figuras de igual forma y tamaño aparecen en edificios de departamentos, en construcciones como puentes, en logotipos de algunas marcas o empresas, etc.

En matemática las figuras que tienen la misma forma y tamaño se llaman figuras congruentes.

En el caso específico de los triángulos, para asegurar que son congruentes es suficiente que tengan:

- Dos lados y el ángulo comprendido;
- Un lado y dos ángulos igualmente dispuestos;
- Los tres lados;
- Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

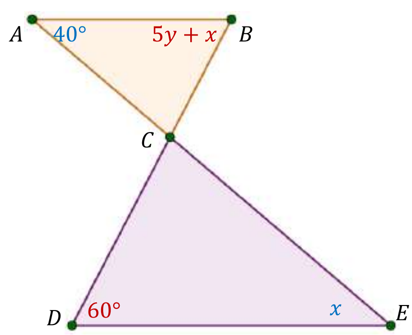
Sobre los triángulos

"A todo triángulo que tiene al menos dos lados congruentes lo llamamos isósceles, a aquel que tiene los tres lados congruentes lo llamamos equilátero y al que tiene los tres lados distintos lo llamamos escaleno".

"Si dos lados de un triángulo son congruentes, los dos ángulos opuestos a ellos también lo son".

"Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los dos lados opuestos a ellos también lo son".

Ejemplo. En la figura, los puntos A, C y E son colineales, así como también lo son B, C y D y que AB y DE son paralelas. Se debe determinar los valores de x e y.



Por el ángulo en común y los datos, aseguramos que:

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DEC \quad \Rightarrow \quad x = 40°$

Luego:

$\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle ABC \quad \Rightarrow \quad 60° = 5y + x$

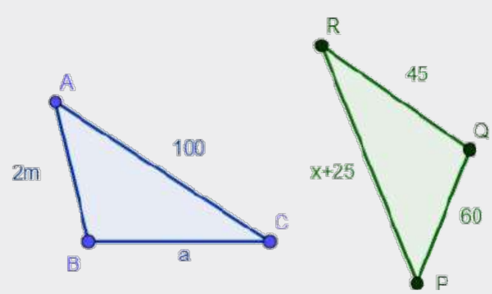
Resolviendo:

$$60° = 5y + 40°$$
$$20° = 5y$$
$$y = 4°$$

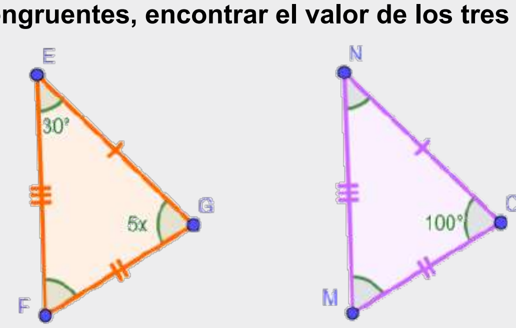
Actividad

Resolvemos:

1) Sabiendo que los triángulos son congruentes, determinar los valores de a, m y x



2) Si los triángulos son congruentes, encontrar el valor de los tres ángulos congruentes.



5. Triángulos semejantes

El teorema de Tales es fundamental en semejanza de triángulos, menciona que:

“Si dos rectas cualesquiera en diferente posición y con un punto de corte son cortadas por otras dos rectas paralelas, entonces los segmentos que determinan a ellas son proporcionales”

En el gráfico a la derecha tendremos:

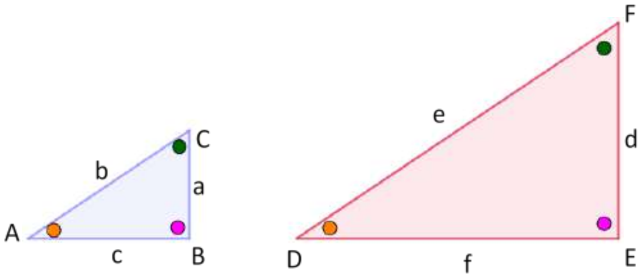
$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$$

Definición. Dos triángulos son semejantes si ambos tienen sus ángulos iguales, aunque no tengan la misma dirección.

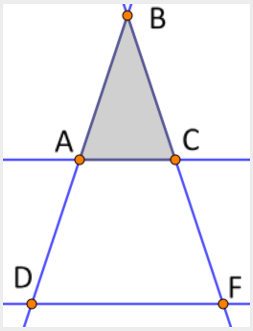
$$\measuredangle A = \measuredangle D, \measuredangle B = \measuredangle E, \measuredangle C = \measuredangle F \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

además:

$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k \in \mathbb{R}$$



Teorema de Tales

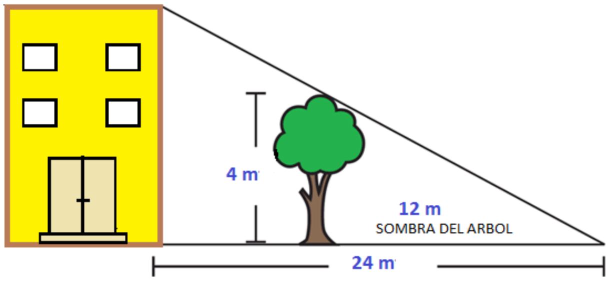


Los triángulos ABC y DBF están en posición de Tales puesto que tienen al ángulo B en común y los lados opuestos respecto a este ángulo son paralelos.
Los triángulos en posición de Tales siempre son semejantes.

Fuente: OpenAI, 2024

Ejemplo:

Se pide determinar la altura del edificio sabiendo que el árbol mide 4 metros, la sombra del árbol es de 12 metros y entre el pie del edificio y el extremo de la sombra del árbol hay 24 metros.



Sea h la altura del edificio. La disposición gráfica del problema supone la “posición de Tales”, luego, por el teorema de Tales se tendrá:

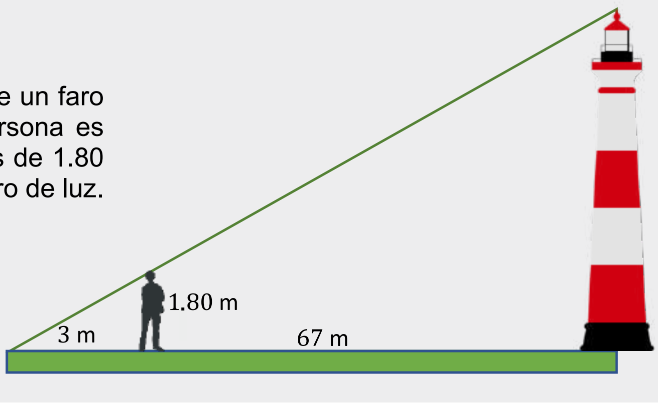
$$\frac{h}{4} = \frac{24}{12}$$

De donde $h = 8\text{ m}$.

Actividad

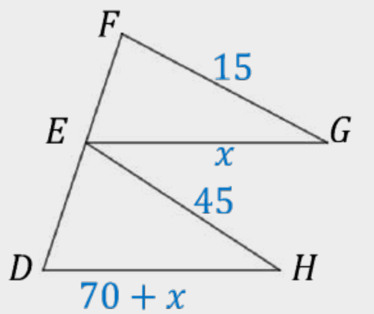
Resolvemos el siguiente problema:

Una persona se encuentra a 67 metros de un faro de luz. La sombra proyectada por la persona es de 3 metros. Si la altura de la persona es de 1.80 metros, se pide determinar la altura del faro de luz.



Reto

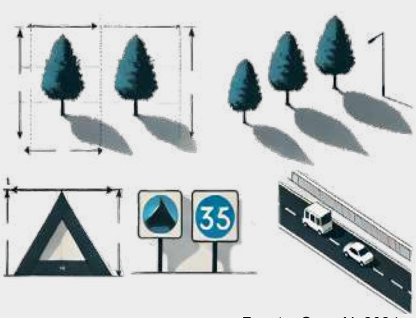
Calcule el valor de x, si $EG \parallel DH$ en la siguiente figura:



Fuente: *Solucionario de Matemática, Tomo 1.*

Aplicaciones prácticas

El principio de semejanza de triángulos permite calcular alturas como edificios, arboles o distancias inaccesibles usando la proporción de sombras o medidas indirectas



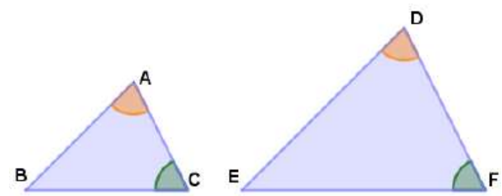
Fuente: OpenAI, 2024

6. Criterios de semejanza de triángulos (AAA, LLL, LAL)

Para determinar si dos triángulos son semejantes, basta con comprobar si cumplen algunos criterios que exigen menos condiciones que la definición. Se sabe que dos triángulos son semejantes si los ángulos y lados de los triángulos son correspondientes y congruentes, de ahí que podemos afirmar los siguientes criterios:

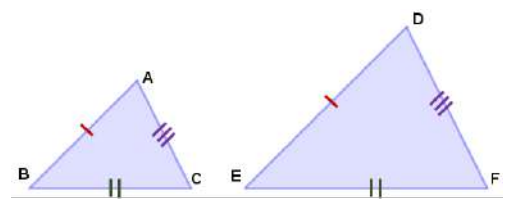
- **AAA: Ángulo, ángulo, ángulo**

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos correspondientes congruentes, en consecuencia, los terceros ángulos serán congruentes.



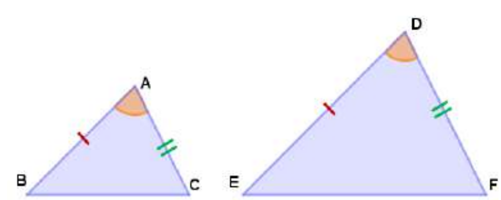
- **LLL: Lado, lado, lado**

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.



- **LAL: Lado, ángulo, lado**

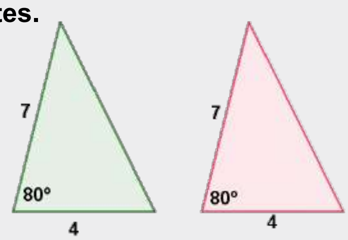
Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.



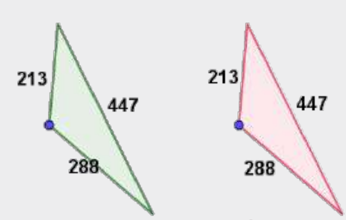
Actividad

Utilizando los criterios AAA, LLL, LAL, determinamos si los pares de triángulos son semejantes.

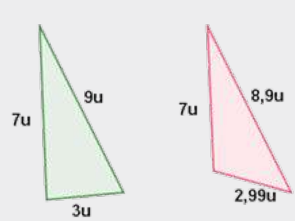
1)



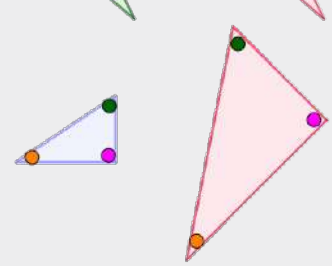
2)



3)



4)

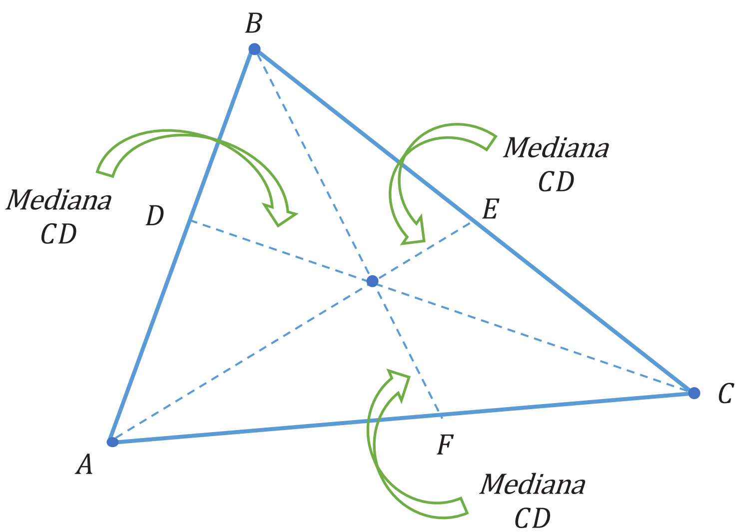


7. Rectas y puntos notables

En todo el universo matemático sobre triángulos hay toda una gama de características, propiedades, teoremas y curiosidades. En geometría para cualquier triángulo se pueden encontrar rectas y puntos muy importantes, entre las rectas notables más conocidas tenemos: las medianas, mediatrices, alturas y bisectrices, sobre los puntos notables al baricentro, circuncentro, ortocentro y el incentro.

a) Medianas

El segmento determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto se llama mediana. Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto llamado baricentro, el baricentro se encuentra en el interior del triángulo.



Proceso de construcción

1. *Dibujamos el triángulo ABC*
2. *Ubicamos los vértices del triángulo: A, B, C.*
3. *Encontramos los puntos medios de cada lado: D, E, F*
4. *Unimos cada punto medio con su vértice opuesto, tales rectas son las medianas del triángulo dado.*
5. *El punto de intersección de las medianas nos da el baricentro del triángulo.*
6. *Este punto encontrado es el centro de gravedad del triángulo.*

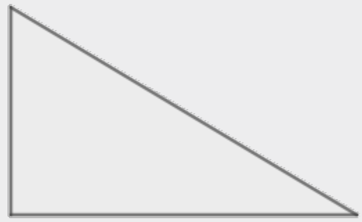
Se cumple que el baricentro divide a cada mediana con razón 2:1, de manera que la distancia desde el baricentro a cada vértice es el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto. Además, cada mediana del triángulo lo divide en dos triángulos de igual área y las tres medianas dividen al triángulo en 6 triángulos de áreas iguales.

Actividad

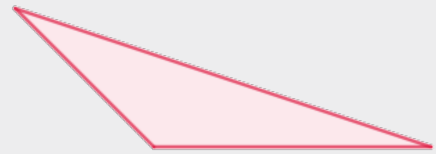
Considerando los triángulos siguientes, trazamos las medianas y determinamos su baricentro.

1)

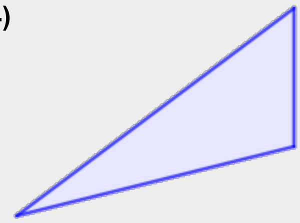
2)



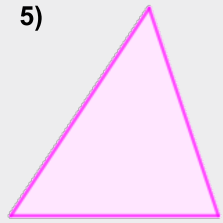
3)



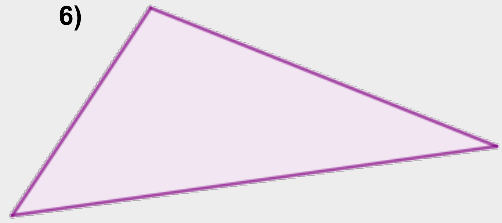
4)



5)

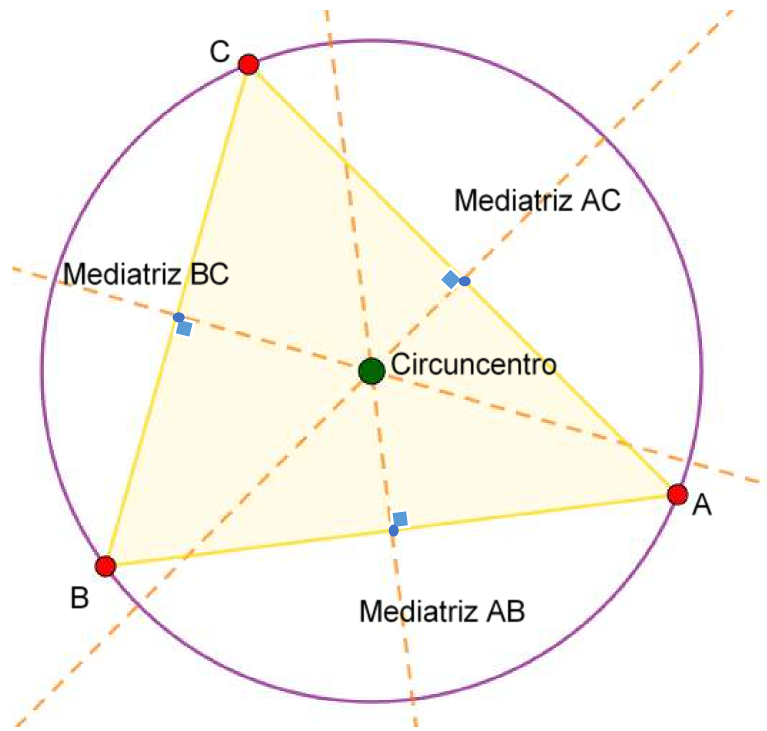


6)



b) Mediatriz

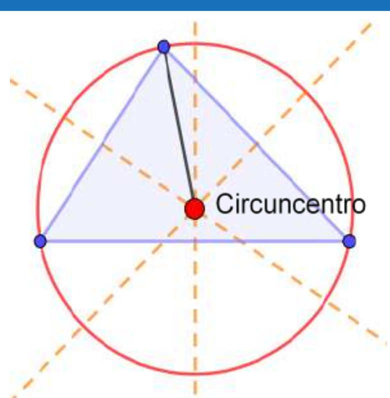
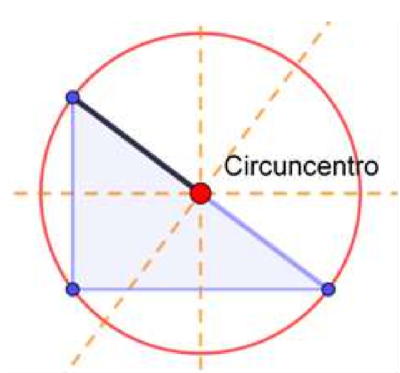
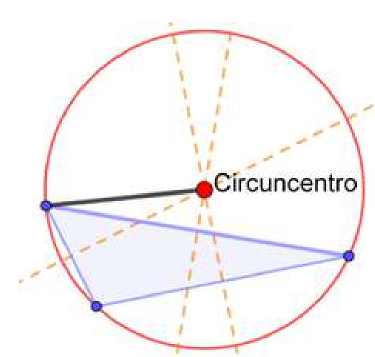
La recta perpendicular que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo se llama mediatriz, las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro, la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo se llama circunferencia circunscrita al triángulo.



Proceso de construcción

1. *Dibujamos el triángulo.*
2. *Encontramos los puntos medios de cada lado.*
3. *Dibujamos las líneas perpendiculares a cada punto medio, estas rectas son las mediatrices.*
4. *El punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro del triángulo. Este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices.*
5. *Para dibujarlo debemos utilizar el compás con la abertura del centro a uno de los vértices.*

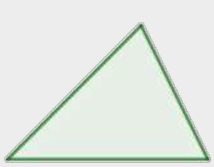
El circuncentro varía según el tipo de triángulo, como se muestra en la siguiente figura:

En el interior del triángulo	En el centro de la hipotenusa	En el exterior del triángulo
		

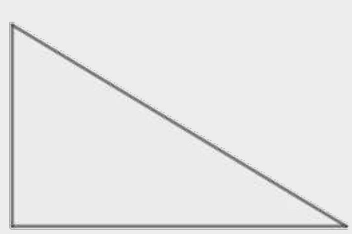
Actividad

Determinamos las mediatrices y el circuncentro de los triángulos:

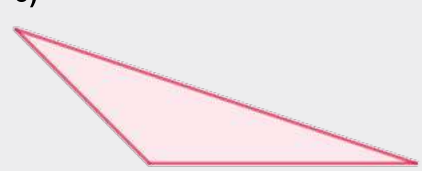
1)



2)

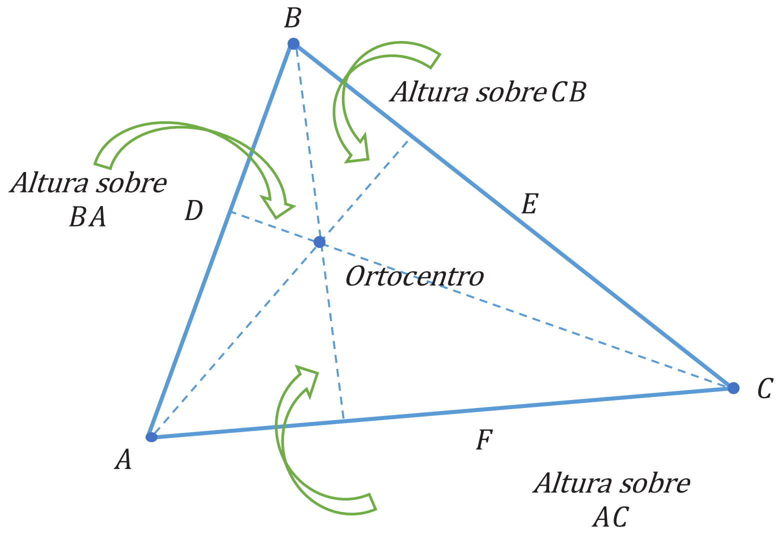


3)



c) Altura

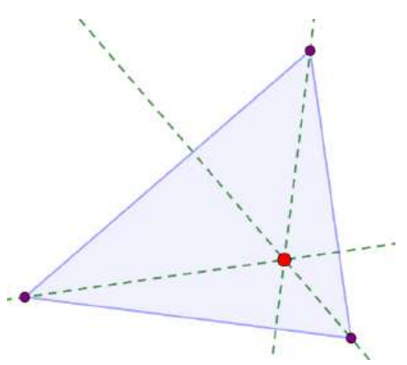
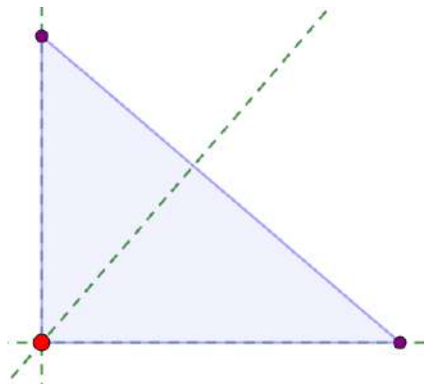
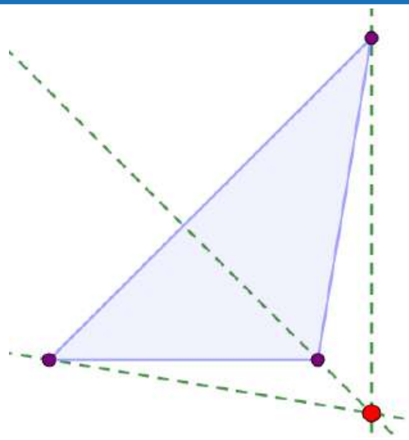
El segmento perpendicular determinado por un vértice y la recta que contiene el lado opuesto se llama altura, las rectas que contienen las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro, el punto de intersección de las medianas es el baricentro del triángulo.



Proceso de construcción

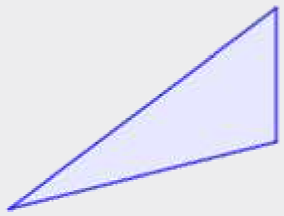
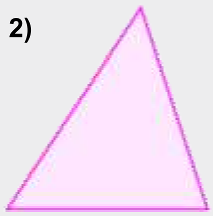
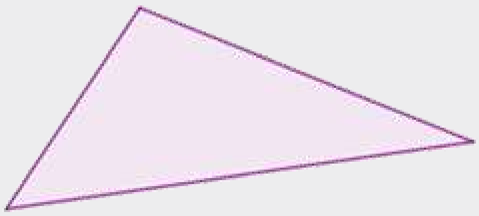
1. *Dibujamos el triángulo.*
2. *En cada vértice, con ayuda de una escuadra, trazamos una línea perpendicular al lado opuesto, estas rectas determinan las alturas en cada vértice del triángulo.*
3. *El punto de intersección de las alturas se llama ortocentro.*
4. *La posición del ortocentro dependerá del triángulo utilizado.*

El circuncentro varía según el tipo de triángulo, como se muestra en la siguiente figura:

Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
		

Actividad

Determinamos el ortocentro en cada uno de los triángulos:

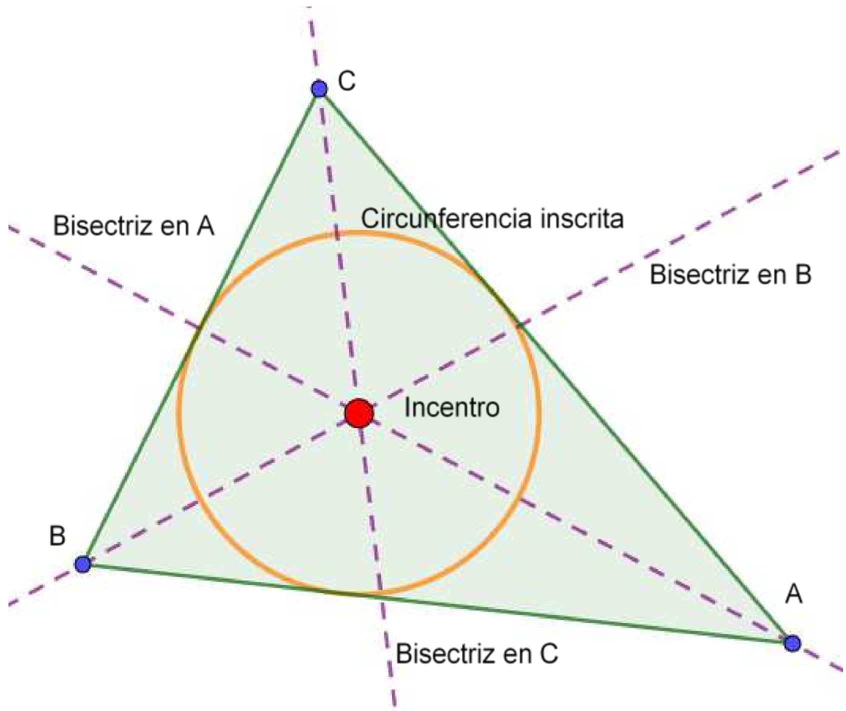
1)  **2)**  **3)** 

Proceso de construcción

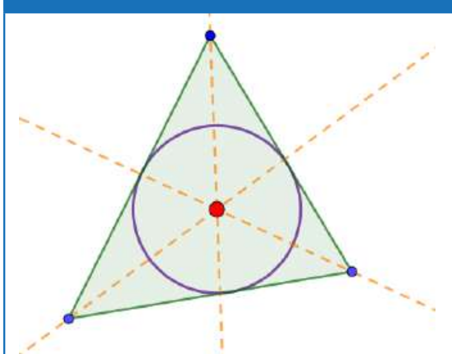
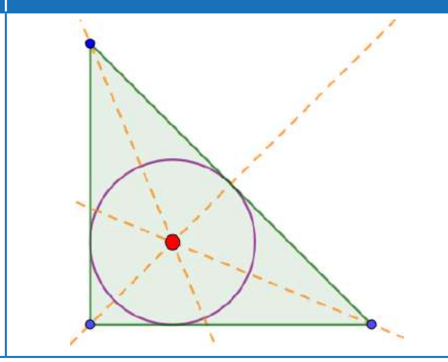
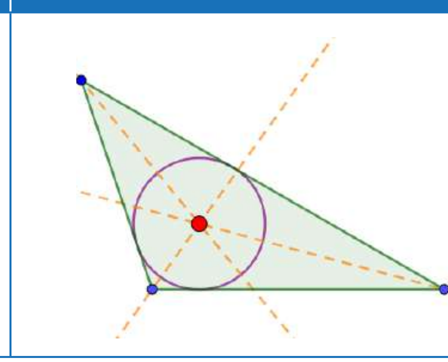
1. *Dibujamos el triángulo.*
2. *Medimos los ángulos interiores y marcamos los puntos medios de cada arco.*
3. *Trazamos las bisectrices uniendo un vértice con el punto medio de cada arco.*
4. *El punto de intersección de las bisectrices es el incentro del triángulo. Este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*

d) Bisectriz

El segmento de recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales se llama bisectriz. Las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto llamado incentro, la circunferencia cuyo centro equidista de los tres lados de un triángulo se llama circunferencia inscrita al triángulo.



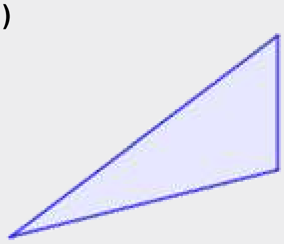
El incentro varía según el tipo de triángulo como se muestra en la siguiente figura:

Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
		

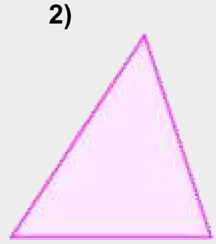
Actividad

Determinamos el incentro en cada uno de los triángulos:

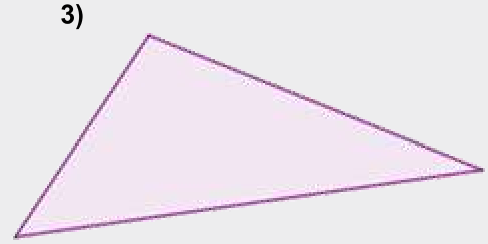
1)



2)



3)



8. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Con el desarrollo de la tecnología, la geometría está siendo muy utilizada en diversos campos profesionales y más aún en nuestro contexto, por ejemplo:

- Variadas aplicaciones utilizadas en las computadoras recurren a triángulos para establecer sombras y colores de las imágenes en la pantalla. Un sistema llamado triangulación define la forma del objeto y utiliza funciones de la trigonometría para establecer los colores de las imágenes.
- En la navegación, la triangulación es muy importante, ya que es muy utilizada para determinar posiciones de puntos, barcos, faros, medidas de distancias, etc.
- El GPS se utiliza en todo el mundo, utiliza triángulos para determinar la triangulación de llamadas, por ejemplo. Los triángulos en la industria, en la fabricación de tinglados, de soporte en algunas construcciones, etc.

Para resolver con ayuda de tu maestra/o

En el Lago Titicaca, un bote sale de un puerto con dirección norte y otro sale del mismo puerto con dirección sur a este de 45º. Determine el ángulo que forman las direcciones de los dos botes.

VALORACIÓN

Analizamos y respondemos:

¿Qué función tienen los triángulos en el puente?

¿Existen triángulos semejantes en tu entorno? ¿por qué están dispuestos de tal manera?

PRODUCCIÓN

Realizamos la siguiente actividad:

- Trazamos el diseño de un puente que sería de utilidad en tu región, basándonos en triángulos de cualquier tipo.
- Realizamos una descripción de nuestro diseño explicando por qué es eficiente tu propuesta (durabilidad, estabilidad, economía).

PERÍMETROS, ÁREAS Y FORMAS GEOMÉTRICAS APLICADAS A LA VIDA COTIDIANA

PRÁCTICA

La diversidad cultural del Estado Plurinacional de Bolivia muestra abundante riqueza en cuanto a los diseños y tejidos propios de cada región, éstos son valorados bajo estándares internacionales, a través de la difusión cultural establecida por las políticas de gobierno y políticas locales.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas y realizamos la actividad:

- ¿Cuáles son los tejidos que puedes mencionar y son utilizados por las familias de tu región?
- ¿Cuáles son las figuras geométricas que se distinguen en el tejido de la imagen?
- Dibujamos las figuras encontradas en diseños de nuestra región y nombramos cada una de ellas.

Observamos las imágenes:

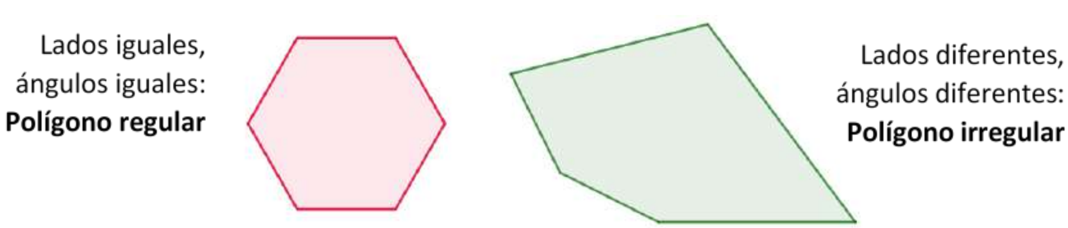
Actividad

Respondemos:
- ¿Qué es lo que más nos llama la atención de las imágenes?
- ¿Cuáles son las figuras geométricas planas que se distinguen?
- Si vemos a nuestro alrededor siempre encontraremos figuras geométricas planas, ¿qué figuras podemos mencionar desde el lugar en que nos encontramos?
- ¿Por qué crees que son importantes las figuras geométricas en nuestro diario vivir?

TEORÍA

Polígonos regulares e irregulares

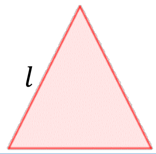
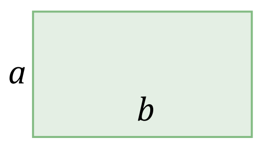
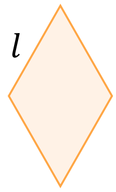
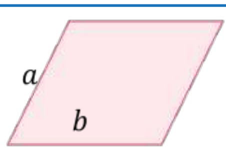
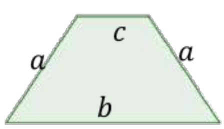
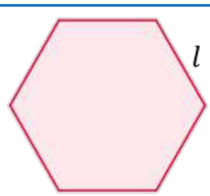
La palabra polígono hace referencia a una figura delimitada por lados rectos, también podemos indicar que se refiere a una figura geométrica plana formada por una línea poligonal cerrada. Los polígonos pueden ser regulares o irregulares.



1. Perímetro de polígonos regulares e irregulares

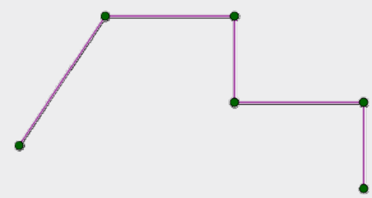
El perímetro de una figura geométrica plana, cualesquiera, es la longitud del contorno de la figura, en este sentido, hallar el perímetro es sumar las medidas de todos sus lados. El perímetro se mide en unidades lineales o de longitud, como el metro, centímetro, milla, etc.

El perímetro de un polígono, es igual a la suma de la longitud de todos sus lados.

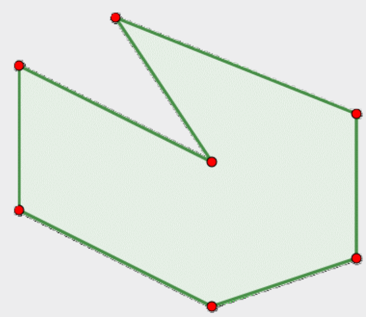
Polígono	Figura	Perímetro
Triángulo equilátero		$P = 3 \cdot l$
Cuadrado		$P = 4 \cdot l$
Rectángulo		$P = 2b + 2a$
Rombo		$P = 4 \cdot l$
Romboide o paralelogramo		$P = 2b + 2a$
Trapecio isósceles		$P = 2a + b + c$
Polígono regular		$P = n \cdot l$ "n" es el número de lados iguales del polígono

Dato Curioso

Una línea poligonal puede ser abierta o cerrada. Es abierta cuando dos segmentos tales que uno de sus extremos no está unido a otro segmento.

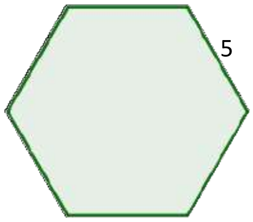


Es cerrada cuando todos los segmentos que lo forman están unidos a otros segmentos.

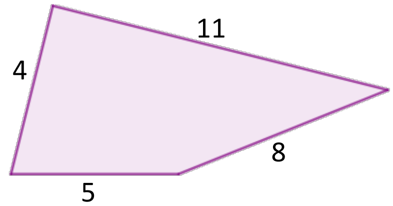


Ejemplos:

1) Encontrar el perímetro de cada figura:



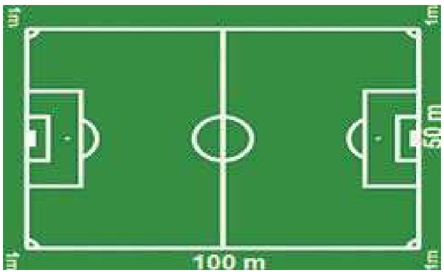
$P = n \cdot l$
$P = 6 \cdot l$
$P = 6 \cdot 5\ cm$
$P = 30\ cm$

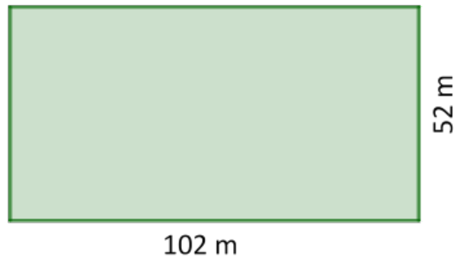


$P = a + b + c + d$
$P = 5 + 4 + 11 + 8$
$P = 28\ cm$

2) En un campo de fútbol, el largo mide 100 metros y el ancho 50 metros, se requiere colocar una malla perimetral, con un margen de 1 metro en cada lado, para dejar espacio a los jugadores, ¿cuántos metros de valla debemos comprar?

La cancha mide 100 m por 50 m, sin embargo, debemos dar margen de 1 metro a cada lado, por tanto, el rectángulo se convierte en:

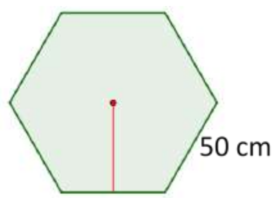




$$P = 2b + 2a$$
$$P = 2 \cdot 102 + 2 \cdot 52$$
$$P = 204\,m + 104\,m$$
$$P = 308\,m$$

Con los cálculos, se concluye que se deben comprar 308 metros de malla.

3) Un carpintero que construye mesas hexagonales para el nivel inicial, colocará una cinta alrededor de la misma para evitar rasmilladuras en los niños, si cada mesa tiene de lado 50 cm y debe construir 6 mesas, ¿cuántos centímetros de cinta necesitará?



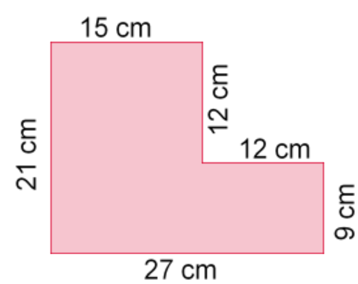
$$P = n \cdot l$$
$$P = 6 \cdot 50$$
$$P = 300\,m$$

El carpintero necesitará $6 \cdot 300 = 1800\,m$

4) Encuentra el perímetro de la figura.

Como podemos apreciar en primera instancia no tenemos los datos de todos los lados, para ello es necesario analizar las medidas para saber las otras medidas de los segmentos faltantes.

$$P{=}a{+}b{+}c{+}d{+}e{+}f$$
$$P{=}21{+}15{+}12{+}12{+}9{+}27$$
$$P{=}96$$
$$P{=}96\,cm$$



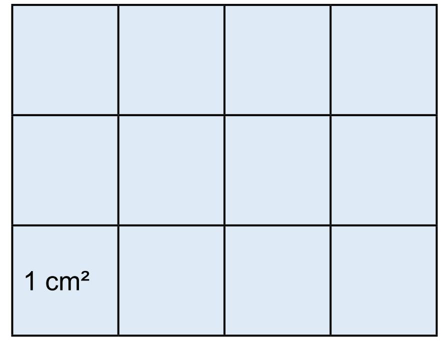
Actividad

Determinamos el perímetro en cada caso:

1) Cuadrado de 3 cm de lado.
2) Rectángulo de base 4 cm y ancho 7 cm.
3) Triángulo equilátero de 5 cm de lado.
4) Un jardinero piensa cercar su jardín triangular de 4 m, 4 m y 5 m de lado con alambre de púa a su alrededor, ¿cuántos metros de alambre necesitará?
5) Un albañil coloca ladrillos alrededor de un lote rectangular cuyas medidas son 15 m y 12 m de lado respectivamente, cada ladrillo tiene una longitud de 30 cm, ¿cuántos ladrillos necesitará para cercar el terreno?

2. Área de figuras planas: triángulos, polígonos regulares e irregulares

El área de una figura plana es la superficie de una figura geométrica cerrada, puede ser llamada superficie o área, su medida está dada en unidades cuadradas "u²" (m²; cm²; km²; ft²; yard²; pulg²; etc.), lo cual nos indica cuántos cuadrados de una unidad de lado caben en una figura geométrica. Analicemos el gráfico.



El rectángulo está formado por 12 cuadrados de 1cm por 1cm de lado, por lo tanto, se dice que el rectángulo tiene 12 cm² de superficie o de área.

A diferencia del perímetro, que se obtiene sumando sus lados. El área se obtiene multiplicando el largo por el ancho de sus lados, pero debido a las características que cada figura posee, la forma de determinar su área varía.

- **Área de un triángulo**

En un triángulo, el área se obtiene multiplicando la base (cualquiera de los lados), por la altura (distancia perpendicular a la base, con el vértice opuesto del triángulo) y dividido entre dos.

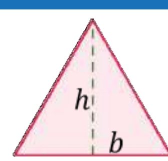
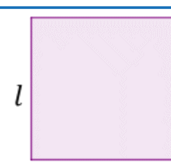
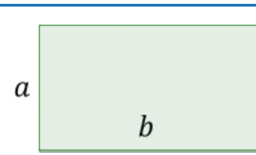
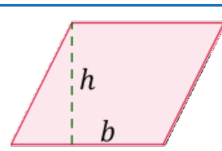
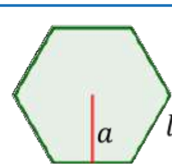
- **Área de un polígono regular**

Los polígonos regulares son figuras geométricas planas cuyos lados tienen el mismo tamaño, inscritos dentro una circunferencia, por lo cual la forma de determinar el área puede depender de los lados de la figura o del radio de la circunferencia.

- **Área de un polígono irregular**

La forma de determinar el área de estas figuras es realizando una partición o cortes, seccionando la figura en otras más simples y de simple determinación de áreas, triángulos o rectángulos.

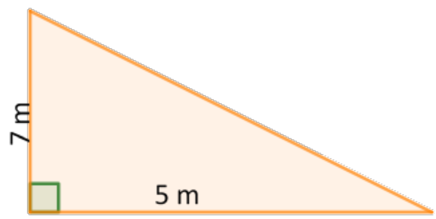
Antes de determinar áreas de figuras geométricas compuestas, iremos estudiando las áreas de figuras geométricas simples.

Polígono	Figura	Perímetro
Triángulo equilátero		$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Cuadrado		$A = l \cdot l = l^2$
Rectángulo		$A = a \cdot b$
Paralelogramo		$A = b \cdot h$
Polígono regular		$A = \frac{a \cdot n \cdot l}{2}$

Ejemplos:

Determina el área de cada región indicada.

1. Se pide determinar el área del triángulo siguiente:



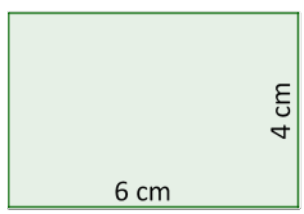
Se sabe que b=5 m y h=7 m, luego

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{5 \cdot 7}{2}$$

$$A = \frac{35}{2}$$

$$A = 17.5\, m^2$$

2. Si un rectángulo tiene como base 6 cm y altura 4 cm, entonces su área es:



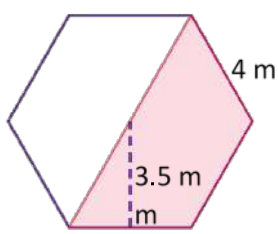
Se sabe que $b = 6\ cm$ y $a = 4\ cm$, luego:

$$A = a \cdot b \quad \rightarrow \quad A = 4 \cdot 6$$

$$A = 24$$

$$A = 24\ cm^2$$

3. Dado el hexágono, determinar el área sombreada:



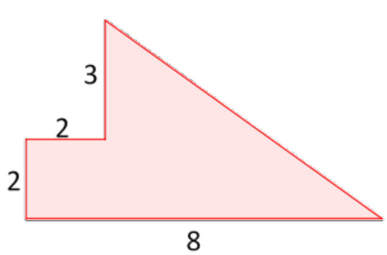
Se puede ver que el área sombreada equivale a la mitad del área del hexágono, además $n = 6,\ \ l = 4$ y $a = 3.5$, luego:

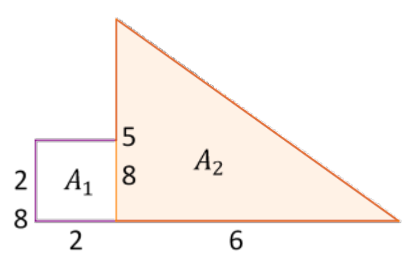
$$A = \frac{\frac{n \cdot l \cdot a}{2}}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3.5}{4}$$

$$A = 21$$

$$A = 21\ m^2$$

4. En la siguiente figura se debe hacer un corte para formar figuras planas conocidas y luego calcular su área:





Se puede ver un cuadrado de lado 2 y un triángulo de base 6 y altura 5, por lo que:

$$A_T = A_1 + A_2 = 2 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5}{2}$$

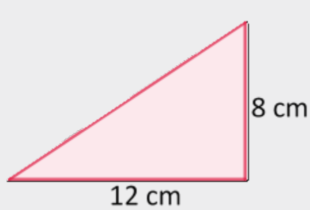
$$A_T = 4 + 15$$

$$A = 19\ [u^2]$$

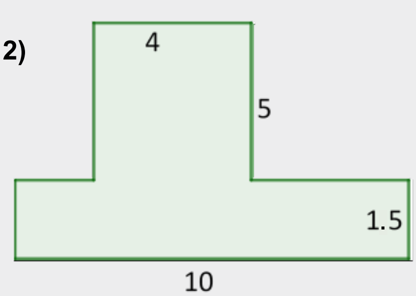
Actividad

Determinamos el área y perímetro de cada figura geométrica:

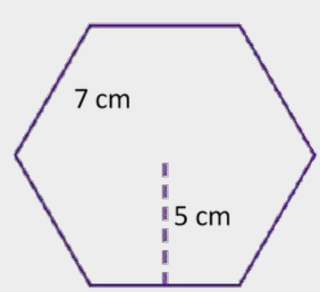
1)



2)



3)



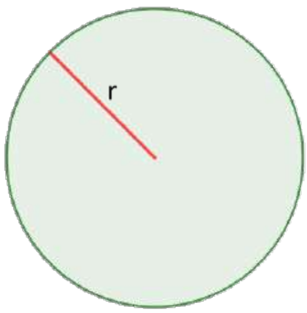
3. Círculo y circunferencia

– Círculo

Es una figura geométrica plana, representa a la superficie (o área) comprendida dentro de una circunferencia.
La forma de determinar su área está definida por $A = \pi \cdot r^2$ donde "r" es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia. Es importante hacer notar que $\pi = 3.14159265...$

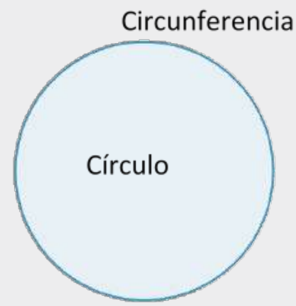
– Circunferencia

Es una figura geométrica que representa a la línea exterior de una figura circular, la cual puede ser considerada también como el perímetro del círculo. La forma de determinarla está dada por la formula $P = 2\pi \cdot r$



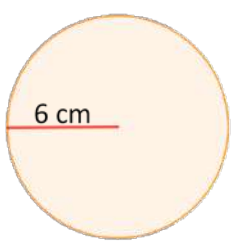
¡Hay diferencia!

La circunferencia no es lo mismo que el círculo. El círculo es el área que se contiene dentro de la circunferencia, mientras que la circunferencia es el borde del círculo.



Ejemplo:

Determinar el área del círculo y la longitud de la circunferencia del radio de 6 cm.



Perímetro

$P = 2\pi \cdot r$

$P = 2 \cdot 3.1416 \cdot 6$

$P = 37.70\ cm$

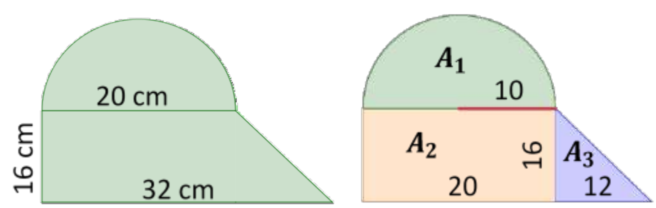
Área

$A = \pi \cdot r^2$

$A = 3.1416 \cdot 6^2$

$A = 113.09\ cm^2$

Hallar el área de la siguiente figura



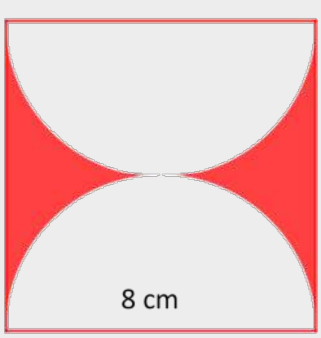
$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

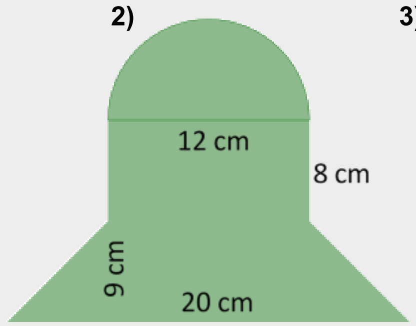
$A_T = 20 \cdot 16 + \dfrac{12 \cdot 16}{2} + 3.1416 \cdot 10^2$

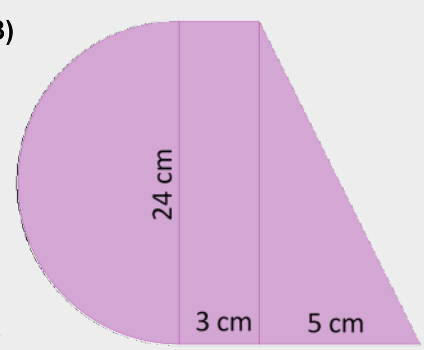
$A_T = 730.16\ cm^2$

Actividad

Determinamos las áreas de las regiones sombreadas:

1) 

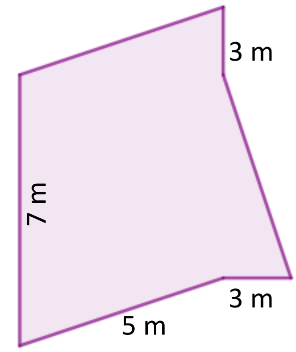
2) 

3) 

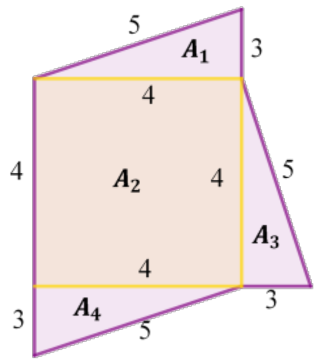
4. Problemas aplicados

En nuestro contexto las figuras geométricas planas y los polígonos regulares e irregulares son muy utilizados en diversos campos profesionales, productivos, científicos y tecnológicos, veamos algunos ejemplos sobre el cálculo de perímetros y áreas.

Ejemplo:



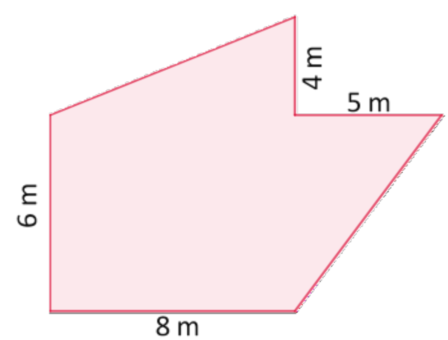
1) Una familia tiene un terreno como se muestra en la figura de abajo, quieren saber la medida de la región con que disponen y el perímetro para cercar con malla metálica el terreno, ¿cuánto será el costo del cercado si 100 metros tiene un costo de 2150 bolivianos?

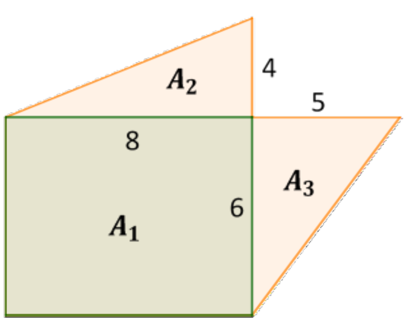


$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$
$$A_2 = 4^2$$
$$A_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$
$$A_4 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \Longrightarrow A_t = 6 + 16 + 6 + 6 = 42$$
$$P = 3 + 4 + 5 + 3 + 5 + 3 + 5 \Longrightarrow P = 28\ m$$

La región del terreno es de $34\ \mathrm{m}^2$, el perímetro que deben cercar es $28\ \mathrm{m}$ y el costo del cercado será de $\mathrm{Bs}\ 602$.

2) Un jardín municipal tiene la siguiente forma con las respectivas medidas. Determinar el área total que tiene el jardín.





Luego de hacer los cortes en la figura, se establecen las áreas correspondientes y se calcula el área total.

$$A_1 = 6 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad A_1 = 48$$
$$A_2 = \frac{8 \cdot 4}{2} \quad \rightarrow \quad A_2 = 16$$
$$A_3 = \frac{6 \cdot 5}{2} \quad \rightarrow \quad A_3 = 15$$

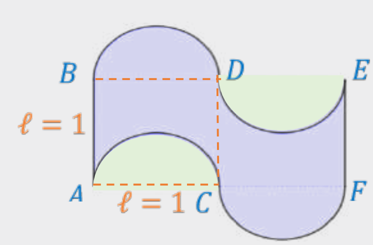
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 \quad \rightarrow \quad A_T = 48 + 16 + 15 \quad \rightarrow \quad A_T = 79\ m^2$$

Actividad

Resolvemos el siguiente problema:

Un terreno tiene la forma descrita en la imagen, se pide calcular el área de la región sombreada, si ABDC y DCFE son cuadrados de lado 1 cm.

¿De qué modo se puede determinar el perímetro?



VALORACIÓN

En 2021, el Estado Plurinacional de Bolivia registró la segunda cosecha más alta: 336 223 toneladas métricas. Esta cosecha resultó de sembradíos en el territorio nacional.

Las familias bolivianas producen variedad de productos para el consumo interno y el comercio, incluso para importación.

Los terrenos donde se producen estos productos no siempre son rectangulares y se necesita saber la producción en función del área, además de otros factores, con ello se pueden aproximar varios otros aspectos.

¡Bolivia es un país que exporta!

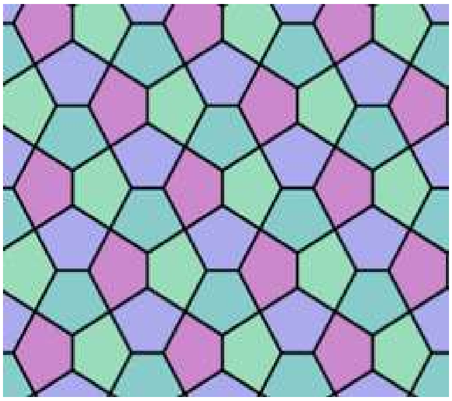
Averiguamos lo siguiente:

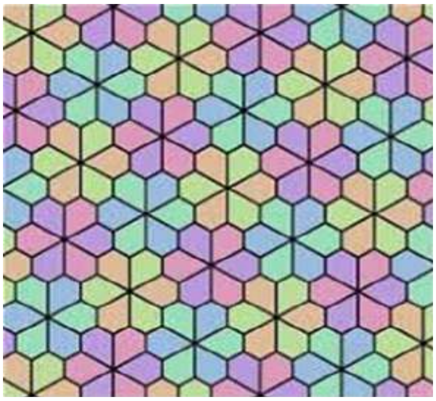
- ¿Cuál es el producto que en tu región mayormente se produce?
- Averigua sobre la forma geométrica que tienen los terrenos o sembradíos.
- ¿Qué relación tiene la forma geométrica de los sembradíos, la cosecha que resulta y el beneficio económico para la región?

PRODUCCIÓN

Un teselado es la combinación de polígonos regulares o irregulares, que coinciden en alguno de sus lados y muestran así una sincronía tanto de colores como de polígonos utilizados.

- **Realizamos dos teselados utilizando polígonos regulares e irregulares, tomando en cuenta los modelos de la figura.**





REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

LA FORMA, EL NÚMERO Y LA SEMEJANZA EN GEOMETRÍA

Triángulos y su clasificación

1) Lee y analiza los siguientes enunciados para responder verdadero (V) o falso (F):

ENUNCIADO	VERDAD (V)	FALSO (F)
Un triángulo escaleno puede ser obtusángulo.		
Todo triángulo rectángulo puede ser obtusángulo.		
Un triángulo rectángulo puede ser obtusángulo.		
Los ángulos de un triángulo equilátero son congruentes.		
Todo triángulo equilátero es acutángulo.		
Todo triángulo escaleno es isósceles.		
Un triángulo puede ser equilátero.		
Un triángulo obtusángulo puede ser isósceles.		
Todo triángulo equilátero es isósceles.		
Un triángulo isósceles puede ser escaleno.		

2) Construye un triángulo dadas las medidas de sus tres lados:

a) $3\ cm, 5\ cm, 8\ cm$

b) $5\ cm, 4\ cm, 3\ cm$

c) $5\ cm, 5\ cm, 5\ cm$

3) Construye un triángulo dadas las medidas de dos lados y el ángulo formado por ellos:

a) $8\ cm, 90°, 6\ cm$

b) $5.5\ cm, 60°, 7\ cm$

c) $4\ cm, 100°, 6\ cm$

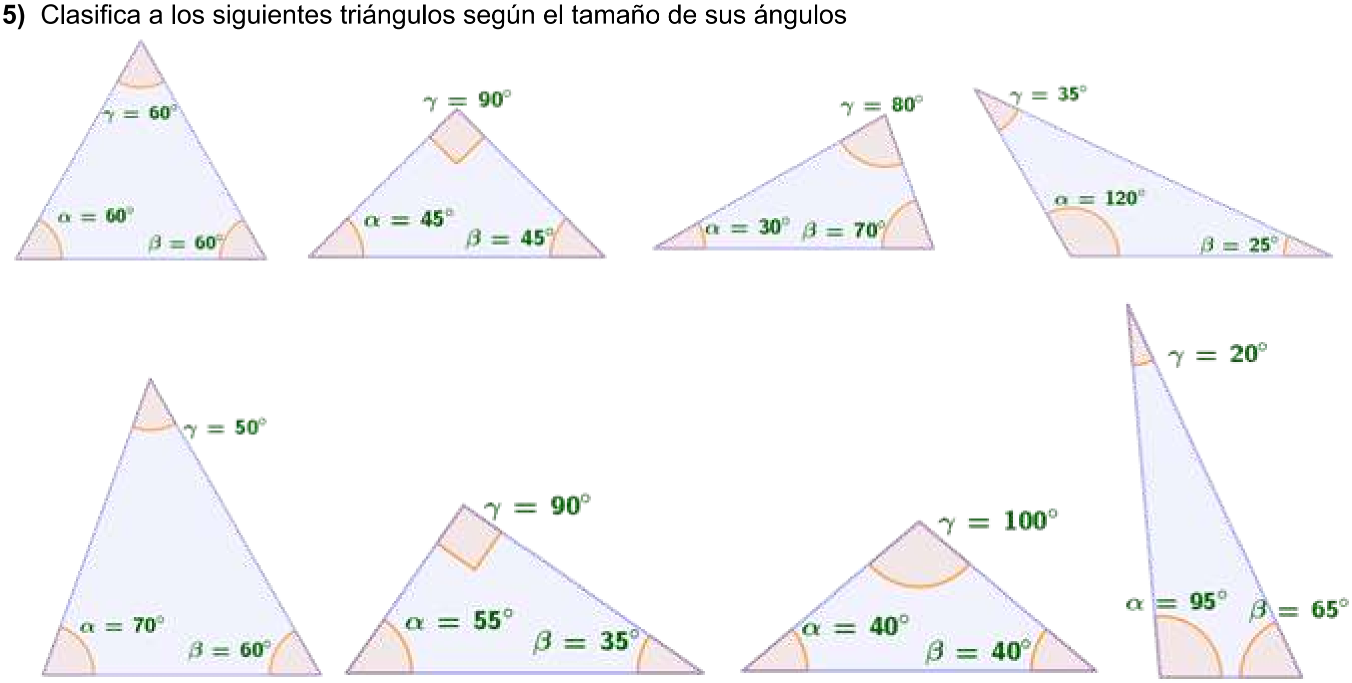
4) Construye un triángulo dadas las medidas de dos de sus ángulos y del lado adyacente:

a) $30°, 4.5\ cm, 120°$

b) $90°, 4\ cm, 45°$

c) $45°, 6\ cm, 65°$

5) Clasifica a los siguientes triángulos según el tamaño de sus ángulos



Congruencia de triángulos

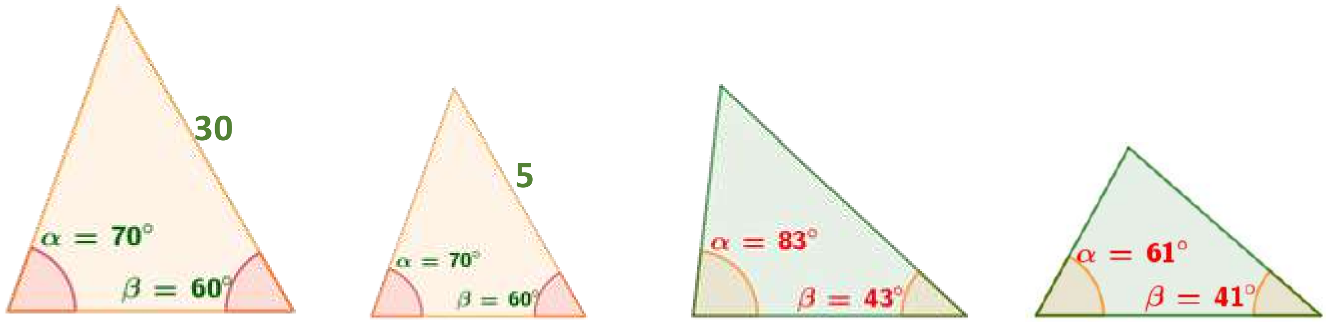
1) Si los ángulos correspondientes de un triángulo como los lados son iguales, entonces se dice que son…

a) Congruentes **b)** Semejantes **c)** Complementarios

2) Si en los triángulos ABC y A'B'C' las medidas de sus ángulos correspondientes son $\alpha=90°$, $\beta=60°$, $\gamma=30°$, $\alpha'=90°$, $\beta'=60°$, $\gamma'=30$, entonces los triángulos son…

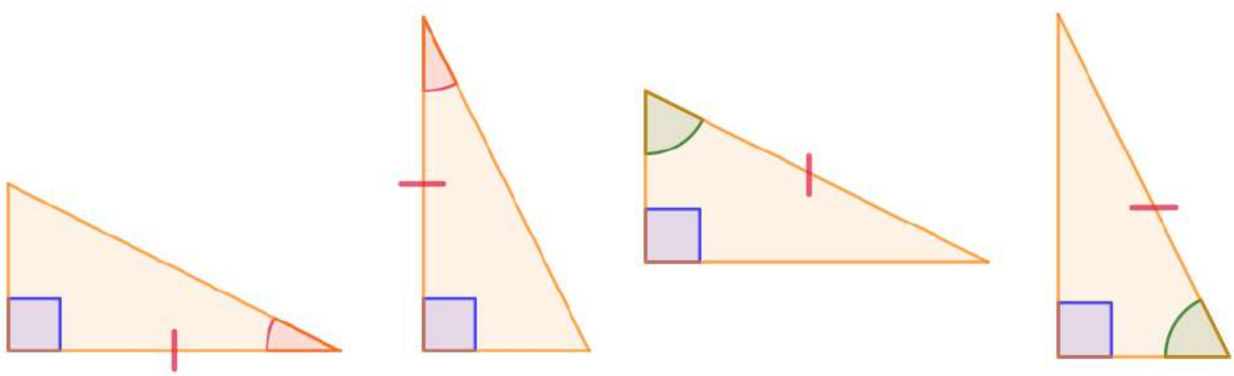
a) Congruentes **b)** Semejantes **c)** Complementarios

3) Los siguientes pares de triángulos dados, ¿son congruentes?

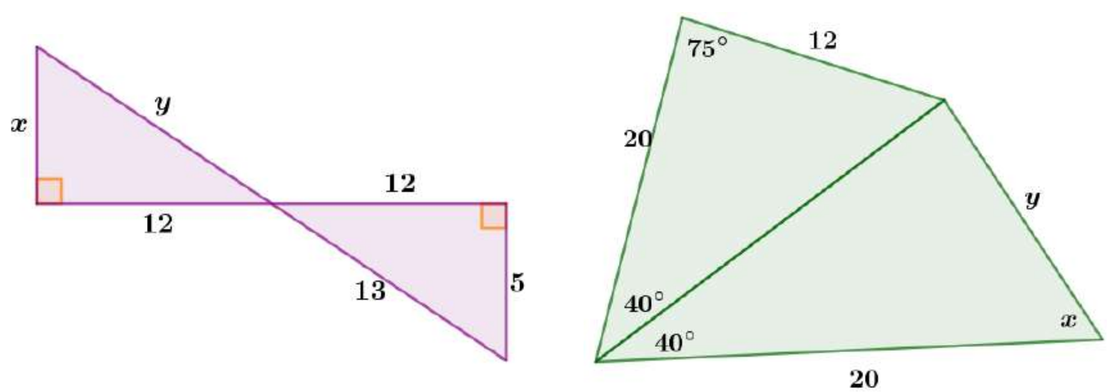


Criterios para la congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA)

1) Indica si los siguientes pares de triángulos son congruentes, si lo fueran indica el criterio por el que se afirma su congruencia:



2) En los siguientes triángulos y con ayuda de los criterios de congruencia, se pide hallar los valores de x, y.

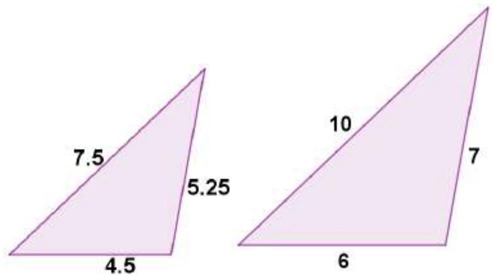


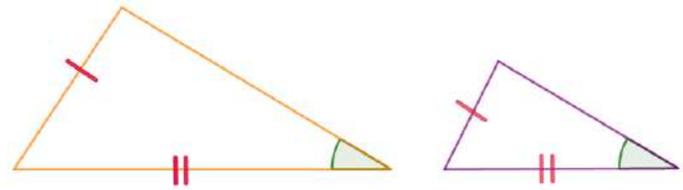
Triángulos semejantes

1) Si los ángulos correspondientes de un triángulo son congruentes y los lados correspondientes proporcionales, entonces se dice que son…

a) Congruentes **b)** Semejantes **c)** Complementarios

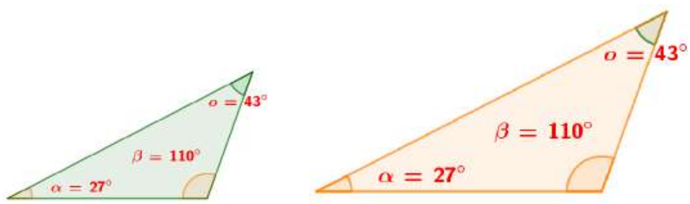
2) Indica si los siguientes pares de triángulos son semejantes, dados sus lados y ángulos:

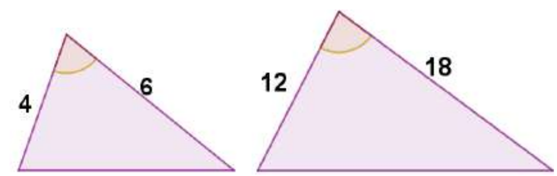




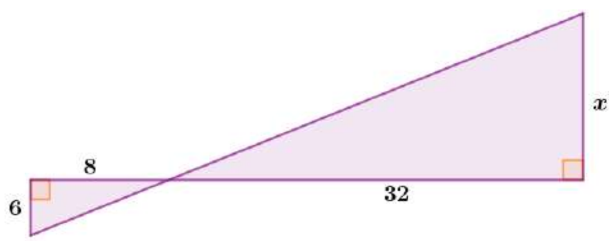
Criterios de semejanza de triángulos (AAA, LLL, LAL)

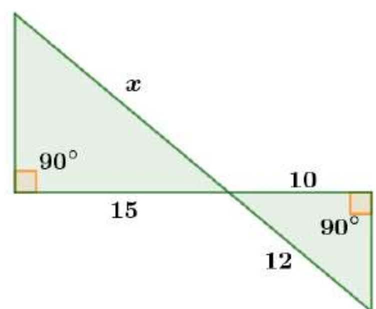
1) Indica si los siguientes pares de triángulos son semejantes, si lo fueran indica el criterio de semejanza:





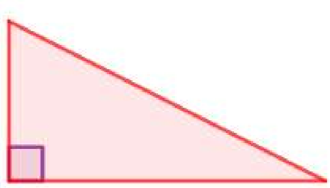
2) Los siguientes triángulos dados son semejantes, ¿halla el valor de x?

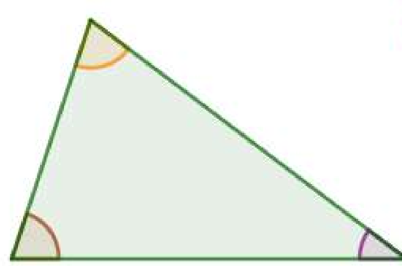


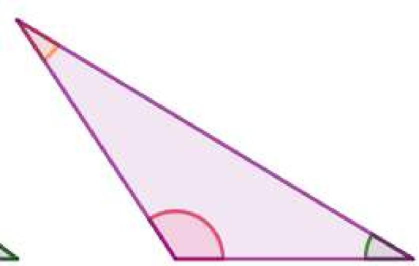


Rectas y puntos notables

1) En los siguientes triángulos dibuja las medianas, mediatrices, alturas y bisectrices, así como sus puntos de intersección.







PERÍMETROS, ÁREAS Y FORMAS GEOMÉTRICAS APLICADAS A LA VIDA COTIDIANA

Perímetro de polígonos regulares e irregulares

1) Un patio rectangular tiene $14{,}5\ m$ de largo y $8\ m\ \ 45\ cm$ de ancho. ¿Cuál es el perímetro del patio?

2) Se construye un aula de forma hexagonal, cada lado mide $4\ m$ y $25\ cm$, el albañil cobra Bs 80 por metro lineal de cimiento. ¿Cuánto hay que pagar?

3) Un escenario tiene la forma de un trapecio, cuyo lado mayor mide $12\ m\ \ 75\ cm$, el lado opuesto mide $9\ m\ \ 45\ cm$ y los laterales miden $5\ m,\ 80\ cm$ cada uno. ¿Cuál es el costo de colocar soga si el metro de soga tiene un precio de Bs 220?

Área de figuras planas: triángulos, polígonos regulares e irregulares

1) Se hace construir un decágono de madera de $55\ cm$ por lado. ¿Cuánto hay que pagar por el decágono concluido si el carpintero cobra a razón de Bs 120 el m^2? (apotema = $40\ cm$)

2) Se compra un terreno de $2,8$ ha a un precio de Bs 22 el m^2. ¿Cuál es el monto que se paga por el terreno?

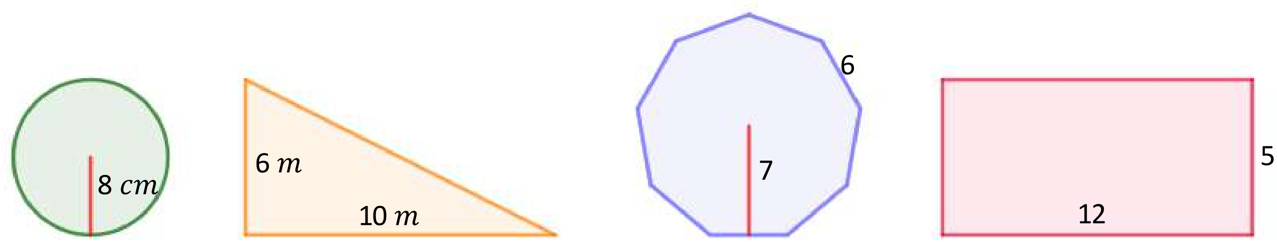
3) Las dimensiones de un terreno rectangular son de $850\ cm$ de largo y $65\ m\ \ 50\ cm$ de ancho. ¿Cuánto se paga al Gobierno Municipal por concepto de impuestos si cobra Bs 148 el m^2?

4) Sebastián desea vender su terreno rectangular de dimensiones $130\ m$ de largo y $75\ m\ \ 50$ cm de ancho en una zona muy popular de la región, ¿cuál es el precio de venta si el m^2 en esa zona es de Bs 12.80?

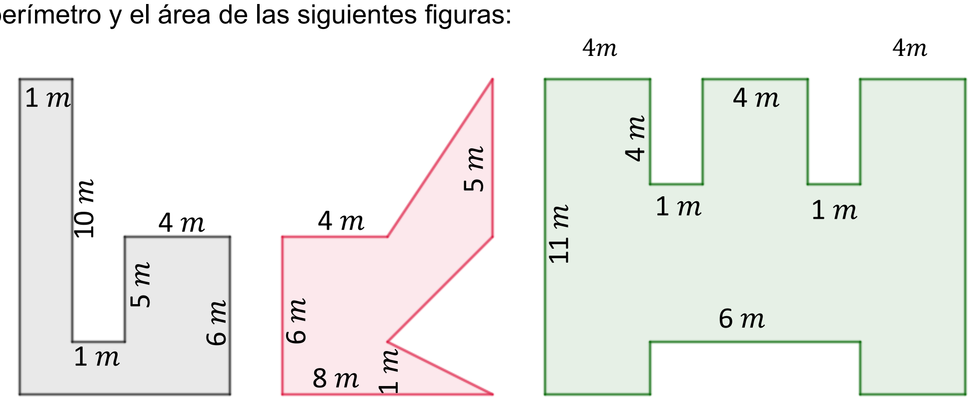
5) Se requiere colocar baldosas rectangulares de dimensiones $45\ cm$ por $40\ cm$ respectivamente en tres patios también rectangulares, del primero sus dimensiones son $4\ m$ por $6\ m$, del segundo $5\ m$ por $6\ m$ y finalmente el tercero $5\ m$ por $7\ m$, ¿cuántas baldosas se necesitarán para cubrir los tres patios?

Problemas aplicados al contexto y la tecnología

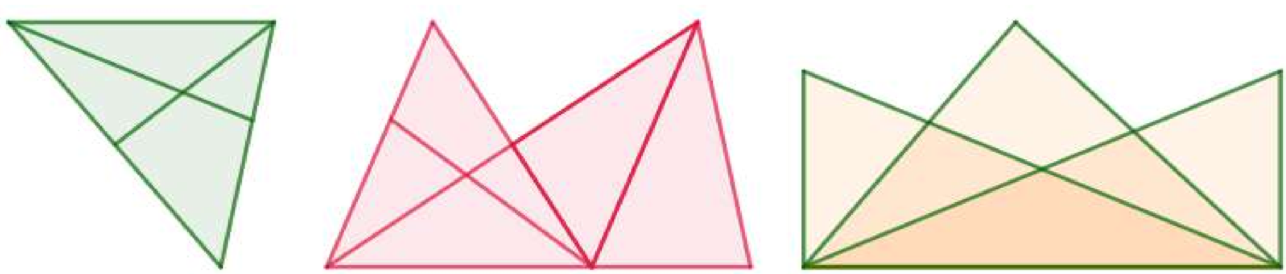
1) Determina área y perímetro de las siguientes figuras:



2) Halla el perímetro y el área de las siguientes figuras:



3) Con desarrollo y procedimiento indica cuántos triángulos existen en cada figura:



Existen _______ triángulos.   Existen _______ triángulos.   Existen _______ triángulos.

4) Identifica los triángulos isósceles que observes en cada figura anterior, coloréalos de un color diferente.

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Ministerio de Educación (2022). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje" 1er. Año* (2do trimestre). La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva. "*Texto de aprendizaje" 1er. Año*. primer, segundo y tercer trimestre. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2024). *Texto de aprendizaje. 1er año de escolaridad.* Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2024). Subsistema de Educación Regular. "*Prontuario de mis aprendizajes*" Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz, Bolivia.

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación de México

Allen R, A. (1998). *Algebra Elemental.* Mexico: Prentice Hall.

Graña, M., Gerónimo, G., Pacetti, A., Jancsa, A., & Petrovich, A. (2010). L*os Números, de los naturales a los complejos*. Buenos Aires - Argentina: Ministerio de Educación.

López Sancho, J., Moreno Gómez, E., Gómez Díaz, M., & López Álvarez, J. (2004). *La maravillosa historia de los números.*

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **1 ER AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología - Geografía
Delma Frida Flores López

Lengua Castellana
Wildo Mamani Otondo

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología - Geografía
Delma Frida Flores López

Lengua Castellana
Wildo Mamani Otondo

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

Matemática
Wilson Quiroga Escobar

TERCER TRIMESTRE

Biología - Geografía
Delma Frida Flores López

Lengua Castellana
Wildo Mamani Otondo

Ciencias Sociales
Roger Sanjines Poma

Matemática
Wilfredo Franz Montes de Oca Lobatón

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo

@minedubol

minedu_bol