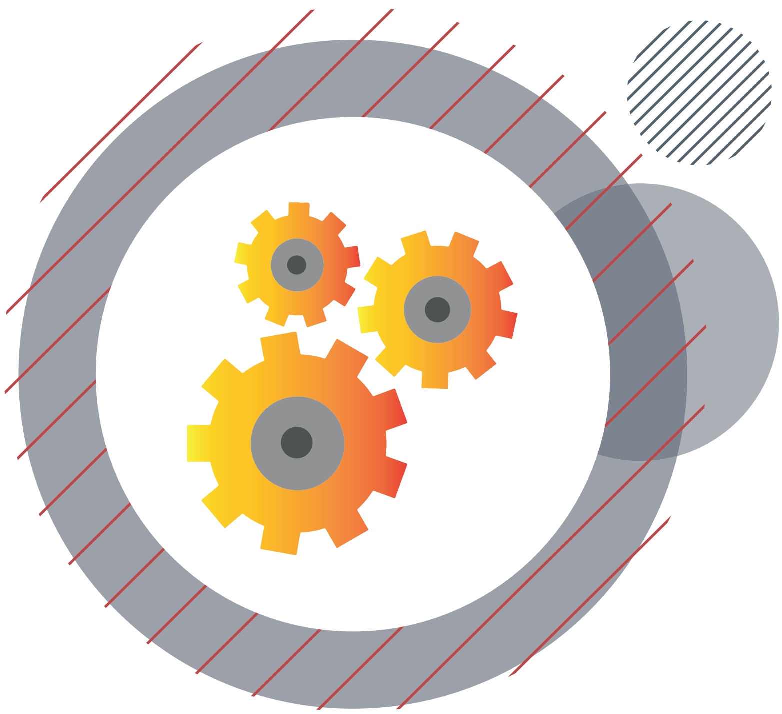
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

4

SECUNDARIA

TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024



SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA
ÁREA
MATEMÁTICA

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024
Educación secundaria comunitaria productiva
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Bartolomé Puma Velásquez
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

María Salomé Mamani Quispe
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Coordinación general
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Índice

PRESENTACIÓN

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:

Glosario

Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.

Investiga

¿Sabías que...?

¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.

Noticiencia

Escanea el QR

Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.

Aprende haciendo

Desafío

Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.

¡Taller de Ortografía!

¡Taller de Caligrafía!

¡Razonamiento Verbal!

4 SECUNDARIA

ÁREA
MATEMÁTICA

CIENCIA, TECNOLOGIA Y PRODUCCIÓN
Matemática

ECUACIONES ALGEBRAICAS APLICADAS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESARROLLO DE LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 1: Analicemos la pregunta de la siguiente imagen y subrayemos la respuesta correcta en el cuaderno de prácticas:

a) El Algodón
b) El Hierro
c) Ninguno

Justifique su respuesta.

Como podemos observar el concepto de igualdad, se utiliza incluso en asuntos tan simples como el que acabamos de analizar, los cuales aplicamos constantemente en muchas más situaciones de las que creemos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad, donde los valores del lado izquierdo (primer miembro), del signo igual, deben ser iguales a los valores del lado derecho (segundo miembro).

Resolver una ecuación es determinar el valor de la incógnita (o incógnitas), que verifique la igualdad de la ecuación. Para realizar dicho cálculo se utilizan las reglas del despeje ya estudiadas, para luego observar y estudiar la aplicación en la resolución de ecuaciones.

Reglas del despeje de variables

Primero se separan variables de cantidades, para eso aplicamos:

- Lo que suma, pasa a restar
- Lo que resta, pasa a sumar

A continuación se separa la variable, para eso aplicamos:

- Lo que multiplica, pasa a dividir
- Lo que divide, pasa a mutiplicar.

Ejemplo 1: Resolvemos la ecuación: $3x + 7 = 22 - 9x$

Separamos expresiones: $3x + 9x = 22 - 7$

Reducimos términos: $12x = 15$

Despejamos la incógnita: $x = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

Ejemplo 2: Resolvemos la ecuación: $\frac{7}{2x} - \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{3x}$

Multiplicamos $C.D. = 30x:$ $105 - 18x = 60x + 10$

Separamos expresiones: $-18x - 60x = 10 - 105$

Reducimos términos: $-78x = -95$

Multiplicamos por (-1): $78x = 95$

Despejamos la incógnita: $x = \frac{95}{78}$

Ejemplo 3: Resolvemos la ecuación: $\frac{4}{x^2-4}-\frac{3}{3x^2-7x+2}=\frac{7}{3x^2+5x-2}$

Factorizamos los denominadores: $\frac{4}{(x+2)(x-2)}-\frac{3}{(x-2)(3x-1)}=\frac{7}{(x+2)(3x-1)}$

Multiplicamos $C.D.=(x+2)(x-2)(3x-1)$ *:* $4(3x-1)-3(x+2)=7(x-2)$

Multiplicamos los productos: $12x-4-3x-6=7x-14$

Separamos y Reducimos términos semejantes: $2x=-4$

Despejamos la incógnita: $x=-\frac{4}{2}=-2$

Actividad 2: En el cuaderno de prácticas, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x-17=7$

b) $8x+25-2x=25-9x+45$

c) $7x-(x+2)+(-x+6)=82x+34$

d) $(x+4)(x-4)=(x-1)^2$

e) $(3x)(x-7)=(2x+3)^2-x^2$

f) $\frac{3x-8}{6}-\frac{5x+3}{3}=\frac{10}{4}$

g) $\frac{5x+1}{5x-1}=\frac{6}{4}$

h) $\frac{4x-5}{x^2-4x-12}=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-6}$

2. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las ecuaciones son una herramienta matemática, que nos permiten dar soluciones a problemas que se puedan presentar en nuestro diario vivir. Veamos algunas situaciones donde pueden aplicarse estos conocimientos.

Ejemplo 4: Don Carlos, que es dueño de una tienda, hace el contrato con la empresa de refrescos "Bolivia Refrescante", donde establecen que se pagará Bs 0.50 por cada botella vendida durante el mes. La primera semana se vende 5 cajas y 24 botellas, la segunda semana se vende 8 cajas y 12 botellas, la tercera semana se vende 2 cajas y 35 botellas, la cuarta semana se vende 7 cajas y 27 botellas; Don Carlos por motivos familiares viaja a una comunidad lejana, dejando encargo a su hijo el negocio, casualmente en esos días viene la empresa a realizar cuentas, el cual establece que se vendieron 24 cajas de refresco y como cada caja tiene 48 unidades, el monto a cancelar es de Bs 576 (el hijo de don Carlos duda que ese sea el monto ganado) ¿Será justa la duda del hijo de Don Carlos?

Planteamiento	Ecuación y Desarrollo	Respuesta
1°: 5c + 24 2°: 8c + 12 3°: 2c + 35 4°: 7c + 27	5c + 24 + 8c + 12 + 2c + 35 + 7c + 27 = 24c 5c + 8c + 2c + 7c - 24c = - 24 - 12 - 35 - 27- 2c = - 98 c = 49	La caja no contiene 48 botellas, sino 49. Por lo tanto, se debe recibir 0.5*49*24=588 Bs.

Ejemplo 5: La mamá de Carlitos va de compras al mercado y le encarga a su hijo vender una caja de piñas, a Bs 5 la unidad , el niño por flojera decide anotar de forma general las ventas, primero vendió la mitad de la caja, pero encontró 5 malogradas que tuvo que botar, luego vendió 2/3 de lo que quedó. Cuando llega su mamá solo quedaron 7 piñas y su hijo le entrego Bs 50 pero la madre duda que ese sea el monto ganado ¿Será justificada la desconfianza de la mamá?

Planteamiento	Ecuación y Desarrollo	Respuesta
Total: x 1°: $\frac{x}{2}$ 2°: $\left(\frac{x}{2}-5\right)$ 4° : $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-5\right)$	$x-\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-5\right)=7$ $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{10}{3}=7$ $\frac{x}{6}=\frac{11}{3}$ $x=22$	La caja tenía 22 piñas, como se botó 5 y quedaron 7, entonces se vendieron 10, entonces el monto ganado es Bs. 50

Actividad 3: Utilizando el modelo de resolución que estudiamos, resolvamos los siguientes problemas, donde podemos observar la aplicación de ecuaciones.

1. Carolina vende dulces y cada día gana Bs 1 más que el día anterior, si en tres días tiene una ganancia de Bs 219. ¿Cuánto ha ganado cada día?

2. Carmen tiene Bs 16 y sus dos hermanos pequeños tienen Bs 2 y 3., los cuales deciden ahorrar para comprar un regalo a su mamá, si cada día que pasa, a cada uno le regalan Bs 1. ¿Cuántos días han de pasar para que el doble de la suma de los ahorros de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

3. Vicente gasta Bs 21 en un cuaderno y una caja de lápices. No sabe el precio de cada objeto, pero sí sabe que la caja de lápices vale dos quintas partes de lo que vale el cuaderno .¿Cuánto vale el cuaderno?

4. Don Cornelio tiene tres corrales y 56 ovejas. Los tamaños de los corrales son pequeño, mediano y grande, siendo el pequeño la mitad del mediano y la grande el doble. Como no tenemos ninguna preferencia en cuanto al reparto de las ovejas, decidimos que en cada uno de los corrales haya una cantidad de ovejas proporcional al tamaño de cada corral. ¿Cuántas ovejas pondremos en cada corral?

5.Queremos repartir 510 caramelos entre 3 niños, de tal forma que dos de ellos tengan la mitad de los caramelos pero, que uno de estos dos tenga la mitad de caramelos que el otro. ¿Cuántos caramelos tendrá cada niño?

6. Una tienda vende en dos días la tercera parte de sus productos. Al día siguiente recibe del almacén la mitad de la cantidad de los productos vendidos, que son 15 unidades. ¿Cuántas unidades vendió en los dos primeros días? ¿Cuántas unidades quedan en la tienda después de abastecerla?

7. Juan tiene Bs 400 y Rosa tiene 350, ambos se compran el mismo libro, después de la compra a Rosa le quedan cinco sextas partes del dinero que le queda a Juan. Calcular el precio del libro.

8. Ester tiene el triple de dinero que Ana y la mitad que Héctor. Héctor le da a Ana y a Ester Bs 25 a cada una. Ahora Ester tiene la misma cantidad que Héctor. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio?

9. La distancia entre las ciudades de Santa Cruz y Montero es de 50 km. A la misma hora, salen un camión de la ciudad Santa Cruz, a 60 km/h y un ciclista de la ciudad Montero a 25 km/h. Se desea calcular cuánto tardarán en encontrarse si ambos vehículos circulan por la misma carretera, pero en sentido opuesto.

10. En una casa, el depósito de agua se encuentra a 2/7 de su capacidad. Se duchan tres personas: el primero en ducharse consume una quinta parte de la cantidad que hay en el depósito; el segundo, una tercera parte de la cantidad que queda, y el tercero, tres cuartas partes de la cantidad del primero. ¿Cuál es la capacidad del depósito y la cantidad de agua que consumen los dos primeros si sabemos que el tercero consume 10 litros al ducharse?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 4: En grupos de dos o tres estudiantes, expresamos las dudas, curiosidades, inquietudes que hubo en el desarrollo del tema y lo socializamos al curso, fomentando la confianza y el respeto entre todos para fortalecer la autoestima.

1. Expresamos los conocimientos y las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas del contexto, observando así el apoyo y comprensión de los contenidos.
2. Escribe 5 ejemplos de la aplicacion de acuaciones .

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

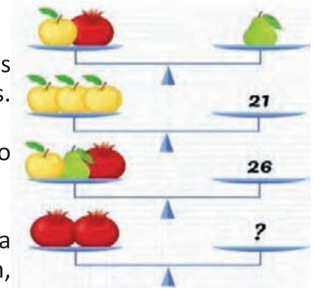
Actividad 5:
1. Contruimos un tablero de ecuaciones como el de la imagen.

2. Planteamos el siguiente problema, el cual daremos solución aplicando nuestros conocimientos y el tablero de ecuaciónes.

"Don Jorge adquiere un paquete de tela y encarga a su hijo que lo venda, quien realiza la actividad de mala gana y solo registra las ventas generales de la siguiente manera: en su primera venta, vendió un tercio del paquete, luego la mitad de lo que quedo, luego la quinta parte de lo que sobro, sobrándole dos metros al final del día. ¿Qué hará el hijo de don Jorge para saber cuántos metros tenía en total el paquete de tela?"

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA ACTIVIDAD PRODUCTIVA DE LA REGIÓN

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!



Actividad 6: Analicemos y expliquemos cómo determinamos el valor que tienen las dos granadas (frutas)de la imagen, suponiendo que los números estan expresados en bolivianos.

Muy bien, las dos granadas que se muestran en la última balanza valen Bs 12., porque como pudimos determinar, cada granada vale Bs 6, interesante ejercicio verdad!!!

Analicemos la imagen anterior, en la primera balanza observamos que una pera equivale a una granada y una naranja, esto en términos matemáticos, es lo que llamamos una ecuación, pero también te habrás dado cuenta de que cada una de las balanzas está relacionada con la otra, y solo jugando con todas es que podemos darle una solución al ejercicio. Esto es conocido como Sistema de Ecuaciones.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones, es un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, en los cuales se debe determinar el valor de las incognitas, de tal forma que la igualdad se verifique. Tomando en cuenta la imagen anterior, escribiremos un sistema de ecuaciones, donde lo que haremos es cambiar la imagen por una letra (naranja: n, granada: g, pera: p), los cuales se llamaran incógnitas.

$$\begin{cases} n+g=p \\ 3n=21 \\ n+g+p=26 \\ 2g=?? \end{cases}$$

El ejercicio escrito de esta forma se llama sistema de ecuaciones de 3x3, más una relación. Haciendo algunos juegos matemáticos, logramos determinar que: n=7; p=13;g=6, este procedimiento se conoce como resolución de sistemas de ecuaciones.

Ahora, un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede tener las siguientes formas:

$$2x-3y=15$$

Sistema 1x2

$$\begin{cases} -3x-7y=2 \\ 4x-5y=8 \end{cases}$$

Sistema 2x2

$$\begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 2x-3y=-1 \\ x+7y=2 \end{cases}$$

Sistema 3x2

Los sistemas de ecuaciones tienen como solución un par de valores, es decir, una solución debe tener dos valores (de x e y en este caso). Ahora según sus características, la de 1x1 tiene infinitas soluciones, la de 2x2 tiene una solución, la de 3x2 puede tener 1 o 3 soluciones.

2. Métodos de Resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones tenemos varias alternativas, que nosotros los llamaremos métodos de resolución, de estos estudiaremos cinco casos que los dividiremos en dos grupos.

1. Métodos analíticos, donde se aplican propiedades algebraicas y sus resultados son exactos
2. Método gráfico, donde se grafican las ecuaciones y sus resultados son aproximados.

El siguiente cuadro nos resume los métodos que se aplicaran para resolver sistemas de ecuaciones.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

MÉTODO GRÁFICO | MÉTODO SUSTITUCIÓN | MÉTODO IGUALACIÓN | MÉTODO REDUCCIÓN | MÉTODO DETERMINANTES

MÉTODOS ANALÍTICOS

2.1. Método de Sustitución:

El método consiste en despejar una de las incógnitas o variables de una ecuación y reemplazarlo en la otra ecuación. Se sugiere despejar una incógnita de manera directa

Ejemplo 1: Resolvemos el Sistema de ecuaciones x - 3y = - 1 ; 2x + 3y = 7

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Identificamos ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 3y = -1 & (\mathbf{A}) \\ 2x + 3y = 7 & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

Despejamos "x" de la ecuación $(\mathbf{A})$

$$x - 3y = -1$$

$$x = 3y - 1 \qquad (\mathbf{C})$$

Sustituimos el valor de "x" en la ecuación $(\mathbf{B})$

$$2x + 3y = 7$$

$$2(3y - 1) + 3y = 7$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$6y - 2 + 3y = 7$$

$$6y + 3y = 7 + 2$$

$$9y = 9$$

$$y = \frac{9}{9}$$

$$y = 1$$

Sustituyo $y = 1$ en la ecuación (C)

$$x = 3y - 1$$

$$x = 3(1) - 1$$

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Sol. (2;1)

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y escogemos la incógnita a despejar.
- Despejamos la incógnita escogida (no olvidar la sugerencia), y reemplazamos la equivalencia en la otra ecuación.
- Resolvemos la ecuación obtenida y el resultado lo reemplazamos en una ecuación con dos incógnitas (mejor en la que despejamos anteriormente).
- Determinados los valores, verificamos la equivalencia.

En este caso despejamos "x", pero también podemos despejar "y", realizando el mismo procedimiento.

Actividad 7: En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-x - 2y = -5$ $-2x + 5y = 8$	2. $-5x + 3y = 20$ $-5x - y = 0$	3. $x - 2y = -1$ $-5x + 4y = 11$	4. $-4x - 3y = -16$ $-x - 2y = -4$	*5.* $-2x - y =$ -2 $-4x + 3y = -14$

2.2. Método de resolución por Igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita de las ecuaciones, para luego igualar sus equivalencias, obteniendo así una nueva ecuación la cual nos permitirá encontrar uno de los valores del sistema.

Se sugiere utilizar este método, cuando el despeje se realize con fracciones o cuando existan cantidades idénticas.

Ejemplo 2: Resolvemos el sistema de ecuaciones 2x - 3y = 5 ; 3x + 4y = - 1

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Identificamos ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (\mathbf{A}) \\ 3x + 4y = -1 & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

Despejamos "x" de la Ec. $(\mathbf{A})$

$$2x - 3y = 5$$

$$2x = 3y + 5$$

$$x = \frac{3y+5}{2} \qquad (\mathbf{C})$$

Despejamos "x" de la Ec. $(\mathbf{B})$

$$3x + 4y = -1$$

$$3x = -4y - 1$$

$$x = \frac{-4y-1}{3} \qquad (\mathbf{D})$$

Igualamos X = x de la Ec. $(\mathbf{C})$ y $(\mathbf{D})$

$$\frac{3y+5}{2} = \frac{-4y-1}{3}$$

Resolvemos la ecuación formada

$$3(3y + 5) = 2(-4y - 1)$$

$$9y + 15 = -8y - 2$$

$$9y + 8y = -15 - 2$$

$$17y = -17$$

$$y = -\frac{17}{17} = -1$$

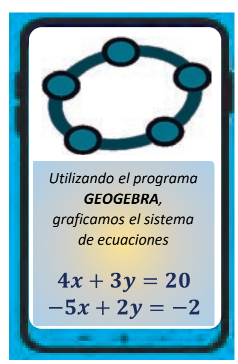
Sustituyo $y = -1$ en la Ec. (C)

$$x = \frac{3(-1)+5}{2}$$

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y escogemos las incógnitas a despejar.
- Despejamos las incógnitas escogidas e igualamos las equivalencias (no olvidar la sugerencia).
- Resolvemos la ecuación obtenida y el resultado lo reemplazamos en una ecuación con dos incógnitas (mejor en las que despejamos anteriormente).
- Determinados los valores, verificamos la equivalencia.



Actividad 8: En tu cuaderno de práctica resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-2x-3y=-7$ $-3x-2y=-8$	*2.* $-4x+3y=8$ $-3x+4y=6$	*3.* $2x+3y=5$ $4x+3y=1$	*4.* $-5x+9y=-7$ $-2x+y=5$	*5.* $-x-2y=-5$ $-2x+5y=8$

2.3. Método de Reducción

Conocido también como el método de sumas y restas, consiste en sumar (o restar) miembro a miembro los términos de las ecuaciones, de tal forma que se pueda eliminar una incógnita, para luego resolver la ecuación resultante para luego reemplazar y determinar la solución.

Procedimiento
- Simplificamos el sistema a su simple expresión y ordenamos en columnas de "x", "y" y término independiente.
- Multiplicamos por un valor que permita la eliminación de una incógnita y posterior despeje de la otra.
- Sumamos miembro a miembro y despejamos la incógnita.
- Reemplazamos el valor en una ecuación con dos incógnitas y determinamos el segundo valor.

Ejemplo 3: Resolvemos el sistema de ecuaciones 4x + 3y = 20 ; -5x+2y=-2

$$\begin{cases} 4x+3y=20 \\ -5x+2y=-2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
Eliminaremos "x" multiplicando para igualas sus coeficientes con signos diferentes.

$$\begin{cases} 4x+3y=20 & (5) \\ -5x+2y=-2 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x+15y=100 \\ -20x+8y=-8 \end{cases}$$

SUMAMOS POR COLUMNAS

$$\begin{cases} \cancel{20x}+15y=100 \\ \cancel{-20x}+8y=-8 \end{cases}$$

$$0 \ +23y=92$$

Despejamos y del resultado.

$$23y=92$$

$$y=\frac{92}{23}=4$$

Sustituimos $y=4$ en la 1ra ecuación

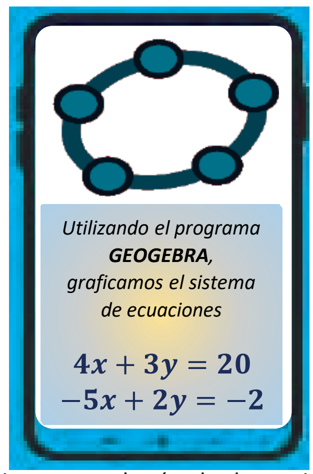
$$4x+3(4)=20$$

$$4x+12=20$$

$$x=\frac{20-12}{4}$$

$$x=\frac{8}{4}=2$$

Sol. (4;2)



Actividad 9: En tu cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

1. $-3x+4y=13$ $5x+4y=-11$	2. $7x-3y=19$ $4x-5y=1$	3. $4x-3y=8$ $-5x-6y=-10$	4. $-7x-4y=8$ $-5x+3y=-6$	5. $-5x-2y=-21$ $-3x-8y=1$

2.4. Método de Determinantes

Conocido también como el método de Krammer, es un método que resuelve sistemas de ecuaciones mediante el cálculo de determinantes de una matriz. Pero antes de ingresar a resolver el método debemos definir lo que es una matriz y un determinante.

Matriz, es un conjunto de números ordenados en filas y columnas.

Determinante, es un número que proviene de la diferencia del producto de las diagonales de la matriz.

Ejemplo 4: calculamos el determinante de las siguientes matrices:

$$1.\quad A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow Det(A)=(4)(-3)-(2)(1)=-12-2=-14$$

$$2.\quad M=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow Det(M)=(-7)(-1)-(5)(-2)=7+10=17$$

$$3.\quad W=\begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow Det(W)=(-4)(11)-(-3)(13)=-44+39=-5$$

2.5. Método Gráfico

Es un método que nos permite conocer la forma que tendrá el gráfico de la ecuación en un plano coordenado.

Plano Coordenado.- Es el lugar geométrico de dos dimensiones que están divididos en cuatro espacios, por dos líneas rectas perpendiculares (llamados ejes coordenados "x" e "y"), sobre los cuales se van ubicando los valores de los puntos (o soluciones de un sistema) A(3,2); B(-1,0); C(-2,-2); D(0,-3) los cuales se observan en el plano cartesiano.
Propiedad de la Línea Recta: "Dos puntos distintos determinan una línea recta"

Tomando en cuenta la propiedad anterior, para graficar y resolver sistemas de ecuaciones de 2x2, por el método gráfico utilizaremos la intersección con los ejes coordenados.

Procedimiento

- Consideramos valores de: x = 0 y y = 0
- Reemplazamos dichos valores en la ecuación y los despejamos la incognita.
- Los valores obtenidos los representamos en el plano coordenado y los unimos con una línea recta

Sea la ecuación: $\boldsymbol{ax + by = c}$

Con $x = 0$ à $\boldsymbol{a(0) + by = c}$ ∴ $\boldsymbol{y = \frac{c}{b}}$

Con $y = 0$ à $\boldsymbol{ax + b(0) = c}$ ∴ $\boldsymbol{x = \frac{c}{a}}$

Ahora obtenemos los puntos que graficaremos

$$\boldsymbol{P_1\left(0;\frac{c}{b}\right) \quad y \quad P_2\left(\frac{c}{a},0\right)}$$

Ejemplo 5: Graficamos la recta 3x - 5y = - 15

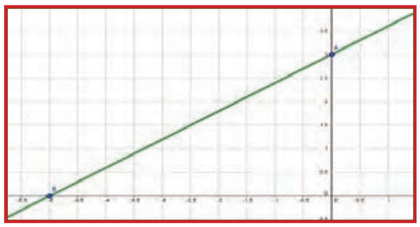
Sea la ecuación: $\boldsymbol{3x - 5y = -15}$

Con $x = 0$ à $\boldsymbol{3(0) - 5y = -15}$ ∴ $\boldsymbol{y = \frac{15}{5} = 3}$

Con $y = 0$ à $\boldsymbol{3x - 5(0) = -15}$ ∴ $\boldsymbol{x = -\frac{15}{3} = -5}$

Ahora obtenemos los puntos que graficaremos

$$\boldsymbol{P_1(0;3) \quad y \quad P_2(-5,0)}$$



Procedimiento.

Actividad 10: En tu cuaderno de práctica graficamos las siguientes ecuaciones:

1. $-x + 2y = 3$ $-3x - 2y = -15$	2. $-x - 3y = -5$ $-x - y = -1$	3. $2x - y = 2$ $2x + 3y = -6$	4. $x + 6y = -3$ $x + y = 2$	5. $-4x + 5y = 8$ $-2x - y = -10$

Nota.- Para resolver un sistema de ecuaciones, aplicamos el procedimiento de graficación.
Ejemplo 6: Resolvemos el Sistema de ecuaciones 3x + 2y = 6 ; 5x - 3y = 15

Sea la ecuación: $\boldsymbol{3x + 2y = 6}$

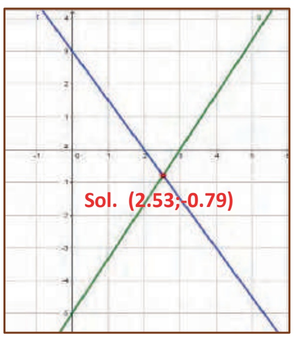
Con $x = 0$ à $\boldsymbol{3(0) + 2y = 6}$ ∴ $\boldsymbol{y = \frac{6}{2} = 3}$

Con $y = 0$ à $\boldsymbol{3x + 2(0) = 6}$ ∴ $\boldsymbol{x = \frac{6}{3} = 2}$

Sea la ecuación: $\boldsymbol{5x - 3y = 15}$

Con $x = 0$ à $\boldsymbol{5(0) - 3y = 15}$ ∴ $\boldsymbol{y = -\frac{15}{3} = -5}$

Con $y = 0$ à $\boldsymbol{5x - 3(0) = 15}$ ∴ $\boldsymbol{x = \frac{15}{5} = 3}$



Actividad 11: En el cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $-x + 2y = 3$; $-3x - 2y = -15$
2. $-x - 3y = -5$; $-x - y = -1$
3. $2x - y = 2$; $2x + 3y = -6$
4. $x + 6y = -3$; $x + y = 2$
5. $2x - 5y = 4$; $2x - y = -4$
6. $-4x + 5y = 8$; $-2x - y = -10$

Para resolver un sistema de ecuaciones es necesario tomar en cuenta la siguiente fórmula, la que depende de la determinación de las matrices del numerador y del denominador para ambas incógnitas, que es la que nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones por determinantes.

Sea el sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ la solución del sistema $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$

Ejemplo 7: Resolvemos el Sistema de ecuaciones 3x + 5y = 1; 4x + 7y = 1

Noticiencia

El método de reducción es la base para la resolución de sistemas por el método de Gauss-Jordan, mismo que es usado en programas de computadora.

ORDENAMOS

3x + 5y = 14x + 7y = 1

RESOLVEMOS:

Determinamos los coeficientes.
a= 3 d= 4
b= 5 e= 7
c= 1 f= 1

Hallamos el valor de “***x***”

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(7)-(1)(5)}{(3)(7)-(4)(5)} = \frac{7-5}{21-20} = \frac{2}{1} = 2$$

Hallamos el valor de “***y***”

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(1)-(4)(1)}{(3)(7)-(4)(5)} = \frac{3-4}{21-20} = \frac{-1}{1} = -1$$

ACTIVIDAD 12. En tu cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-3x + 4y = 13 \quad ; \quad 5x + 4y = -11$
2. $7x - 3y = 19 \quad ; \quad 4x - 5y = 1$
3. $4x - 3y = 8 \quad ; \quad -5x - 6y = -10$
4. $-7x - 4y = 8 \quad ; \quad -5x + 3y = -6$
5. $-5x - 2y = -21 \quad ; \quad -3x - 8y = 1$
6. $3x + 4y = 10 \quad ; \quad 4x - 3y = -20$

3. Sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, no es más que un conjunto de ecuaciones con tres incógnitas. De este tipo de sistemas, estudiaremos aquellas que tienen la forma 3x3, aunque también es aplicable para ecuaciones de nxn.

4. Métodos de Resolución

Para resolver sistemas de ecuaciones, podemos utilizar los 5 métodos estudiados en la resolución de sistemas de 2x2, pero por la eficiencia y eficacia solo nos enfocaremos en dos: El Método de Reducción y el Método de Determinantes.

4.1. Método de Reducción

Como sabemos este método nos permite eliminar una incógnita permitiéndonos encontrar una nueva ecuación, por lo tanto, en un sistema de 3 x 3 eliminaremos una incógnita para convertirla en una de 2x2, para luego esta resolverla por el método que dominemos más.

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y ordenamos en columnas de “x”, “y”, “z” , término independiente y determinamos la incógnita a eliminar.
- Escogemos dos combinaciones de las tres posibles, para eliminar la incógnita determinada.
- En cada combinación escogida, multiplicamos las ecuaciones, buscando la forma de eliminar la incógnita, convirtiendo así el sistema a uno de 2 x 2.
- Resolvemos el sistema de 2 x 2 por cualquier método (mejor si es el mismo que el anterior).

Ejemplo 8: Resolvemos el sistema 2x + y - z = 7; 3x - 2y + z = 9 ; x - y + 2z = 0

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 & \text{A} \\ 3x - 2y + z = 9 & \text{B} \\ x - y + 2z = 0 & \text{C} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Eliminaremos "z" de la combinación **A-B**.

$$\begin{cases} 2x + y \ - \cancel{z} = 7 \\ 3x - 2y \cancel{+ z} = 9 \end{cases}$$

$$5x - y \qquad = 16 \qquad \text{D}$$

Eliminaremos "z" de la combinación **A-C**.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \quad (2) \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$4x + 2y - \cancel{2z} = 14$$
$$x - y \cancel{+ 2z} = 0$$

$$5x + y \qquad = 14 \qquad \text{E}$$

Unimos las ecuaciones.

$$5x - y = 16 \qquad \text{D}$$

$$5x + y = 14 \qquad \text{E}$$

Eliminamos "y" de **D-E**.

$$5x - \cancel{y} = 16$$
$$5x \cancel{+ y} = 14$$

$$10x \qquad = 30\,; \qquad x = \frac{30}{10} = 3$$

Reemplazamos $x = 3$ en **E**

$$5(3) + y = 14\,; \qquad y = 14 - 15 = -1$$

Reemplazamos $x = 3$; $y = -1$ en **B**

$$3(3) - 2(-1) + z = 9\,; z = 9 - 9 - 2 = -2$$

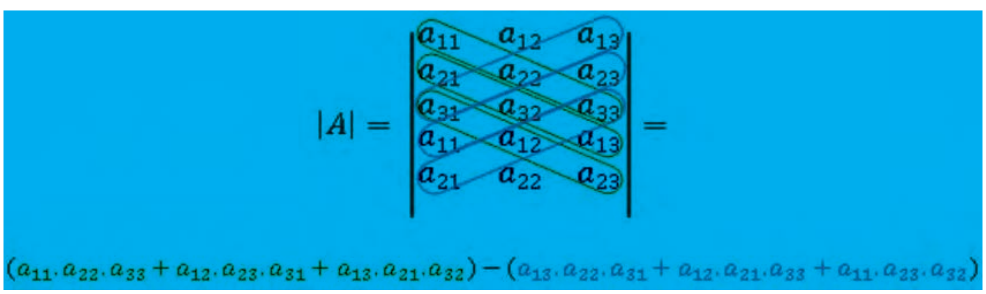
Sol. (3;-1;-2)

Actividad 13: En el cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas por el método de reducción:

1. $x + 2y - z = -7$; $3x + y - 5z = -10$; $-2x + 3y - 2z = -11$
2. $2x + 3y - 4z = 23$; $-3x - y + 2z = -18$; $5x + 2y - z = 18$
3. $5x + 2y - 3z = -1$; $3x - 4y - z = -37$; $-2x + 3y + 5z = 27$
4. $3x - y - 2z = -14$; $-5x + 3y + 2z = 22$; $7x - y + 3z = 2$

4.2. Método de Determinantes

Al igual que en los sistemas de 2x2, el método determinantes responde a una fórmula, los cuales dependen de calcular el determinante de una matriz de 3x3. Veamos como calcularlos:



Ejemplo 9: Calculamos la determinante de la matriz C

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &det(C) \\ &= (0)(7)(2) + (-3)(-4)(0) + (3)(5)(-1) \\ &- [(3)(7)(0) + (-4)(-1)(0) + (2)(-3)(5)] \\ &= 0 + 0 - 15 - (0 + 0 - 30) = -15 + 30 = 15 \end{aligned}$$

Actividad 14: En el cuaderno de práctica calculamos la determinante de las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ B = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ C = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -8 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ D = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones de 3x3 aplicaremos la siguiente fórmula:

Sea el sistema: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$ $\xrightarrow{\textit{Solución}}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}$

Las letras de la a,b,...,l son los coeficientes de las incógnitas.

Ejemplo 10: Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9-16+30-(5-18+48)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{23-(35)}{1-(13)} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{24-5-9-(-8+15-9)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{10-(-2)}{1-(13)} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-5-6+16-(3+16+10)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{5-(29)}{1-(13)} = \frac{-24}{-12} = 2$$

Actividad 15: En el cuaderno de práctica resolvemos los sistemas de ecuaciones por el método de determinantes:

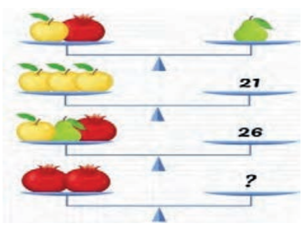
1. $x + 2y - z = -7$; $3x + y - 5z = -10$; $-2x + 3y - 2z = -11$
2. $2x + 3y - 4z = 23$; $-3x - y + 2z = -18$; $5x + 2y - z = 18$
3. $5x + 2y - 3z = -1$; $3x - 4y - z = -37$; $-2x + 3y + 5z = 27$
4. $3x - y - 2z = -14$; $-5x + 3y + 2z = 22$; $7x - y + 3z = 2$

Consideraciones sobre sistemas de ecuaciones superiores a 3x3

Los sistemas de ecuaciones pueden tener más de tres incógnitas, pero la forma de resolverlo es similar al de 3x3, es decir, debemos reducir hasta conseguir una de 2x2, para ello basta con aplicar el método de reducción en las combinaciones que se pueden realizar de las ecuaciones. Además, cuando el sistema de ecuaciones es superior a 3x3, el método de determinantes ya no es aplicable de forma directa.

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Los sistemas de ecuaciones son una herramienta muy útil, pues nos simplifican bastante la tarea de dar solución a diferentes problemas, como el ejercicio con las peras, naranjas y granadas que vimos al inicio del tema, el cual se redujo a un sistema de ecuaciones de 3x3. Veamos cómo nos ayuda.



$$\begin{cases} n + g = p \\ 3n = 21 \\ n + g + p = 26 \\ 2g = ??? \end{cases} \qquad \begin{cases} g + n - p = 0 \\ 0g + 3n + 0p = 21 \\ n + g + p = 26 \\ 2g = ??? \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 13 \\ n = 7 \\ g = 6 \\ 2g = 12 \end{cases}$$

Diferentes problemas de la cotidianidad se pueden expresar a través de sistema de ecuaciones que podemos resolverlos utilizando el método de reducción, determinantes u otros. En este sentido podemos concluir que los sistemas de ecuaciones se aplican para dar solución a diferentes fenómenos o problemas de diferentes ciencias que se pueden presentar en nuestro cotidiano vivir. Analicemos algunos:

Ejemplo 11: Una empresa de transporte que hace la ruta Tarija-Bermejo, sale todos los días a las 9:00 de la mañana con movilidades que viajan a una velocidad de 1500 m/min. El día lunes llega un cliente a las 9:15 y pide que por favor puedan enviar una encomienda en la movilidad que salió a las 9:00, la secretaria le indica que por realizar dicha petición se le cobrara Bs 5 por cada mil metros que recorrerá el segundo auto si viaja a una velocidad de 2000 m/min, hasta encontrarse con el que salió primero, lo que el cliente acepta. ¿A qué distancia logrará darle alcance el segundo auto? ¿A qué hora se encuentran los autos? ¿Cuánto deberá pagar el cliente? (no se olvide que V*t=d).

Solución: Analizando los datos, vemos que la distancia es la misma para ambas movilidades, el tiempo para el segundo es menos 15 minutos.

1500(t) = d   1er bus
2000(t - 15)= d   2do bus

Utilizando el método de igualación obtenemos:

$$\boldsymbol{t = 60min \quad ; \quad d = 9000\ metros \quad ; \quad costo = 5 * 9 = 45}$$

Respuesta. - Los autos se encontrarán a 9000 metros de la parada, a las 10 de la mañana y el señor debe pagar por este servicio Bs 45.

Ejemplo 12: Doña Carmelita tiene una granja de pollo, así que se dedica a vender carne de pollo en el mercado, un día el técnico encargado del cuidado de pollo le indica que, para cuidar el abastecimiento y las ganancias, la venta de pollo deberá seguir la ecuación - 3Q + 5P = 109, pero el Gobierno Municipal indica que la población solo puede adquirir dicho producto bajo la ecuación 4Q + 3P = 77. ¿Cuál será el nuevo parámetro de la cantidad de carne y precio, para que la vendedora y el comprador estén conformes? (no te olvides que P: precio, Q: cantidad)

Solución: Analizamos los datos, la distancia es la misma, el tiempo para el segundo es menos 15 minutos.

$-3Q + 5P = 109$	Vendedor
$4Q + 3P = 77$	Comprador

Utilizando el método de Reducción tenemos:

$$\boldsymbol{P = 23\ Bs.\ \ ;\ \ Q = 2\ Kg}$$

Respuesta. De tal forma que Doña carmelita cuide sus ganancias y la población quede conforme se establece que 2 kilogramos de carne deben venderse a Bs 23.

Actividad 16: En tu cuaderno de práctica resuelve los sistemas de ecuaciones por el método de determinantes.

1. María cría en el campo patos y conejos, donde contaron 19 cabezas y 52 patas de los dos animales ¿Cuántos conejos y patos cría Maria?.

2. Un equipo de básquet anoto un total de 48 canastas, obteniendo un puntaje de 114 puntos. ¿Cuántos tiros de campo(2 puntos) y triples (3 puntos) realizaron?

3. En un curso de 40 estudiantes, al 20 % de los hombres y 16% de las mujeres les gusta consumir frutas. Si en su total de los estudiantes que les gusta la fruta es 7. ¿Cuántos estudiantes mujeres y varones son en el curso?.

4. Juan pagó Bs 350 por 3 cajas de manzanas y 5 cajas de naranjas. Pedro compró 5 cajas de manzanas y 7 de naranjas y tuvo que pagar Bs 518. ¿Cuál es el precio de cada caja de manzanas y de cada caja de naranjas?

5. Un hombre decide ir de paseo en su bote, es así que remando a favor del rio avanza 10 kilometros en una hora, mientras que si rema en contra del rio, solo avanza 4 kilometros. ¿Qué velocidad estará aplicando el señor al bote y cuál será la velocidad del rio?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 17: En grupos de 3 a 4 estudiantes para realizamos las siguientes actividades:

1. Analicemos y escribimos 5 aspectos negativos y positivos de sistemas de ecuaciones.
2. Analicemos y escribimos las dificultades y fortalezas que se presentaron en el desarrollo del contenido.
3. Escogemos un ejercicio (del internet, de un libro, o inventado) y lo escribimos en una hoja.
4. Describimos 5 ejemplos de la aplicacion del sistema de ecuaciones en el texto.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Utilizando Geogebra, mostramos el comportamiento de las gráficas de las ecuaciones de los ejemplos 10 y ejemplo 11 analizados en texto y explicamos qué hicimos para poder generar dichas gráficas en el programa.
De no contar con geogebra, realizamos las graficas manualmente y describimos el procedimiento realizado.

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS EN LA NATURALEZA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 18: Con la ayuda de una calculadora científica realizamos las siguientes operaciones en el cuaderno de prácticas y escribimos las observaciones:

Sean: el número	5	3	-7	OBSERVACIONES
Elevar al cuadrado el número	25			
Sacar raíz cuadrada de la respuesta anterior	5			
Elevar al cubo el número	125			
Sacar raíz cúbica de la respuesta anterior	5			
Elevar a la cuarta el número	625			
Sacar raíz cuarta de la respuesta anterior	5			
Elevar a la quinta el número	3125			
Sacar raíz quinta de la respuesta anterior	5			

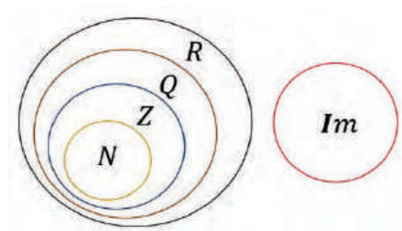
Como habrás podido notar algo interesante sucede cuando trabajamos con las raíces de cantidades negativas, pero no te asustes, tu calculadora no está mal, todo tiene una explicación, la cual estudiaremos a continuación:

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Los conjuntos de números estudiados hasta el momento presentan algunos vacíos, un caso es el que acabamos de observar en el anterior cuadro, con las raíces negativas de indíce par, las cuales muestran un mensaje que dice: MATH ERROR, este mensaje generalmente se presenta debido a que las calculadoras, no están programadas para trabajar o realizar cálculos con **números imaginarios**.

1. El conjunto de los números imaginarios

Los números imaginarios son aquel conjunto de números que nacen de las raíces negativas de indíce par, los cuales están separados del conjunto de los números estudiados hasta este momento y cuyo conjunto podemos denotar como "Im", el cual vamos a representar en el siguiente gráfico.



2. Unidad imaginaria y sus propiedades

La unidad Imaginaria es el número $\sqrt{-1}$ el cual representaremos por la letra " i ", por lo cual podemos decir que: $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$ este es uno de los cinco números de las matemáticas, el cual a partir de este momento aparecerá en muchos de nuestros cálculos, motivo por el que no debemos olvidarlo. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Escribimos las siguientes raíces, como números imaginarios.

Noticiencia

Los números complejos son muy aplicados en el área de electrónica, electricidad y el desarrollo tecnológico

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$
2. $-\sqrt{-49} = -\sqrt{49(-1)} = -\sqrt{49}\sqrt{-1} = -7i$
3. $5\sqrt{-144} = 5\sqrt{144(-1)} = 5\sqrt{144}\sqrt{-1} = 60i$
4. $7\sqrt{-3} = 7\sqrt{3(-1)} = 7\sqrt{3}\sqrt{-1} = 7\sqrt{3}i$
5. $-3\sqrt{-12} = -3\sqrt{12(-1)} = -3\sqrt{12}\sqrt{-1} = -3\sqrt{4}\sqrt{3}i = -12\sqrt{3}i$
6. $11\sqrt{-150} = 11\sqrt{150(-1)} = 11\sqrt{25}\sqrt{6}\sqrt{-1} = 55\sqrt{6}i$
7. $6\sqrt{-\frac{4}{9}} = 6\sqrt{\frac{4}{9}}\sqrt{-1} = 6\left(\frac{2}{3}\right)i = 4i$

Como podemos notar siempre que exista una cantidad sub radical negativa, es necesario separar el signo el cual se convierte en la unidad imaginaria $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$.

Actividad 19. Racionalizamos las siguientes raíces e indicamos si son números reales o números imaginarios (recuerde que solo las raíces de índice par de cantidad negativa, son imaginarias)

1. $\sqrt{-81} =$	5. $\sqrt{-45} =$	9. $\sqrt{169} =$	13. $\sqrt{-128} =$	17. $\sqrt{484} =$
2. $\sqrt{36} =$	6. $\sqrt{-144} =$	10. $\sqrt{-36} =$	14. $\sqrt{686} =$	18. $\sqrt{-450} =$
3. $\sqrt{-9} =$	7. $\sqrt{98} =$	11. $\sqrt{-100} =$	15. $\sqrt{784} =$	19. $\sqrt{-3087} =$
4. $\sqrt{125} =$	8. $\sqrt{-147} =$	12. $\sqrt{250} =$	16. $\sqrt{-1225} =$	20. $\sqrt{6125} =$

3. Potencias de la unidad imaginaria

Todos los números permiten realizar operaciones aritméticas, en especial cuando hablamos de potencia, estamos hablando de multiplicación de números imaginarios, para eso estudiaremos el comportamiento de la unidad imaginaria en los diferentes exponentes.

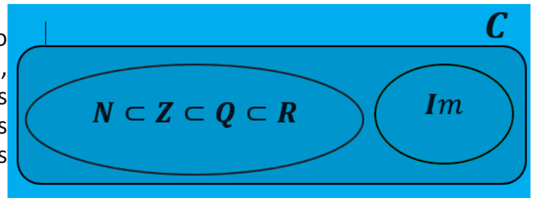
$\boldsymbol{i^0} = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{i^6} = i^4 * i^2 = (1)(-1) = \mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^1} = \boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i^7} = i^4 * i^3 = (1)(-i) = \boldsymbol{-i}$
$\boldsymbol{i^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \mathbf{-1}$	$\boldsymbol{i^8} = i^4 * i^4 = (1)(1) = \mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^3} = i^2 * i = \left(\sqrt{-1}\right)^2 * i = \boldsymbol{-i}$	$\boldsymbol{i^9} = i^8 * i = (1) * i = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^4} = i^2 * i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)(-1) = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{i^{10}} = i^8 * i^2 = (1)(-1) = \mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^5} = i^4 * i = (1) * i = \boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i^{11}} = i^8 * i^3 = (1)(-i) = \boldsymbol{-i}$

Analizamos atentamente el cuadro, observando el comportamiento de la potencia de la unidad imaginaria

Actividad 20: en el cuaderno de práctica, determinamos las potencias de la unidad imaginaria desde $\boldsymbol{i^{12}}$ hasta $\boldsymbol{i^{32}}$ bajo el mismo procedimiento que en el cuadro

4. Números complejos y su representación gráfica

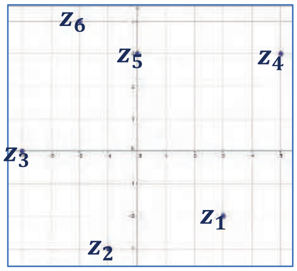
Los números complejos es el conjunto de números, que une al conjunto de los números reales con el conjunto de los números imaginarios, complementando así al conjunto de números, con los cuales las operaciones con números, ya no tendrían restricciones, siendo estos los que nos permiten gozar de los avances tecnológicos, ya que los números se pueden aplicar en diferentes ambitos de la cotidianidad.



La representación de un número complejo se da bajo la forma binómica:
z=a+bi siendo a un número real y bi el número complejo, este tipo de números se representan bajo un plano coordenado, donde la abscisa corresponde a los valores reales y la ordenada a los valores imaginarios.

Ejemplo 2: graficamos en el sistema de cordenadas los siguientes números complejos.

z_1=3-2i
z_2=-1-3i
z_3=-4
z4=5+3i
z_5=3i
z_6=-2+4i



Noticiencia

Los números imaginarios también se pueden escribir como un par ordenado. a+bi=(a,b)

5. Operaciones con números complejos

Al igual que los diferentes tipos de números, los números complejos también gozan de las propiedades de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, los cuales estudiaremos a continuación.

Suma y resta de números complejos

Para sumar y restar números complejos, lo único que hacemos es sumar la parte real con la parte real, y la parte imaginaria con la parte imaginaria, resultado de esta operación, obtenemos un resultado que también será complejo, es decir $\boldsymbol{z_1 \pm z_2 = z_3}$

Ejemplo 3: sea $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 + 5i$, $z_3 = 7 + i$, simplificamos las operaciones:

1. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-4 + 5i) = 2 - 3i - 4 + 5i = -2 + 2i$
2. $z_1 - z_3 = (2 - 3i) - (7 + i) = 2 - 3i - 7 - i = -5 - 4i$
3. $2z_2 + 3z_3 = 2(-4 + 5i) + 3(7 + i) = -8 + 10i + 21 + 3i = 13 + 13i$
4. $-4z_2 + 5z_3 - 2z_1 = -4(-4 + 5i) + 5(2 - 3i) - 2(2 - 3i) = 16 - 20i + 10 - 15i - 4 + 6i = 22 - 29i$

Multiplicación de números complejos

En la multiplicación de números complejos, basta con aplicar la multiplicación por propiedad distributiva (o productos notables), tomando siempre en cuenta la potencia del número imaginario.

Ejemplo 4: Multiplicamos y simplificamos las siguientes expresiones:

1. $5i(3 - 2i) = 15i - 10i^2 = 15i - 10(-1) = 10 + 15i$
2. $-7i(-4i + 1) = 28i^2 - 7i = 28(-1) - 7i = -28 - 7i$
3. $(i - 5)(4 + 2i) = 4i + 2i^2 - 20 - 10i = 4i + 2(-1) - 20 - 10i = -22 - 6i$
4. $(3 - 5i)^2 = 9 - 30i + 25i^2 = 9 - 30i + 25(-1) = -16 - 30i$

División de números complejos

La división de los números complejos, no es más que una fracción, pero debido a que las fracciones no permiten tener raíces en el denominador, es que tendremos que racionalizar y simplificar algunas expresiones. Veamos en los siguientes ejemplos este proceso, teniendo en mente que existen tres casos.

Ejemplo 5: dividimos las siguientes expresiones.

caso 1. $\frac{15-20i}{25} = \frac{5(3-4i)}{5*5} = \frac{3-4i}{5}$

caso 2. $\frac{2+3i}{5i} = \frac{2+3i}{5i} * \frac{i}{i} = \frac{2i+3i^2}{5i^2} = \frac{2i+3(-1)}{5(-1)} = \frac{-3+2i}{-5} = \frac{3-2i}{5}$

caso 3. $\frac{7-i}{2-i} = \frac{7-i}{2-i} * \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i-i^2}{4-i^2} = \frac{14+7i-2i-(-1)}{4-(-1)} = \frac{15+5i}{5} = \frac{5(3+i)}{5} = 3 + i$

Actividad 21: Sea $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = -2 + 5i$; $z_3 = 7 + i$, realizamos las siguientes simplificaciones.

1.	$z_1 + z_2 =$	5.	$5z_1 + z_2 =$	9.	$z_1 + 3z_3 =$	13.	$-z_1 + 5z_2 =$
2.	$2z_3 - z_2 =$	6.	$3z_3 - 5z_2 =$	10.	$z_3 - z_2 =$	14.	$-4z_3 - 5z_2 =$
3.	$z_2 * z_3 =$	7.	$z_1 * 4z_3 =$	11.	$7z_3 * 2z_1 =$	15.	$3z_1 * 2z_2 =$
4.	$z_2/z_1 =$	8.	$z_2/5z_3 =$	12.	$6z_3/z_1 =$	16.	$z_3/10z_2 =$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 22: Respondemos las siguientes preguntas de reflexión en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cómo se aplica los números complejos en los circuitos eléctricos ?

2. ¿En la vida cotidiana cómo podemos aplicar los números complejos en la resolucion de problemas?

3. ¿Cómo se aplican los números complejos en la geometría fractal?

Analicemos la aplicación de los números complejos en el avance tecnológico y escribimos 5 ejemplos.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 23: Un fractal es un objeto geométrico irregular cuyas autosimilitudes se repiten a grandes escalas. Se define los fractales a través de cálculos con números complejos:

1. Investiga sobre los fractales y elabora un diseño aplicando los números complejos.

2. Una cartulina la dividimos en dos partes iguales, en la primera haremos un cuadro donde podamos observar ejemplos de obtención de números imaginarios, diferentes a los que vimos en el texto. En el segundo cuadro mostraremos las potencias de la unidad imaginaria desde i^0 hasta i^{12}, el cual socializaremos con los compañeros en el curso.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NUESTRO CONTEXTO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 24: Escribimos lo que conocemos sobre la relación que existe entre, un tiro libre en un partido de futbol, el cable de electricidad en las calles, las antenas satelitales que nos permiten tener señal de televisión en lugares lejanos, y el movimiento de traslación de nuestro planeta.

Las situaciones planteadas se expresan a través de las matemáticas, con lo cual muchas de las ciencias logran desarrollar diferentes usos para el desarrollo de la tecnología y la productividad. Estudiemos un poco más este tipo de figuras.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Función cuadrática y sus características

Muchos de los fenómenos que se presentan en nuestra vida diaria, no son de carácter lineal, sino que están gobernados por relaciones que reciben el nombre de funciones cuadráticas (es decir, curvas). Estas funciones tienen la característica de que su grado absoluto es dos, veamos algunos ejemplos:

$$y = x^2 \qquad\qquad y = 5x^2 + 4x - 7 \qquad\qquad y^2 + x^2 = 11$$

En vista de la diversidad de ecuaciones, empezaremos el estudio de la resolución de ecuaciones cuadráticas, por aquellas que son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ llamadas ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, tienen dos soluciones (x_1, x_2) estas pueden ser de tres tipos, soluciones reales, soluciones imaginarias y soluciones complejas.

2.Métodos de resolución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de la forma

Como hemos podido conocer, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, tiene tres tipos de soluciones, por lo cual debemos tener mucho cuidado al efectuar operaciones, de tal forma que obtengamos las respuestas correctas, porque como se dijo en el anterior contenido, muchas veces un signo, puede provocarnos grandes desastres.

Al resolver una ecuación cuadrática se pueden presentar tres casos: A) $ax^2 + c = 0$, B) $ax^2 + bx = 0$, C) $ax^2 + bx + c = 0$

de los cuales iremos estudiando su forma de resolución. Pero nunca olvidemos que para resolver cualquier ecuación, siempre debemos simplificar, a su más simple expresión.

Resolución de ecuación de la forma $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Para resolver este tipo de ecuaciones solo se debe recordar las reglas del despeje y al final sacar la raíz cuadrada. Veamos:
.

Ejemplo 1: Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1. $x^2 - 9 = 0$
$$x^2 = 9$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$
$$x_1 = 3\,;\, x_2 = -3$$

2. $x^2 - 12 = 0$
$$x^2 = 12$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{12}$$
$$x = \pm 2\sqrt{3}$$
$$x_1 = 2\sqrt{3}\,;\, x_2 = -2\sqrt{3}$$

3. $4x^2 - 25 = 0$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$x = \pm\frac{5}{2}$$
$$x_1 = \frac{5}{2}\,;\quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

4. $3x^2 - 11 = 0$
$$x^2 = \frac{11}{3}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{11}{3}} = \pm\sqrt{\frac{11}{3}}$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{11}{3}}\quad;\quad x_2 = -\sqrt{\frac{11}{3}}$$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1. $x^2 + 16 = 0$
$$x^2 = -16$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 4i$$
$$x_1 = 4i \quad ; \quad x_2 = -4i$$

2. $x^2 + 18 = 0$
$$x^2 = -18$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-18} = \sqrt{18}\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}i$$
$$x_1 = 3\sqrt{2}i \quad ; \quad x_2 = -3\sqrt{2}i$$

3. $7x^2 + 19 = 0$
$$x^2 = -\frac{19}{7}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{19}{7}} = \sqrt{\frac{19}{7}}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{\frac{19}{7}}i$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{19}{7}}i \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{19}{7}}i$$

Resolución de ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones solo se deben factorizar e igualar los factores a cero.

Ejemplo 3: Resolvemos las siguientes ecuaciones.

1.	2.	3.	4.
$x^2 - 6x = 0$	$3x^2 + 15x = 0$	$5x^2 - 4x = 0$	$4x^2 + 6x = 0$
$x(x-6) = 0$	$3x(x+5) = 0$	$x(5x-4) = 0$	$2x(2x+3) = 0$
$x = 0\,;\ x - 6 = 0$	$3x = 0\,;\ x + 5 = 0$	$x = 0\,;\ 5x - 4 = 0$	$2x = 0; 2x + 3 = 0$
$x = 0\,;\ x = 6$	$x = 0\,;\ x = -5$	$x = 0\,;\ x = \frac{4}{5}$	$x = 0\,;\ x = -\frac{3}{2}$

Resolución de ecuación de la forma . $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversos métodos, los cuales iremos estudiando por casos.

2.1. Completando cuadrados

En este caso, los primeros términos de la ecuación $\boldsymbol{ax^2} + bx + c = 0$ deben parecerse a los primeros términos del producto, $(\boldsymbol{mx+n})^2 = \boldsymbol{m^2x^2 + 2mnx + n^2}$, de tal forma que podamos obtener el último término mediante una suma, permitiéndonos factorizar y despejar la incógnita.

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 10x - 11 = 0$
$$x^2 + 10x + 25 = 11 + 25$$
$$(x+5)^2 = 36$$
$$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{36}$$
$$x + 5 = \pm 6$$
$$x = -5 + 6\,;\quad x = -5 - 6$$
$$x_1 = 1\,;\qquad x_2 = -11$$

2. $4x^2 - 6x + 3 = 0$
$$4x^2 - 6x + 9 = -3 + 9$$
$$(2x-3)^2 = 6$$
$$\sqrt{(2x-3)^2} = \sqrt{6}$$
$$2x - 3 = \pm\sqrt{6}$$
$$x_1 = \frac{3+\sqrt{6}}{2}\,;\quad x_2 = \frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

N) $9x^2 + 30x + 29 = 0$
$$9x^2 + 30x + 25 = -29 + 25$$
$$(3x+5)^2 = -4$$
$$\sqrt{(3x+5)^2} = \sqrt{-4}$$
$$3x + 5 = \pm 2i$$
$$x_1 = \frac{-5+2i}{3}\,;\ x_2 = \frac{-5-2i}{3}$$

2.2. Factorización

Utilizando los casos de factorización de trinomios (sugerencia el método de aspa simple), e igualando cada factor a cero, como lo hicimos en el caso de la ecuación incompleta con c = 0 podemos resolver la ecuación 2do grado.

Ejemplo 5: resolvemos las siguientes ecuaciones:

1
$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-2)(x-6)=0$$
$$x-2=0\,;x-6=0$$
$$x_1=2\,;\;x_2=6$$

2
$$49x^2+28x+4=0$$
$$(7x+2)(7x+2)=0$$
$$7x+2=0\,;7x+2=0$$
$$x_1=-\tfrac{2}{7}\;;\;x_2=-\tfrac{2}{7}$$

3
$$6x^2+23x-18=0$$
$$(3x-2)(2x+9)=0$$
$$3x-2=0\,;2x+9=0$$
$$x_1=\tfrac{2}{3}\;;\;x_2=-\tfrac{9}{2}$$

2.3. Fórmula General

Este método nos permite, mediante la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, determinar las soluciones de cualquier ecuación de 2do grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ veamos .

Ejemplo 6: resolvemos las siguientes ecuaciones:

1
$$x^2+8x+16=0$$
$$x=\frac{-(8)\pm\sqrt{(8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{-8\pm0}{2}$$
$$x_1=\frac{-8+0}{2};\;x_2=\frac{-8+0}{2}$$
$$x_1=-4\,;\;x_2=-4$$

2
$$x^2-2x+2=0$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$x_1=\frac{2+2i}{2};\;x_2=\frac{2-2i}{2}$$
$$x_1=1+i\,;\;x_2=1-i$$

3
$$3x^2+5x-7=0$$
$$x=\frac{-(5)\pm\sqrt{(5)^2-4(3)(-7)}}{2(3)}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+84}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{109}}{6}$$
$$x_1=\frac{-5+\sqrt{109}}{6};\;x_2=\frac{-5-\sqrt{109}}{6}$$

2.4. Método de PO SHEN-LOH

Este método es nuevo, el procedimiento está dado por fórmulas, siempre y cuando la ecuación este dado por la forma $x^2+bx+c=0$, en la cual se aplicaran las siguientes relaciones $t=-\frac{1}{2}*b\,,u=\sqrt{t^2-c}$ y la solución será: $x=t\pm u$

Veamos algunos ejemplos.
Ejemplo 7: Resolvamos las siguientes ecuaciones.

1
$$x^2-5x+6=0$$
$$t=-\frac{1}{2}*(-5)=\frac{5}{2}$$
$$u=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(6)}=\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2};\;x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$$
$$x_1=3\quad;\quad x_2=2$$

2
$$9x^2-6x+10=0$$
$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{10}{9}=0$$
$$t=-\frac{1}{2}*\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$
$$u=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{9}\right)}=\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{10}{9}}=\sqrt{-\frac{9}{9}}=i$$
$$x_1=\frac{1}{3}+i\quad;\quad x_2=\frac{1}{3}-i$$
$$x_1=\frac{1+3i}{3}\quad;\quad x_2=\frac{1-3i}{3}$$

Actividad 25: resolvemos las ecuaciones aplicando el método que corresponda o el que hayas comprendido mejor:

1. $2x^2+2x=40$	6. $2x^2+6x=20$	11. $2x^2+12x=32$	16. $2x^2+16x=18$
2. $2x^2+16x=40$	7. $2x^2+14x=16$	12. $5x^2+30x=35$	17. $11x^2+11x=22$
3. $2x^2+14x=36$	8. $2x^2+14x=36$	13. $2x^2+4x=30$	18. $4x^2+32x=36$
4. $4x^2+12x=40$	9. $3x^2+3x=36$	14. $3x^2+9x=30$	19. $2x^2+2x=40$
5. $5x^2+10x=4$	10. $2x^2+2x=40$	15. $2x^2+14x=16$	20. $2x^2+2x=24$

Ejemplo 8: Resolvemos las ecuaciones de orden superior.

1
$$x^3+8=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+4)=0$$
$$x+2=0\quad;\quad x^2-2x+4$$
$$x_1=-2\quad;\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{-3}}{2}$$
$$x_2=1+\sqrt{3}i\,;\;x_3=1-\sqrt{3}i$$

2
$$x^4-3x^2-4=0$$
$$(x^2-4)(x^2+1)=0$$
$$x^2-4=0\quad;\quad x^2+1=0$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}\quad;\quad\sqrt{x^2}=\sqrt{-1}$$
$$x=\pm2\quad;\quad x=\pm i$$
$$x_1=2\,;\;x_2=-2\;;\;x_3=i\,;\;x_4=-i$$

3. Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Las raíces de una ecuación, son las soluciones $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ las cuales nos permiten verificar o plantear ecuaciones bajo la condición $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$ Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 9: Verificamos si las raíces $x_1=3$ y $x_2=4$, pertenecen a la ecuación $x^2-x+12=0$

Sea: $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ → $(x-3)(x-4)=0$ → $x^2-7x+12=0$

Por lo tanto, verificamos que $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ no pertenecen a $x^2 - x + 12 = 0$

Así mismo debemos saber que $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ y $\boldsymbol{x_1 * x_2 = \frac{c}{a}}$, lo que nos permite encontrar algunos resultados de forma directa, sin necesidad de resolver la ecuación.

Ejemplo 10: Determinamos la suma y el producto de las raíces de la ecuación $\boldsymbol{2x^2+5x-11=0}$:

$$\textbf{Suma: } x_1 + x_2 = -\frac{(5)}{(2)} = -\frac{5}{2} \qquad \textbf{Producto: } x_1 * x_2 = \frac{(-11)}{(2)} = -\frac{11}{2}$$

Ejemplo 11: Determinamos las raíces y la ecuación cuya suma y producto de raíces es 2 y -15 respectivamente.

$$\textbf{Suma: } x_1 + x_2 = 2 = \frac{2}{1} = -\frac{-2}{1} = -\frac{b}{a} \quad \textbf{Producto: } x_1 * x_2 = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{c}{a}$$

Por lo tanto, la ecuación es : $\boldsymbol{x^2-2x-15=0}$ y cuyas raíces son: $\boldsymbol{x_1 = 5}$; $\boldsymbol{x_2 = -3}$

4. Sistemas de ecuaciones de segundo grado

Un sistema de ecuaciones cuadrática, es aquel conjunto de ecuaciones, donde por lo menos una de las ecuaciones debe ser de orden dos, para resolver este tipo de sistemas es necesario dominar todos los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (M. Sustitución, M. Igualación, M. Determinantes, M. Reducción), debido a que dependiendo del sistema, la resolución se simplifica o se hace más fácil, mientras que si se fuerza a un solo método el sistema se complica demasiado. Veamos.

Ejemplo 12: Resolvemos el sistema de ecuaciones xy = - 4 ; x - 2y = 6

Solución: $xy=-4$ $x-2y=6$ Despejamos x de la segunda $x=2y+6$	Reemplazamos en la 1ra ecuación $(2y+6)y=-4$ $2y^2+6y+4=0$ Resolvemos la ecuación $y_1=-1$; $y_2=-2$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x=2(-1)+6$; $x=2(-2)+6$ $x=4$; $x=2$ La solución es el par ordenado $P_1(4;-1)$; $P_2(2;-2)$

Ejemplo 13: Resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2+y^2=25$; $x^2-4y=-7$

Solución: $x^2+y^2=25$ $x^2-4y=-7$ Despejamos x^2 de 1ra y 2da $x^2=25-y^2$ $x^2=-7+4y$	Igualamos $x^2=x^2$. $25-y^2=-7+4y$ $-y^2-4y+32=0$ Resolvemos la ecuación $y_1=4$; $y_2=-8$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x^2=25-(4)^2$; $x^2=25-(-8)^2$ $x^2=9$; $x^2=-39$ $x=\pm 3$; $x=\pm\sqrt{39}i$ La solución es el par ordenado $P_1(3;4)$; $P_2(-3;4)$

Ejemplo 14: Resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2-3y^2=-3$; $5x^2+2y^2=53$

Solución: $x^2-3y^2=-3$ (-5) $5x^2+2y^2=53$ Despejamos x de la segunda $-5x^2+15y^2=15$ $5x^2+2y^2=53$ $17y^2=68$	Reemplazamos en la 1ra ec. $y^2=\frac{68}{17}=4$ $y=\pm 2$ Resolvemos la ecuación $y_1=2$; $y_2=-2$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x^2-3(2)^2=-3$; $x^2-3(-2)^2=-3$ $x=\pm 3$; $x=\pm 3$ La solución es el par ordenado $P_1(3;2)$; $P_2(-3;2)$ $P_3(3;-2)$; $P_4(-3;-2)$

Actividad 26. Resolvemos las ecuaciones en el cuaderno de precticas

I. Resolvemos las ecuaciones de segundo grado.

1) $x^2 - 4 = 0$
2) $x^2 - 25 = 0$
3) $x^2 - 49 = 0$
4) $x^2 - 2 = 0$
5) $4x^2 - 64 = 0$
6) $\frac{x^2}{49} - 1 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$
8) $x^2 + 7x = 0$
9) $x^2 + \frac{4}{3}x = 0$
10) $5x^2 + 15x = 0$
11) $\frac{4x^2-9x}{3} = 0$
12) $x^2 = -7x + 170$
13) $x^2 - 221 = -4x$
14) $2x^2 - 5x - 7 = 0$
15) $5x^2 = 12x - 9$
16) $\sqrt{4-2x} = 2 - \sqrt{x+2}$

II Resuelva aplicando la formula general:

1) $18 = 6x + x(x - 13)$
2) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
3) $x^2 + (x+2)^2 = 580$
4) $4x^2 - 6x + 2 = 0$
5) $5x^2 - 12x + 9 = 0$
6) $2k^2 - 3 = 5k$

III. Resolver las ecuaciones de cuarto grado:

1) $x^4 - 625 = 0$ 2) $x^4 - 16 = 0$ 3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

IV. Hallar las ecuaciones si se conocen las raíces:

1) $-13 \wedge$ 2) $\frac{-3}{2} \wedge -1$ 3) $-2 \wedge \frac{3}{4}$

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las matemáticas son herramientas muy útiles, que nos permiten dar soluciones a problemas que se pueden presentar en las diferentes ciencias o situaciones de nuestro contexto, un ejemplo podría ser el de calcular el área de terrenos, conocer el equilibrio entre la oferta y la demanda, conocer el comportamiento de los movimientos físicos, establecer parámetros económicos, estudiar el movimiento de los fenómenos astronómicos, el desarrollo de la comunicación, etc.

Todos estos y más, en la mayoría de los casos, se reducen a resolver algunas ecuaciónes o un sistema de ecuaciones. En ese sentido, es importante que recordemos sus propiedades y definiciones.

Ejemplo 15: Don Francisco se compra un terreno rectangular, donde instalará una cañería de 25 metros de diagonal para riego, además de la cañería decide comprar malla olímpica, para evitar que los animales ingresen a la huerta. ¿Cuántos metros de malla deberá comprar, si solo se acuerda que uno de los lados era 5 m más que la otra?

PLANTEAMIENTO	ECUACIÓN Y RESOLUCIÓN	RESPUESTA
$D = 25m$ $l_1 = x$ $l_2 = x + 5$	$25^2 = x^2 + (x+5)^2$ (T. Pitágoras) $625 = x^2 + x^2 + 10x + 25$ $2x^2 + 10x - 600 = 0$ Resolviendo la ecuación tenemos: $x_1 = 15$; $x_2 = -20$	Don Francisco tiene un terreno rectangular de 15x20 por lo tanto, debe comprar malla en una cantidad de 2x15+2x20=70 metros.

Ejemplo 16: Los estudiantes de primer año de agronomía, tienen como tarea construir y cultivar un huerto rectangular, en un terreno alejado de la universidad, con las siguientes características: Área de 288 m² , cuyo ancho sea el doble del largo. Si ellos deben proteger su producción con puntales y alambre de púas (de 5 filas) ¿Cuántos puntales y qué cantidad de alambre tendrán que comprar?

PLANTEAMIENTO	ECUACIÓN Y RESOLUCIÓN	RESPUESTA
Área: $xy = 288$ **Lados:** $x = 2y$	$xy = 288$ definición de área $x = 2y$ relación de lados Aplicando sustitución y resolviendo $(2y)y = 288 \rightarrow y = 12$ Sustituyendo-: $y = 12$ $x = 2(12) \rightarrow x = 24$	Los estudiantes deben comprar 2x12+2x24=72 puntales y 5x72= 360 metros de alambre de púas.

Actividad 27: Resolvemos los siguientes problemas aplicando ecuaciones de segundo grado.

1.Un triangulo rectangulo, es semejante a otro, cuyos lados son 3,4,5. hallamos los lados del triangulo, si su área debe ser de 24 u^2. Calculamos la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2

2. Calculamos las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

3.Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Hallamos las dimensiones de la caja.

4. Encontramos dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados 3809.

5. Adivinamos el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumente en 395 u^2.

6. En 11 años, la edad de Vicente será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Vicente ahora?

7. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 91 cm^2?.

8. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida tres números enteros consecutivos. Calculamos los lados del triángulo.

9. Existen dos cuadrados, el mayor tiene un area de 44 m^2 mas que el area del cuadrado pequeño y el pequeño tiene 2 metros menos de lado que el mayor. Calculamos los lados de los cuadrados.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 28. Analicemos y reflexionemos para responder las siguientes preguntas

1. ¿Por qué es importante el estudio de las ecuaciones de segundo grado?

2. ¿Qué aplicación tiene las ecuaciones de segundo grado en nuestro contexto?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 29.

1. Construye una maqueta tomando como referencia alguna curva (ecuacion de 2do grado), un ejemplo construir el sistema solar con el movimiento de traslación de la tierra, que se observa al inicio del tema.

2. Escribe un problema que se pueda presentar en tu contexto y que podamos resolver utilizando ecuaciones de segundo grado.

DESIGUALDADES E INECUACIONES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 30: Escribimos una posible repuesta a la siguiente situación

En segundo de secundaria existen 5 amigos que juegan muy bien a la pelota, los cuales para no olvidarse sus cumpleaños deciden anotar la fecha de sus nacimientos en sus agendas, de la siguiente forma: Carlos (15-09-2008), Juan (05-01-2008), Federico (29-11-2008), Ernesto (02-07-2008) y Marco (08-05-2008). Cierto día, a la escuela llega una convocatoria para participar en el campeonato sub 14, al escuchar esa noticia los amigos estaban felices, pues eran los mejores del colegio, pero cuando dijeron que los participantes debían ser menores de 14 años cumplidos el 31 de junio, dos de ellos quedaron tristes ¿Por qué será que dos de estos amigos se pusieron tristes? ¿Cuáles son sus nombres?

Como bien pudiste analizar, aunque todos tienen o cumplirán 14 algunos lo harán después de la fecha establecida, lo que nos indica que, algunos son mayores de 14 años, por lo tanto, se les debe excluir.

En nuestra vida, existen varias situaciones donde se analizan las desigualdades, incluido en los fenómenos sociales, siendo este el motivo por el cual los gobiernos como el nuestro tienen que implementar leyes que de una u otra forma deben reducir esa desigualdad.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Desigualdad e inecuación

Desigualdad.- Es la diferencia de valor que existe entre dos cantidades, para determinar las desigualdades vamos a observar los símbolos que se utilizaran y su significado:

Símbolo (nombre)	Significado	Ejemplo
> (mayor que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser más grande que la de la derecha	4>1<
< (menor que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser más pequeña que la de la derecha	5<10
≥ (mayor o igual que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser mayor o igual que la cantidad de la derecha.	-2≥-7 3≥3
≤ (menor o igual que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser menor o igual que la cantidad de la derecha	-4≤1 -1≤-1

Inecuación. Es una desigualdad que se verifica para agunos valores de las incognitas.

Ejemplo 1: interpretamos las siguientes inecuaciones.

$x > 1$: En la inecuación estamos indicando que los valores de x tienen que ser mayores a 1 sino sería falso.

$x \leq 7$: En la inecuación estamos indicando que los valores de x máximo deben llegar a 7, sino seria falso.

$x + 2 \geq - 3$: En la inecuación se indica que x + 2 nunca debe bajar de -3, sino sería falso.

Solución de una Inecuación. La solución de una inecuación es un conjunto de puntos, los cuales deben cumplir la condición de la desigualdad planteada, es decir, su conclusión siempre debe ser verdadera, si fuera falsa entonces no es la solución de una inecuación.

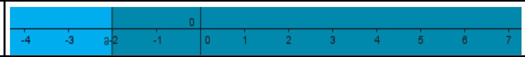
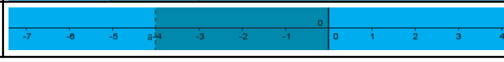
El conjunto de puntos de una inecuación, será conocida como **intérvalo.** Este intérvalo, puede ser abierto o cerrado, dependiendo de los limites o extremos del intervalo, lo cual generalmente se reduce a conocer o interpretar las desigualdades.

Intérvalo Abierto. - Es aquel intérvalo donde el limite no es parte de la solución, este intérvalo está relacionado con las desigualdades (< ó >) y las que generalmente se escriben con el símbolo ((;)).

Intérvalo Cerrado. - Es aquel intérvalo donde el límite es parte de la solución, este intérvalo está relacionado con las desigualdades (≤ ó ≥) y las que generalmente se escriben con el símbolo ([;]).

2. Intérvalo real y representación gráfica de los intérvalos

Un intérvalo es un conjunto de números, que depende del tipo de conjunto de números que estemos asumiendo como respuesta, en el caso general, se toma en cuenta los números Reales Veamos cómo se representaran las respuestas de las inecuaciones, o lo que llamaremos, conjunto solución, tanto de forma algebraica, como su representación gráfica.

INECUACIÓN	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	CONJUNTO SOLUCIÓN
$x < 5$		$CS: (-\infty; 5)$
$x \geq -2$		$CS: [-2; \infty)$
$-4 < x \leq -0$		$CS: (-4; 0]$

Como podemos notar, el conjunto solución de estas inecuaciones está representado en el conjunto de los números reales, además como se indicó, los intervalos abiertos (además del infinito) se representan por "()", mientras que los cerrados se representan por "[]"

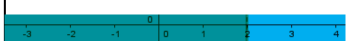
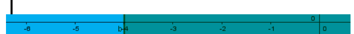
3. Inecuaciones lineales de una variable

Las inecuaciones de una variable de primer grado, son aquellas que tienen una sola variable y cuyo mayor exponente es uno. Para resolver estas inecuaciones, basta con respetar las propiedades de las inecuaciones que se observan en el cuadro mostrado, con el objetivo de despejar la variable, como se lo realizaba en una ecuación, sin olvidar la propiedad de la multiplicación por menos uno, porque cambia la desigualdad.

PROPIEDADES DE INECUACIONES

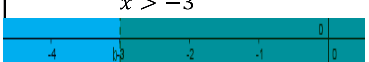
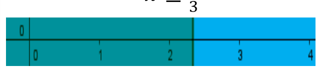
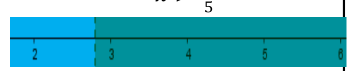
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a + c < b + c$
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a - c < b - c$
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a * c < b * c \;\leftrightarrow\; c > 0$
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a * c > b * c \;\leftrightarrow\; c < 0$
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a/c < b/c \;\leftrightarrow\; c > 0$
Sea: $a < b \;\rightarrow\; a/c > b/c \;\leftrightarrow\; c < 0$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1). $2x + 1 < 5$ $2x < 5 - 1$ $2x < 4$ $x < \frac{4}{2}$ $x < 2$  CS: $(-\infty; 2)$	2) $4x + 9 \geq -7$ $4x \geq -7 - 9$ $4x \geq -16$ $x \geq -\frac{16}{4}$ $x \geq -4$  CS: $[-4; \infty)$	3) $9x - 11 \leq 6x - 11$ $9x - 6x \leq -11 + 11$ $3x \leq 0$ $x \leq \frac{0}{3}$ $x \leq 0$  CS: $(-\infty; 0]$

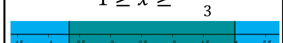
Como habrás podido notar resolver una inecuación es casi lo mismo que una ecuación, solo que ahora ya no es un solo valor, sino varios los que encontramos.

Ejemplo 3: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1) $-7 - 4x < 5$ $-4x < 5 + 7$ $-4x < 12 \quad (-1)$ $4x > -12$ $x > -\frac{12}{4}$ $x > -3$  CS: $(-3; \infty)$	2) $-12x + 21 \geq -7$ $-12x \geq -7 - 21$ $-12x \geq -28 \; (-1)$ $12x \leq 28$ $x \leq \frac{28}{12}$ $x \leq \frac{7}{3}$  CS: $(-\infty; \frac{7}{3}]$	3) $6x + 7 < 11x - 7$ $6x - 11x < -7 - 7$ $-5x < -14 \; (-1)$ $5x > 14$ $x > \frac{14}{5}$  CS: $(-\frac{14}{5}; \infty)$

En estos ejemplos te habrás dado cuenta de que cuando se multiplica por (-1) el sentido de la desigualdad cambia.

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1) $-9 < 5x + 1 < 16$ $-9 - 1 < 5x < 16 - 1$ $-10 < 5x < 15$ $-\frac{10}{5} < x > \frac{15}{5}$ $-2 < x < 3$  CS: $(-2; 3)$	2) $8 \leq 5 - 3x \leq 16$ $8 - 5 \leq -3x \leq 16 - 5$ $3 \leq -3x \leq 1 \; (-1)$ $-3 \geq 3x \geq -11$ $-\frac{3}{3} \geq x \geq -\frac{11}{3}$ $-1 \geq x \geq -\frac{11}{3}$  CS: $(-\frac{11}{3}; -1]$	3) $-9 \leq -8x + 7 < 27$ $-9 - 7 \leq -8x < 27 - 7$ $-16 \leq -8x < 20 \quad (-1)$ $16 \geq 8x > -20$ $\frac{16}{8} \geq x > \frac{-20}{8}$ $2 \geq x > -\frac{5}{2}$  CS: $(-\frac{14}{5}; \infty)$

Aunque existen dos límites, el procedimiento es el mismo, solo hay que tener cuidado con el (-1)

4. Inecuaciones con valor absoluto

Valor absoluto, es una función matemática que indica que cualquier valor que ingrese dentro de ella, su resultado siempre será positivo. El símbolo de valor absoluto es “|x|”, por ejemplo, |7|=7 pero si fuera |-7|=7

Una inecuación con valor absoluto nos indica que debemos encontrar los valores de la variable de tal forma que se satisfaga la desigualdad, para este efecto la cantidad del valor absoluto se dividirá en dos desigualdades (una con signo positivo y la otra con signo negativo) y se analizará sus soluciones, de tal forma que determinemos el intervalo donde se cumpla la desigualdad.

Ejemplo 5: Resolvemos la inecuación |3x - 6| ≥ 3

$+(3x-6) \geq 3$	$-(3x-6) \geq 3$
$3x-6 \geq 3$	$-3x+6 \geq 3$
$3x \geq 3+6$	$-3x \geq 3-6$
$x \geq \frac{9}{3}$; $x \geq 3$	$-3x \geq -3$ (-1) ; $3x \leq 3$; $x \leq \frac{3}{3}$; $x \leq 1$

Como podemos observar existen dos puntos x=1 y x=3 donde cambian resultados, así que analizaremos puntos intermedios para determinar valores de verdad de la inecuación, en x=0, x=2 y x=5

Con x=0 → $|3(0)-6| \geq 3$ → $|-6| \geq 3$ → $6 \geq 3$ → Verdadero

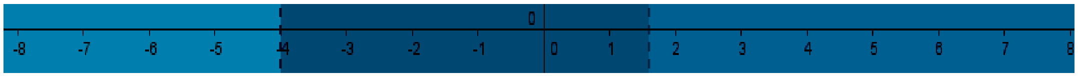
Con x=2 → $|3(2)-6| \geq 3$ → $|6-6| \geq 3$ → $0 \geq 3$ → Falso

Con x=0 → $|3(5)-6| \geq 3$ → $|15-6| \geq 3$ → $9 \geq 3$ → Verdadero

CS: $(-\infty; 1] \cup [3; \infty)$

Ejemplo 6: Resolvemos la inecuación | 5 x + 6| < 14

$+(5x+6) < 14$	$-(5x+6) < 14$
$5x+6 < 14$	$-5x-6 < 14$
$5x < 14-6$	$-5x < 14+6$
$5x < 8$; $x < \frac{8}{5}$	$-5x < 20$ (-1) ; $5x > -20$; $x > -\frac{20}{5}$; $x > -4$



Como podemos observar existen dos puntos x=8/5 y x=-4 donde cambian resultados, así que analizaremos puntos intermedios para determinar valores de verdad de la inecuación, en x=-7, x=0 y x=4

Con x=-7 → $|5(-7)+6| < 14$ → $|-35+6| < 14$ → $29 < 14$ → Falso

Con x=0 → $|5(0)+6| < 14$ → $|0+6| < 14$ → $6 < 14$ → Verdadero

Con x=4 → $|5(4)+6| < 14$ → $|20+6| < 14$ → $26 < 14$ → Falso

CS: $(-\infty; \frac{8}{5}) \cap (-4; \infty)$ Ó CS: $(-4; \frac{8}{5})$

En este tipo de ejercicios el valor de verdad solo se cumple dentro de un rango, por lo cual su resultado puede darse como la intersección de dos intervalos.

5. Inecuaciones cuadráticas y de grado superior

Este tipo de inecuaciones tienen la forma $ax^2+bx+c<0$ o $ax^2+bx+c>0$, donde la solución parte de la determinación de las raíces, para luego analizar los puntos medios y a partir de ahí conocer sus valores de verdad, que nos permitirán conocer los intervalos de solución.

Ejemplo 7: Resolver la inecuación de segundo grado

Resolver estas inecuaciones significa calcular las raíces por algún método de resolución de ecuaciones de 2do grado, los cuales hemos estudiado anteriormente.

a) $x^2+3x-4<0$ $(x-1)(x+4)<0$ $x=1$; $x=-4$	a) $2x^2-9x-5\geq 0$ $(2x+1)(x-5)\geq 0$ $x=-\frac{1}{2}$; $x=5$	a) $x^2-4x+4\leq 0$ $(x-2)(x-2)\leq 0$ $x=2$; $x=2$
Con x=-5 →$(-5)^2+3(-5)-4<0$ $25-15-4<0$ $6<0$ FALSO Con x=0 →$(0)^2+3(0)-4<0$ $0+0-4<0$ $-4<0$ VERDADERO Con x=3 →$(3)^2+3(3)-4<0$ $9+9-4<0$ $14<0$ FALSO CS: $(-4;1)$	Con x=-1 →$2(-1)^2-9(-1)-5\geq 0$ $2+9-5\geq 0$ $6\geq 0$ VERDADERO Con x=0 →$2(0)^2-9(-0)-5\geq 0$ $0-0-5\geq 0$ $-5\geq 0$ FALSO Con x=6 →$2(6)^2-9(6)-5\geq 0$ $72-54-5\geq 0$ $13\geq 0$ VERDADERO CS: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [5;\infty)$	Con x=0 →$(0)^2-4(0)+4\leq 0$ $0-0+4\leq 0$ $4\leq 0$ FALSO Con x=2 →$(2)^2-4(2)+4\leq 0$ $4-8+4\leq 0$ $0\leq 0$ VERDADERO Con x=5 →$(5)^2-4(5)+4\leq 0$ $25-20+4\leq 0$ $9\leq 0$ FALSO CS: $\{2\}$

Ejemplo 8: Resolvemos la siguientes inecuaciónes de segundo grado.

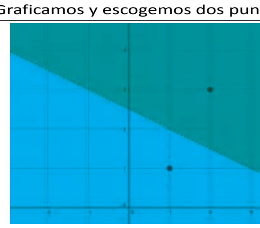
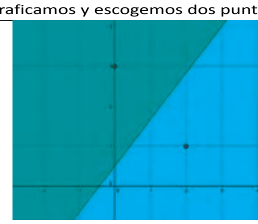
a) $x^4-10x^2+9>0$ $(x^2-1)(x^2-9)>0$ $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)>0$ $x=1$; $x=-1$; $x=3$; $x=-3$	a) $6x^3+x^2-35x\leq 0$ $x(3x-7)(2x+5)\geq 0$ $x=0$; $x=\frac{7}{3}$; $x=-\frac{5}{2}$
Con x=-4 →$(-4)^4-10(-4)^2+9>0$ $256-160+9>0$ $105>0$ VERDADERO Con x=-2 →$(-2)^4-10(-2)^2+9>0$ $16-40+9>0$ $-15>0$ FALSO Con x=0 →$(0)^4-10(0)^2+9>0$ $0-0+9>0$ $9>0$ VERDADERO Con x=2 →$(2)^4-10(2)^2+9>0$ $16-40+9>0$ $-15>0$ FALSO Con x=4 →$(4)^4-10(4)^2+9>0$ $256-160+9>0$ $91>0$ VERDADERO CS: $(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(3;\infty)$	Con x=-3 →$6(-3)^3+(-3)^2-35(-3)\leq 0$ $-162+9+105\leq 0$ $-48\leq 0$ VERDADERO Con x=-1 →$6(-1)^3+(-1)^2-35(-1)\leq 0$ $-6+1+35\leq 0$ $30\leq 0$ FALSO Con x=2 →$6(2)^3+(2)^2-35(2)\leq 0$ $24+4-70\leq 0$ $-42\leq 0$ VERDADERO Con x=3 →$6(3)^3+(3)^2-35(3)\leq 0$ $162+9-105\leq 0$ $66\leq 0$ FALSO CS: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[0;\frac{7}{3}\right]$

Existen varios métodos de poder determinar las raíces de un polinomio, como pudimos observar es solo analizar valores intermedios. En los ejemplos solo trabajamos con valores intermedios enteros, pero puede ser cualquier número que esté en el intervalo.

6. Inecuaciones lineales de dos variables

Una inecuación de dos variables es aquella desigualdad que tiene la forma $ax+by>c$, los cuales tienen una representación en el plano coordenado de donde escogeremos dos puntos a diferentes lados de la recta, en ese sentido tendremos que determinar a qué lado de la recta se verifican los valores de verdad.

Ejemplo 9: Graficamos y determinamos la solución de las siguientes inecuaciones.

f) $x+2y>5$ Graficamos y escogemos dos puntos	g) $7x-6y\leq -3$ Graficamos y escogemos dos puntos
	

Analizamos los valores de verdad	Analizamos los valores de verdad
Con x=2 ^ y=3 → $(2)+2(3)>5$ $2+6>5$ → $8>5$ VERDADERO Con x=1 ^ y=1 → $(1)+2(1)>5$ $1+2>5$ → $3>5$ FALSO CS: $\{x,y \in R/x+2y>5\}$ Lo que nos indica que la solución es, todos los pares ordenados (x,y) que estén sobre la línea	Con x=0 ^ y=3 → $7(0)-6(3) \leq -3$ $0-6 \leq 5$ → $-6 \leq 5$ VERDADERO Con x=2 ^ y=1 → $7(2)-6(1) \leq -3$ $14-6 \leq -3$ → $8 \leq -3$ FALSO CS: $\{x,y \in R/7x-6y>-3\}$ Lo que nos indica que la solución es, todos los pares ordenados (x,y) que estén sobre la línea

Debemos recordar la graficación de ecuaciones de primer grado con dos variables.

7. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las inecuaciones estudiadas en este capítulo, tienen bastante utilidad para realizar análisis de situaciones donde se necesita conocer qué valores pueden cumplir con una condición dada, recordamos por ejemplo la situación de los 5 amigos de 2do de secundaria que tenían que participar en un campeonato, de los cuales 2 no pudieron asistir porque habían pasado su edad de participación. Así como esta, existen muchas situaciones donde se aplican las inecuaciones, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10: Don Alfonso desea transportar duraznos de Camargo a La Paz, así que contrata una movilidad que máximo puede soportar 3000 kg, si todas las cajas en las que se trasportará el durazno pesan 344 kg y cada caja puede soportar 32 kg, ¿cuántas cajas como máximo podrán llevar en el camión?, ¿si cada caja la vende en Bs 97 al por mayor, cuánto obtendrá de la venta?

Planteamiento y resolución	Respuesta.
$32*x+350 \leq 3000$ $32x \leq 3000-344$ $x \leq \frac{2656}{32}$ $x \leq 83$	Don Alfonso podrá transportar como máximo 83 cajas de durazno a La Paz. Si logra llevar las 83 cajas de durazno, entonces puede obtener 83*97=8051 bolivianos.

Ejemplo 11: Doña Prima desea comprar para su tienda dos tipos de soda (gaseosa) y cuenta con Bs 1566, si una de ellas costará Bs 11 y la otra Bs 8, además por el precio desea siempre tener el doble de cantidad de la más barata que la más cara ¿Cuál es la cantidad máxima de sodas de cada tipo que podrá comprar para su tienda?

Planteamiento y Resolución	Respuesta.
$11*x+8*2x \leq 1566$ $27x \leq 1566$ $x \leq \frac{1566}{27}$ $x \leq 58$	Doña Prima, para cumplir con su objetivo de venta, debe tener como máximo 58 unidades de la soda más cara y 116 unidades de la soda más económica.

Ejemplo 12: A la escuela llega una comisión de salud, la cual tiene como objetivo analizar la salud física de los estudiantes, tomando en cuenta su talla y masa muscular P=(2M+3T)/4, bajo los siguientes parámetros:

$P<80$: desnutrición	$80 \leq P < 100$: normal	$100 \leq P$: sobrepeso

Si Alex pesa 35 kg y mide 80 cm, Romina pesa 45 kg y mide 90 cm, junto a Miguel que pesa 47 y mide 110 cm se someten a esa prueba, cuáles serán sus resultados.

Planteamiento y resolución	Respuesta.
Alex: $P=\frac{2(35)+3(80)}{4}=77.5$ Romina $P=\frac{2(45)+3(90)}{4}=90$ Miguel $P=\frac{2(47)+3(110)}{4}=106$	Alex tiene un cuadro de desnutrición. Romina tiene un cuadro normal de alimentación Miguel presenta un cuadro de sobrepeso

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 31:
1. La siguiente señal de tránsito nos indican la velocidad máxima que tiene que ir una movilidad. ¿Como podemos expresarlo a través de una inecuación? ¿crees que es importante aprender a resolver inecuaciones?
2. En dos grupos de debate, analizamos las leyes sobre la igualdad
3. Menciona 5 ejemplos de la aplicación de Inecuaciones y desigualdades en la cotidianidad, reflexionando sobre la importancia de su aplicación.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Acividad 32:
1. Elaboramos diferentes carteles de información, de transito u otros, donde se aplique inecuaciones
2. Elaboramos un cuadro de desigualdades para el curso, donde se muestren diferentes ejemplos.
3. Investigamos alguna situación dentro de nuestra comunidad, donde se presente alguna desigualdad y con la ayuda del profesor lo matematizamos, para luego exponerlo en el curso.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 33:
Analicemos la siguiente situación problematica:

Don Fernando posee un terreno de 512m^2, el cual quiere convertirlo en un huerto, pero como no tiene mucho dinero, promete tener 1m^2 cultivado el primer mes, 2m^2 cultivados el segundo mes, 4m^2 cultivados el tercer mes, 8m^2 el cuarto mes, así sucesivamente hasta completar su huerto.

¿Cuántos meses tendrá que trabajar don Fernando para realizar esta actividad?

Como notarás, calcular la situación anterior no fue complicada, pero que pasaría, si ahora te pongo el reto de calcular el tiempo, pero con las siguientes condiciones:

Si una persona que tiene un terreno de 7503m^2 no quiere doblar su producción con respecto al primer mes, sino producir el 1,5 más de su producción que el anterior mes ¿cómo podemos realizar el cálculo de producción?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Concebir el desarrollo y avance tecnológico sin el aporte de los conocimientos de logaritmos y los exponentes sería una tarea casi imposible, debido a que casi todos los software, programas o aplicaciones, que hay en los celulares y las computadoras, basan su funcionamiento en estos dos conceptos.

En sus inicios los logaritmos fueron trabajados con la intención de poder simplificar, cálculos astronómicos de una forma más sencilla, situación que hoy aprovecharon los desarrolladores de tecnología para mejorar sus procesadores y por ende aumentar la tecnología en las diferentes actividades de la evolución humana, ayudando a mejorar, los sistemas de salud, economía, población, educación, etc.

1. Sistemas de logaritmos

Los sistemas de logaritmos dependen de la base (positiva y diferente de 1), abriendo la posibilidad de tener un sin fin de sistemas, pero existen dos sistemas de logaritmos que son los más utilizados.

- **Sistemas de logaritmos decimales o de Briggs**

Es el sistema donde el logaritmo adopta la base 10 (la cual se sobreentiende), $\log_{10} M = \log M$

- **Sistemas de logaritmos naturales o Neperianos**

Es el sistema donde el logaritmo adopta la base es “e” (2.718281828...), $\log_e M = \ln M$

Es importante destacar que: $\log M = n \rightarrow M = 10^n$ y que: $\ln M = n \rightarrow M = e^n$

2. Propiedades de los logaritmos

P-1: En todo sistema de logaritmos, la base solo puede ser positiva y diferente de 1.

$$\log_A M = n \;;\; con\;\; A \in R[+] - \{0;1\}$$

P-2: En todo sistema de logaritmos, solo existen logaritmos de números positivos.

$$\log_A M = n \;\;;\;\; con\;\; M \in R[+] - \{0\}$$

P-3: En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1.

$$\log_M M = 1 \;\rightarrow\; M = M^1$$

P-4: En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

$$\log_n 1 = 0 \;\rightarrow\; 1 = n^0$$

P-5: El logaritmo de un producto, es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

$$\log_n (A * B) = \log_n A + \log_n B$$

P-6: El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del numerador, menos el logaritmo del denominador

$$\log_n \left(\frac{A}{B}\right) = \log_n A - \log_n B$$

P-7: El logaritmo de una potencia, es igual a la potencia multiplicada por el logaritmo de su base.

$$\log_c A^n = n * \log_c A$$

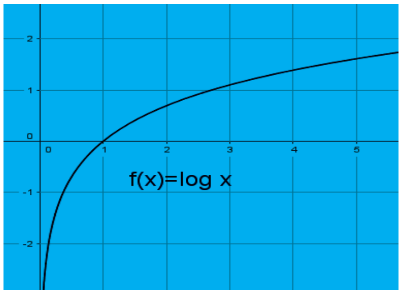
P-8: El logaritmo de una raíz de índice “n”, es igual al logaritmo de la cantidad subradical, sobre el índice de la raíz.

$$\log_c \sqrt[n]{A} = \frac{\log_c A}{n}$$

Cambio de base (C. B.): El logaritmo en base “c”, puede cambiar a otra base “n”, haciendo una división entre el logaritmo en la nueva base, sobre el logaritmo de la base anterior.

$$\log_c A = \frac{\log_n A}{\log_n c}$$

3. Función Logaritmo



Partiendo de la concepción matemática, podemos decir que una función es la relación que existe entre dos conjuntos, donde para cada elemento del conjunto inicial, se le asigna un único elemento del conjunto final. Por lo tanto, la función logarítmica seria $f(x) = \log(x)$, donde para cada elemento del conjunto “x”, existe otro elemento en el conjunto “y” afectado por el logaritmo, donde “x” e “y” son la abscisa y ordenada del plano cartesiano. Es importante señalar que la función logaritmo, es inversa la función exponencial.

4. Ecuaciones Logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella ecuación que tiene expresiones logarítmicas, las cuales resolveremos aplicando la definición de logaritmo (D. Log.), sus diferentes propiedades (P-1 hasta C. B.), además de apoyarnos en la teoría de exponentes y su propiedad de ecuaciones exponenciales. Veamos:

Ejemplo 1: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas aplicando la definición de logaritmos.

1. $\log_{(x+1)} 121 = 2$

Solución

$121 = (x+1)^2$

$11^2 = (x+1)^2$

$11 = x + 1$

$10 = x$

2. $\log_2 8 = x$

Solución

$8 = 2^x$

$2^3 = 2^x$

$3 = x$

3. $\log_{(\sqrt[3]{2})} x = 6$

Solución

$x = (\sqrt[3]{2})^6$

$x = 2^2$

$x = 4$

4. $\log_{\sqrt{3}} \left[4 + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x\right] = 2$

Solución

$4 + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x = (\sqrt{3})^2$

$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x = 3 - 4$

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \;;\;\; x = 3$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas aplicando las propiedades de logaritmos.

1. $\frac{1}{2} + \log_{(0.25)}[1 + \log_{3x}(x^2 - 10)] = 0$

Solución

$$\log_{(0.25)}[1 + \log_{3x}(x^2 - 10)] = -\frac{1}{2}$$
$$1 + \log_{3x}(x^2 - 10) = (0.25)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\log_{3x}(x^2 - 10) = 2 - 1$$
$$x^2 - 10 = (3x)^1$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$x = 5\,;\quad x = -2\ (no\ usamos)$$

2. $\log_{\sqrt{7}}(x-1) + \log_{\sqrt{7}}(x+3) = \log_{\sqrt{7}} x(x-4)$

Solución

$$\log_{\sqrt{7}}(x-1)(x+3) = \log_{\sqrt{7}} x(x-4)$$
$$(x-1)(x+3) = x(x-4)$$
$$x^2 + 2x - 3 = x^2 - 4x$$

3. $\log_3 x + \log_3(x+8) = 2$

Solución

$$\log_3 x(x+8) = 2$$
$$x(x+8) = 3^2$$
$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$x = 1\,;\quad x = -9\ (no\ usamos)$$

4. $\log_{0.3}(2x-3) - \log_{0.3}(5x+1) = \log_{0.3}\frac{2}{7}$

Solución

$$\log_{0.3}\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) = \log_{0.3}\frac{2}{7}$$
$$\frac{2x-3}{5x+1} = \frac{2}{7}$$
$$14x - 21 = 10x + 2$$
$$4x = 23 \quad ; \quad x = \frac{23}{4}$$

Ejemplo 3:

1. $\log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 - 2) - \log_{\sqrt[3]{2}}(x+3) = 3$

Solución

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right) = 3$$
$$\frac{x^2-2}{x+3} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$
$$\frac{x^2-2}{x+3} = 2$$
$$x^2 - 2 = 2x + 6\ ;\quad x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x = 4\,;\quad x = -2$$

2. $5 * \log_{\sqrt{243}}(2x-1) = 2$

Solución

$$\log_{\sqrt{243}}(2x-1)^5 = 2$$
$$(2x-1)^5 = \left(\sqrt{243}\right)^2$$
$$(2x-1)^5 = 243$$
$$(2x-1)^5 = 3^5$$
$$2x - 1 = 3$$
$$x = 2$$

3. $\frac{\log_{2x}(25x^2 - 60x + 36)}{2} = 1$

Solución

$$\log_{2x}\sqrt{25x^2 - 60x + 36} = 1$$
$$\sqrt{(5x-6)^2} = (2x)^1$$
$$5x - 6 =$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas (tener en cuenta el cambio de base).

1. $2 * \ln(x+2) - \ln(x^2 - 4) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{\ln(x^2 - 10x + 25)}{2}$

SOLUCIÓN

$$\ln(x+2)^2 - \ln(x^2-4) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \ln\sqrt{x^2 - 10x + 25}$$
$$\ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\right] = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-1}\right)$$
$$\frac{(x+2)^2}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-1}$$
$$\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-1}$$
$$\frac{(x+2)}{(x-2)} = \frac{(x-5)}{x-1}$$
$$(x+2)(x-1) = (x-5)(x-2)$$
$$x^2 + x - 2 = x^2 - 7x + 10$$
$$8x = 12 \quad ; \quad x = \frac{3}{2}$$

1. $\log_5 x + 2 * \log_x 5 = 3$

SOLUCIÓN

$$\log_5 x + 2 * \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 3$$
$$(\log_5 x)^2 + 2 * \log_5 5 = 3 * \log_5 x$$
$$(\log_5 x)^2 - 3 * \log_5 x + 2 * 1 = 0$$
$$(\log_5 x - 2)(\log_5 x - 1) = 0$$
$$\log_5 x - 2 = 0\,;\ \log_5 x - 1 = 0$$
$$\log_5 x = 2\,;\ \log_5 x = 1$$
$$x = 5^2\,;\ x = 5^1$$
$$x = 25\,;\ x = 5$$

1. $5 * \log_x 8 - 4 * \log_4 x = 1$

Solución

$$5 * \frac{\log_2 8}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1$$
$$5 * \frac{\log_2 2^3}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} = 1$$
$$5 * \frac{3 * \log_2 2}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{2 * \log_2 2} = 1$$
$$5 * \frac{3}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{2} = 1$$
$$30 - 4 * (\log_2 x)^2 = 2 * \log_2 x$$
$$-4 * (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 30 = 0$$
$$2 * (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 15 = 0$$
$$(2 * \log_2 x - 5)(\log_2 x + 3) = 0$$
$$2 * \log_2 x - 5 = 0\,;\ \log_2 x + 3 = 0$$
$$\log_2 x = \frac{5}{2}\,;\ \log_5 x = -3$$
$$x = (2)^{\frac{5}{2}}\,;\ x = (2)^{-3}$$
$$x = \sqrt{32}\,;\ x = \frac{1}{8}$$

Actividad 34: Resolvemos todas las ecuaciones logarítmicas mostradas, utilizando los ejemplos estudiados.

$$\log_5 x = 2$$
$$\log_x 343 = 3$$
$$\log_3 243 = x - 1$$
$$\log_{\sqrt{5}}[\log_3(x+1)] = 0$$
$$\log_7\left[8 + \log_{\left(\frac{1}{5}\right)}(2x-1)\right] = 1$$
$$\log_{\sqrt{60}} 3x + \log_{\sqrt{60}} 5x = 2$$
$$\log_{0.41}(x-3) + \log_{0,41} 7 = \log_{0,41}(2x-1)$$
$$\log_{\left(\frac{2}{5}\right)}(x+3) - \log_{\left(\frac{2}{5}\right)}(3x-2) = -1$$

Tratamiento de la relación exponencial

La función exponencial tiene una relación directa con la función logarítmica, ya que una es la inversa de la otra, por lo tanto, al resolver ecuaciones o simplificaciones, recurriremos directa o indirectamente a ambas.

$$b^n = \underbrace{b * b * b * b * \cdots \dots . \dots * b}_{n\ veces}$$

5. Propiedades de los exponentes

Antes de proceder a conocer las propiedades que rigen a los exponentes, tenemos que definir el significado de un exponente o potencia. Una potencia es el producto de multiplicar un número llamado base "b", la cantidad de veces que indique otro número llamado exponente "n".

Exponente cero.- Toda cantidad diferente de cero, elevado al exponente cero, es uno.

$$a^0 = 1 \quad ; \quad con\ a \neq 0$$

Ejemplo 7: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios

$$3m^0 + 2\left(\sqrt{3}\right)^0 = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad \frac{3-(x-7)^0}{2(x-y)^0} = \frac{3-1}{2*1} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad \left(\frac{1+\sqrt{x}}{3-a}\right)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Exponente negativo.- Toda cantidad diferente de cero, elevado al exponente negativo, invierte su posición, cambiando el signo del exponente.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad ; \quad \frac{1}{a^{-m}} = a^m \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Ejemplo 8: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$20 * 5^{-2} = \frac{20}{5^2} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \frac{3}{7^{-2}} = 3 * 7^2 = 147 \quad ; \quad \frac{4}{9} * \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{4}{9} * \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} * \frac{27}{8} = \frac{3}{2}$$

Exponente fraccionario, - Toda cantidad, elevada al exponente fraccionario, se convierte en raíz de la base, siendo el numerador el exponente, y el denominador el índice de la raíz.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplo 9: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \quad ; \quad 7x^{\frac{2}{u}} = 7\sqrt[u]{x^2} \quad ; \quad \left(\frac{5+x}{4}\right)^{\frac{a+2}{b-3}} = \sqrt[b-3]{\left(\frac{5+x}{4}\right)^{a+2}}$$

Producto de potencias de bases iguales. - Para multiplicar potencias con la misma base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 10: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8; \quad x^{2+m} * x^{2m-5} = x^{2+m+2m-5} = x^{3m-3}\ ; \quad m^4 * y^2 * m * y^{-7} = m^5 * y^{-5}$$

Cociente de potencias de bases iguales. - Si dos potencias de bases iguales se dividen, se mantiene la base y se resta el exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 11: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 \quad ; \quad \frac{m^{2u+3}}{m^{3u+3}} = m^{2u+3-3u-3} = m^{-u} \quad ; \quad \frac{2^4 x^{-m}}{2^{-1}x^2} = 2^5 x^{-m-2}$$

Potencia de otra potencia. - Si una potencia está elevada a otra potencia, la base se mantiene y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

Ejemplo 12: Aplicando la propiedades de exponentes, simplificamos los siguientes ejercicios.

$$\left(7^{-3}\right)^{-2} = 7^{-3(-2)} = 7^6 \quad ; \quad \left(x^{m-5}\right)^{-3} = x^{(m-5)(-3)} = x^{-3m+15} \quad ; \quad \left(2^{-\frac{5}{4}}\right)^8 = 2^{-10}$$

Ecuaciones exponenciales. - A bases iguales, exponentes iguales y a exponentes iguales, bases iguales:

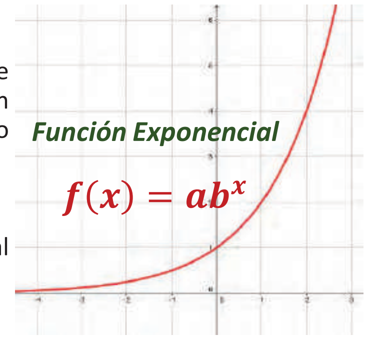
$$a^x = a^m \quad \therefore \quad x = m$$
$$x^n = a^n \quad \therefore \quad x = a$$

Ejemplo 13: Aplicando la propiedad de exponentes resolvemos las ecuaciones.

$$5^x = 125 \quad ; \quad 5^x = 5^3 \quad ; \quad x = 3$$
$$81^x = 27 \quad ; \quad 3^{4x} = 3^3 \quad ; \quad 4x = 3 \quad ; \quad x = \frac{3}{4}$$
$$\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{3} \quad ; \quad 3^{\frac{2x}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \frac{2x}{2} = \frac{1}{3} \quad ; \quad x = \frac{1}{3}$$
$$16^x * 4 = \frac{1}{8} \quad ; \quad 2^{4x} * 2^2 = 2^{-3} \quad ; \quad 2^{4x+2} = 2^{-3} \quad ; \quad 4x + 2 = -3 \quad ; \quad x = -\frac{5}{4}$$
$$a^{2x}a^3a^{7-3x} = 1 \quad ; \quad a^{2x+3+7-3x} = a^0 \quad ; \quad -x + 10 = 0 \quad ; \quad x = 10$$
$$\frac{49^x * 343}{7^{4x-1}} = \sqrt[3]{49} \quad ; \quad 7^{2x} * 7^3 * 7^{-4x+1} = 7^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad -2x + 4 = \frac{2}{3} \quad ; \quad x = \frac{5}{3}$$

6. Función exponencial

Partiendo del concepto de función, que indica que una función es la relación existente entre dos conjuntos de números, donde los números del conjunto de partida, tienen un único elemento en el conjunto de llegada. Esta relación es la que conocemos como función exponencial y vienen dada por la forma:



f(x)=a*b^x

Podemos observar que la variable independiente "x" se halla en el exponente, lo cual hace que la gráfica sea una curva.

7. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella donde la incógnita de la ecuación se halla en el exponente, por lo tanto, la forma de resolverla no es tan simple como parece, en ese sentido presta mucha atención, pues utilizaremos propiedades de logaritmos y la propiedad de las ecuaciones exponenciales que dice: "A exponentes iguales, bases iguales. Y a bases iguales, exponentes iguales", además de convertir las cantidades en sus bases más simples. Veamos:

Ejemplo 14: Aplicando la propiedad, simplificamos los siguientes ejercicios.

1. $8^x = 16$

Solución

$$(2^3)^x = 2^4$$
$$2^{3x} = 2^4$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$

1. $\sqrt[x]{729} = 27$

SOLUCIÓN

$$\sqrt[x]{3^6} = 3^3$$
$$3^{\frac{6}{x}} = 3^3$$
$$\frac{6}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{6}{3} = x$$
$$2 = x$$

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

Solución

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$x = -2$$

1. $4 * 2^x = 32 * 8^3$

Solución

$$2^2 * 2^x = 2^5 * (2^3)^x$$
$$2^{2+x} = 2^5 * 2^{3x}$$
$$2^{2+x} = 2^{5+3x}$$
$$2 + x = 5 + 3x$$
$$-3 = 2x \quad ; \quad -\frac{3}{2} = x$$

1. $\frac{(5^x)^x}{625} = 1$

Solución

$$\frac{5^{x^2}}{5^4} = 1$$
$$5^{x^2-4} = 5^0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x = 2 \quad ; \quad x = -2$$

1. $\frac{343^x}{49 * 7^x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}$

Solución

$$\frac{(7^3)^x}{7^2 * 7^x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}$$
$$7^{3x-2-x} = 7^4$$
$$3x - 2 - x = 4$$
$$x = 3$$

Actividad 34: Con el apoyo de los ejercicios mostrados resolvemos las siguientes ecuaciones:

1. $128^x = 4 * 2^x$

2. $(a^x)^{2x} = a^{31} * a^{19}$

3. $\sqrt[x]{m^5} = \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt{m}}$

4. $81 * 9^x = \frac{3^x}{243}$

1) $\left(\frac{7^x}{49}\right)^x = 343$

2) $\frac{4}{2^x} * \sqrt{\sqrt[10]{32^x}} = 1$

3) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a^{3x}} = a\sqrt[6]{a^x a^{2x}}$

4) $\frac{27^x}{64^x} = 1\frac{1}{3}$

1) $\left(\sqrt[2x]{3}\right)^{2x-5} = \sqrt[8]{\frac{9^x}{243}}$

2) $\frac{m^{x+3}}{m^{1-2x}} = \sqrt[x]{m^5}$

3) $125^{3x} * 5^{x-2} = 25(5^{3-x})^{-2}$

4) $\sqrt[x-3]{m^{5x}}\sqrt[4]{m^{3+2x}} = 1$

Ejemplo 15: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

1. $\sqrt[4]{\frac{m^x * \sqrt[3]{m^x}}{m^{5+x}}} - 1 = 0$

Solución

$$\sqrt[4]{\frac{m^x * m^{\frac{x}{3}}}{m^{5+x}}} - 1 = 0$$
$$\sqrt[4]{m^{x+\frac{x}{3}-x-5}} = 1$$
$$m^{\frac{\frac{x}{3}-5}{4}} = m^0$$
$$\frac{\frac{x}{3}-5}{4} = 0 \quad ; \quad x = 15$$

2. $125 * 5^x - \frac{25}{625^x} = 0$

Solución

$$5^3 * 5^x - \frac{5^2}{5^{4x}} = 0$$
$$5^{3+x} = 5^{2-4x}$$
$$3 + x = 2 - 4x$$
$$x = -\frac{1}{5}$$

3 $\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = \frac{a^{-1} * (a^5)^x}{a^4 * a^{2x}}$

Solución

$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = \frac{a^{-1} * a^{5x}}{a^4 * a^{2x}}$$
$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = a^{-1+5x-4-2x}$$
$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - a^{3x-5} = \frac{2}{3}a^{3+x}$$
$$\frac{2}{3}a^{3x-5} = \frac{2}{3}a^{3+x}$$
$$3x - 5 = 3 + x$$
$$x = 4$$

4 $\frac{\left(\sqrt[x]{2}\right)^{x^3}}{128} - \left(\frac{2^{-1}}{4^x}\right)^{-1} = 0$

Solución

$$\frac{2^{\frac{x^3}{x}}}{2^7} - \left(\frac{2^{-1}}{2^{2x}}\right)^{-1} = 0$$
$$2^{x^2-7} = \frac{2}{2^{-2x}}$$
$$2^{x^2-7} = 2^{1+2x}$$
$$x^2 - 7 = 1 + 2x$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x = 4 \; ; \; x = -2$$

Actividad 35: Apoyándonos en los ejemplos anteriores resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $3m^{2x}+2m^{3x-7}=5m^{2x}$

2) $\frac{(a^x)^{x-1}}{a^5}-\frac{a^{2x}a^{4-x}}{a^{x+3}}=0$

3) $\frac{\sqrt{125^x}}{25}-\frac{35}{7\sqrt[3]{5^x}}=0$

4) $\frac{3*49^x}{686}-\frac{35}{4}\left(\frac{343}{7^x}\right)^{-1}=\frac{(49)^{x-1}}{14}-\frac{7^x(2^{-1})^2}{49}$

Ecuaciones exponenciales de bases diferentes

Existen ecuaciones donde la base del exponente suele ser diferente, por lo tanto, es necesario aplicar la función logaritmo, ya que la propiedad de la potencia de un logaritmo, nos permite convertir el exponente como coeficiente.

Ejemplo 16: Aplicando propiedades de exponentes y logaritmos resolvemos las siguientes ecuaciones.

1. $\sqrt[x]{7}=5$

Solución

$$\log\sqrt[x]{7}=\log 5$$

$$\frac{\log 7}{x}=\log 5$$

$$x=\frac{\log 7}{\log 5}$$

2 $2^x=3$

Solución

$$\log 2^x=\log 3$$

$$x*\log 2=\log 3$$

$$x=\frac{\log 3}{\log 2}$$

3 $3^{3x-1}=11$

Solución

$$\log 3^{3x-1}=\log 11$$

$$(3x-1)\log 3=\log 11$$

$$3x*\log 3-\log 3=\log 11$$

$$x=\frac{\log 11+\log 3}{3*\log 3}$$

4 $5^{x+2}=13$

Solución

$$\log 5^{x+2}=\log 13$$

$$(x+2)\log 5=\log 13$$

$$x*\log 5+2*\log 5=\log 13$$

$$x=\frac{\log 13-2*\log 5}{\log 5}$$

5 $2^{5x+3}=7^{x-2}$

Solución

$\log 2^{5x+3}=\log 7^{x-2}$	Aplicamos logaritmos.
$(5x+3)*\log 2=(3x-2)*\log 7$	Aplicamos log de Potencia.
$5x*\log 2+3*\log 2=3x*\log 7-2*\log 7$	Multiplicamos.
$5x*\log 2-3x*\log 7=-2*\log 7-3*\log 2$	Ordenamos los términos
$x(5*\log 2-3*\log 7)=-2*\log 7-3*\log 2$	Factorizamos la incógnita
$x=\frac{-2*\log 7-3*\log 2}{5*\log 2-3*\log 7}$	Despejamos "x"

Actividad 36: En nuestro cuaderno de práctica resolvemos las siguientes ecuaciones.

1) $5^x=2$
2) $2^{3x}=7$
3) $5^{-7x}=3$
4) $3^{x+5}=4$
5) $11^{x-3}=2^x$
6) $7^{2x+1}=11^{x-7}$
7) $4^{7x+1}=5^{2x}$
8) $13^{3x}=2^{1-x}$
9) $6^{5x+3}=17^{1-x}$
10) $9^{2x-7}=11^{3x+1}$

Ecuaciones exponenciales de 2do grado.

Ejemplo 17: Aplicando propiedades de exponentes y logaritmos resolvemos las siguientes ecuaciones:

1. $49^x-7*7^x+12=0$

Solución

$(7^2)^x-7*7^x+12=0$	Convertimos a base 7
$(7^x)^2-7*(7^x)+12=0$	Volvemos ec. 2do grado
$(7^x-4)(7^x-3)=0$	Factorizamos.
$7^x-4=0\ ;\ 7^x-3=0$	Igualamos a Cero.
$7^x=4\ \ ;\ \ 7^x=3$	Despejamos "x".
$x=\frac{\log 4}{\log 7}\ \ ;\ \ x=\frac{\log 3}{\log 7}$	Aplicamos Logaritmos

2 $4^x-5*2^x+4=0$

Solución

$$(2^2)^x-5*2^x+4=0$$

$$(2^x)^2-5*(2^x)+4=0$$

$$(2^x-4)(2^x-1)=0$$

$$2^x-4=0\ ;\ 2^x-1=0$$

$$2^x=4\ \ ;\ \ 2^x=1$$

$$x=2\ \ ;\ \ x=0$$

Actividad 37: En nuestro cuaderno de prácticas, resolvemos las siguientes ecuaciones.

1) $25^x - 30 * 5^x + 125 = 0$ 4) $4^x + 6 * 2^x - 16 = 0$ 7) $25^x - 7 * 5^x + 10 = 0$

2) $9^x - 14 * 3^x + 45 = 0$ 5) $4^x - 5 * 2^x - 24 = 0$ 8) $121^x - 10 * 11^x - 11 = 0$

3) $49^x - 8 * 7^x + 7 = 0$ 6) $9^x + 25 * 3^x - 54 = 0$ 9) $9^x - 30 * 3^x + 81 = 0$

8. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicos y Exponenciales

Los sistemas de ecuaciones de este tipo, pueden estar formadas por una ecuación exponencial, una ecuación logarítmica o ambas en un mismo sistema. Para su resolución utilizaremos los métodos ya estudiados:

Método de sustitución, se despeja una incógnita y se reemplaza en la otra ecuación.

Método de igualación, se despeja la misma incógnita y se igualan sus equivalentes.

Método de reducción, se busca eliminar una incógnita previa multiplicación adecuada.

Método de determinantes, se aplica las fórmulas de los determinantes de las matrices

Ejemplo 18: Resolvamos los sistemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} \ln 2 + \ln x = \ln(5-y) \\ \dfrac{a^x}{a^{3y}} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} \ln 2x = \ln(5-y) \\ a^{x-3y} = a^{-1} \end{cases}$ Suma de logaritmos. Cociente de la misma base

$\begin{cases} 2x = 5 - y \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ Eliminamos logaritmos. Aplicamos bases Iguales

Resolviendo el sistema por cualquier método tenemos: $x = 2; y = 1$

$\begin{cases} \dfrac{3^x}{81^y} = 1 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^{x-4y} = 3^0 \\ \log_4 xy = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$ Aplicamos bases iguales. Definición de logaritmos

Resolviendo el sistema por cualquier método tenemos: $x_1 = 4; y_1 = 1$ $x_2 = -4; y_2 = -1$

Ejemplo 19: Resolvemos los sitemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} 3\log_x 8 - 2\log_y 49 = 5 \\ 2\log_x 8 + 5\log_y 49 = 16 \end{cases}$

Solución: Usamos Reducción

$\begin{cases} 3\log_x 8 - 2\log_y 49 = 5 & (5) \\ 2\log_x 8 + 5\log_y 49 = 16 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} 15\log_x 8 - \cancel{10\log_y 49} = 25 \\ 4\log_x 8 + \cancel{10\log_y 49} = 32 \end{cases}$

$19\log_x 8 = 57$

$\log_x 8 = 3$

Reemplazamos $\log_x 8 = 3$ *en la 1ra ecuación*

$3(3) - 2\log_y 49 = 5$

$-2\log_y 49 = -4$

$\log_y 49 = 2$

Usando propiedad de logaritmos despejamos “x” e “y”

$\log_x 8 = 3$ $\log_y 49 = 2$

$2^3 = x^3$ $7^2 = y^2$

$2 = x$ $7 = y$

Ejemplo 20: Resolvemos los sistemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} 5 * 2^x - 3 * 3^y = 13 \\ 7 * 2^x - 6 * 3^y = 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN: Usamos Reducción

$\begin{cases} 5 * 2^x - 3 * 3^y = 13 & \text{(-2)} \\ 7 * 2^x - 6 * 3^y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -10 * 2^x + \cancel{6 * 3^y} = -26 \\ 7 * 2^x - \cancel{6 * 3^y} = 2 \end{cases}$

$-3 * 2^x = -24$

$2^x = 8$

Reemplazamos $2^x = 8$*, en la 2da ec.*

$7 * (8) - 6 * 3^y = 2$

$-6 * 3^y = -54$

$3^y = 9$

Usando propiedad de exponentes despejamos “x” e “y”

$2^x = 8$ $3^y = 9$

$2^x = 2^3$ $3^y = 3^2$

$x = 3$ $y = 2$

Actividad 38: Apoyándonos en los ejercicios resueltos resolvamos las siguientes ecuaciones

1. $\begin{cases} -2+\log_5(x^2+y^2)=0 \\ 2^x * 2^y - 128 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3\log_{\sqrt{3}} x + 4\log_{0,25} y = 2 \\ 5\log_{\sqrt{3}} x + \log_{0,25} y = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{5^x}{125} - \frac{1}{5^y} = 0 \\ \log_{\sqrt{3x+5-y^2}} x + \log_{\sqrt{3x+5-y^2}}(x+3) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3 * 5^x + 2^y = 407 \\ 5^x - 2 * 2^y = 61 \end{cases}$

9. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Como habíamos mencionado en el momento de la teoria, las funciones logarítmicas y exponenciales, han empezado a tener bastante aplicación en el desarrollo tecnológico.

- En psicología La Ley de Fencher, $S = K + C \ln E,$ nos habla de la medición de los estímulos y las sensaciones
- La datación de Fósiles utilizando $t = \frac{T_N}{-\ln 2} * \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)$.
- La determinación de la magnitud de un terremoto en la escala de Ritcher, $\log E = 11,8 + 1,5 * M$.
- La medición del pH de las soluciones, $pH = -\log[H3O^+]$ el cual nos permite calcular la acidez o alcalinidad de algunos productos domésticos.
- En la estadística, específicamente en el crecimiento demográfico, $P_t = P_0 (1 + r)^t$.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 39 :
Los logaritmos y exponentes se aplican para el estudio de diferentes fenómenos como ser el crecimiento poblacional, el cálculo de distancias entre planetas y otros, como lo analizamos anteriormente.

Ahora respondamos reflexivamente las siguientes preguntas:

- ¿Qué fenómenos naturales pueden estudiarse a través de logaritmos y exponentes?
- ¿Aplicas funciones exponenciales y logarítmicas en tu contexto?
- ¿Si tuviéramos que utilizar funciones logarítmicas podrías realizarlo? detalla 5 ejemplos.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 40:

1. Plantea una situación problematica del contexto que se pueda resolver utilizando logaritmos.
2. Investiguemos y escribamos dos aplicaciones de las ecuaciones exponenciales, exponentes y logaritmos.
3. En grupos de 3 a 4 personas, analizamos los trabajos de investigación de cada compañero y escogemos uno para exponerlo al curso, utilizando diapositivas o cuadros didácticos.

SUCESIONES, PROGRESIONES
ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Analizamos la siguiente situación problematica:

1. Un científico realiza una combinación de sustancias, en un vaso de precipitados, mientras pasa el tiempo observa que esta sustancia dobla su volumen cada minuto. Si el vaso de precipitados está lleno después de una hora, ¿Qué tiempo el vaso se encuentra a la mitad?

Escribe la respuesta en tu cuaderno.

Johann Carl Friedrich Gauss

Fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos ámbitos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

2. Investiguemos el motivo, del porqué no se pudo pagar el premio al creador del ajedrez y escribamos una opinión sobre la investigación realizada.

En ambas situaciones se aplica progresiones, lo cual tiene una anécdota muy interesante con el matemático Gauss, además con el ajedrez, el cuál lo investigaremos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Sucesión de Fibonacci

En matemática, la sucesión de Fibonacci (mal llamada la serie de Fibonacci), es un conjunto de números, que a partir de la base 0 y 1, van formándose otro sumando las dos últimas cantidades.

Sucesión de Fibonacci 0;1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233...

Esta sucesión es estudiada debido a la gran aplicación que tiene en diferentes áreas de conocimiento.

2. Sucesiones numéricas

Sucesión.- Es un conjunto de números, cuyos elementos están enumerados ordinalmente (primero, segundo, tercero, etc.) indicando así la posición que ocupan, y cuyo valor es construido por una función generatriz, que en este texto será definido como U_n, donde "n ∈ N", será la variable que nos permita determinar el valor del elemento en esa posición. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz $\boldsymbol{U_n} = 2 * \boldsymbol{n} - 1$
Por lo tanto, la sucesión obtenida es el conjunto de los números Impares **{1,3,5,7,9,11,13,15,17,...}**

$U_1 = 2(1) - 1$	$U_2 = 2(2) - 1$	$U_3 = 2(3) - 1$	$U_4 = 2(4) - 1$	$U_5 = 2(5) - 1$	$U_5 = 2(6) - 1$	$U_5 = 2(7) - 1$
$2 - 1 = \mathbf{1}$	$4 - 1 = \mathbf{3}$	$6 - 1 = \mathbf{5}$	$8 - 1 = \mathbf{7}$	$10 - 1 = \mathbf{9}$	$12 - 1 = \mathbf{11}$	$14 - 1 = \mathbf{13}$

Ejemplo 2: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz .

Por lo tanto, la sucesión obtenida es {1/2;2/3;3/4;4/5;5/6;6/7;7/8;8/9;9/10;...} $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$

$U_1 = \frac{(1)}{(1)+1}$	$U_2 = \frac{(2)}{(2)+1}$	$U_3 = \frac{(3)}{(3)+1}$	$U_4 = \frac{(4)}{(4)+1}$	$U_5 = \frac{(5)}{(5)+1}$	$U_6 = \frac{(6)}{(6)+1}$	$U_7 = \frac{(7)}{(7)+1}$
$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$	$\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$	$\frac{6}{5+1} = \frac{6}{7}$	$\frac{7}{7+1} = \frac{7}{8}$

Ejemplo 3: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz. $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{n} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$

Por lo tanto, la sucesión obtenida es {0;3/2;8/3;15/4;24/5;35/6;48/7;63/8;80/9;99/10;...}

$U_1 = (1) - \frac{1}{(1)}$	$U_2 = (2) - \frac{1}{(2)}$	$U_3 = (3) - \frac{1}{(3)}$	$U_4 = (4) - \frac{1}{(4)}$	$U_5 = (5) - \frac{1}{(5)}$	$U_6 = (6) - \frac{1}{(6)}$	$U_7 = (7) - \frac{1}{(7)}$
$1 - \frac{1}{1} = \frac{0}{1}$	$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$	$4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$	$5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$	$6 - \frac{1}{6} = \frac{35}{6}$	$7 - \frac{1}{7} = \frac{48}{7}$

Actividad 41 : Generamos 5 elementos de cada generatriz mostrada, empezando en n=1

1) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\mathbf{2*n-1}}{\boldsymbol{n}}$ 2) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n+1}}$ 3) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{n+3}}$ 4) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}} + \mathbf{1}$ 5) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^2}}$

3. Sumatorias y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria, se emplea para representar a la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) "Σ", la cual iremos detallando a continuación:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n$$

X_i :	son los elementos del conjunto
$i = 1$:	el inicio de los elementos a tomar en cuenta.
n :	el número de elementos a tomar en cuenta

Propiedades de la sumatoria

La suma del producto de una constante por una variable, es igual a k veces la sumatoria de la variable.

$$\sum_{i=1}^{n} k * X_i = \sum_{i=1}^{n} k * X_i$$

La sumatoria hasta "n" de una constante, es igual a "n" veces la constante.

$$\sum_{i=1}^{n} k = n * k$$

La sumatoria de una suma es igual a la suma de las sumatorias de cada término.

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

La sumatoria de un producto no es igual al producto de las sumatorias de cada término.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i * Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

La sumatoria de los cuadrados de los valores de una variable no es igual a la sumatoria de la variable elevado al cuadrado.

$$\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

4. Progresiones Aritméticas (P. A.)

Una progresión aritmética (P. A.) es un conjunto de números, que a partir del primer término (U_1), los siguientes se obtienen sumando una cantidad constante llamada razón (r), al anterior término. Según la bibliografía que se estudie, la nomenclatura de los elementos de la P. A. puede cambiar, en nuestro caso utilizaremos los siguientes:

Sea la P. A. $\{U_1; U_2; U_3; U_4; U_5; U_6; \ldots; U_{n-1}; U_n\}$

U_1: Primer término de la P.A.

U_n: Último término de la P.A.(o Término Enésimo)

r : Razón de la P.A. (Suma o resta)

n :Número de términos de la P.A.

FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO (U_n)

Sea:

$U_1 = U_1$

$U_2 = U_1 + r$

$U_3 = U_2 + r = U_1 + 2 * r$

$U_4 = U_3 + r = U_1 + 3 * r$

$U_5 = U_4 + r = U_1 + 4 * r$

$U_6 = U_5 + r = U_1 + 5 * r$

$$r = U_2 - U_1 = U_5 - U_4 = U_6 - U_5 = U_{11} - U_{10}$$

Nota. En una P. A. la razón se obtiene restando dos términos consecutivos, el término posterior menos el término anterior. Es decir:

$U_1 = 2$; $U_n = 23$; $n = 8$; $r = 5 - 2 = 20 - 17 = 3$

Ejemplo 4: Determinamos los elementos de la P. A.: 2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23.

$U_1 = 37$; $U_n = -12$; $n = 7$; $r = 30 - 23 = -5 - 2 = -7$

Ejemplo 5: Determinamos los elementos de la P. A.: 30;23;16; 9;2;-5;-12

$$2; \frac{7}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; -\frac{13}{6}$$

Ejemplo 6: Determinamos los elementos de la P. A.:

$U_1 = 2$; $U_n = -\frac{13}{6}$; $n = 6$; $r = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$

FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO (U_1)

$$U_1 = U_n - (n - 1) * r$$

FÓRMULA DE LA RAZÓN (r)

$$r = \frac{U_n - U_1}{n - 1}$$

FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS (n)

$$n = \frac{U_n - U_1}{r} + 1$$

Actividad 42: Resolvemos los siguientes ejercicios.

1). *Sea la P. A.:* $-15; -11; -7; -3; 1; 5; 9; 13; 17; 21; 25$ Determinamos $U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

2) *Sea la P. A.:* $91; 80; 79; 68; 57; 46; 35; 24; 13$ Determinamos $U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

3) *Sea la P. A.:* $5; \frac{13}{3}; \frac{11}{3}; 3; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -1$ Determinamos $U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

Determinación de los elementos de una P. A. partiendo del término enésimo (U_n)

Determinar unos cuantos elementos de una P. A. es sencillo, ya que solo debemos sumar o restar la razón y así generar los siguientes números, pero resulta moroso e incluso inexacto si los elementos a calcular fueran demasiados, es en ese sentido, la fórmula del último término (o término enésimo) $U_n = U_1 + (n - 1) * r$, nos simplifica determinar dichos valores, aunque a veces tengamos que despejar incógnitas. Veamos.

Ejemplo 7: Calculamos el trigésimo quinto término de la P. A. $\mathbf{1;\ 7;\ 13;\ 19}$

Determinamos los datos.

$U_1 = 1$

$U_n = ?$

$n = 35$

$r = 13 - 7 = 6$

Utilizamos

$U_n = U_1 + (n - 1) * r$

$U_n = (1) + (35 - 1) * (6)$

$U_n = 1 + 34 * 6$

$U_n = 1 + 204$

$U_n = 205$

Ejemplo 8: En una **P. A.** de $\mathbf{49}$ términos, el primer término es $\mathbf{-24}$, la razón $\frac{7}{4}$. Calculamos el último término

Determinamos los datos.

$U_1 = -24$

$U_n = ?$

$n = 49$

$r = \frac{7}{4}$

Utilizamos $U_n = U_1 + (n - 1) * r$

$U_n = (-24) + (49 - 1) * \left(\frac{7}{4}\right)$

$U_n = -24 + 48 * \frac{7}{4}$

$U_n = -24 + 84$

$U_n = 60$

Ejemplo 9: Una **P. A.** tiene $\mathbf{85}$ términos, si los últimos términos son $-\frac{11}{2};\ -\frac{25}{4};\ -7$. Calculamos el primer término.

Determinamos los datos.

$U_1 = ?$

$U_n = -7$

$n = 85$

$r = -7 + \frac{25}{4}$

$r = -\frac{3}{4}$

Utilizamos

$U_1 = U_n - (n - 1) * r$

$U_n = (-7) - (85 - 1) * \left(-\frac{3}{4}\right)$

$U_n = -24 + 84 * \frac{3}{4}$

$U_n = -24 + 63 = 39$

Ejemplo 10: El primer término de una **P. A.** de 89 términos, es /33, y el último "550"Calculamos la razón.

Determinamos los datos.

U1= -11

Un=33

n=67"'

r="A

Utilizamos

"r=Un-U1n-1

r=(33)-(-11)67-1

r=33+1166=4466

?45"

Ejemplo 11: Determinamos la cantidad de términos que tiene la **P. A.** donde el primer término es 8;, el último es "/85"y la razón es"/339

Determinamos los datos.

$U_1 = 69$

$U_n = -63$

$n = ?$

$r = -\frac{11}{7}$

Utilizamos

$n = \frac{U_n - U_1}{r} + 1$

$n = \frac{(-63)-(69)}{-\frac{11}{7}} + 1 = \frac{-63-69}{-\frac{11}{7}} + 1$

$n = \frac{\frac{-132}{1}}{-\frac{11}{7}} + 1 = 84 + 1 = 85$

Ejemplo 12: Calculamos la razón y el primer término de la progresión aritmética si $U_8 = -3$ y $U_{14} = -1$

Determinamos los datos.

$U_1 = ?$

$U_8 = -3$

$U_{15} = -1$

$n = 15$

$r = ?$

Utilizamos: $U_n = U_1 + (n - 1)r$

$U_8 = U_1 + 7 * r = -3$

$U_{14} = U_1 + 13 * r = -1$

Resolviendo el sistema obtenido por algún método, tenemos:

$U_1 = \frac{16}{3}$ y $r = \frac{1}{3}$

Actividad 43: En el cuaderno determinamos los elementos indicados en cada uno los incisos:

1) Determinar el nonagésimo séptimo término de la P. A.: 5,9,13,...

2) En una P. A. $U_1 = \frac{37}{6}$ y $r = \frac{37}{6}$. Calcular U_{19}

3) Los últimos términos de una P. A. de 39 elementos es: -334,-347,-360. Cuál es el valor del primer término.

4) El último valor de una P. A. de 61 términos es $\frac{65}{9}$, si la razón es $\frac{2}{3}$ calcular el valor del primer término.

5) La P. A. tiene los siguientes datos: $U_1 = 24$ y $U_{16} = 15$. Calcular la razón

6) El último y el primer número de una P. A. de 87 términos son -1037 y 425 respectivamente. Determine la razón.

7) Determine la cantidad de términos que hay en la P. A. 169,...,-34,-41.

8) En la P. A. de razón 3/4, primer término 2 y último término 20. Determinar cuántos términos la componen.

9).Determinamos la razón y el primer término, si el noveno termino es 4 y el décimo segundo es -1

10). Calculamos el vigésimo octavo término de la P. A. que tiene $U_5 = 27$ y $U_{10} = 7$

> **SUMA DE TÉRMINOS DE UNA P. A.** (S_n)
>
> $$S_n = \frac{(U_1 + U_n) * n}{2}$$
>
> La demostración está dada por deducción, y explicada en la anécdota del pequeño Gauss, en su clase de matemática, situación que lo hizo merecedor de la protección del rey.

Suma de términos de una progresión aritmética (S_n).

Partiendo de la anécdota de Gauss niño, sobre la suma de los 100 primeros números naturales, comprendemos muy bien que, la suma del último número con el primero, es igual a la suma del penúltimo con el segundo, igual a la suma del antepenúltimo con el tercero y así sucesivamente. Veamos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$$

En la suma:
Observamos que: 1+100=101 ; 2+99=101 ; 3+98=101

El mismo número se obtiene 50 veces, por lo tanto, la suma es 50*101=5050, respuesta que dio el pequeño Gauss, el cual fue considerado como el primcipe de las matematcas.

Ejemplo 13: El primer término de una P. A. de 71 términos, es 25, el último 235. Determinar la suma de todos los elementos de dicha progresión.
Determinamos los datos.

$U_1 = 25; U_n = 235; n = 71; S_n = ?$

Utilizamos $S_n = \frac{(U_1+U_n)*n}{2}$

$$S_n = \frac{[(25)+(235)]*(71)}{2}$$

$$S_n = \frac{[260]*(71)}{2}$$

$$s_n = 130 * 71 = 9230$$

Ejemplo 13: Sumar los 247 primeros términos de la P. A. 5401; 5378; 5355,…

Determinamos los datos.

$U_1 = 5401; U_n = ?; n = 247; r = 5378 - 5401 = -23$

Utilizamos $U_n = U_1 + (n-1) * r$

$$U_n = (5401) + (246 - 1) * (-23)$$

$$U_n = 5401 - 245 * 23$$

$$U_n = 5401 - 5635 = -243$$

Utilizamos $S_n = \frac{(U_1+U_n)*n}{2}$

$$S_n = \frac{[(5401) + (-243)] * (247)}{2}$$

$$S_n = \frac{[5158] * (247)}{2}$$

$$s_n = 2579 * 247$$

$$s_n = 637013$$

Actividad 44: En el cuaderno de prácticas calculamos las sumas indicadas:

1) Sumar los primeros 75 términos de la P. A. 241,230,219,…
2) Sumar los términos de la P. A. que empieza en 13/10 y termina en 153/10 a una razón de 2/5
3) Don Alberto decide abrir una cuenta de ahorro en el banco, donde desea depositar las ganancias del mes, en enero abona Bs 3000, en febrero Bs 3500, en marzo Bs 4000 y así sucesivamente hasta diciembre ¿Cuánto dinero tendrá el 31 de diciembre en su cuenta de ahorro?

Aplicación de las progresiones aritméticas

Las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real, como lo podemos ver en el último ejercicio de práctica, es así que es muy útil en otras áreas, veamos.

Ejemplo 15: Don José, desea comprarse una moto que cuesta Bs 7500, pero solo tiene Bs 2450, así que decide ahorrar Bs 135 de su sueldo cada mes. ¿Cuántos meses deberá ahorrar para comprarse la moto?

Solución. Antes de proceder al cálculo debemos comprender que los ahorros solo deben completar el saldo. Por lo tanto,

Un=7500-2450=5050

Datos: Un=5050; U1=135 r=135; n=?

$$\boxed{n = \frac{5050 - 135}{135} + 1 = 36.41 + 1 = 37{,}41}$$

Rta.- Exactamente necesita 37,41 meses, pero como los sueldos se pagan a fin de mes, se debe concluir que necesita 38 meses para comprarse la moto.

Ejemplo 15: La profesora Telma, en el mes de enero, apertura una cuenta de ahorro en el Banco Unión con Bs 175, y en los meses posteriores, decide ahorrar Bs 17 más que en el mes anterior ¿Cuál será el monto de dinero que depositará en el mes de diciembre? ¿Cuánto de dinero tendrá ahorrado en el año?

Solución. Determinamos el monto que depositará en diciembre.
Datos: $U_n = ?$; $U_1 = 175$; $r = 17$; $n = 12$

$$\boxed{U_n = 175 + (12 - 1) * 17 = 362}$$

Rta.- En el mes de diciembre depositará Bs 362.

Determinamos el monto acumulado hasta diciembre.

$$\boxed{S_n = \frac{(135+362)*12}{2} = 2982}$$

Rta.- En el año la profesora lograra ahorrar Bs 2982.

Ejemplo 16: Un joven desea mejorar su aspecto físico, así que decide consultar con su instructor de gimnasio, sobre una rutina. El instructor le indica que después de levantarse debe realizar 10 flexiones, 20 sentadillas y 15 abdominales, repetir eso dos veces seguidas, eso durante 3 días, luego debe aumentar 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días, luego aumentar 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días y así sucesivamente. ¿Al final del mes, cuantas flexiones, sentadillas y abdominales ya realizara, los últimos tres días del mes? ¿Durante el mes cuantas sentadillas, abdominales y flexiones realizó?

Solución: analizamos la cantidad de ejercicios.

	1er día	2do día	3er día	Total	4to día	5to día	6to día	Total
Flexiones	20	20	20	60	22	22	22	66
Sentadillas	40	40	40	120	42	42	42	126
Abdominales	30	30	30	90	32	32	32	96

Determinamos cuantas flexiones, sentadillas y abdominales hace en los últimos días del mes.

Sentadillas : $U_n = 120 + (10-1)*6 = 174$ (en los últimos 3 días del mes)
Abdominales : $U_n = 90 + (10-1)*60 = 144$ (en los últimos 3 días del mes)
Determinamos el total de flexiones, sentadillas y abdominales que realizó en el mes.

Flexiones : $S_n = \frac{(60+114)*10}{2} = 870$ (en el mes)

Sentadillas : $S_n = \frac{(120+174)*10}{2} = 1470$ (en el mes)

Abdominales : $S_n = \frac{(90+144)*10}{2} = 1170$ (en el mes)

5. Progresiones Geométricas (P. G.)

Una progresión Geométrica (P. G.), es un conjunto de números que se generan a partir de un primer elemento (U_1) (diferente de cero), al cual se debe ir multiplicando una cantidad constante llamada razón (r- diferente de cero). La simbología que utilizaremos será la misma que para progresiones aritméticas, para evitar confusiones, ya que el orden y las posiciones son las mismas, solo se diferencian en las operaciones

Sea la P. G. $\{U_1; U_2; U_3; U_4; U_5; U_6; \dots; U_{n-1}; U_n\}$

U_1 : *Primer término de la* $\boldsymbol{P.G.}$

U_n : *Último término de la* $\boldsymbol{P.G.}$ (*o Término Enésimo*)

r : *Razón de la* $\boldsymbol{P.G.}$ (Ahora multiplica o divide)

n : *Número de términos de la* $\boldsymbol{P.G.}$

FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO
(U_n)

Sea:

$U_1 = U_1$

$U_2 = U_1 * r$

$U_3 = U_2 * r = U_1 * r^2$

$U_4 = U_3 * r = U_1 * r^3$

$U_5 = U_4 * r = U_1 * r^4$

$U_6 = U_5 * r = U_1 * r^5$

....

$U_n = U_1 * r^{n-1}$

Nota. - En una P. G. la razón se obtiene dividiendo dos términos consecutivos, el término posterior dividido por el anterior. Es decir: $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_6}{U_5} = \frac{U_{11}}{U_{10}}$

FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO
(U_1)

$$U_1 = \frac{U_n}{r^{n-1}}$$

FÓRMULA DE LA RAZÓN (r)

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}}$$

FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS
(n)

$$n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1$$

Ejemplo 17: anote los elementos de la P. G.: 5; 10; 20; 40; 80; 160; 320

$$U_1 = 5 \quad ; U_n = 320 \quad ; n = 7 \quad ; r = \frac{10}{5} = \frac{160}{80} = 2$$

Ejemplo 18: anote los elementos de la P. G.: -8/27;4/9;-2/3; 1;-3/2;9/4;-27/8;81/16

$$U_1 = -\frac{8}{27} \quad ; U_n = \frac{81}{16} \quad ; n = 8 \quad ; r = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = -\frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Actividad 45: Determinamos los elementos de las progresiones:

1)Sea la P. G.: $-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; 2; -4; 8; -16; 32; -64; 128; -256$

$U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

2) Sea la P. G.: $486; 162; 54; 18; 6; 2; \frac{2}{3}$

$U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

3)Sea la P. G.: $-\frac{5}{4802}; -\frac{5}{686}; -\frac{5}{98}; -\frac{5}{14}; -\frac{5}{2}; -\frac{35}{2}; -\frac{245}{2}; -\frac{1715}{2}$

$U_1 =$; $U_n =$; $n =$; $r =$

Determinación de los elementos de una P. G. a partir del término enésimo (U_n)

Determinar unos cuantos elementos de una P. G. es sencillo, ya que solo debemos multiplicar o dividir la razón y así generar los siguientes números, pero resulta cansador calcular los elementos, debido a que sus valores son demasiado grandes, es en ese sentido, la fórmula del último término $U_n = U_1 * r^{n-1}$, nos simplificará determinar dichos valores, aunque a veces tengamos que despejar las variables. Veamos.

Ejemplo 19: Calcular el décimo segundo término de la **P. G.** $1; 2; 4; 8$

Determinamos los datos.

$U_1 = 1$

$U_n = ?$

$n = 12$

$r = \frac{2}{1} = \frac{8}{4} = 2$

Utilizamos

$U_n = U_1 * r^{n-1}$

$U_n = (1) * (2)^{12-1}$

$U_n = 1 * 2^{11}$

$U_n = 2048$

Ejemplo 20: En una **P. G.** de 13 términos, el primer término es $\frac{567}{320}$, la razón $-\frac{2}{3}$. Calcule el último término

Determinamos los datos.

$U_1 = \frac{567}{320}$

$U_n = ?$

$n = 13$

$r = -\frac{2}{3}$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$

$U_n = \left(\frac{567}{320}\right) * \left(-\frac{2}{3}\right)^{13-1}$

$U_n = \frac{3^4 * 7}{5 * 2^6} * \frac{2^{12}}{3^{12}}$

$U_n = \frac{7 * 2^6}{5 * 3^8} = \frac{448}{32805}$

Ejemplo 21: Una **P. G.** tiene 8 términos, si los últimos términos son $-\frac{7}{125}; \frac{14}{625}; -\frac{28}{3125}$. Calcule U_1.

Determinamos los datos.

$U_1 = -\frac{3}{512}$

$U_n = -96$

$n = 15$

$r = ?$

Utilizamos $U_1 = \frac{U_n}{r^{n-1}}$

$U_1 = \frac{\left(-\frac{28}{3125}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{8-1}}$

$U_1 = \frac{-\frac{7 * 2^2}{5^5}}{-\frac{2^7}{5^7}} = \frac{-\frac{7 * 2^2}{5^5}}{-\frac{2^7}{5^7}} = \frac{175}{32}$

Ejemplo 22: El 1.er término de una **P. G.** de 15 términos, es $-\frac{3}{512}$, y el último término es -96. Calcule "r".

Determinamos los datos.

$U_1 = -\frac{3}{512}$

$U_n = -96$

$n = 15$

$r = ?$

Utilizamos $r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}}$

$r = \sqrt[15-1]{\frac{-96}{-\frac{3}{512}}} = \sqrt[14]{\frac{\frac{3 * 2^5}{1}}{\frac{3}{2^9}}}$

$r = \sqrt[14]{2^{14}} = 2$

Ejemplo 23: Determine la cantidad de términos que tiene la **P. G.** donde el primer término es $\frac{2}{729}$, el último es 486 y la razón es **3**

Determinamos los datos.

$U_1 = \frac{2}{729}$

$U_n = 486$

$n = ?$

$r = 3$

Utilizamos $n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1$

$n = \frac{\log\left(\frac{486}{\frac{2}{729}}\right)}{\log(3)} + 1$

$n = \frac{5.248333...}{0.477121...} + 1$

$n = 11.000004 ... + 1$

$U_n = 12.000004... = 12$

Opción sin calculadora $U_n = U_1 * r^{n-1}$

$486 = \left(\frac{2}{729}\right) * (3)^{n-1}$

$2 * 3^5 = 2 * 3^{-6} * 3^{n-1}$

$3^5 = 3^{n-7}$

$5 = n - 7$

$12 = n$

Suma de términos de una progresión geométrica (S_n).
Partiendo de la curiosidad, sobre la imposibilidad de pago al inventor del ajedrez, podemos mencionar que los resultados son un tanto exagerados, por tal motivo muchos de los resultados tendremos que expresarlos como potencias. Observemos como se determina la suma de una P. G.

Sea la suma: $$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

Multiplicamos por (r): $$r * S_n = U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \cdots + U_n + r * U_n$$

Restando las dos sumas: $$S_n - r * S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$
$$-U_2 - U_3 - U_4 - \cdots - U_{n-1} - U_n - r * U_n$$

Por lo tanto, $$S_n - r * S_n = S_n(1-r) = U_1 - r * U_n \quad \text{à} \quad S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$$

Ejemplo 25: Calculamos la suma de los primeros 9 términos que tiene la **P. G.** $3;\ 6;\ 12;\ 24$

Determinamos los datos.
$U_1 = 3$
$U_n = ?$
$n = 9$
$r = \frac{24}{12} = \frac{6}{3} = 2$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$
$U_n = (3) * (2)^{9-1} = 3 * 2^8 = 768$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$
$$S_n = \frac{(3) - (2) * (768)}{1 - (2)}$$
$$S_n = \frac{3 - 1536}{-1} = 1533$$

Ejemplo 26: Calculamos la suma de los primeros 9 términos que tiene la **P. G.** $3;\ 6;\ 12;\ 24$

Determinamos los Datos.
$U_1 = -5$
$U_n = ?$
$n = 15$
$r = \frac{135}{-45} = \frac{-45}{15} = -3$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$
$U_n = (-5) * (-3)^{15-1} = -5 * 3^{14}$
$U_n = -23914845$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$
$$S_n = \frac{(-5) - (-3) * (-5 * 3^{14})}{1 - (-3)}$$
$$S_n = \frac{-5 - 5 * 3^{15}}{1+3} = -\frac{71744540}{4}$$

Actividad 46: Determinamos los elementos que indican los incisos tomando como en cuenta los ejemplos estudiados:

1) Determinar el décimo quinto término de la P. G.: -1; 2; -4;...

2) Hallar el valor del término doce de una P. G., donde el primer elemento es -11664/3125 y la razón 5/6.

3) Los números 5/72;5/42;5/2592 son los últimos términos de la P. G. de nueve términos. Hallar el valor del primer elemento.

4) Se sabe que la P. G. tiene como octavo término a -1875, una razón de -1/5, por lo tanto, se pide determinar el valor del primer término.

5)En la P. G., U^1=7 y U^7=-5103. Calcular la razón de la progresión.

6) Si la P. G. de doce términos empieza en 5/128 y termina en –80. Cuál será la razón que formo la progresión.
7) Hallar el número de términos que tiene la P. G.: 2/243,2/81,...,54

8) Si la información de la P. G. es, U^1=-675/343 ; U^n=-49/1125 ; r=7/15 . Determine la cantidad de términos que hacen posible la progresión.

9)Sumar los seis primeros términos de la P. G.: 1,-7,49,...

10)Sumar todos los términos de la P. G., si U^1=-2 y U^8=-4374.

6. Suma en una progresión geométrica-infinita decreciente

Existen progresiones geométricas, donde cada término va decreciendo de tal forma que sus términos se aproximan a cero, analicemos el siguiente conjunto $\left\{2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots\right\}$ en decimales, el conjunto se puede entender como:

{2;1;0.5;0.25;0.125;0.0625;...}, entonces vemos que los valores cada vez son más pequeños, a esto es lo que se llama progresión infinita decreciente.

Por lo tanto, si seguimos incrementando la cantidad de términos, nuestro último término se hace cero, por lo cual nuestra fórmula de suma cambiaria.

Ejemplo 27: Sumamos todos los términos de la **P. G.** $3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{9}$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA P. G. (S_n)

$$S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$$

En una P. G. decreciente, U_n se va haciendo cero, por lo tanto la fórmula cambia a:

$$S_n = \frac{U_1}{1-r}$$

Solución: Determinamos los datos.

$U_1 = -5$

$r = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1}{1-r}$ à $S_n = \frac{3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$

7. Problemas del contexto aplicados a la ciencia y la tecnologia

Las progresiones geométricas, al igual que las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real. Veamos algunos casos.

Ejemplo 28: la señora Guadalupe Ortiz abre una cuenta de ahorro con Bs 7000,00 en el banco FIE, el asesor le indica que los intereses se pagan por día a una razón de 1,000083 (así el interés ganará otro interés). Si la señora decide sacar su dinero cumplido un año, ¿Cuál será el monto acumulado? ¿Cuánto tiempo deberá dejarlo en el banco para ganar un interés de Bs 1000, 00?.

Solución. Calculamos U_n cumplido un año, entonces: U_1=7000 ; r=1,000083 ; n=365

$$U_n = 7000 * (1.000083)^{365-1} = 7000 * 1.000083^{364} = 7214,70$$

Rta.- Al cumplir el año de ahorro, la señora tendrá un monto de Bs 7214,70
Calculamos el tiempo "n" que deberá esperar para ganar un interés de Bs mil entonces: U_1=7000 ; r=1,000083 ; U_n=8000=7000+1000 (intereses)

$$n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1 = \frac{\log\left(\frac{8000}{7000}\right)}{\log 1{,}000083} + 1 = \frac{0{,}05799}{0{,}000036044} + 1 = 1608.88 + 1 = 1609.88$$

Rta.- La señora Guadalupe tendrá que esperar 1610 días para ganar un interés de Bs 1000.

Ejemplo 29: el crecimiento poblacional en Bolivia se ha ido dando a una razón de 1.19 cada 10 años. Si en 1990 teníamos una población de 6.86 M (millones), ¿Qué población tuvo Bolivia el 2020?, ¿Cuál será la población de Bolivia en 2030 y 2050)?

Solución. El cálculo se lo realiza cada 10 años. Por lo tanto (1990): U_1; (2000): U_2 ; (2010): U_3; (2020): U_4
Calculamos la población el año 2020:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{4-1} = 6.86 * 1.19^3 = 11.56$$

Rta.- En el año 2020 Bolivia tuvo una población de 11.56 M de habitantes calculamos la población el año 2030:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{5-1} = 6.86 * 1.19^4 = 13.75$$

Rta.- En el año 2030 Bolivia tendrá una población de 13.75 M de habitantes
Calculamos la población el año 2050:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{7-1} = 6.86 * 1.19^6 = 19.48$$

Rta.- En el año 2050 Bolivia tendrá una población de 19.48 millones de habitantes.

Actividad 47: Resolvamos el problema planteado a continuación en tu cuaderno de práctica.
Un joven consigue ahorrar Bs 5000,00 después de trabajar durante un año, dicho monto decide ponerlo al banco para que no pueda gastarlo además de que vaya ganando intereses. El banco le ofrece dos tipos de pago de intereses; I) De recibir cada mes Bs 10,20. II) De recibir la multiplicación por 1.002 del monto acumulado.

	Pago de intereses FORMA I		Pago de intereses FORMA II	
MESES	INTERÉS	SALDO	INTERÉS	SALDO
Inicio ahorro	0,00	5000,00	0,00	5000,00
1	10.20	5010,20	5000,00*(1,002)	5010,00
2	10,20	5020,40	5010,00*(1,002)	5020,02
3	10,20	5030,60	5020,02*(1,002)	5030,03

Respondamos a las siguientes situaciones.

a) Siendo amigo de este joven, a primera vista ¿Que opción de pagos le recomendaríamos escoger? y ¿Por qué?

b) Analicemos el monto acumulado en las dos opciones de pago, al año, y a los dos años.

c) Será posible que podamos aconsejarle que cambie la opción de pago, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?.

d) Si es posible hacer el cambio de la forma de pago, ¿en qué mes exactamente debería hacerlo?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 48: Formamos equipos de 3 o 4 personas para desarrollar la reflexión de los contenidos desarrollados a través del debate en función a las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué es importante aprender sucesiones y progresiones?

2. En la producción, ¿como aplicamos sucesiones y progresiones?

Realizamos un círculo de reflexión, para realizar un debate en función al análisis efectuado en cada grupo.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 49: Realicemos las siguientes actividades.

- Realizamos un cuadro didáctico de la sucesión de Fibonacci, analizando matemáticamente su conformación y mostramos en recortes o dibujos las aplicaciones que se pueden apreciar en el mundo real.
- Contruimos materiales didacticos con la sucecion de Fibonacci.

MATEMÁTICA FINANCIERA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 50: Analicemos los siguientes casos:

1. Una madre abandona a dos de sus hijos por la falta de trabajo.
2. Un niño muere en la sala de un hospital, por el alto costo de la intervención.
3. Un padre de familia debe conseguir hasta tres trabajos para sostener a su familia.

De las oraciones expuestas ¿Cuál crees que es el motivo de estos problemas?

Estas situaciones son las que generalmente se presentan en nuestro diario vivir y como podemos analizar el problema es el dinero, por lo tanto, vamos a estudiar en este contenido como administrar adecuadamente nuestros recursos económicos.

Escanea el QR

Para acceder a los documentos de matemática financiera del Banco Central de Bolivia.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Importancia de la Matemática Financiera

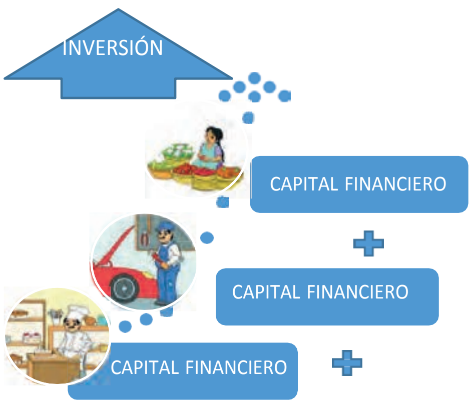
Hoy por hoy, uno de los más importantes fenómenos de análisis al crecimiento económico, administración y pérdidas que se dan del dinero. Siendo este aspecto el que se puede estudiar mediante las matemáticas financieras.

La matemática financiera, es el estudio del dinero en el tiempo, donde intervienen elementos como capital, interés, generalmente se hacen contratos de préstamos de dinero, para alguna compra o inversión con el fin de obtener ganancias económicas.

2. Valor del dinero en el tiempo

El dinero tiene un valor, el cual va cambiando mientras pasa el tiempo, un ejemplo de ello es el cambio del precio del pan, hace 30 años podías comprar 10 panes por Bs 1, pero hoy por hoy solo puedes comprar 4 panes por Bs 2, por ese motivo el estudio del dinero en el tiempo es importante. Analizar el dinero en el tiempo nos permite entender que:

- Bs 100 el día de hoy, es diferente a Bs100 del día de mañana.
- El valor del dinero permite analizar distintas oportunidades.
- Existen riesgos financieros a la hora de invertir.



3. Interés y tasa de interés

Imagina por un momento que estás en el campo y te quedas sin crédito, pero necesitas hacer una llamada urgente a tu mamá, así que le dices a tu amigo que te pase Bs 10 de crédito, pero tu amigo te dice que tendrás que devolverle 11.

¿Estarías de acuerdo con ese trato?

En la vida sucede que muchas veces cuando nos prestamos dinero, este tiende a crecer con el tiempo, es incremento viene dado por dos elementos que llamaremos a) Interés y b) Tasa de Interés, los cuales iremos conociendo más adelante.

4. Interés simple

Es el crecimiento del dinero en un tiempo determinado, donde observaremos el comportamiento de los elementos que describimos a continuación, los cuales forman parte de fórmula: M = C + r.

- **Capital (C)**. - Es el dinero al inicio, el cual será la fuente del crecimiento del interés
- **Monto (M).** Es el total del dinero después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.
- **Tiempo (t).** Es el espacio que trascurre, desde el préstamo de dinero hasta el momento de cierre o pago.
- **Interés (r).** Es la cantidad de dinero ganado en un determinado tiempo, generalmente está basado anualmente, pero si se desea en unidades más pequeñas se debe dividir.
- **Tasa de Interés (i).** Es el porcentaje de crecimiento del dinero.

Ahora iremos a estudiar la fórmula M = C + r, donde r = C * i * t

Por lo tanto, M = C + C * r * t = C (1 + r * t)

Ejemplo 1: Determinemos el interés y el monto que genera un capital de Bs 3000 , depositados en el banco a una tasa de interés del 5% (0.05), durante 7 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta.
$r = 3000 * 0.05 * 7 = 1050$	$M = 3000 + 1050 = 4050$	Al finalizar los 7 años, los Bs 3000. se convirtieron en Bs 4050

Ejemplo 2: Determinemos el interés y el monto que genera un capital de Bs 3000., depositados en el banco a una tasa de interés del 5% (0.05), durante 7 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta.
$r = 3000 * 0.05 * 7 = 1050$	$M = 3000 + 1050 = 4050$	Al finalizar los 7 años, los Bs 3000. se convirtieron en Bs 4050

5. Emprendimientos productivos

La matemática financiera nos permite realizar diferentes actividades, desde el préstamo para la apertura de un negocio, o la planificación de pagos de la compra de una casa. El objetivo de la matemática financiera es hacer que el dinero trabaje para obtener beneficios económicos para las personas, de tal forma que podremos mencionar aspectos en los cuales podemos aplicar las matemáticas financieras.

Efectuar pagos de préstamos a entidades financieras, de tal forma que podamos evitar intereses elevados.

Realizar depósitos de dinero, de tal forma que vaya ganando intereses (ahorro, intereses a plazo fijo, bonos, etc.).

Emprendimientos individuales de préstamo de dinero a personas de escasos recursos. ⍰ Préstamos para pequeñas, medianas y grandes empresas.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 51:

1.En grupos de 3 o 4 personas contamos alguna experiencia que se haya tenido con préstamos, e intereses, ya sea entre compañeros o quizá algún familiar.

2.Socializamos las experiencias, de tal forma que se pueda generar debate sobre aspectos positivos y negativos de los préstamos bancarios.

3.Por último, reflexionamos sobre la importancia de la matemática financiera para el beneficio de nuestros proyectos, si tuviéramos que recurrir a un banco.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 52:

1. Realizamos un cuadro didáctico donde podamos describir los elementos que se estudian en la matemática financiera, de tal forma que nos sirva como recordatorio.

2. Realizamos un sociodrama considerando la importancia de la matemática financiera en la administración correcta de nuestros recursos económicos.

LÓGICA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 53: Analicemos las situaciones que se plantean en la imagen y escribamos una respuesta.

En nuestra vida diaria existen situaciones donde nosotros debemos aprender a decidir o dar una respuesta o solución, aunque es cierto que cada uno de nosotros es un mundo diferente y las respuestas, como soluciones pueden ser diferentes, existen situaciones donde aunque quisiéramos no podemos negar su razón.

Subrayamos la palabra que corresponde a la oración planteada en tu cuaderno de ejercicios.

- Laura utiliza el color………………., para pintar el cuadro de una noche estrellada.
  a) Rojo b) Negro c) Verde d) Amarillo
- José y Rodrigo agarran su………………., y van a la………………… ha jugar futbol.
  a) Bate b) Plaza c) Pelota d) Cuarto e) Raqueta f) Cancha
- Por la educación recibida en casa, cuando una mujer embarazada sube al trasporte publico, tú te…………………
  a) Haces al dormido b) Pones a chatear c) Insultas d) Levantas y cedes el asiento

Como te habrás podido dar cuenta, hay cosas que evidentemente no podemos negar o evitar, es decir se tienen que dar si o si y ese tipo de respuestas o conductas se dice que son LÓGICAS.

¡Continuemos con la TEORÍA!

Antes de iniciar con el desarrollo del contenido, es necesario conocer la definición de la palabra lógica y cuál es la relación que tiene con lo analizado en la anterior sección.

Como señala Lazo (1999, pág 1) "La Lógica, es la disciplina que trata de los métodos, modos y formas del razonamiento humano. Ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no".

Por lo tanto mediante la lógica, podemos mejorar nuestro lenguaje, comprender situaciones y planificar proyectos con resultados esperados. Es así que en este capítulo analizaremos como incide la lógica en nuestras actividades diarias, además de establecer de qué forma se conectan y representan utilizando el lenguaje matemático.

1. Proposiciones simples y compuestas

Proposición, Una proposición es una oración (o enunciado) declarativa, la cual solo se puede establecer si es verdadera o falsa, pero no ambas. Por lo tanto de una oración declarativa, solo pueden establecerse dos afirmaciones, o bien es Verdadera (V) o bien es Falsa (F).

Ejemplo 1: Establecemos los valores de verdad de las siguientes afirmaciones y subrayamos el correcto.

Don Alberto ha nacido en Chuquisaca, por lo tanto es boliviano.	V	o	F
En clase de matemática se aprende sobre el uso de anticonceptivos.	V	o	F
El teorema de Pitágoras es una propiedad de los triángulos rectos	V	o	F
Solo los hombres, son los que ejercen violencia a las mujeres	V	o	F
Por un punto pasan infinitas rectas.	V	o	F

Hay que entender que no todas las oraciones pueden ser proposiciones y por ende, no se puede establecer un valor de verdad, ya que existen oraciones interrogativas, de las cuales no se sabe si son verdaderas o falsas, veamos dos ejemplos: A) La casa está sola B) El perro es del vecino

Proposición Simple.- Es aquella oración declarativa que solo tiene una proposición que analizar. Los ejemplos analizados anteriormente son un ejemplo de proposición simple.

Proposición compuesta.- Es aquella oración declarativa que consta de dos o más proposiciones que analizar, las cuales están unidas por conectivos lógicos. Veamos algunos ejemplos:

- Los números pares son los que tienen como unidad: 0, 2, 4, 6, 8, entonces el 49 es par.
- En la clase de educación física observamos que Julio levanta a José y José levanta a María, por lo tanto Julio levanta a María.
- Las operaciones opuestas son: la suma con la resta y la multiplicación con la potenciación.

Las operaciones compuestas son las que nos permiten comprender algunos razonamientos, los cuales debemos validar y establecer una posición, para establecer esas validaciones aplicaremos lo que conoceremos como conectivos lógicos.

2. Notaciones y conectivos lógicos

Notación.- Es la representación matemática que se utilizará, de tal forma que nos permita comprender mejor y simplificar las operaciones que realizaremos. Para las proposiciones simples utilizaremos las letras minúsculas del alfabeto (a,b,c,d,…,z); mientras que para las proposiciones compuestas además de las ya indicadas utilizaremos los conectivos lógicos.

Conectivos Lógicos.- Son símbolos matemáticos que dependiendo de la acción que se realicen entre las proposiciones, adopta ciertas operaciones. Veamos:

CONECTIVOS LÓGICOS Y SU INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA.	
Descripción Literal	Símbolo
Negación "NO"	" $\sim$ "
Conjunción "Y"	" $\wedge$ "
Disyunción "O"	" $\vee$ "
Implicación "SI…, ENTONCES"	" $\rightarrow$ "
Doble Implicación "SI Y SOLO SI"	" $\leftrightarrow$ "
Disyunción Exclusiva "O"	" "

Negación.- Es la operación lógica que niega una proposición, veamos como negar una proposición:

- Esta mañana llovió por Sucre… negando la proposición… Esta mañana no llovió por Sucre.

Conjunción.- Es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra "y", las cuales tienen que suceder una después de otra, Veamos cómo se presenta en las oraciones.

- Siempre debemos tener luz en casa, compremos los focos y las utilizaremos cuando se quemen.

Disyunción.- Es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra "o inclusivo", lo cual nos indica que una de las operaciones se pueda dar aunque no la otra.

- El cielo esta nublado, puede hacer sol o puede llover, de cualquier forma saldré.

Implicación.- Es la operación lógica que indica que una proposición debe suceder para que suceda la otra proposición, se representa por el símbolo "→" (llamado entonces). Veamos cómo se presenta:

- El páramo ayer estaba seco, pero esta mañana llovió, entonces hoy el páramo esta mojado.

Doble Implicación.- Es la operación lógica que nos indica que una proposición debe cumplirse, bajo la condición de que la otra también se tenga que cumplir. Se representa por el símbolo "↔" (llamado si y solo sí). Veamos cómo se presenta en una oración.

- Alfredo debe correrá en una maratón si y solo sí puede cumplir la marca mínima.

Disyunción Exclusiva.- Es la operación lógica que indica que se pueden realizar dos acciones independientes, su representación es la "o excluyente", Veamos cómo son estas proposiciones.

- Mañana iré a trabajar al campo si hace sol, o me quedaré en casa a reparar las paredes si llueve.

NOTA.- Como podemos notar existen dos tipos de Disyunción que aparecerán en las oraciones o proposiciones una es incluyente y la otra excluyente, la diferencia radica, en que la incluyente permite realizar una acción sin importar si una de las proposiciones no se cumple, mientras que la excluyente, nos obliga a realizar una acción diferente según sean las condiciones.

3. Operaciones proposicionales

Es la interpretación matemática de las proposiciones utilizando los conectivos lógicos, además de la representación de las proposiciones por letras que permitan desarrollar las operaciones.

Ejemplo 2: Representamos matemáticamente, las siguientes proposiciones.

	Proposiciones	Representación lógica	Representación matemática.
1	Jaime irá a la escuela en la tarde	$\boldsymbol{p}$: Jaime irá a la escuela en la tarde Negando la proposición $\sim \boldsymbol{p}$: Jaime no irá a la escuela en la tarde	Sea: $\boldsymbol{p}$ Negando: $\sim(\boldsymbol{p}) = \sim \boldsymbol{p}$
2	Para ir al cine, me debo bañar y cambiar de ropa.	$\boldsymbol{p}$: me debo bañar $\boldsymbol{q}$: me debo cambiar de ropa.	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
3	Hare mi tarea hasta terminar, no importa que haga frio en la noche o haga calor en el día.	$\boldsymbol{p}$: haga frio en la noche $\boldsymbol{q}$: haga calor en el día.	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
4	Si corro a la escuela entonces llegaré temprano	$\boldsymbol{p}$: correr a la escuela $\boldsymbol{q}$: llegar temprano.	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$
5	Participaré del campeonato si y solo sí tengo la edad establecida en la convocatoria	$\boldsymbol{p}$: participar en el campeonato $\boldsymbol{q}$: tener la edad establecida	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
6	Tengo Bs 200 y viendo el precio de la ropa, me compro un pantalón o una campera.	$\boldsymbol{p}$: comprar un pantalón $\boldsymbol{q}$: comprar una campera	$\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}$

4. Tablas de valor de verdad

Valor de verdad.- Es el establecimiento de la Veracidad o Falsedad de las proposiciones, tomando en cuenta las diferentes posibilidades de cada proposición. Analizaremos los valores de verdad de las operaciones lógicas, los cuales nos servirán para demostrar algunas proposiciones.

Para verificar o demostrar los valores de verdad de las proposiciones, es necesario asumir las posibles combinaciones de verdad o falsedad de cada proposición, los cuales iremos detallando en los ejemplos.

Ejemplo 3: realizamos las tablas de verdad de las operaciones lógicas (negación, conjunción, disyunción, etc.), para lo cual asumamos que p, q, r, son proposiciones.

Negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Doble Implicación

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disyunción Exclusiva

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 4: determinamos el valor de verdad de la proposición $\sim p \rightarrow (\sim q \veebar \sim r)$, aplicando las leyes lógicas estudiadas anteriormente.

p	q	r	$\sim p$	$\rightarrow$	$(\sim q$	$\veebar$	$\sim r)$
V	V	V	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F	V
1ra operación			1		1		1
2da operación						2	
3ra operación (valor de verdad de la proposición)				3			

La conclusión de la proposición es la columna 3, el cual es el valor de verdad de la proposición compuesta.

5. Clasificación de fórmulas proposicionales (Tautología, Contradicción y Contingencia)

Como ya se ha indicado, las proposiciones deben tener una conclusión (resultado), el cual desde un punto de vista lógico, tiene tres posibles respuestas, analicemos dichas conclusiones.

a) Tautología

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de verdad son verdaderos (V), lo que nos indica, que dicha proposición es verdadera.

b) Contradicción

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de verdad son falsos (F), lo que nos indica, que dicha proposición es falsa.

c) Contingencia

Es la conclusión lógica de una proposición, donde los valores de verdad son falsos y verdaderos, lo que nos indica que la conclusión de la proposición es indeterminada.

Ejemplo 5: Analicemos la conclusión de la proposición ~p→(~q ~r) resuelta anteriormente.

Solución: la conclusión fue V, V, V, V, F, V, V, F Por lo tanto es CONTINGENCIA.

Ejemplo 6: Analicemos las conclusiones de las proposiciones siguientes:

a) $(\sim p \to q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

	p	q	$(\sim p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\wedge$	$\sim q)$
	V	V	F	V	V	F	F	F	F
	V	F	F	V	F	F	F	F	V
	F	V	V	V	V	F	V	F	F
	F	F	V	F	F	F	V	V	V
1ra operación			1		1		1		1
2da operación				2				2	
3ra operación final						3			

Como toda la columna 3 es falsa la conclusión de la proposición es CONTRADICCIÓN

b) (p↔~q) ∨ ~(p∧q)

	p	q	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$	$\vee$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V
	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F
	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F
1ra operación			1		1			1		1
2da operación				2					2	
3ra operación							3			
4ra operación final						4				

Como toda la columna 4 tiene falsos y verdaderos la conclusión de la proposición es CONTINGENCIA

c) $[(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow p$

	p	q	$[(\sim p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	p
	V	V	F	V	V	F	F	V	V
	V	F	F	V	F	V	V	V	V
	F	V	V	V	V	F	F	V	F
	F	F	V	F	F	F	V	V	F
1ra operación			1		1		1		1
2da operación				2					
3ra operación						3			
4ra operación final								4	

Como toda la columna 4 es falsa la conclusión de la proposición es TAUTOLOGÍA

Actividad 54: En nuestro cuaderno de prácticas determinamos las conclusiones de las proposiciones siguientes:

1) $[(p \rightarrow \sim q) \wedge p] \veebar (\sim p \wedge q)$

2) $\left[\left(\sim p \veebar \sim q\right) \wedge (p \rightarrow \sim q)\right] \vee \sim(\sim p \leftrightarrow q)$

3) $\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \veebar \sim(p \rightarrow \sim q)$

6. Equivalencia lógica

La equivalencia lógica se presenta cuando existen dos funciones proposicionales, las cuales tienen la misma tabla de valores en cada renglón que se analice.

Ejemplo 7: Demostramos la equivalencia lógica de las siguientes proposiciones, $P_1: p \leftrightarrow q$ y $P_2: \sim(p \veebar q)$

p	q	p	$\leftrightarrow$	q	$\sim$	$(p$	$\veebar$	$q)$
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F	F
1ra operación		1		1		1		1
2da operación			2				2	
3ra operación					3			

Las proposiciones 1 y 2 son equivalentes como lo podemos observar en la tercera operación del verde y la segunda del color plomo, ambas son una contingencia, pero lo más importante se demuestra la equivalencia de ambas.

Actividad 55: Demostramos la equivalencia de las siguientes proposiciones.

P_1: $\sim(p \wedge q)$ es equivalente a P_2: $\sim p \vee \sim q$

P_1: $p \rightarrow q$ es equivalente a P_2: $\sim p \vee q$

P_1: $(p \wedge q) \wedge r$ es equivalente a P_2: $p \wedge (q \wedge r)$

P_1: $p \vee (q \wedge r)$ es equivalente a P_2: $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

P_1: $p \leftrightarrow q$es equivalente a P_2: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

7. Álgebra de proposiciones

Mediante las propiedades del algebra, podemos simplificar todas y cada una de las expresiones algebraicas, de tal forma que una operación (suma, resta, multiplicación división, etc.) pueda realizarse de una forma más rápida y exacta. El mismo principio podemos aplicarlo al algebra de proposiciones, los cuales se podrán lograr mediante el uso de las leyes de equivalencia, de las cuales algunas ya pudimos demostrarlas mediante las tablas de verdad.

Las leyes lógicas que nos permitirán realizar operaciones con las proposiciones son las siguientes.

L1	Leyes de Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	L2	Leyes conmutativas	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
L3	Leyes Asociativas	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	L4	Leyes de negación	$\sim(\sim p) \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $p \vee \sim p \equiv V$

L5	Leyes de Identidad	$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	L6	Leyes de Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
L7	Definición de Implicación	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	L8	Leyes Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
L9	Leyes de Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	L10	Definición de doble implicación	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Con estas equivalencias, podremos realizar la simplificación de operaciones con proposiciones lógicas.

Ejemplo 8: Simplificamos las siguientes proposiciones.

1. $p \wedge (q \vee \sim q)$	Usamos L4		1. $\sim q \vee (\sim p \wedge p)$	Usamos L4
$p \wedge V$	Usamos L5		$\sim q \vee F$	Usamos L5
p	Simplificado		$\sim q$	simplificado

1. $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$	Usamos L2		1. $\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge p$	Usamos L7
$q \vee \sim(p \wedge \sim q)$	Usamos L6 y L4		$\sim(\sim p \vee \sim q) \wedge p$	Usamos L6, L2, L4
$q \vee (\sim p \vee q)$	Usamos L3 y L1		$(p \wedge q) \wedge p$	Usamos L3 y L1
$\sim p \vee q$	Simplificado		$p \wedge q$	Simplificado

1. $q \vee (p \rightarrow \sim q)$	Usamos L2		1. $\sim(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q)$	Usamos L6 y L7
$q \vee (\sim p \vee \sim q)$	Usamos L3 y L4		$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	Usamos L8
$\sim p \vee V$	Usamos L9		$\sim p \vee (\sim q \wedge q)$	Usamos L4
V	Simplificado		$\sim p \vee F$	Usamos L9
			$\sim p$	Simplificado

Actividad 56: Simplificamos las siguientes proposiciones.

1. $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q)$
2. $p \vee \sim(p \rightarrow r)$
3. $p \wedge [q \vee (p \wedge \sim q)]$
4. $[q \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow (p \wedge q)$

¡Realicemos la valoración!

Actividad 57:

1. Respondemos las siguientes preguntas.
   - ¿Por que es importante la lógica?
   - ¿Como aplicamos la lógica en el enlace tecnologico?
2. Mencione 5 ejemplos de la aplicacion de la logica en la cotidianidad
3. Elaboramos cuadros didácticos sobre las leyes y conectivos lógicos, los cuales nos permitan retroalimentar y reforzar nuestro aprendizaje.

¡Es hora de la producción!

Actividad 58:

Elaboramos e investigamos diferentes ejercicios sobre las tablas de verdad en proposiciones de la vida real y las damos a conocer a nuestros compañeros utilizando los recursos tecnológicos.

Escanea el QR

Escanea el codigo QR para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

Escanea el QR

Ingresa al QR para aprender las nociónes básicas del ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al codigo QR para resolver problemas de razonamiento (combinaciones), a través de la plataforma virtual LICHESS.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

www.minedu.gob.bo
@minedubol
@minedubol
@minedu_bol
Ministerio de Educación - Oficial
MinEduBol
informacion@minedu.gob.bo
(591) 71550970 - 71530671
@minedu_bolivia

Av. Arce No. 2147 • Teléfonos: (591-2) 2442144 - 2442074 • Casilla de Correo: 3116
La Paz - Bolivia