ÁREA DE SABERES Y CONOCIMIENTOS

Matemática

QUINTO AÑO DE ESCOLARIDAD

5 TO AÑO DE ESCOLARIDAD

EDUCACIÓN SECUNDARIA
COMUNITARIA PRODUCTIVA

"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"

Texto de aprendizaje. 5to año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2025

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidad, Interculturalidad y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Kevin Angel Cordero Iglesias

DIAGRAMACIÓN:
Javier Pereyra Morales

Depósito legal:
4-1-579-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Texto de aprendizaje. 5to año de escolaridad. Educación
Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

Presentación ... 5

MATEMÁTICA ... 61
Primer trimestre
Aplicaciones de las progresiones en la cotidianidad ... 62
Análisis combinatorio ... 68
Variaciones y combinaciones ... 74
Estadística descriptiva ... 80
Estadística descriptiva y fenómenos sociales ... 88
Segundo trimestre
Introducción a la trigonometría ... 98
Trigonometría analítica ... 104
Resolución de triángulos rectángulos ... 110
Resolución de triángulos oblicuángulos ... 118
Tercer trimestre
Identidades trigonométricas ... 130
Identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos ... 134
Ecuaciones trigonométricas ... 144
Introducción a la geometría analítica ... 154
División de un segmento con una razón dada ... 160

PRESENTACIÓN

Uno de los derechos fundamentales de las niñas, niños y adolescentes, en el Estado Plurinacional de Bolivia, es el derecho a la educación, el cual se garantiza con el acceso a los recursos educativos que coadyuven con el proceso de adquisición de conocimientos.

El Ministerio de Educación, asegurando la calidad educativa, al iniciar la gestión 2025, pretende brindar un recurso educativo que apoye el desarrollo curricular, a través de la entrega gratuita de los *“Textos de aprendizaje 2025”*, para el nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

Durante varios meses, maestras y maestros de todas las regiones de Bolivia, desde sus experiencias y vivencias educativas, han aportado con la construcción de estos textos, plasmando en sus letras la diversidad de Bolivia y la investigación científica en las diferentes áreas de saberes y conocimientos.

Los “*Textos de aprendizaje 2025”* tienen la misión de fortalecer los conocimientos de nuestros estudiantes, presentando contenidos actualizados y con bases científicas, planteando actividades que desarrollen su pensamiento crítico reflexivo, reforzando sus aprendizajes.

Por lo expuesto anteriormente, teniendo como objetivo trabajar conjuntamente con los actores educativos hacia una educación humanística, técnica, tecnológica productiva, dentro de un desarrollo integral de nuestros estudiantes; el Ministerio de Educación proporciona este accesible instrumento educativo, esperando que despierte en las niñas, niños y jóvenes la sed de conocimientos y los motive a conocer el mundo a través de la ciencia y la investigación.

Omar Veliz Ramos
Ministro de Educación

APLICACIONES DE LAS PROGRESIONES EN LA COTIDIANIDAD

PRÁCTICA

Ante una emergencia suscitada en una familia de la ciudad de Santa Cruz, la jefa de hogar debe recurrir a conseguir dinero de manera inmediata, para lo cual se reúne con algunas personas que realizan préstamo de dinero.

La familia Paniagua le indica que le puede realizar un préstamo de Bs $15\,000$ con un interés compuesto de 5% mensual y le indican que debe pagar en un tiempo de 4 años.

Por otra parte, la familia Suarez también realiza préstamos y menciona que pueden realizar el préstamo de Bs $16\,000$ con un interés compuesto del $4{,}5\%$ y se deberá pagar en 5 años.

En ambos casos el préstamo se puede interpretar como una progresión geométrica, en ese caso:

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿A qué préstamo accedería usted? Justifique su respuesta
- Al pagar mensualmente, ¿cuál de los dos casos resulta en un menor pago mensual?
- Analicemos cuánto se pagará en total al final de cada caso.

TEORÍA

Sucesión

Las sucesiones aparecen en una infinidad de aplicaciones relacionadas a la informática a través del análisis de enormes cantidades de datos, de los cuales se estudia su comportamiento a través de sucesiones de funciones que permiten estimar y predecir eventos con mayor precisión.

En biología, surgen a través de la observación de patrones en la disposición de las hojas, tallos y flores.

Fuente: Open, AI. (2024)

1. Progresiones y sucesiones

a) Sucesiones numéricas

Es un conjunto de números ordenados que, ocupa un lugar determinado.

Ejemplo:

Los números naturales pares (incluido el cero) están ordenados y forman una sucesión.

Lugar	1º	2º	3º	4º	5º	...
Número	0	2	4	6	8	...

La regla es sumar 2 unidades al anterior número. Cada número se llama término de la sucesión, se utiliza un subíndice numérico que indica el lugar y el término general de la sucesión se representa por a_n.

Ejemplo:

La sucesión $5.\ 7.\ 9.\ 11.\ \ldots$ se puede representar como $a_1.\ a_2.\ \ldots.\ a_n,\ n \in \mathbb{N}$

Donde:

$a_1 = 5$; significa que el número 5 ocupa el primer lugar de la sucesión.
$a_2 = 7$; significa que el número 7 ocupa el segundo lugar de la sucesión.
$a_3 = 9$; significa que el número 9 ocupa el tercer lugar de la sucesión.
$a_4 = 11$; significa que el número 11 ocupa el tercer lugar de la sucesión.
$a_n = 2k+3$; es el término general y ocupa el n-ésimo lugar de la sucesión.

Ejemplo:

Regularidades de una sucesión.

1. De los primeros términos de la sucesión, deducir la regla: $11.\ 16.\ 21.\ 26$,... cada término se obtiene sumando 5 al anterior.
2. Según la norma o regla que genera la sucesión, obtener: $1.\ 8.\ 27.\ 64.\ 125.\ 216.\ 343.\ 512.$ ... Estos términos son los cubos de los números naturales.
3. Conociendo la fórmula, podremos encontrar los términos de la sucesión.

$$a_n = 2n+1;\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow a_1 = 2\cdot1+1 = 3$$
$$a_2 = 2\cdot2+1 = 5$$
$$a_3 = 2\cdot3+1 = 7$$

b) Sumatorias

Si en la sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \dots, a_n$ se quiere sumar todos los términos, se procede:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

c) Progresiones aritméticas (P.A.)

En una sucesión donde cada término se obtiene sumando una constante al termino anterior, constante llamada diferencia y representada con la letra *d*.

Ejemplo:

La sucesión: $\div\ 23.\ 30.\ 37.\ 44.\ 51.$ ...

$$d = a_2 - a_1 = 30-23 = 7;\quad d = a_3 - a_2 = 37-30 = 7 \quad \Rightarrow \quad d = 7$$

d) Término general de una progresión aritmética

El término general es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Ejemplo:

Dada la progresión: $\div\ -6.\ -\frac{13}{3}.\ -\frac{8}{3},\ -1.\ \frac{2}{3}.$ ... hallar el vigésimo termino.

$$\left.\begin{array}{l} n = 20; \\ a_1 = -6; \\ d = -\frac{13}{3} - (-6) = \frac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{20} = -6 + (20-1)\frac{5}{3} = -6 + \frac{95}{3} = \frac{77}{3}$$
$$\Rightarrow a_{20} = \frac{77}{3}$$

Ejemplo:

En la P.A. determinar "d" y el noveno término, indica si la P.A. es creciente o decreciente: $\div\ -2.\ 4.\ 10.$ ...

$$\left.\begin{array}{l} d = 4 - (-2) = 6 \\ n = 9 \\ a_1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_9 = -2 + (9-1)6 = 46$$
$$\Rightarrow a_9 = 46$$

Como la $d > 0$, la P.A. es creciente.

Propiedades de la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{3} 5 = 5+5+5 = 3\cdot5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} 3\cdot i = 3\sum_{i=1}^{5} i = 3(1+2+\cdots+5)$$
$$= 3\cdot15 = 45$$

$$\sum_{i=1}^{3}(i+j) = \sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{3} j$$
$$= (1+2+3) + (1+2+3)$$
$$= 6+6 = 12$$

Observación
Si la diferencia de una progresión aritmética es:

- *Positiva:*
  $d > 0 \Rightarrow$ *la P.A. es creciente.*
- Negativa:
  $d < 0 \Rightarrow$ *la P.A. es decreciente.*

Actividad

Resolvemos las siguientes sumatorias:

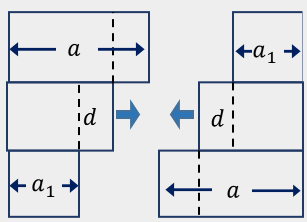
1) $\sum_{k=1}^{20} \frac{k}{k+1} =$
2) $\sum_{k=1}^{6} 2(k^2+1) =$
3) $\sum_{k=1}^{5}(k^2 - k + 1) =$
4) $\sum_{k=2}^{9} \frac{k-1}{k+1} =$
5) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} =$
6) $\sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^k(k^2+1)}{k} =$

Encontramos el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

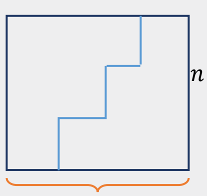
7) $1.\ 10.\ 19.\ 28.$ ...
8) $23.\ 43.\ 63.\ 83.$ ...
9) $10.\ 3.\ -4.\ -11.$ ...
9) $8.\ 21.\ 34.\ 47.\ 60.$ ...
10) 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. ...

Yang Hui

Matemático chino que vivió en el siglo XIII y publicó unos trabajos sobre aritmética, entre los que se encuentra la demostración para hallar la suma de los términos de una progresión aritmética. Utiliza un ejemplo muy concreto: se trata de averiguar la distancia total recorrida por un vehículo en quince días, si el primer día se avanzan 193 li (un li es aproximadamente igual a 650 m), cada día posterior se incrementa la velocidad en 15 li por día.



a_1: *distancia recorrida el primer día.*
a_n: *distancia del último día.*
d : diferencia.



$a_1 + a_n$

(Distancia recorrida el primer día + distancia recorrida el ultimo día) − número de días, es decir

$$(a_1+a_n)\cdot n$$

Ya que la base rectangular a_1+a_n *y la altura* n*. Así:*

$$2S=(a_1+a_n)\cdot n$$

o bien

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

e) Suma de los términos de una progresión aritmética

Se representa por:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Ejemplo:

a) Calcular la suma de los 30 primeros términos de la progresión:
$\div\ 12.\ 21.\ 30.\ 39.\ \ldots$

$$a_1=12;\ d=21-12=9;\ n=30;\ a_{30}=?;\ S_{30}=?$$

Calculemos:

$$a_{30}=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_{30}=12+(30-1)9=12+(29)9$$
$$=12+261=273$$
$$\Rightarrow a_{30}=273$$

Luego:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_{30}=\frac{12+273}{2}\cdot 30=4275 \Rightarrow S_{30}=4275$$

b) En una progresión aritmética la suma de los 10 terminos es 80, si el primer termino es 3, ¿cuál es el último termino?

$$S_{10}=80;\ a_1=3;\ n=10;\ a_{10}=?$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \Rightarrow 80=\frac{3+a_{10}}{2}\cdot 10 \Rightarrow \frac{80\cdot 2}{10}-3=a_{10}$$
$$\Rightarrow a_{10}=13$$

f) Interpolación de medios aritméticos:

Entre dos términos se puede insertar un número de términos, formando una progresión aritmética, para esto es indispensable hallar la diferencia.

Ejemplo:

Interpolar 6 medios aritméticos entre 1 y 3, es decir:

$$\div\ 1.\ a_2.\ a_3.\ a_4.\ a_5.\ a_6.\ a_7.\ 3$$

Despejando la diferencia d en la ecuación:

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{3-1}{8-1}=\frac{2}{7} \Rightarrow d=\frac{2}{7}$$

Por tanto,

$$\div\ 1.\ \frac{9}{7}.\ \frac{11}{7}.\ \frac{13}{7}.\ \frac{15}{7}.\ \frac{17}{7}.\ \frac{19}{7}.\ 3$$

Actividad

1) Calculamos la suma de los 35 primeros términos de la progresión aritmética, cuyo término general es:

$$a_n=5-3n$$

2) Calculamos la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es:

$$a_n=\frac{3n}{2}+1$$

3) Hallamos tres medios aritméticos entre 3 y 23.

4) Interpolamos 5 medios aritméticos entre los términos 0 y 60.

5) En una progresión aritmética, el tercer término es 16 y el octavo es 51, determinamos ¿cuál es el primer término de ésta progresión?

g) Progresiones geométricas (P.G.)

Es una sucesión donde cada término se obtiene multiplicando una constante al término anterior, la constante es llamada razón y se representa con "r".

La razón se obtiene dividiendo dos términos consecutivos.

Ejemplo:

La progresión: $\div\div\ 4:\ 12:\ 36:\ 108:\ 324$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{12}{4};\quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{36}{12};\quad \frac{a_5}{a_4}=\frac{324}{108}$$

La razón es 3 y cada término de la progresión se obtiene multiplicando por 3 al término anterior.

Observación

Cuando " r " es negativo:

- *Si a_1 es positivo, los términos pares son negativos.*
- *Si a_1 es negativo, los términos impares son negativos.*

Fuente: Open, AI. (2024)

h) Término general de una progresión geométrica

El término n-ésimo (para un caso general) es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo:

El sexto término de una progresión geométrica es $\frac{125}{972}$, si el primer término es 1000, ¿cuál es la razón?

$$a_1 = 1000;\quad a_6=\frac{125}{972};\quad n=6;\quad r=?$$

Reemplazando los datos:

$$a_n = a_1\cdot r^{n-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{125}{972}=1000\cdot r^{6-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{125}{972\cdot 1000}=r^5$$

$$\Rightarrow\quad r=\sqrt[5]{\frac{1}{7776}}=\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{7776}}=\frac{1}{6}$$

Por tanto, $r=\frac{1}{6}$.

i) Suma de términos de una progresión geométrica:

La suma de los términos de una progresión geométrica se representa por "S_n".

$$S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1};\ r\neq 1 \qquad \text{o} \qquad S_n=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1};\ r\neq 1$$

Ejemplo:

Determinamos la suma de la progresión: $\div\div\ 12:\ 180:\ 2700$, para sus primeros 7 términos:

$$a_1=12;\quad r=\frac{180}{12}=15;\quad n=7;\quad S_7=?$$

Reemplazando datos en la fórmula:

$$S_n=\frac{a_1\cdot(r^n-1)}{r-1} \quad\Rightarrow\quad S_7=\frac{12\cdot(15^7-1)}{15-1}=\frac{12\cdot(170\,859\,375-1)}{6}=\frac{12\cdot(170\,859\,374)}{6} \quad\Rightarrow\quad S_7=341718748$$

Actividad

1) Construimos una P.G. cuyo primer término sea 2 y cuya razón es $0{,}1$.

2) Determinamos el número de términos de una P.G. sabiendo que el primer término es 2, la razón $\frac{1}{2}$ y el ultimo termino $\frac{1}{64}$.

3) Efectuamos la suma $1+3+9+27+...+3^9$

4) Calculamos la suma de los 7 primeros términos de la P.G.:

$$\div\div\ j:\ \frac{j}{2}:\ \frac{j}{4}:\ ...$$

5) Hallamos la suma de los 7 primeros términos de la P.G.:

$$\div\div\ 2:\ 1:\ \frac{1}{2}:\ ...$$

Toma nota

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos hechos, se utilizará el punto decimal como separador.

Ejemplo:

$\pi \approx 3.14$; $e \approx 2.71$; -0,93

$$-\frac{5}{2} = -2.5\,; \quad \frac{13}{5} = 2.6\,;$$

$$-\frac{25}{100} = -0.25$$

Fuente: Microsoft, IA. (2024)

2. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema:

Javier de 5to de secundaria, al iniciar las vacaciones de invierno se propone repasar ejercicios de matemática durante dos semanas, haciendo cada día 3 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día de vacaciones comenzó haciendo un ejercicio, ¿cuántos ejercicios le tocará realizar el día 12?, ¿cuántos ejercicios hará en total?

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = 1 \\ d = 3 \\ n = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \quad a_{12} = 1 + (12-1)3 = 34$$

$$\Rightarrow \quad a_{12} = 34$$

El día 12 realizará 34 ejercicios.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \Rightarrow \quad S_{12} = \frac{1+34}{2} \cdot 12 = 210 \quad \Rightarrow \quad S_{12} = 210$$

Realizará en total 210 ejercicios.

Problema:

Desde la azotea del edificio, se deja caer una pelota desde una altura de 10 metros. En cada rebote llega a los $3/4$ de la última altura alcanzada. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota cuando toca el suelo por quinta vez?

La progresión geométrica será: $\because\; 10 : \frac{30}{4} : \frac{90}{16} : \ldots$

Calculamos las bajadas de la pelota

Tenemos: $a_1 = 10;\; n = 5;\; r = \frac{3}{4};\; S_5 = ?$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \quad \Rightarrow \quad S_5 = \frac{10 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^5 - 1\right)}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{10 \cdot \left(\frac{243}{1025} - 1\right)}{-\frac{1}{4}} = 30.51$$

$$\Rightarrow \quad S_5 = 30.51$$

Calculamos las subidas de la pelota

Tenemos: $a_1 = \frac{30}{4};\; r = \frac{3}{4};\; n = 4;\; S_4 = ?$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{\frac{30}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1\right)}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\frac{30}{4} \cdot \left(\frac{81}{256} - 1\right)}{-\frac{1}{4}} = 20.51$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = 20.51$$

Por lo tanto, la pelota recorre: $30.51 + 20.51 = 51.02$ metros.

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) Una estudiante hizo un trabajo por una semana de lunes a sábado. El lunes ganó Bs 12 y cada día ganó el doble del día anterior ¿cuánto ganó el viernes y cuánto ganó en total?

2) Un televisor fue comprado en Bs 2500, pero cada año que pasa pierde un 12% de su valor con respecto al año anterior. ¿Cuánto valdrá después de 4 años y cuánto valdrá después de 8 años?

VALORACIÓN

Las progresiones aritméticas y geométricas son secuencias de números que tienen una relación constante entre cada término. Las progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre cada término es constante. Por ejemplo, en la secuencia 2, 4, 6, 8, la diferencia entre cada término es 2. Este tipo de progresión es útil en muchos campos, como la economía, donde puede representar el crecimiento lineal de una inversión.

Por otro lado, las progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente entre cada término es constante. Un ejemplo sería la secuencia 3, 9, 27, 81, donde cada término se obtiene multiplicando el anterior por 3. Las progresiones geométricas se encuentran en fenómenos como el crecimiento exponencial, la desintegración radiactiva y en la composición de intereses en finanzas.

Ambos tipos de progresiones son fundamentales en matemáticas y tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas del conocimiento.

- Ambas clases de progresiones se utilizan en diversas aplicaciones. ¿Podrías mencionar algunas de ellas?.
- ¿Aparecen en la naturaleza?, menciona algunos ejemplos.
- ¿En qué situaciones de tu vida utilizas progresiones?.

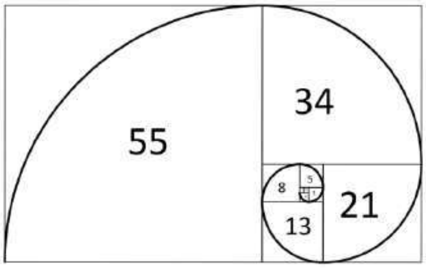
Fuente: https://www.pinterest.com/pin/846747167420439597/

Colección de ejemplos de progresiones aritméticas y geométricas en la naturaleza.

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Investigamos sobre el préstamo de dinero realizado por personas, ¿esta actividad es legal?
- Encuentra algún tipo de progresión que se utilice en el ámbito de salud, como medicina, trabajos en hospitales y similares.
- Realizamos un diorama tomando en cuenta la sucesión de Fibonacci.



ANÁLISIS COMBINATORIO

PRÁCTICA

En mi curso se realizará una rifa para recaudar fondos para realizar algunas mejoras en el mobiliario de la misma.

Todos compramos un ticket, el primer premio es un canastón otorgado por la junta escolar y el segundo premio es una pelota, Me encuentro muy entusiasmado por esta actividad, es así que le pedí a mi compañera Massiel que me obsequie su ticket, de esa forma ya tengo 2 tickets y tengo más posibilidades de ganar el canastón y la pelota.

Mi amigo Edwin, me dice que como somos 27 en el curso, la probabilidad de que me toquen ambos premios es muy baja.

¿Puedo realizar algún cálculo para saber si me puedo llevar ambos premios?

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

Respondemos las siguientes respuestas

- ¿Cuántas combinaciones posibles se tendrán si somos 20 estudiantes?
- Si el profesor indica que solo entregaran un premio, ¿tengo más posibilidades de sacar el segundo premio que el primero?
- ¿Cuántas posibilidades hay que yo saque el primer premio y Edwin el segundo premio?

TEORÍA

Contar

En matemática, contar cosas es un concepto fundamental. No obstante, no siempre es simple.

El área de la matemática que se ocupa de resolver problemas que consisten en contar un cierto número de objetos se llama combinatoria.

En el lanzamiento de dos dados, ¿de cuantas formas se pueden obtener un siete o un ocho?

1. Principios básicos de conteo

Muchos problemas tienen que ver con el número de maneras en que un conjunto finito de objetos se puede arreglar, combinar, o seleccionar. Tales problemas se encuentran en el ámbito de la combinatoria.

El estudio del análisis de la combinatoria comenzará presentando dos principios básicos del conteo, de la suma y la del producto.

a) El principio de adición (conector lógico "o")

Si una tarea "A" puede ser realizada de "m" formas diferentes y otra tarea "B" puede ser realizada de "n" formas diferentes y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay $m+n$ formas de realizar una o la otra.

Ejemplo:

Clara entrega piezas de robótica en 3 mercados, en el primero se entregó estos productos en 6 tiendas, en el segundo en 5 tiendas y en el tercero en 7 tiendas. ¿De cuántas maneras una persona puede adquirir las piezas de robótica?

Respuesta: El número total de resultados distintos que se puede obtener es:

$$6+5+7=18$$

Para hallar la respuesta utilizamos la operación de adición, tomando en cuenta el número total de resultados según la pregunta.

Actividad

1) Raúl desea viajar de La Paz a Cochabamba y tiene a su disposición 2 líneas aéreas y 7 líneas terrestres. ¿De cuantas maneras diferentes puede realizar su viaje?

2) El curso 5to de Secundaria está formado por 15 señoritas y 13 jóvenes, desean elegir su presidente. ¿De cuántas maneras puede ser elegido?

3) Jazmín se dedica a la venta de celulares, cuenta con cuatro aparatos de tres marcas reconocidas. ¿De cuántas formas puede ofrecer la venta a sus clientes?

4) Megan va a la tienda y quiere elegir una golosina de entre dos frascos. En uno hay 25 caramelos surtidos, mientras que el otro contiene 10 chicles. ¿Cuántas opciones tiene para elegir su golosina?

b) El principio de multiplicación (conector lógico “y”)

Si un evento o suceso “A” ocurre, en forma independiente, de “m” maneras diferentes y otro suceso “B” de “n” maneras diferentes, entonces el número de maneras distintas en que ocurren ambos sucesos es “$m \cdot n$”. Este principio es conocido también como el principio fundamental del análisis combinatorio.

Ejemplo:

Se tiene seis textos de aprendizaje del nivel secundario. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar en un estante donde sólo caben cuatro libros?

Fuente: Open, AI. (2024)

Solución:

Suceso I: Para la 1ra casilla existen 6 maneras diferentes.

Suceso II: Para la 2da casilla existen 5 maneras diferentes.

Suceso III: Para la 3ra casilla existen 4 maneras diferentes.

Suceso IV: Para la 4ta casilla existe 3 maneras diferentes.

Debemos realizar los cuatro procedimientos.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Así los textos de aprendizaje se pueden ordenar de 360 formas diferentes.

2. Factorial de un número natural y sus propiedades

a) Factorial de un número natural

Para todo número entero no negativo “n”, se llama n factorial o factorial de n al producto de todos los naturales desde 1 hasta n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,; \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^{+}$$

Ejemplo:

Calculamos los primeros factoriales.

$$1! = 1 \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2 \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

b) Propiedades

a) $n! = n \cdot (n-1)!$ Ejemplo: $8! = 8 \cdot 7!$

b) $x! = n! \;\Rightarrow\; x = n$ Ejemplo: $6! = 6! \;\Rightarrow\; 6 = 6$

c) $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Ejemplo: $\frac{7!}{7} = (7-1)! = 6!$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ Ejemplo: $\frac{9!}{(9-1)!} = 9 \;\Rightarrow\; \frac{9!}{8!} = 9$

Notación

Con la notación breve para productos,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

El símbolo se lee “Producto”

Se define $0!=1$, para que la relación $n!=n \cdot (n-1)!$ Sea también válida para $n=1$.

Esta permite definir los factoriales por recursividad.

Actividad

1) Claudia tiene 3 pares de zapatos, 4 pantalones y 3 blusas. ¿De cuántas maneras distintas puede formar un conjunto (combinación de ropa)?

2) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda y un dado simultáneamente?

Verificamos la existencia o no de cada una de las siguientes expresiones:

3) $\sqrt{13!} =$

4) $-6! =$

5) $(-9)! =$

6) $\left(\frac{5}{3}\right)! =$

7) $\sqrt{9!} =$

8) $6! + 2! =$

9) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$

10) $\frac{7!}{11} =$

Factorial

Además $n!$ se puede desarrollar explícitamente según lo requiera el ejercicio específico.

Por ejemplo:

$$n!=(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n$$

ó también:

$$n!=(n-3)!\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$$

Definición

El factorial también se la puede expresar así:

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Identidades de dobles factoriales

$$n! = n!!\,(n-1)!!$$

$$(2n)!! = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Fuente: Open, AI. (2024)

c) Descomposición en factores de un factorial

Recordamos, si $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$, para $n=5$, se tiene:

$$5! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}_{4!}\cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 5! = 4!\cdot 5$$

La siguiente relación adquiere importancia cuando se trata de simplificar expresiones, un tanto complicadas, que involucran el uso de factoriales:

$$\boxed{n! = (n-1)!\cdot n\,; \quad \forall\ n \geq 2}$$

Ejemplo:

i) Calcular las siguientes expresiones con factoriales.

$$\frac{12!}{9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!} = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320$$

$$\frac{13!}{8!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!} = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 154\,440$$

$$\frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

ii) Expresar como un solo factorial $(2n-1)\cdot(2n)\cdot(2n-2)!\cdot(2n+1)$

Ordenamos los factores

$$(2n+1)\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!=(2n+1)!$$

iii) Simplificar:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n$$

d) Doble factorial

Se define la doble factorial de n como:

$$n!! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \text{ ó } n = 1 \\ n\cdot(n-2)!! & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcular las factoriales:

$$\begin{aligned} 6!! &= 6\cdot(6-2)!!=6\cdot 4!!=6\cdot 4\cdot(4-2)!!=6\cdot 4\cdot 2!! \\ &= 6\cdot 4\cdot 2\cdot(2-2)!!=6\cdot 4\cdot 2\cdot 0!!=6\cdot 4\cdot 2\cdot 1=48 \\ &\Rightarrow\ 6!!=48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7!! &= 7\cdot(7-2)!!=7\cdot 5!!=7\cdot 5\cdot(5-2)!!=7\cdot 5\cdot 3!! \\ &= 7\cdot 5\cdot 3\cdot(3-2)!!=7\cdot 5\cdot 3\cdot 1!!=7\cdot 5\cdot 3\cdot 1=105 \\ &\Rightarrow\ 7!!=105 \end{aligned}$$

Actividad

– Evaluamos las siguientes expresiones con factoriales.

1) $\frac{11!}{5!} =$ **3)** $\frac{15!}{3!} =$ **5)** $\frac{33!}{30!} =$

2) $\frac{11!\cdot 6!}{8!} =$ **4)** $\frac{33!}{8!\cdot 15!} =$ **6)** $\frac{7!\cdot 9!}{3!\cdot 5!} =$

– Simplificamos:

7) $\frac{(n-6)!}{(n-4)!}$ **8)** $\frac{(n+9)!}{(n+5)!}$ **9)** $\frac{(n+10)!}{(n-5)!}$

– Expresamos como un solo factorial:

10) $(7n-4)\cdot(7n-5)\cdot(7n-7)\cdot(7n-3)\cdot(7n-6)$

3. Permutaciones simples

Son ordenamientos o “grupos ordenados” que se forman con un total de elementos. Se calcula con la fórmula

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Se lee “Permutaciones de n elementos”

Ejemplo:

a) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar, con o sin sentido, usando las letras de la palabra BOLIVAR?

Algunas de las formas son: bovilar, lobivar, volibar,…

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ maneras.

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los números $5, 6, 7, 8$ y 9 si él 7 debe ocupar siempre el lugar central?

? ? 7 ? ?

El orden de los números $5, 6, 8$ y 9 (que son 4), con él 7 al centro, el total de ordenamientos diferentes es:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Observe que el número 7 es fijo, no cambia su lugar, por lo tanto, solo nos debemos preocupar por ordenar (permutar) los otros cuatro números.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando en cuenta “r” de “n” $(0 \le r \le n)$, está dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

c) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 3 vocales distintas en una fila?

Identificamos que tenemos 5 vocales, de las cuales 3 serán utilizadas.

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \Rightarrow \quad 5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

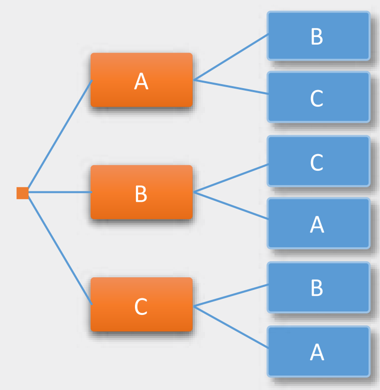
Por lo tanto, se tienen 60 maneras diferentes.

d) Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 5 al 9?

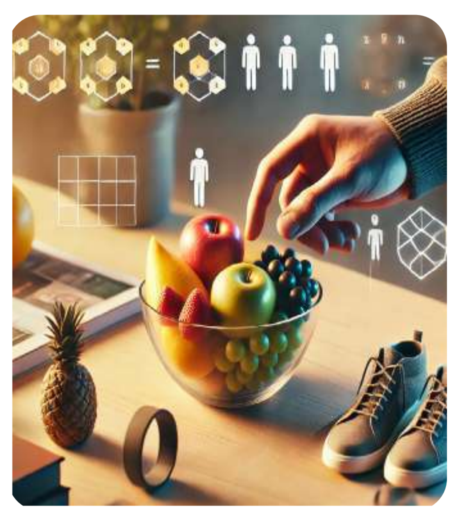
$$5P2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Diagrama de arbol

Una técnica que puede ayudar mucho es confeccionar un diagrama de árbol. Consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.



Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como permutación.



Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

1) ¿De cuántas maneras se pueden acomodar 10 libros, en un estante que tiene capacidad para 7 libros?

2) Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra PRODUCTIVA son:

3) ¿De cuántas maneras pueden repartirse cuatro estudiantes, cuatro golosinas distintas, comiendo cada estudiante una?

4) Calculemos la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, vicepresidente y un secretario de hacienda de un grupo de 8 estudiantes postulantes.

a) Y ¿si añadimos un secretario de deportes?

b) Y ¿si los postulantes a estos cargos serían 15 para 4 carteras?

El cubo de Rubik

Fuente: Open, AI. (2024)

Hay $43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$ posibles permutaciones del cubo rubik. Si pusieras un cubo al lado del otro, la fila tendría 261 años-luz. Si movieras una posición por segundo, tomaría 9986 veces la edad del universo pasar por todas las permutaciones.

Fuente: Open, AI. (2024)

Fuente: Open, AI. (2024)

4. Permutaciones con repetición

Cuando, en una situación, las condiciones indican que un elemento, o varios, se pueden repetir o suceden nuevamente, las permutaciones se denominan permutaciones con repetición. En un conjunto de "n" elementos, en el que cierto elemento se repite "a – veces", otro se repite "b – veces", también otro se repite "c – veces" y así sucesivamente; es calculado por:

$$PR_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot \ldots}$$

Ejemplo:

a) ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICA?

Son 10 elementos para las 10 letras de la palabra MATEMÁTICA, pero si nos fijamos hay elementos del conjunto que se repiten;

Número de veces que se repite la letra $\mathrm{M}=2$

Número de veces que se repite la letra $\mathrm{A}=3$

Número de veces que se repite la letra $\mathrm{T}=2$

Por lo tanto, calculamos una permutación con repetición sobre 10 elementos donde se repite 2 veces, 3 veces y 2 veces.

$$PR_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!} \Rightarrow PR_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 6\cdot 2} = 151\ 200$$

$$\Rightarrow PR_{10}^{2,3,2} = 151\ 200$$

b) En un sorteo de un canastón, hay 10 bolas de los cuales, 6 son rojas y 4 son azules con diferentes números. ¿De cuántas maneras es posible extraer una a una las bolas de la urna?

Número de bolas rojas: 6

Número de bolas azules: 4

Por lo tanto, calculamos una permutación con repetición sobre 10 elementos donde se repite 6 veces y 4 veces.

$$PR_n^{a,b} = \frac{n!}{a!\cdot b!} \Rightarrow PR_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{5040}{24} = 210$$

$$\Rightarrow PR_{10}^{6,4} = 210$$

c) Calcular: $PR_8^{3,4} = ?$

$$PR_8^{3,4} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = \frac{1680}{6} = 280 \quad \Rightarrow \quad PR_8^{3,4} = 280$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra COCHABAMBA?

2) ¿Cuántos números diferentes se puede formar permutando las cifras del número $16\ 674$?

3) Lanzando 3 dados, ¿cuántos números distintos se pueden formar?

4) ¿De cuántas maneras puede ser escrito ORURO?

5. Permutación circular

Son agrupaciones que carecen del primer y último término, por encontrarse en un circuito cerrado. Para hallar el número de permutaciones circulares que se pueden formar con "n" objetos distintos de un conjunto, hay que considerar fija la posición de un elemento, los "n-1" restantes podrán cambiar de lugar de $(n$-$1)!$ formas diferentes tomando todas las posiciones sobre la circunferencia relativa al primer punto.

El número de permutaciones circulares de n elementos está dado por:

$$P_c^n = (n-1)!$$

Ejemplo:

a) La mesa directiva del curso 5to de secundaria decidió reunirse para tratar asuntos de suma importancia, ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse alrededor de una mesa circular el presidente del curso junto a los 6 miembros de su mesa directiva?

$$P_c^n = (n-1)! \Rightarrow P_c^7 = (7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$\Rightarrow P_c^7 = 720$$

b) La profesora María de nivel Inicial decide hacer una ronda con los 10 niños de su curso. ¿Cuántas formas distintas se podrían establecer en las posiciones de los niños?

$$P_c^n = (n-1)! \Rightarrow P_c^{10} = (10-1)! = 9!$$

$$= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\ 880$$

$$\Rightarrow P_c^{10} = 362\ 880$$

c) Calcular: $P_c^{12} = (12-1)!$

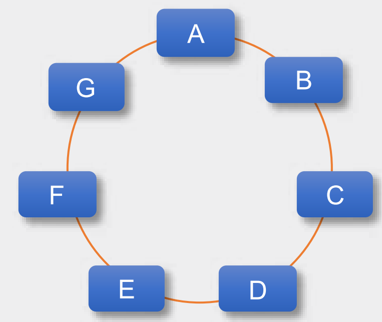
$$P_c^{12} = 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39\ 916\ 800$$

Permutación

Para contar las maneras en que se puede ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1ro Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.

2do Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.



Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

1) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en una mesa redonda?

2) ¿De cuántas maneras se pueden subir 8 jóvenes a un carrusel con 8 asientos todos idénticos?

3) Halla el valor de:

$$P_c^3 + P_c^4 - P_c^5 =$$

4) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 jóvenes en 9 sillas de una mesa redonda?

5) Una familia está formada por el padre, la madre, el hijo mayor, la hija menor, el abuelo y la abuela, ¿de cuántas maneras pueden sentarse en la mesa circular sabiendo que no deben coincidir lado a lado varones ni mujeres?

VALORACIÓN

El profesor Edwin de matemática, decide asignar a cada estudiante de 5to un lugar, si sabemos que en el curso tenemos 25 estudiantes. Analizamos:

- ¿Se obtendrá una permutación con o sin repetición o será circular?
- ¿Las permutaciones con repetición son menores o mayores a las sin repetición?
- En qué circunstancias aplicarías de manera práctica tus conocimientos del tema.

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Realizamos un resumen del tema, identificando las similitudes y diferencias entre estos tipos de permutaciones
- En la familia y en la vida diaria ¿en qué situaciones se pueden utilizar los factoriales?

VARIACIONES Y COMBINACIONES

PRÁCTICA

Decidimos ir de excursión con nuestro curso, pero debemos asistir con un par de regentes para el control disciplinario, los posibles acompañantes son:

Hilarión – Jaime – Maritza - Jeannette

Si realizamos un análisis de permutación, podemos obtener como acompañantes a Hilarión – Jaime, pero es lo mismo que la dupla Jaime – Hilarión.

En este caso el orden no es importante, por lo que la relación de permutación no será útil.

Veamos las combinaciones posibles:

Hilarión – Jaime	Hilarión – Maritza
Hilarión – Jeannette	Jaime – Maritza
Jaime – Jeannette	Maritza – Jeannette

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Puede interpretarse esta situación como una permutación sin repetición?
- Investigue, ¿cuál será la diferencia entre una variación y combinación?

TEORÍA

Atención

Observa que, en esta definición, es importante el orden en el que se extraen los elementos, pues dos listas con los mismos elementos, pero en posiciones diferentes, se consideran dos variaciones distintas.

Fuente: Open, AI. (2024)

1. Variaciones simples

Una variación sin repetición de “n” elementos tomados de “k” en “k” (donde $k \leq n$), es un grupo ordenado de “k” elementos distintos que se pueden formar a partir de los “n” elementos.

La cantidad de variaciones de “n” elementos se calcula mediante:

$$V_{n,k} = n(n-1)! \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k!)} ; \qquad n \geq k$$

Ejemplo:

La liga profesional de futbol de Bolivia está formada por 16 equipos, el formato de campeonato indica que se jugará todos contra todos, partidos de ida y vuelta, ¿cuántos partidos habrá en total?

Como dato se tiene $n = 16$ y $k = 2$, luego:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k!)} \quad \Rightarrow \quad V_{16,2} = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16!}{14!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14!}{14!}$$

$$= 16 \cdot 15 = 240$$

$$\Rightarrow \quad V_{16,2} = 240$$

El campeonato tendrá 240 partidos.

Ejemplo:

¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir los puestos de presidente, vicepresidente y secretario de hacienda del curso 1ro de secundaria sabiendo que hay 9 candidatos propuestos por el curso?

Las condiciones son que todos participan en la elección, si importa el orden, no es lo mismo que Iván sea presidente y Pedro vicepresidente a que Pedro sea presidente e Iván vicepresidente. Razón por la cual no se repiten los elementos, pues no es posible que un estudiante tenga dos puestos distintos.

Se tiene $n=9$ y $k=3$, luego:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k!)} \Rightarrow V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$$

$$\Rightarrow V_{9,3} = 504$$

Por lo tanto, hay 504 formas diferentes de repartir los puestos de presidente, vicepresidente y secretario de hacienda entre los 9 candidatos.

Fuente: Microsoft, IA. (2024)

Aprendiendo

En esta ocasión, al poderse repetir elementos, es posible tomar $k>n$.

Una variación con repetición son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

Es decir, cuando se forman grupos con estas características:

- *Sí importa el orden.*
- *Sí se repiten los elementos.*

Fuente: Open, AI. (2024)

2. Variaciones con repitición

Las variaciones con repetición, de n elementos tomados de k en k, son los distintos grupos ordenados de k elementos, repetidos o no, que se pueden formar con los n elementos dados.

La cantidad de variaciones con repetición de n elementos está dada por:

$$VR_{n,k} = n^k$$

Ejemplo:

En la evaluación parcial del segundo trimestre, tipo test contiene 12 preguntas y cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta. ¿Cuántas formas distintas posibles existen de resolver la evaluación?

En este caso, se tiene $n=4$ y $k=12$, luego:

$$VR_{4,12} = 4^{12} = 16\,777\,216$$

Existen $16\,777\,216$ distintas formas de resolver la evaluación.

Ejemplo:

Leonel decide viajar de Santa Cruz a la ciudad de Potosí, el trayecto se puede hacer por cinco rutas diferentes. ¿De cuántas maneras puede realizar el viaje de ida y regreso?, recuerda que influye el orden de los elementos y estos se pueden repetir.

Como dato se tiene $k=5$ y $n=2$:

$$VR_{2,5} = 5^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad VR_{2,5} = 25$$

Leonel puede realizar su viaje de 25 maneras.

Actividad

1) En una clase de 10 estudiantes va a distribuirse 3 premios. Halla ¿de cuántos modos puede realizarse la premiación?

2) Roció lanza dos dados diferentes al aire. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse?

3) Calcula el número de señales que se puede hacer con 10 banderas pudiendo izarse cada vez 2 ó 3 banderas.

4) De La Paz a Apolo se puede ir en coche, avioneta, helicóptero, moto, o flota. ¿De cuántas formas posibles se puede hacer el viaje de ida y vuelta?

5) Una placa de un automóvil está formada por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números elegimos entre los números comprendidos de 0 a 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular con este sistema?

3. Combinaciones simples

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto determinado, teniendo en cuenta que al formar grupos no interesa el orden de los elementos.

Fuente: Open, AI. (2024)

El número de combinaciones de n elementos tomados de k en$k$ $(C_{n,\,k})$ es igual al cociente del número de variaciones $(V_{n,\,k})$ entre el número de permutaciones ($P_k = k!$). Entonces:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\ ; \qquad n > k$$

Aprendiendo

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

La flota Andina en su recorrido de la ciudad de Santa Cruz a Potosí hay 18 estaciones. Si la flota para en todas las estaciones.

¿Cuántos viajes distintos pueden realizar entre ellas?

$n = 18$ y $k = 2$

$$C_{18,2} = \frac{18!}{(18-2)!\cdot 2!}$$

$$= \frac{18\cdot 17\cdot 16!}{16!\cdot (2\cdot 1)} = 153$$

Ejemplo:

En el curso 5to de secundaria deben formar grupos conformado por cinco jóvenes y tres señoritas, para realizar la exposición del fin de trimestre. ¿Cuántos grupos de cuatro estudiantes se pueden formar considerando lo siguiente?

A. No hay restricción alguna.

B. Debe haber al menos dos señoritas.

Solución A:

Como no hay restricción alguna, del grupo conformado por 8 estudiantes vamos a escoger 4. Se tiene $n = 8$ y $k = 4$, entonces

$$C_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot (4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70$$

Por tanto, se pueden conformar 70 grupos posibles sin restricción alguna.

Solución B:

Debe haber al menos dos señoritas, se presentarán los siguientes casos:

$$\left(\overbrace{C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!}}^{\text{2 señoritas de un total de 3}}\right) \times \left(\overbrace{C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}}^{\text{2 jóvenes de un total de 5}}\right) + \left(\overbrace{C_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!\cdot 3!}}^{\text{3 señoritas de un total de 3}}\right) \times \left(\overbrace{C_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)!\cdot 1!}}^{\text{1 joven de un total de 5}}\right) =$$

$$= \left(\frac{3\cdot 2!}{1!\cdot 2!}\right) \times \left(\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot (2\cdot 1)} = 10\right) + \left(\frac{3!}{0!\cdot 3!}\right) \times \left(\frac{5\cdot 4!}{4!\cdot 1!}\right) = 3\cdot 10 + 1\cdot 5$$

$$= 35$$

Por lo tanto, hay 35 grupos posibles con al menos dos señoritas.

Actividad

1) En el torneo regional de ajedrez participan 22 estudiantes donde clasifican tres y pasan a la final. ¿Cuántas son las posibles clasificaciones?

2) ¿Cuántos grupos de tres estudiantes se pueden formar con los 35 jóvenes y señoritas del curso 5to de secundaria?

3) De los 38 estudiantes del curso se presentan 6 como candidatos a ocupar dos puestos de presidente del curso. ¿Cuántas elecciones son posibles?

4) En la reunión de organización del curso 5to de secundaria, Wara observa que los padres de familia se dan apretones de manos, llegando a contar un total de 91 apretones de manos. Determine cuantos padres de familia participaron de la reunión. Si todos se saludaron.

5) Richard en un examen de física tiene que elegir 8 de las 12 preguntas de su evaluación. ¿De cuántas maneras puede elegirlas y si las 5 primeras son obligatorias?

Ejemplo:

Un pintor dispone de 5 latas de colores diferentes. ¿Cuántos tonos diferentes adicionales a los que tiene podrá obtener mezclando en cantidades iguales las latas de pintura?

Para obtener distintos tonos de color podrá mezclar 2 colores, 3 colores, 4 ó 5. por lo que debemos calcular las combinaciones posibles para cada uno de estos casos.

Mezcla de 2 colores de 5:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot (2 \cdot 1)} = 10$$

Mezcla de 3 colores de 5:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Mezcla de 4 colores de 5:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4!}{1! \cdot 4!} = 5$$

Mezcla de 5 colores de 5:

$$C_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 1$$

Sumando todas las combinaciones:

$$C_{5,2}+C_{5,3}+C_{5,4}+C_{5,5} = 10+10+5+1 = 26$$

Por tanto, el pintor podrá obtener 26 tonos diferentes de colores.

El número de combinaciones (sin repetición) de n elementos tomados de k en k se llama número combinatorio de n sobre k y se denota mediante $\binom{n}{k}$, es decir:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \; ; \quad n \geq k$$

Relación de recurrencia ó Teorema de Stieffel

La suma de dos números combinatorios no siempre es otro número combinatorio, pero si los numeradores son iguales y los denominadores consecutivos la relación, a continuación, es válida:

$$\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$$

Igualdad de números combinatorios

Si dos números combinatorios que tienen igual numerador y la suma de sus denominadores es igual al numerador, entonces son iguales.

$$\binom{m}{k} \text{ y } \binom{m}{n-k}$$

Son iguales y se verifica que:

$$m = k+n-k$$

Números combinatorios especiales:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{(0-0)! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \qquad \binom{1}{0} = \frac{1!}{(1-0)! \cdot 0!} = \frac{1}{1! \cdot 1} = 1$$

$$\binom{a}{a} = \frac{a!}{(a-a)! \cdot a!} = \frac{a!}{0! \cdot a!} = \frac{a!}{a!} = 1 \qquad \binom{a}{1} = \frac{a!}{(a-1)! \cdot 1!} = \frac{(a-1)! \cdot a}{(a-1)! \cdot 1} = a$$

$$\binom{a}{a-1} = \frac{a!}{(a-(a-1))! \cdot (a-1)!} = \frac{a!}{1 \cdot (a-1)!} = \frac{a \cdot (a-1)!}{(a-1)!} = a$$

Ejemplo:

Calculemos $C_{7,0} = 7C0$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)! \cdot 0!} = \frac{7!}{7! \cdot 1} = \frac{7!}{7!} = 1 \quad \Rightarrow \quad \binom{7}{0} = 1$$

Actividad

Calculamos:

1) $\binom{7}{1} =$

2) $\binom{5}{5} =$

3) $\binom{12}{5} =$

4) $\binom{12}{12} =$

5) $\binom{7}{7-1} =$

6) $\binom{15}{15-1} =$

7) $C_{(2,1)} =$

8) $C_{(8,6)} =$

9) $C_{(10,7)} =$

10) ${}_{13}C_{11} =$

11) ${}_{4}C_{3} =$

12) ${}_{10}C_{10} =$

Triángulo de Tartaglia

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Los números interiores se obtienen aplicando el teorema de Stieffel.

El exponente de "a" es la diferencia entre el numerador y el denominador del coeficiente del término y el del "b" es igual al denominador de dicho coeficiente. Es decir, la suma de ambos exponentes es igual a "n" para todos los términos, por lo tanto, los términos del desarrollo son homogéneos de grado "n".

Otra generalización del término $k+1$ es:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k}$$

Fuente: Open, AI. (2024)

Ejemplo:

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{(9-7)!\cdot 7!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{2!\cdot 7!} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 9\cdot 4 = 36 \quad \Rightarrow \quad \binom{9}{7} = 36$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 4!}{1!\cdot 4!} = \frac{5}{1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot(3\cdot 2\cdot 1)} = 5\cdot 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad \binom{6}{3} = 20$$

$$\binom{9}{9} = \frac{9!}{(9-9)!\cdot 7!} = \frac{9!}{0!\cdot 9!} = \frac{9!}{1\cdot 9!} = \frac{9!}{9!} = 1 \quad \Rightarrow \quad \binom{9}{9} = 1$$

4. Binomio de Newton

Si a y b reales y n natural, entonces podemos afirmar que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \quad \text{ó} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k}$$

El desarrollo del binomio de Newton tiene la forma:

$$\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Cada término del desarrollo tiene como coeficiente un número combinatorio de numerador igual al exponente del binomio y el denominador varía de 0 a "n".

Recordamos que los números combinatorios $\binom{n}{k}$ cuentan cuantos subconjuntos de k elementos podemos formar a partir de uno de n elementos. En particular, vamos a usar en esta clase la definición recursiva de los números combinatorios.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_o$$

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{n}{k-1}\,; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_o\,, \qquad 1 \le k \le n-1$$

Ejemplo:

Aplicamos el binomio de Newton y determinar: $(x+2)^2$

$$(x+2)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} 2^k = \binom{2}{0} x^{2-0} + \binom{2}{1} x^{2-1} 2^1 + \binom{2}{2} x^{2-2} 2^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!} x^2 2^0 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!} x^1 2^1 + \frac{2!}{2!\,(2-2)!} x^0 2^2$$

$$= \frac{2!}{0!\,2!} x^2 2^0 + \frac{2!}{1!\,1!} x^1 2^1 + \frac{2!}{2!\,0!} x^0 2^2 = 1\cdot x^2\cdot 1 + 2\cdot x\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 4$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

Actividad

Desarrollamos cada uno de los siguientes binomios:

1) $(a+b)^3 =$

2) $\left(\frac{1}{2}m + 4n\right)^5 =$

3) $(3a+2b)^4 =$

4) $(5a+3b)^5 =$

5) $(6x+5)^3 =$

6) $\left(\frac{3}{5}\,a + \frac{2}{3}b\right)^7 =$

7) $(-a+b)^3 =$

8) $(2x-y)^4 =$

9) $\left(-x + \frac{y}{2}\right)^6 =$

Término k-ésimo

Si se necesita determinar algún término del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ resulta útil aplicar la fórmula a continuación:

$$T_k = C^n_{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

Donde k es la posición del término buscado.

Ejemplo:

El 4to término del binomio $(2b^3 - a)^9$ es:

$$T_4 = C^9_{4-1}(2b^3)^{9-4+1}(-a)^{4-1}$$

$$= C^9_3(2b^3)^6(-a)^3 = -\frac{9!}{6!\cdot 3!}\cdot 2^6 b^{18} a^3 = -5376\, a^3 b^{18}$$

Así el 4to termino es: $-5376\, a^3\, b^{18}$

Ejemplo:

En el binomio $(1+4y^3)^{15}$, obtener el 4to termino. Tenemos que: $n = 15$; $k = 4$; $a = 1$ y $b = 4y^3$

$$T_k = C^n_{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} \Rightarrow T_4 = C^{15}_{4-1} 1^{15-4+1}(4y^3)^{4-1} = C^{15}_3 1^{12}(4y^3)^3 = C^{15}_3 1^{12} 64\, y^9$$

$$= \frac{15!}{12!\cdot 3!}\cdot 1\cdot 64y^9 = 455\cdot 64\, y^9 = 29\ 120\, y^9$$

Por tanto, el cuarto termino es $29\ 120\, y^9$.

Teorema del Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Debido a este teorema, los números combinatorios se llaman también coeficientes binomiales.

Actividad

Desarrollamos por el binomio de Newton:

1) $(a^5 - 2b^2)^7 =$

2) $\left(\frac{3}{5}a^3m^2 + 3b^2n^5\right)^6 =$

3) Obtenemos el 8vo término del binomio $(b^3 - a^3)^{13}$

4) En el desarrollo de $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^{12}$, obtenemos el coeficiente de x^7.

VALORACIÓN

El análisis combinatorio forma parte de la matemática que estudia las organizaciones y agrupaciones de los elementos. Las aplicaciones de la informática y la estadística en el uso de los principios básicos de conteo, el factorial, las permutaciones, variaciones y combinaciones de elementos y actividades que se pueden desarrollar en la vida cotidiana.

Si en tu unidad educativa se quiere organizar una hora cívica por el día del maestro, el director indica que deben participar los cursos con un número ya sea poético o una danza, pero solamente se presentarán 7 números para que la hora cívica no se extienda.

- Si tenemos 12 cursos en la unidad educativa, ¿cuántas combinaciones posibles se pueden formar para este acto cívico?
- Si contamos solo con 10 cursos y el director indica que se formen 6 números, ¿cuántas combinaciones posibles se pueden formar para este acto cívico?

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Elaboramos un listado de actividades de colegio en las que se pueden utilizar este tipo de conocimientos
- Modelizamos el proyecto utilizando herramientas tecnológicas que fortalezcan tu trabajo.
- Elaboramos un cuadro donde mostremos las combinaciones que podemos realizar con los colores del uniforme de nuestro colegio, exponiéndolos en clase para fortalecer y reforzar nuestros conocimientos.

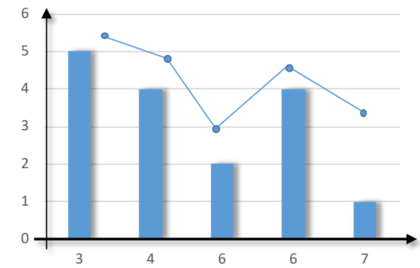
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

PRÁCTICA

En el Instituto Americano de La Paz, se llevó a cabo una feria a la inversa, es decir, los expositores fueron los padres y madres de familia y los estudiantes visitaron los diferentes stands.

Los temas que se tomaron en cuenta fueron los diferentes tipos de violencia que viven los estudiantes, como ser violencia familiar, violencia psicológica, violencia entre pares, violencia por redes sociales y otros.

Los padres de familia demostraron ser muy creativos con sus exposiciones y en la organización del espacio físico de sus stands.



Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

- ¿Cómo podríamos saber cuál ha sido el stand más visitado?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre la estadística?
- Mencionamos en qué situaciones observamos el uso de la estadística.
- ¿Cómo utilizarías la estadística para mejorar tu calidad de vida y la de tu familia?

TEORÍA

Estadística descriptiva

Esta área de la matemática trata de:

- *Aplicar conceptos estadísticos como muestra, población y tipos de variables.*
- *Ordenar y organizar la información.*
- *Analizar y construir tablas y gráficos.*
- *Determinamos medidas de tendencia central: media aritmética, moda y mediana.*
- *Calculamos medidas de dispersión como el rango, desviación estándar y varianza.*
- *Interpretar las medidas de posición: cuartiles, deciles y percentiles.*

Estos conocimientos también pueden ser determinados introduciendo los datos necesarios en una calculadora, e incluso con una computadora.

1. Definiciones fundamentales de estadística

La estadística es la ciencia que trata de la recopilación de datos, su organización, el análisis y la interpretación para la toma de decisiones. Se refiere al conjunto de métodos, normas, reglas y principios para observar, agrupar, describir, cuantificar y analizar el comportamiento del fenómeno que se estudia.

Originalmente se pensó que la función de la estadística era describir las características de un grupo, en la actualidad, no sólo es descriptivo sino también analítico, que, partiendo de un grupo mayor, llamado población, se pueden deducir conclusiones con relación a un tema o variable para un grupo menor llamado muestra.

a) Estadística descriptiva

Es un conjunto de métodos estadísticos utilizados para organizar y resumir datos numéricos, con el objetivo de destacar características clave, como promedios y variabilidad, que permiten realizar comparaciones, sin buscar extraer conclusiones de carácter más general.

b) Estadística inferencial

Esta área se encarga de deducir o inferir aquello que mencionamos en cuanto a la población y la muestra, seleccionando ésta última por métodos aleatorios. Su propósito es explicar ciertos comportamientos del conjunto observado, estableciendo las causas que la originan.

2. Recolección y organización de datos

Debido a que los datos en forma individual no tienen utilidad práctica, es necesario organizarlos de manera sistemática para facilitar su interpretación y análisis. La manera más sencilla de organizar la información es en una base de datos, la cual posibilita realizar clasificaciones simples o cruzadas, según las variables o series.

Para esta etapa tomaremos los siguientes conceptos básicos:

a) Población o Universo

Es un grupo que abarca todos los componentes necesarios para resolver un problema y que comparten una característica común, la cual es observable y medible. Por ejemplo, si el componente es una persona, se pueden analizar atributos como edad, peso, nacionalidad, género, entre otros. Los componentes que forman una población pueden incluir personas, objetos o conjuntos (por ejemplo, familias, las manzanas de una cosecha, empleados de una compañía, etc.).

Ejemplo:

1. Todas las tiendas que se dedican a la venta de celulares en el departamento de Tarija.
2. Todos los establos de ganado vacuno en el departamento de Santa Cruz.
3. Todos fueron registrados en el Censo de Población y Vivienda.
4. Todos los usuarios del teleférico en la ciudad de La Paz en toda la gestión 2025.

b) Muestra

Se define como un subconjunto de la población, sobre este conjunto se realizan las mediciones al respecto de una variable susceptible a medición.

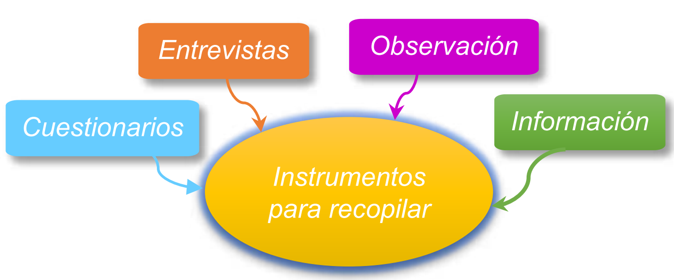
Ejemplo:

De los ejemplos anteriores de poblaciones se tienen:

1. Tiendas que se dedican a la venta de celulares en el Distrito 7 – Zona Mercado Campesino (Tarija).
2. Algunos establos de ganado vacuno del Norte Integrado (Santa Cruz).
3. Las personas registradas en un departamento.
4. Usuarios del teleférico rojo en el mes de junio (La Paz).

3. Tipos de variable: cuantitativa (discretas y continuas) y cualitativas

Una variable se refiere a un atributo o cualidad que se observa en un grupo o muestra (como la edad, género, peso, altura, presión arterial sistólica, entre otros) y que se desea analizar. Esta variable puede asumir distintos valores según cada individuo y se clasifica en dos tipos: cuantitativa y cualitativa



Muestreo

Es una técnica que sirve para obtener una o más muestras de la población, se realiza determinando un grupo representativo de la población, seleccionando así los elementos de la muestra.

Individuo

Un individuo o unidad estadística es cada uno de los elementos que componen la población. Por ejemplo, en los censos económicos se obtienen datos de los negocios. En este caso cada negocio, que está formado por varias personas, es un individuo de la población.

Dato

El dato es cada uno de los valores que se han obtenido al realizar un estudio estadístico.

Por ejemplo: si se lanza una moneda al aire 5 veces obtenemos 5 datos.

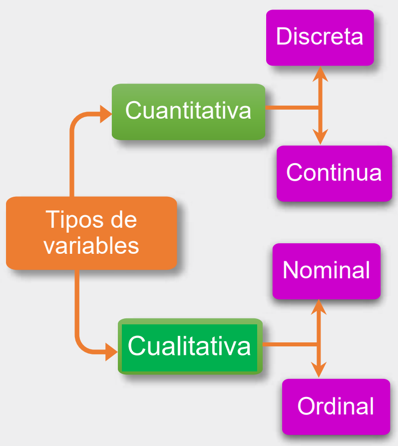
Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

– Ejemplificamos población o universo según nuestro contexto.

– De los ejemplos anteriores de población o universo, ejemplificamos las muestras.

Tipos de variables



Variable	Definición	Tipo	Característica	Valores
Cuantitativa	Expresa cualidades o atributos que no se pueden medir	Único	Lugar de nacimiento	Tarija, Potosí,…
Cuantitativa	Son características medibles, se puede asignar un valor numérico	Discreta (toma valores enteros) Continua (toma un valor de un intervalo)	Edad El peso de una persona	0,1,2,3, ... 42, 30 kg 62, 10 kg

Tablas de frecuencia

Las tablas de frecuencias se utilizan para representar la información contenida en una muestra de tamaño "n" extraída de una población.

Observacion:
n es el total de datos

4. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos

La distribución de frecuencias o tabla de frecuencias ordenan los datos estadísticos en una tabla, reuniendo como información importante a las frecuencias correspondientes.

a) Tablas de frecuencia

La frecuencia absoluta f_i
Es el número de veces que aparece un valor entre los datos de la muestra, se representa por f_i y su sumatoria da el total de los datos.

Frecuencia absoluta acumulada F_i
Es la suma de las frecuencias absolutas de manera progresiva, la última suma es igual al total de datos, se representa por F_i

La frecuencia relativa h_i
Es la división de la frecuencia absoluta y la cantidad total de los datos, se representa por $h_i = \frac{f_i}{n}$ y la suma de todas siempre da 1.

Frecuencia relativa acumulada H_i
Es la suma de las frecuencias relativas de manera progresiva, la última suma es igual a 1, se puede expresar en tantos por ciento.

Dato x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia relativa acumulada H_i
x_1	f_1	$F_1=f_1$	$h_1 = \frac{f_1}{n}$	$H_1=h_1$
x_2	f_2	$F_2= f_1+f_2$	$h_1 = \frac{f_2}{n}$	$H_2=h_1+h_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	f_{n-1}	$F_{n-1} = f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}$	1	$H_n = \sum h_i = 1$
x_n	f_n	$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = n$	1	$H_n = \sum h_i = 1$
Total	$n = \sum_{i=1}^{n} f_i$		1	

Ejemplo:

Construye una tabla de distribución de frecuencias con los datos de 50 estudiantes que tienen faltas en área de matemática.

2	3	4	0	3	3	3	1	2	3
2	1	2	3	2	3	3	5	5	4
2	4	1	6	1	6	4	0	5	3
3	3	1	1	6	0	3	3	4	4
3	2	3	2	4	4	2	5	2	1

Datos	f_i	F_i	h_i	H_i
0	3	3	0.06	0.06
1	7	10	0.14	0.2
2	10	20	0.2	0.4
3	15	35	0.3	0.7
4	8	43	0.16	0.86
5	4	47	0.08	0.94
6	3	50	0.06	1
Total	50		1	

Interpretación de datos

– *Calculando la frecuencia absoluta f_i:*

f_1=3 Significa que 3 estudiantes no se faltaron nunca.

f_2=7 Significa que 7 estudiantes tienen 1 falta.

f_3=10 Significa que 10 estudiantes tienen 2 faltas"

– *Calculando la frecuencia absoluta acumulada F_i*

$$F_1 = 3$$
$$F_2 = 3 + 7 = 10$$
$$\vdots$$
$$F_7 = 3 + 7 + \cdots + 47 = 50$$

– *Calculando la frecuencia relativa h_i*

$$h_1 = \frac{3}{50} = 0.06$$
$$h_2 = \frac{7}{50} = 0.14$$
$$\vdots$$
$$h_7 = \frac{3}{50} = 0.06$$

– *Calculando la frecuencia relativa acumulada H_i*

$$H_1 = 0.06$$
$$H_2 = 0.06 + 0.14 = 0.2$$
$$\vdots$$
$$H_7 = 0.06 + 0.14 + \cdots + 0.06 = 1$$

Distribución de frecuencias para datos agrupados

Es la tabla de datos agrupados que se emplea cuando las variables toman un número grande de valores o la variable es continua. Son agrupados en intervalos con la misma amplitud, denominados clase. A cada clase se le asigna su frecuencia correspondiente.

El rango R:

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

El número de intervalos, es común la utilizar la fórmula de Sturges

$$k = 1 + 0.33 \cdot \log n$$

La amplitud de la clase (A):

$$A = \frac{R}{k}$$

Ejemplo:

Construye una tabla de distribución de frecuencias agrupadas si el maestro de educación física realiza la medida de estaturas de sus estudiantes que participarán en los juegos plurinacionales obteniendo los siguientes datos de 30 estudiantes.

1.15	1.53	1.21	1.77	1.2
1.48	1.16	1.59	1.49	1.98
1.57	1.6	1.86	1.2	1.37
1.71	1.81	1.52	1.42	1.16
1.92	1.98	1.48	1.45	1.73
1.39	1.62	1.4	1.17	1.64

Hallar el rango:

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}} = 1.98 - 1.15 = 0.83$$
$$\Rightarrow \quad R = 0.88$$

El número de intervalos (k):

$$k = 1 + 0.33 \cdot \log 30 = 5.91 \approx 6$$
$$\Rightarrow \quad k = 6$$

La amplitud de la clase (A):

$$A = \frac{R}{k} = \frac{0.83}{6} = 0.138 \approx 0.14 \quad \Rightarrow \quad A = 0.14$$

Intervalo	f_i	F_i	h_i	H_i
1.15 - 1.29	7	7	0.23	0.23
1.29 - 1.43	4	11	0.13	0.37
1.43 - 1.57	6	17	0.2	0.57
1.57 - 1.71	5	22	0.17	0.73
1.71 - 1.85	4	26	0.13	0.87
1.85 – 1.99	4	30	0.13	1
	30		1	

Actividad

1) El puntaje obtenido por los estudiantes de 5to de secundaria en el último examen es el siguiente: 43, 40, 35, 35, 23,12, 24, 23, 27, 26, 25, 40, 37, 36, 24, 41, 42, 43, 23, 30, 23, 26, 27, 26, 37, 30, 45, 41, 39, 37.

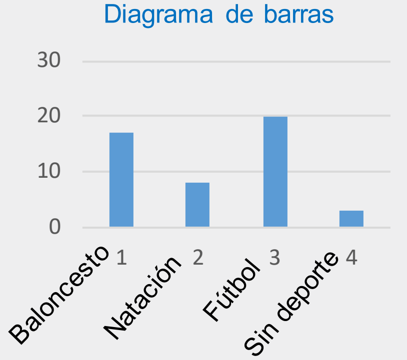
Construimos una tabla de distribución de frecuencias.

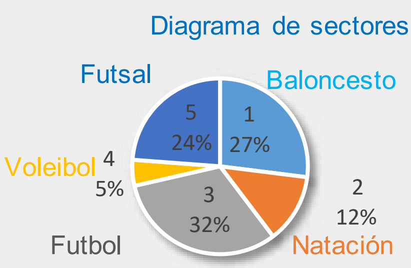
2) La maestra Susana de matemática, solicita que los estudiantes compren una calculadora científica, sus estudiantes averiguaron los siguientes precios:

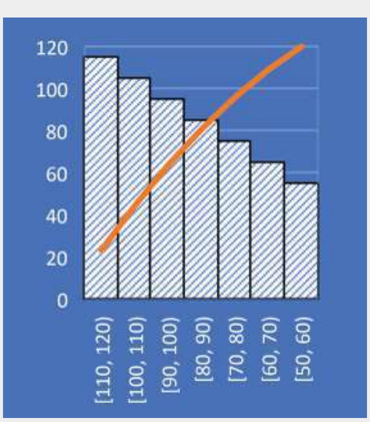
49	80	81	75	65	90	79
73	83	50	48	49	68	63
79	80	75	85	74	76	79
89	75	70	89	60	70	80
52	75	90	60	49	50	55

Construimos una tabla de distribución de frecuencias agrupadas.

Gráficos estadísticos







b) Gráficos estadísticos

Las distribuciones de frecuencias se presentan en tablas como las anteriores, o bien en gráficas. Estas sirven para ayudar al lector en la comprensión de los resultados, pero no añade ninguna información sobre la que contendría una tabla de frecuencias; su objetivo es "impactar" directamente al lector, con información sintetizada y que se exprese el "perfil" de la distribución, pero no debe olvidarse el rigor en aras de la estética: las gráficas deben reflejar fielmente lo que tratan de representar, fundamentalmente las frecuencias de cada modalidad o valor. Por ello la regla fundamental para la construcción de una gráfica es que las áreas (o longitudes) han de ser proporcionales a las frecuencias, condición inexcusable para que una gráfica sea correcta.

Diagrama de barras

Es utilizado para representar datos cualitativos o cuantitativos de tipo discreto. Son representados en el plano cartesiano con ejes de coordenadas, sobre el eje de horizontal se colocan los valores de la variable, mientras que en el eje vertical las frecuencias absolutas, relativas o acumuladas.

Los datos son representados por barras con altura proporcional a la frecuencia.

Polígonos de frecuencias

Se realiza ubicando los puntos formados por el valor de la variable y las frecuencias absolutas, uniéndolos mediante segmentos.

Diagrama de sectores

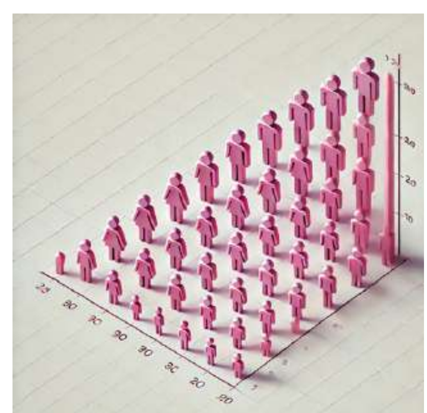
Se trazan sectores en un círculo, de manera proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente, es mayormente utilizada para variables cualitativas.

Histograma

Es una representación gráfica en forma de barras. Las variables son continuas o discretas, pero agrupadas.

Pictogramas

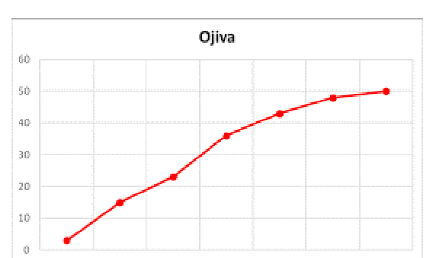
Es una forma de representar las cantidades estadísticas por medio de dibujos, utilizando para ello objetos y figuras; las figuras deben explicarse por sí mismas. Se acostumbra que el tamaño sea uniforme, indicándose aparte de las figuras el valor de una de ellas. Por otro lado, el tamaño puede variar y la altura de cada objeto estará dada por la frecuencia absoluta o relativa.



Fuente: Open, AI. (2024)

Ojivas

Para el trazado de esta gráfica, en primer lugar, se ubican los puntos en el plano cartesiano. Dichos puntos se determinan teniendo en cuenta el límite superior de cada intervalo y las respectivas frecuencias absolutas o relativas acumuladas; luego se unen esos puntos, partiendo desde el límite inferior del primer intervalo ubicado en el eje horizontal.



Fuente: https://www.probabilidadyestadistica.net/ojiva-estadistica/

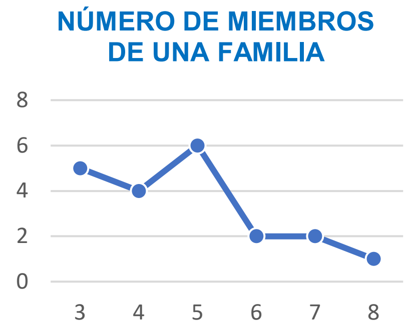
Ejemplo:

Construye una tabla de distribución de frecuencias y su gráfica sabiendo que a 20 colegiales se les pregunto sobre el número de miembros de su familia, sus respuestas fueron: 3, 5, 4, 3, 5, 6, 8, 3, 3, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 4, 7, 4, 5, 3.

Calculando la frecuencia relativa acumulada H_i

Datos	f_i	F_i	h_i	Hi
3	5	5	0.25	0.25
4	4	9	0.2	0.45
5	6	15	0.3	0.75
6	2	17	0.1	0.85
7	2	19	0.1	0.95
8	1	20	0.05	1
Total	20		1	

$$H_1 = 0.25$$
$$H_2 = 0.25 + 0.2 = 0.45$$
$$\vdots$$
$$H_7 = 0.25 + 0.45 + \cdots + 0.05 = 1$$



Polígono de frecuencias

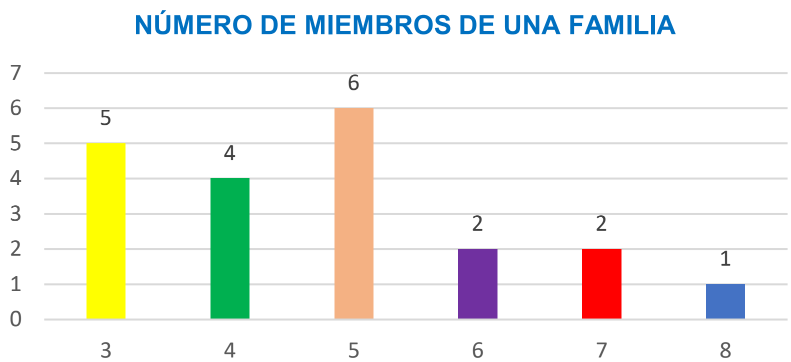


Diagrama de barras

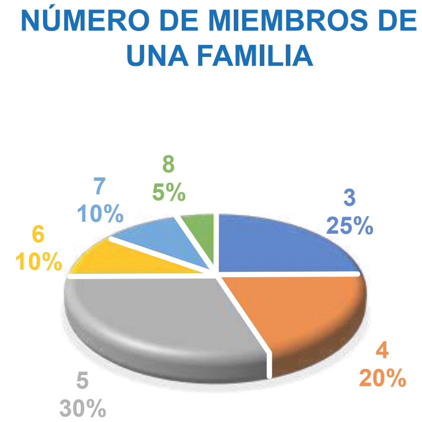


Diagrama de sectores

5. Medidas de tendencia central

Hemos visto cómo se pueden organizar y representar datos de una serie, sin embargo, resulta importante en el trabajo estadístico poder comparar entre sí dos o más series de datos.

Las medidas de tendencia central suelen llamarse promedios y son el valor típico en el sentido de que se emplea a veces para representar todos los valores individuales de un conjunto de datos. Es decir, las medidas de tendencia central dan un valor típico o representativo de un conjunto de datos.

La tendencia central de un conjunto de datos es la disposición de éstos para agruparse ya sea alrededor del centro o de ciertos valores numéricos. Hay varias medidas de tendencia central, con propiedades particulares que las hacen típicas en alguna forma única. Las más frecuentemente utilizadas son la media aritmética, la mediana y la moda.

a) Media aritmética

Resulta de sumar todos los datos y dividir la suma entre el total de datos recolectados. Es como realizar el promedio de los datos.

Actividad

1) A continuación, se presenta una muestra de las notas trimestrales de 20 estudiantes en el área de química: 60, 96, 95, 79, 78, 60, 51, 72, 55, 95, 99, 88, 85, 82, 88, 80, 70, 65, 80 y 66.

a) Construye una tabla de distribución de frecuencias.

b) Realiza la gráfica que se acomode a los datos empleados.

2) Massiel averiguó los precios de bufandas en tiendas diferentes y obtuvo la siguiente tabla:

a) Construye una tabla de distribución de frecuencias agrupadas.

b) Realiza la gráfica que se acomode a los datos empleados.

53	80	81	74
71	64	62	63
77	74	75	71
88	61	69	72
74	65	66	60

Importante

$\overline{X}$: *Media aritmética*
$\sum$: *Sumatoria*
x_i : *Datos*
$x_1+...+x_n$: *Datos*
n : *Total de datos*
f_i : *Frecuencia*
x: *Marca de clase, se calcula con*

$$\frac{X_{\max}+X_{\min}}{2}$$

Me : *Mediana*
$X_{\min}$: *Límite inferior*
$X_{\max}$: *Límite superior*
f_{med} : *Frecuencia del intervalo en que se encuentra la mediana*
F_i: *Frecuencia absoluta acumulada anterior al intervalo*
c : *Amplitud de clase media*

Ejemplo:

Intervalos	f_i	F_i
$16-20$	5	5
$21-25$	17	22
$26-30$	16	38
$31-35$	7	45
$36-40$	4	49
$41-45$	4	53
$46-50$	1	54
$51-55$	1	55
Total	55	

$$c=5 \qquad \overline{X}=\frac{55+1}{2}=28$$

$$Me=X_{\min}+\left[\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_{med}}\right]c$$

$$=25.5+\left[\frac{\frac{55}{2}-22}{16}\right]5$$

$$=27.21$$

$$\Rightarrow \quad \text{Me}=27.21$$

Para datos desagrupados

$$\overline{X}=\frac{\sum x_i}{n}\ ; \quad \overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Ejemplo:

El maestro de matemática desea conocer el promedio de las notas de los 10 estudiantes de la clase. Las notas son: $3{,}2;\ 3{,}1;\ 2{,}4;\ 4;\ 3{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 3{,}8;\ 4{,}2;\ 4$. ¿Cuál es el promedio de notas de los estudiantes de la clase?

$$\overline{X}=\frac{3.2+3.1+2.4+4+3.5+3+3.5+3.8+4.2+4}{10}=\frac{34.7}{10}=3.47$$

El promedio de las notas es de 3.47.

Para datos agrupados

$$\overline{X}=\frac{\sum f_i\cdot x_i}{n}$$

Ejemplo:

Dada la siguiente tabla de frecuencias, hallar la media aritmética.

R		f_i	x_i	$f_i\cdot x_i$
$X_{\min}$	$X_{\max}$			
3	5	3	4	12
6	8	8	7	56
9	11	13	10	130
12	14	9	13	117
15	17	7	16	112
		40		427

$$\overline{X}=\frac{\sum f_i\cdot x_i}{n}$$

$$=\frac{427}{40}=10.68$$

$$\Rightarrow \overline{X}=10.68$$

b) Mediana

Es la observación que, en una serie ordenada, ocupa la posición central, por tanto, divide a la serie en dos partes iguales. Por encima de ella se encuentra el 50% de las observaciones y a su vez su valor supera al 50% restante, se representa el valor de la variable de posición central con: $\frac{n+1}{2}$ cuando la cantidad de datos es impar y $\frac{n}{2}$ cuando es par.

Para datos desagrupados

Ejemplo:

Peso en kg de 5 niños es: $5, 6, 7, 9, 11$. ¿Cuál es la mediana?

La cantidad de datos es IMPAR, por lo que la posición es:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Como hay 5 datos, la mediana es el tercer valor, por tanto, la mediana es 7 kg.

Ejemplo:

Peso en kg de 6 niños es: $3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11$. ¿Cuál es la mediana?

La cantidad de datos es PAR no hay un único valor central, en este caso son 6 términos, por lo que la posición inicial es: $\frac{n}{2}=\frac{6}{2}=3$, la tercera. Con esto, la mediana será la semisuma de los dos valores centrales, es decir:

$$Me=\frac{6+7}{2}=\frac{13}{2}=6.5 \quad \Rightarrow \quad Me=6.5$$

La mediana está entre la tercera y la cuarta posición. Por tanto, la mediana es 6.5 kg.

Para datos agrupados

$$Me=X_{\min}+\left[\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_{med}}\right]c$$

c) Moda

Es el dato que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto. Cuando se considera la distribución poblacional de una variable continua, decimos que esta es UNIMODAL si presenta un pico y BIMODAL si aparecen dos picos claros.

3. Cuartiles, deciles y percentiles

Si una serie de observaciones se colocan en orden creciente, el valor que divide al conjunto de datos en dos partes iguales es la mediana. Por extensión, si preferimos tener una descripción más detallada de la variabilidad de los valores individuales, se puede dividir los datos en otra cantidad de partes iguales.

a) Cuartiles

Al dividir los datos en cuatro partes iguales, quedan definidos los cuartiles: Q_1, Q_2 y Q_3. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo cuartil, es

$$°Q_k = \frac{k(n+1)}{4}$$

b) Deciles

Al dividir los datos en diez partes iguales, quedan definidos los deciles: $D_1, D_2, \ldots, D_9$. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo decil, es

$$°D_k = \frac{k(n+1)}{10}$$

c) Percentiles

Al dividir los datos en cien partes iguales, quedan definidos los percentiles: $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo percentil, es

$$°P_k = \frac{k(n+1)}{100}$$

Ejemplo:

Edad en años de 10 *pacientes con resfrió.*
$20, 27, 23, 35, 23, 40, 32, 23, 19, 17$

La moda en este caso es 23 *años.*

Por ejemplo, en cuatro, en diez o en cien partes iguales, llamando a estas medidas cuartiles, deciles y percentiles, respectivamente.
$17, 19, 20, 23, 23, 23, 27, 32, 35, 40$

– *Cuartiles*

$$°Q_k = \frac{k(n+1)}{4} = \frac{1(10+1)}{4} = 2.75$$

– *Deciles*

$$°D_k = \frac{k(n+1)}{10} = \frac{5(10+1)}{10} = 5.5$$

– Percentiles

$$°P_k = \frac{k(n+1)}{100} = \frac{60(10+1)}{100} = 6.6$$

Actividad

Hallamos la media, mediana y la moda de los siguientes datos:

a) 4; 8; 2; 7; 7; 9; 7; 2; 8; 3
b) 49.6; 47.5; 51.3; 51.5; 48.9
c) 3.2; 3.5; 1.4; 2.3; 2.6; 2.5; 2.3; 2.9; 3; 4; 3; 3.1; 3.2; 3.1; 3.1

Hallamos las medidas cuartiles, deciles y percentiles de los siguientes datos:

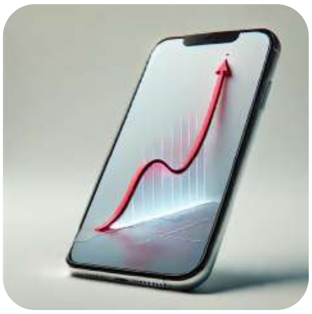
a) 3; 5; 2; 6; 5; 9; 5; 2; 8; 6
b) 51.6; 48.7; 50.3; 49.5; 48.9
c) 10; 11; 11; 11; 12; 13; 14; 14; 14; 17
d) 0; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4

VALORACIÓN

La estadística es una rama que recolecta, clasifica y organiza la información para obtener resultados útiles en el tema a tratar. Los estudiantes que aprenden a utilizar la estadística de manera efectiva estarán mejor preparados para tener éxito en el colegio y en la vida.

Es una herramienta poderosa que puede ayudarte a aprender, pensar críticamente y tomar mejores decisiones.

- ¿Desde que despiertas utilizas la organización de información?
- ¿Cuántas veces utilizaste estadística hoy?
- ¿Cómo aplicarías las tablas de frecuencia y gráficos estadísticos, para mejorar tu perfil en redes sociales?



Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Investigamos datos estadísticos sobre las siguientes temáticas: Violencia familiar, contaminación del aire y depresión juvenil
- Recolectamos datos al respecto, clasificamos las variables que utilizaremos.
- Modelizamos tu investigación, utilizando Microsoft Excel para fortalecer tu investigación.
- Elaboremos un mapa mental sobre los conceptos de estadística para exponerlo en clases.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y FENÓMENOS SOCIALES

PRÁCTICA

Leemos el siguiente parrafo:

En nuestra unidad educativa, tendremos la elección del Gobierno Estudiantil, para lo cual lo primero que hicimos es socializar con todos los estudiantes la convocatoria, en la que se establecen los diferentes requisitos para ser parte de un gobierno estudiantil, también nos indica que podemos formar diferentes frentes que deben estar conformados por distintos estudiantes responsables de diferentes carteras.

Entonces varios de nuestros compañeros se unieron para formar sus frentes y participar de las elecciones, deben hacer campaña y dar a conocer sus distintas propuestas.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Después de las elecciones haremos el escrutinio, ¿utilizaremos estadística para esto?
- ¿En esta actividad se utiliza una muestra o la población? Explica por qué.
- Menciona tres actividades en las elecciones donde se utilice la estadística.
- ¿En qué otras actividades se pueden aplicar los conocimientos sobre estadística?

TEORÍA

Estadística

La enciclopedia británica define a la estadística como la ciencia encargada de recolectar, analizar, presentar e interpretar datos.

El diccionario inglés "Word Reference" define a la estadística como un área de la matemática aplicada, orientada a la recolección e interpretación de datos cuantitativos y al uso de la teoría de la probabilidad para calcular los parámetros de una población.

Fuente: Open, AI. (2024)

Dispersión

Las medidas de dispersión nos permitirán realizar un análisis más correcto.

1. Medidas de dispersión

A diferencia de las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión no son datos de la muestra, más bien, corresponden a parámetros estadísticos que indican que tan cerca o lejos, se encuentran los datos respecto de la media, por lo mismo siempre van a depender de ella. En general, las medidas de dispersión sirven como indicadores de la variabilidad de los datos.

Ejemplo:

En la unidad educativa se está analizando las notas de dos de los mejores estudiantes de la promoción para enviar la lista de bachiller destacado en el caso de los varones se enviará el nombre del estudiante cuyo buen rendimiento se haya mantenido por mayor tiempo, en los últimos años de secundaría. Para calcular el mejor promedio solo consideraron los promedios de los últimos cinco años.

Si solo uno debe ser elegido, ¿quién ganara la beca? Si las calificaciones son las siguientes:

Estudiante	1ro de sec.	2do de sec.	3ro de sec.	4to de sec.	5to de sec.
Ricardo	82	88	78	84	90
Mario	89	70	90	83	89

Observemos la siguiente representación en línea de las calificaciones de ellos:

Ricardo: 78; 84; 85; 86; 87

Mario: 70; 83; 88; 89; 90

$\Rightarrow \quad \overline{X} = 84$

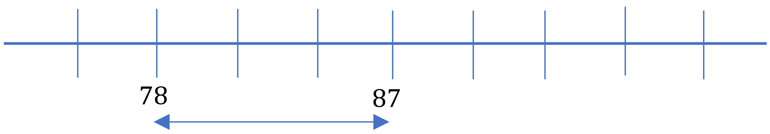
Las calificaciones de Ricardo, se encuentran más cercanas a la media aritmética que las notas de Mario. Es decir, las calificaciones de Mario se encuentran más dispersas.

Es suficiente este argumento para optar por Ricardo para ganar el primer lugar, como un estudiante que ha mantenido su buen rendimiento.

a) Rango

Determinamos el tamaño de cada intervalo en una tabla de frecuencias. Indica cuán dispersos se encuentran los datos entre los valores de los extremos.

Se calcula haciendo la resta del valor máximo y del valor mínimo de la distribución de los datos.



$R = 87 - 78 = 9$ Es la diferencia entre los valores extremos

Datos importantes

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

$X_{\text{máx}}$:

Valor máximo de la muestra

$X_{\text{mín}}$:

Valor mínimo de la muestra

b) Desviación media

La desviación media es la diferencia que hay entre los valores de la variable estadística con la media aritmética.
La desviación media para los datos sin agrupar y los datos agrupados.

$$D_{\overline{X}} = \frac{|x_1 - x| + |x_2 - x| + \cdots + |x_n - x|}{n}$$

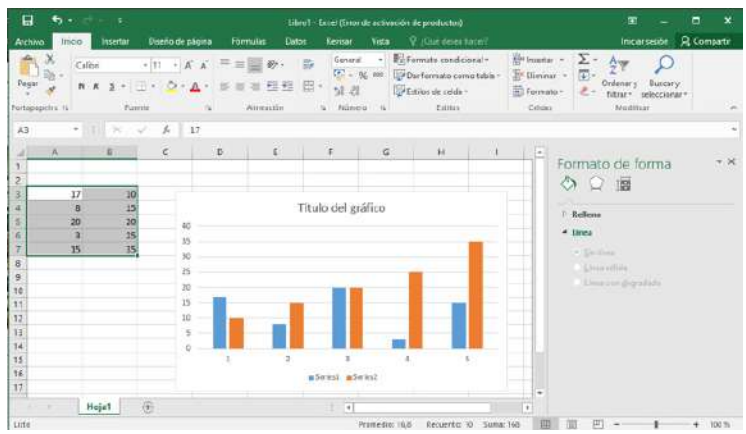
$$D_{\overline{X}} = \frac{|x_{mc1} - \overline{x}| \cdot f_1 + \cdots + |x_{mcn} - \overline{x}| \cdot f_n}{n}$$

De donde:

$$D_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - x|}{n}$$

ó

$$D_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_{mci} - \overline{x}| \cdot f_i}{n}$$



c) Varianza

Es la medida que nos permite identificar la diferencia cuadrada promedio entre cada uno de los valores respecto a un punto central (la media).

Hay una varianza para los datos sin agrupar y los datos agrupados.

$$V_{(x)} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} \; ; \quad V_{(x)} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

d) Desviación estándar o tipica

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza; es decir, la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las puntuaciones de desviación.

La desviación típica se representa por D_x ó σ.

Hay una desviación para los datos sin agrupar y los datos agrupados:

$$D_x = \sigma = \sqrt{V_{(x)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} \; ; \quad D_x = \sigma = \sqrt{V_{(x)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n}}$$

e) Coeficiente de variación

Para comparar las dispersiones de dos o más distribuciones se utiliza el coeficiente de variación ó de Pearson:

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|}$$

Si $CV \leq 15\ \%$, los datos son homogéneos, es decir tienen una baja variabilidad.

Si $CV > 15\ \%$, los datos son heterogéneos, es decir tienen una alta variabilidad.

Fuente: Open, AI. (2024)

Datos importantes

Tiempo	*Número de estudiantes*
10 – 20	7
20 – 30	15
30 – 40	19
40 – 50	9

Especialmente interesante en el análisis de datos financieros es el modelo autorregresivo.

Ejemplo:

Calculamos el rango, la desviación media, varianza y desviación estándar para los siguientes datos. $7, 9, 13, 17, 19$.

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}} = 19 - 7 = 12$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7 + 9 + 13 + 17 + 19}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$D_{\overline{X}} = \frac{|7-13| + |9-13| + |13-13| + |17-13| + |19-13|}{5}$$

$$= \frac{6 + 4 + 0 + 4 + 6}{5} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(7-13)^2 + (9-13)^2 + (13-13)^2 + (17-13)^2 + (19-13)^2}{5}$$

$$= \frac{36 + 16 + 0 + 16 + 36}{5} = 20.8 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = 20.8 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{20.8} \approx 4.6$$

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|} = \frac{4,6}{13} = 0.35 \qquad \Rightarrow \qquad CV = 0.35 \cdot 100 = 35\,\% > 15\,\%$$

Ejemplo:

De la siguiente tabla, correspondiente a la asignación de horas de trabajo en minutos, calcular las medidas de dispersión.

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}} = 50 - 10 = 40$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7 + 9 + 13 + 17 + 19}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$D_{\overline{X}} = \frac{|10-15| + |12-15| + |15-15| + |18-15| + |20-15|}{5} = \frac{5 + 3 + 0 + 3 + 5}{5} = 3.2$$

$$\sigma^2 = \frac{(10-15)^2 + (12-15)^2 + (15-15)^2 + (18-15)^2 + (20-15)^2}{5} = \frac{25 + 9 + 0 + 9 + 25}{5} = 13.6$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 = 13.6 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{13.6} \approx 3.7$$

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|} = \frac{3,7}{13} = 0.28 \qquad \Rightarrow \qquad CV = 0.28 \cdot 100 = 28\,\% > 15\,\%$$

2. Ajuste de curvas y regresión lineal

El objeto básico de la econometría consiste en especificar y estimar un modelo de relación entre las variables económicas relativas a una determinada cuestión conceptual. Por ejemplo, para conocer en profundidad el comportamiento del consumo privado agregado de un país, será preciso especificar y estimar un modelo de relación entre observaciones temporales de consumo privado y renta disponible. De modo similar, para analizar si la expansión monetaria en un país ha sido inflacionista, será preciso especificar y estimar un modelo de relación entre las tasas de inflación y las tasas de crecimiento históricas de algún agregado monetario

Actividad

1) El número de horas diarias de televisión que ven los estudiantes de 5to de secundaria es:

Horas	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6]$	
Nº de Est.	35	74	90	92	50	19	360

Calculamos las medidas de dispersión.

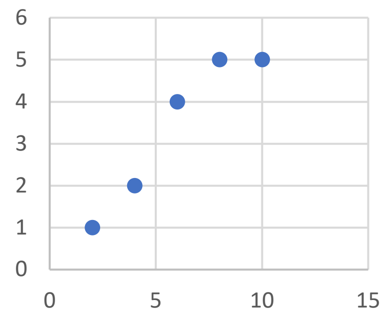
Una vez que hemos establecido la existencia de una relación estadística entre dos variables y determinando la intensidad de esta relación el siguiente paso es ver cómo pueden predecirse los valores de una variable en función de los de otra y que grado de precisión tendrá estas predicciones. A estas cuestiones atiende el término regresión, introducido por Sir Francis Galton al estudiar la relación entre la estatura de padres e hijos.

Se llama curva de regresión de una variable estadística “Y” sobre otra variable “X” a la curva que se obtiene representando las medidas condicionadas y_i en función de los valores x_i de la variable X. se tratará de una verdadera curva, si la variable X es continua, o de una sucesión de puntos sin la variable es discreta. Por ejemplo, si tenemos las medidas de tiempo de respuesta para las distintas longitudes de una lista son:

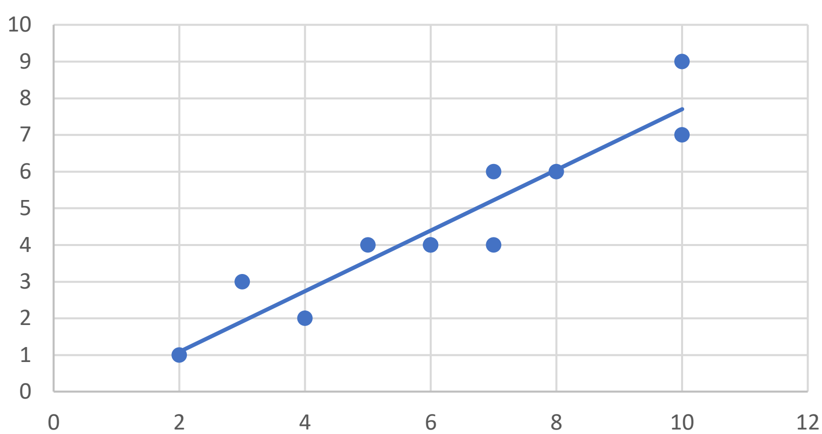
$$\overline{y_2} = 2.8 \quad \overline{y_3} = 3.25 \quad \overline{y_4} = 3.71 \quad \overline{y_5} = 4.4 \quad \overline{y_6} = 4.5 \quad \overline{y_7} = 4.83$$

La representación gráfica es:

De manera análoga se llama curva de regresión de “X” sobre “Y” a la curva obtenida presentado las medidas condicionadas x_i en función de los valores y_i en este caso la variable dependiente seria X y la independiente Y.



Teniendo la función lineal o ecuación de regresión, se pueden elaborar predicciones sobre ciertos valores de una variable. Recordar que las variables “x” son variables independientes y las variables “y” son las variables dependientes.



Análisis de regresión

Regresión lineal simple

Es usada para minimizar la distancia vertical entre todos los datos y nuestra línea, por lo tanto, para determinar la mejor línea, debemos minimizar la distancia entre todos los puntos y la distancia de nuestra línea.

Regresión curvilínea no lineal o curvilínea

Puede estimar modelos con relaciones arbitrarias entre las variables independientes y las dependientes. Esto se lleva a cabo usando algoritmos de estimación iterativos.

$$Y_I=\beta_o+\beta_1\ x_i+\beta_1\ x_i^2+\varepsilon_i \quad \text{para } i=1,2,\ldots,n$$

Regresión múltiple

Trata de ajustar modelos lineales o linealizables entre una variable dependiente y en más de una variable independiente. En este tipo de modelos es importante testar la heterocedasticidad, la multicolinealidad y la especificación.

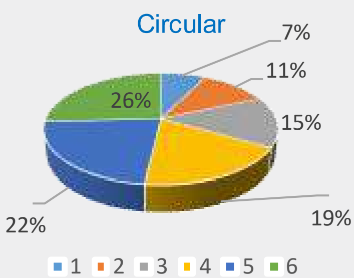
$$Y_I=\beta_o+\beta_1\ x_{1i}+\beta_2\ x_{i2}+\ldots+\beta_p\, x_{ip}+\varepsilon_i \quad \text{para } i=1,2,\ldots,n$$

Para fines convenientes, el estudio que realicemos en adelante será sobre variables independientes y regresión lineal simple, considerando que el razonamiento para regresiones múltiples es el mismo.

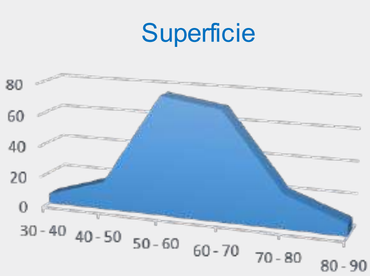
Fuente: Open, AI. (2024)

Ejemplo:
Representar gráficamente los resultados permite, de un único y rápido golpe de vista, hacerse una idea de la realidad a la que uno se enfrenta.

Personas	f_i	F_i
2	4	4
3	11	15
4	11	26
5	6	32
6	6	38
7	2	40
Total	40	



Intervalos	f_i
30 – 40	6
40 – 50	18
50 – 60	76
60 – 70	70
70 – 80	22
80 – 90	8



3. Representación gráfica e interpretación de la información

Para representar gráficamente los datos obtenidos, se procede así:

1. Ordenar los datos seleccionados, sea en filas o columnas. Este ordenamiento es conocido como cuadro estadístico.
2. La representación gráfica se realiza con puntos, líneas, figuras que faciliten la comparación de los mismos.

Para elaborar representaciones gráficas se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- El gráfico debe ser sencillo, generalmente son los más efectivos.
- El gráfico debe explicarse solo, es recomendable ser explícitos en los títulos, origen, escalas y cualquier clave explicativa.
- Las escalas y las unidades de medida deben ser claros.

Los gráficos estadísticos para los tipos de variables cualitativas o cuantitativas son:

a) Variables cualitativas

Diagrama de barras. se trazan barras sobre el eje horizontal de acuerdo a la marca de clase, estableciendo las alturas como indican las frecuencias absolutas.

Gráfico de sectores, se trazan divisiones al área de un círculo con sectores circulares, a través de ángulos que son proporcionales a las frecuencias absolutas.

Variables cuantitativas con datos no agrupados en intervalos

- **Diagrama de barras,** son iguales al gráfico de barras para datos cualitativos, solo que en lugar de barras se utilizan segmentos rectilíneos de altura igual a la frecuencia absoluta.
- **Polígono de frecuencias,** los valores de las variables y su frecuencia absoluta definen puntos en el plano cartesiano. Estos puntos se unen con segmentos para formar el polígono de frecuencias.
- **Gráfico de frecuencias acumuladas,** tiene la forma de escalera, es la representación gráfica de las frecuencias acumuladas para todo valor numérico.

Variables cuantitativas con datos agrupados en intervalos

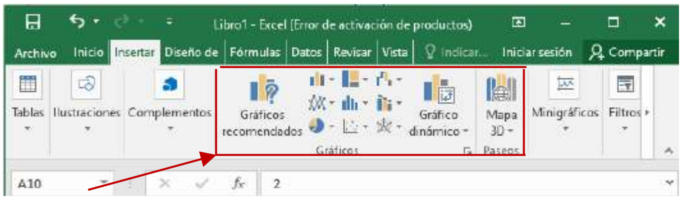
- **Histograma,** son similares al diagrama de barras, pero como los datos están agrupados en el eje horizontal, se levantan rectángulos sobre cada intervalo, de manera que su altura la define la frecuencia absoluta.
- **Polígono de frecuencias,** se determina la marca de clase de cada intervalo sobre el eje horizontal, con éstos y las frecuencias absolutas de cada intervalo se establecen puntos en el plano, los que se unen con segmentos para formar el polígono de frecuencias.
- **Gráfico de frecuencias acumuladas, t**iene la forma de polígono, es la representación gráfica de las frecuencias acumuladas para todo valor numérico, considerando que cada intervalo de clase supone que el número de observaciones se distribuye uniformemente.

4. Manejo de datos estadísticos en Excel

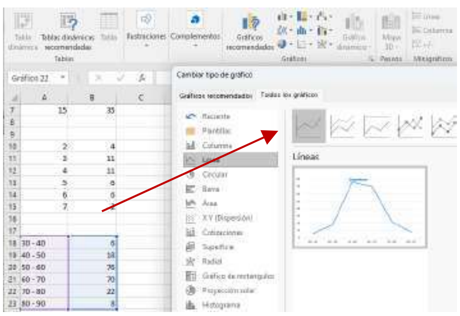
Microsoft Excel ofrece un conjunto de herramientas para el análisis de los datos (denominado herramientas para análisis) con el que se ahorran pasos en el desarrollo de análisis estadístico. Algunas herramientas generan gráficos además de tablas de resultados.

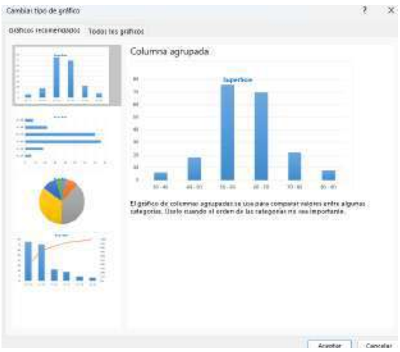
Pasos para crear un gráfico en Excel

1. Selecciona una celda cualquiera que le pertenezca al rango donde se encuentran los valores numéricos que se deben graficar.



2. Clicar en Insertar → Gráficos, seleccionar el tipo de gráfico que se desea insertar, se mostrará un menú donde permitirá seleccionar el gráfico deseado.





Excel permite seleccionar el tipo de gráfico adecuado al trabajo desarrollado, con las funciones editables del título y otros aspectos.

Microsoft Excel

Es una planilla de cálculo electrónico que permite manejar en la PC toda la información que habitualmente manejamos en una planilla con papel cuadriculado, lápiz y calculadora.

Excel maneja planillas de muchos tipos:

- *Pequeñas listas: una agenda telefónica, la lista de las compras, etc.*
- *Estadísticas*
- *Graficos*
- *Aplicaciones varias*

Fuente: Open, AI. (2024)

VALORACIÓN

Las medidas de dispersión son una herramienta importante para los negocios, pueden ayudar a los propietarios y gerentes a comprender cómo se distribuyen los datos de ventas o de clientes. Las medidas de dispersión pueden ayudar a identificar tendencias y patrones en los datos, lo que ayuda a tomar decisiones.

Si realizamos un levantamiento estadístico en nuestro colegio sobre los productos que consumen en el recreo los estudiantes de 5to de secundaria, podemos interpretar los resultados obtenidos de una manera clara y precisa, gracias a lo aprendido en estadística. Este proceso nos permitiría identificar patrones de consumo, preferencias y tendencias entre los estudiantes. Por ejemplo, podríamos descubrir que ciertos productos son más populares durante ciertas épocas del año o que las preferencias varían según el género o la edad de los estudiantes

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Realizamos un estudio estadístico sobre el peso y talla de los estudiantes de 5to de secundaria.
- Interpretamos la información obtenida a través de gráficos estadísticos.
- Para modelizar la investigación, utilizamos Microsoft Excel o GeoGebra.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

Progresiones

Sucesiones

Encuentra los 4 primeros términos de las sucesiones dadas:

1) $a_n = \frac{1}{n}$
2) $a_n = \frac{1}{n^2}$
3) $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+3}$
4) $a_n = (-1)^n n^2$
5) $b_n = (n-1)(n-2)$
6) $b_n = (-1)^{2n-1}\frac{n}{n+1}$
7) $b_n = 10-(0.1)^n$
8) $c_n = 1+\frac{1}{n^2}$

Sumatorias

Determinamos las sumas:

1) $\sum_{a=1}^{5}(2a-1)$
2) $\sum_{b=0}^{8}(b^2-1)$
3) $\sum_{a=3}^{8}\left(\frac{a}{2}-1\right)$
4) $\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{n}{3}-\frac{3}{n}\right)$
5) $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i$
6) $\sum_{a=1}^{7}-(a^{-1})$
7) $\sum_{a=5}^{8}(21)$
8) $\sum_{x=3}^{9}x(2x-1)$
9) $\sum_{a=1}^{n}a$
10) $\sum_{a=1}^{5}(a-1)(a-2)$

Progresiones aritméticas

Determinar el término que se indica en cada una de las progresiones aritméticas:

1) El 9no termino en: $\div\ 10.\ 21.\ 32.\ ...$
2) El 18vo termino en: $\div\ 1.\ \frac{5}{4}.\ \frac{3}{2}.\ ...$
3) El 18vo termino en: $\div\ -\frac{3}{4}.\ -\frac{1}{12}.\ \frac{7}{12}.\ \frac{5}{4}.\ ...$
4) El 10mo termino en: $\div\ -12.\ -8.\ -4.\ ...$
5) El 18vo termino en: $\div\ 3.\ \frac{13}{4}.\ \frac{7}{2}.\ ...$
6) El 7mo termino en: $\div\ 120.\ 108.\ 96.\ ...$
7) El 8vo termino en: $\div\ 0.5.\ 0.\ -0.5.\ ...$
8) El 18vo termino en: $\div\ -15.\ 1.\ 17.\ ...$
9) El 19no termino en: $\div\ 15.\ 11.5.\ 8.\ ...$
10) El 17mo termino en: $\div\ \frac{3}{4}.\ 0.875.\ 1.\ ...$

Considerando los elementos de la progresión aritmética, determinar el elemento que se pide:

11) El 1er término si el 13vo término es 67 y la diferencia es 5.
12) La diferencia si el primer término es 7 y el 10mo término es -11
13) El número de elementos de la progresión: $\div\ 120.\ 519.\ ....\ 3312$
14) La diferencia si el 2do término es $\frac{2}{3}$ y el 9no término es $-\frac{13}{12}$
15) El 15to término si el 4to es -4 y el 8vo es -16
16) El 1er término, si el 20vo es -62.5 y la diferencia es -2.5
17) El número de términos de la progresión: $\div\ \frac{1}{4}.\ \frac{3}{8}.\ ....\ \frac{11}{8}$
18) El 3er término si el 14to es $-\frac{19}{2}$ y la diferencia es $-\frac{2}{3}$

Determinar las sumas siguientes:

19) ¿Cuál es la suma de los primeros 10 términos de: $\div\ -4.\ 1.\ 6.\ ...$?
20) Determinar la suma de los primeros 9 términos de la progresión: $\div\ -5.\ ....\ 7.$
21) ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: $\div\ 120.\ 108.\ 96....$?
22) Determinar la suma de los 30 términos de: $\div\ -15.\ 0.\ 15.\ ...$
23) Determinar la suma de los 11 primeros términos de la progresión: $\div\ 31.\ 20.\ 9.\ ...$
24) Determinar la suma de los 17 primeros términos de: $\div\ -18.\ -12.\ -6.\ ...$
25) ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: $\div\ 1000.\ 988.\ ....\ -188$?
26) Determinar la suma de los términos en la progresión: $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n$
27) Encuentra la suma de los términos de la progresión: $\div\ 2.\ 4.\ 6.\ ....\ 2n$
28) ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: $\div\ 1.\ 3.\ 5.\ ....\ 2n-1$?

Progresiones geométricas

Determinar el término que se indica en cada una de las progresiones geométricas:

1) El 4to término de: $\div\div\ \frac{1}{3}: -1: 3: ...$
2) El 4to término de: $\div\div\ -\frac{1}{3}: -1: -3: ...$
3) El 6to término de: $-5,\ 10,\ -20,\ ...$
4) El 10mo término de: $\div\div\ \frac{3}{2}: \frac{15}{8}: \frac{75}{32}: ...$
5) El 10mo término de: $\div\div\ -9: -3: -1: ...$
6) El 8vo término de: $\div\div\ -8: 4: -2: ...$
7) El 9no término de: $\div\div\ 1: -m^3: m^6: ...$
8) El 10mo término de: $\div\div\ n^{-4}: n^{-2}: 1: ...$

Considerando los elementos de la progresión geométrica, determinar el elemento que se pide:

9) El 1er término, si la razón es $\frac{1}{3}$ y el 5to término es $\frac{1}{16}$
10) El 3er término, si su razón es -3 y el 7mo término es -256
11) La razón, si el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el 4to es $\frac{1}{135}$
12) La razón, si el 2do término es -8 y el 8vo término es $-\frac{729}{512}$

Determinar las sumas siguientes:

13) Siete términos de $\div\div\ -9: -3: -1: ...$
14) Once términos de $\div\div\ -5: -10: -20: ...$
15) Dieciocho términos de $\div\div\ -2: 4: -8: ...$
16) Quince términos de: $\div\div\ 1: -\sqrt{2}: 2: ...$
17) n términos de $\div\div\ \frac{1}{2}: \frac{1}{4}: \frac{1}{8}: ...$

Problemas de interpolación:

18) Interpola 4 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y 9
19) Interpola 3 medios geométricos entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{3}{5}$
20) Interpola 8 medios aritméticos entre 5 y 35
21) Interpola 4 medios geométricos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{7}$
22) Interpola 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$
23) Interpola 6 medios geométricos entre -64 y -1

Problemas:

24) En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
25) Determinar el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
26) Determinar la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sea 9 y -1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.
27) Determinar el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.

Combinatoria

Principio de la multiplicación

Encuentra el conjunto de permutaciones en cada caso:

1) Con las letras de la palabra TRAPECIO
2) Con las letras de la palabra MATERIA
3) Con las letras de la palabra SUCRE
4) Al ordenar diez estudiantes de una columna en el curso.

Resolvamos:

5) Un equipo de fútbol tiene a su arquero y delantero inamovibles en cancha. ¿De qué maneras se pueden acomodar al resto de los jugadores?

6) Cuando la maestra de matemática, en la fila delantera del curso con seis estudiantes, quiere reordenar a los estudiantes y no puede separar a dos que son hermanos, ¿cuántas maneras de ordenar a los seis estudiantes hay?

Factorial de un número

Resolver:

1) $\frac{4!}{5!}\cdot\frac{3!}{6!}$
2) $\frac{3!5!7!}{2!4!6!}$
3) $\frac{10!11!12!}{13!9!8!}$
4) $\frac{12!14!}{10!9!8!7!}$
5) $\frac{11!+10!}{10!}-(5!-40)$

Determinar el valor de x:

6) $\frac{x!}{(x-1)!}=0$
7) $\frac{2x!}{(x-1)!}=4$
8) $\frac{12(x-2)!}{x!}=1$
9) $\frac{(x-3)!(x-1)!}{(x-4)!(x-2)!}=x^2$

Permutaciones

Permutaciones sin repetición:

1) ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra ESTADISTICA?

2) ¿Cuántos números de 4 cifras podemos escribir con los dígitos 1,2,3,4,5 sin que ninguno se repita?

3) Seis amigos van al cine y compran 6 entradas con asientos consecutivos. ¿De cuantas formas diferentes pueden sentarse sin que ninguna se repita?

Permutaciones con repetición

4) ¿Cuántos números distintos se pueden formar con los dígitos 5 1 2 4 5 3 1?

5) ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con la palabra MICAELA? ¿Cuántas empezaron por la letra A?

6) Un equipo de Voley juega 12 partidos en una temporada ¿Cuántas maneras hay de que el equipo, obtenga 7 victorias, 3 empates y 2 derrotas?

Variaciones y combinaciones

Variaciones sin repetición

1) ¿De cuántas maneras pueden alinear 15 personas en una fila?
2) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos decimales primos sin repetir ninguno de ellos?

3) En un campeonato de fútbol han quedado 4 finalistas que se disputarán el oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas distintas se los puede formar el podio?

4) ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir tres juguetes distintos entre cuatro niños, de manera que ningún niño tenga más de un juguete?

Variaciones con repetición

5) ¿Cuántos números de 6 dígitos se pueden formar con las cifras $0,1,2,3,4,5,6,7$ permitiendo repeticiones?

6) En un curso de 30 estudiantes celebran el cumpleaños de todos en sus fechas correspondientes. ¿Cuántas distribuciones de fechas de cumpleaños pueden darse al año?

7) En un polideportivo se puede ingresar o salir por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede ingresar y salir una persona?

8) Las placas de automóviles están formadas por 3 dígitos numéricos seguidos de tres consonantes, ¿cuántas placas se pueden formar?

Combinaciones sin repetición

9) Un estudiante tiene la opción de elegir 8 preguntas del examen de las 15. ¿De cuántas maneras puede elegirlas?

10) Quieres comprar en una tienda de videos algunas temporadas de Los Simpson, de 21 temporadas solo te alcanza para comprar 12, ¿de cuántas formas puedes ordenar tu compra?

11) En un curso de 30 estudiantes se quiere elegir a 3 representantes de curso. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar a los representantes de curso?

12) En una reunión de 40 profesores todos se saludaron dándose la mano. ¿Cuántos estrechamientos de manos hubo?

Combinaciones con repetición

13) Si tenemos 50 marcadores y los queremos guardar en 4 recipientes. ¿De cuántas formas distintas lo podemos hacer?

14) En una pastelería ofrecen 5 ingredientes diferentes para elaborar sus tortas. Si en la pastelería te da la opción de elegir 2 ingredientes para tu torta. ¿Cuántas tortas diferentes te pueden elaborar?

15) Se arrojan 3 monedas simultáneamente, ¿cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener?

Binomio de Newton

Desarrollar el binomio:

1) $(3x-y)^6$

2) $(2a+1)^7$

3) $(3+4y)^7$

4) $\left(\frac{x}{2}+1\right)^5$

5) $(\sqrt{a}-2)^9$

Determinar el término indicado en cada caso:

6) Término central en $(-2t^2+5b^2c)^6$
7) Séptimo término en $(4x-y^2)^9$
8) Octavo término en $(x^2y^3-2z^4)^9$
9) Tercer término en Término central en

$$\left(x-\frac{5}{3}y^4\right)^7$$

Estadística descriptiva

Tablas de frecuencia

1) Identifica las variables cualitativas y cuantitativas, según corresponda, de la siguiente tabla:

Característica	Variable (Cualitativa / Cuantitativa)	Valores
Fecha de nacimiento		16 de junio ,…
Número de goles marcados por tu equipo favorito		$25,\ 31,\ 33, \dots$
Precio de un celular		Bs 850, Bs 1000, Bs $1250, \dots$
Color de calzados de los profesores		Negro, guindo, café, …
Númerod e acciones vendidas en la bolsa de valores internacional		$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \dots$
Temperatura registrada cada hora en un observatorio del Estado Plurinacional		$0\,°C, 5\,°C, 12\,°C, 24\,°C, 33\,°C, \dots$
Artistas preferidos en el colegio		Bonny Lovy, Shakira, …

2) Se lanza un dado de seis caras y Rodrigo anota los siguientes resultados de la forma: 2, 4, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1, 4, 5, 1, 4, 6, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 2, 1, 6, 6, 4, 3, 2, 1, 6, 5, 1. Clasifica el carácter y realiza una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

3) En el aeropuerto uno de los empleados observa que los visitantes hablan los siguientes idiomas y los anota así:

Francés, Inglés, Inglés, Español, Inglés, Español, Inglés, Español, Español, Alemán, Inglés, Francés, Ruso, Alemán, Alemán, Ruso, Alemán, Ruso, Inglés, Alemán, Español, Inglés, Inglés, Alemán, Alemán, Ruso, Español, Ruso, Ruso, Francés, Ruso, Español, Ruso, Inglés, Francés.

Construye la tabla de frecuencias relativas, acumuladas e interpretar porcentajes.

4) Las calificaciones en un examen de Física de un grupo de 38 estudiantes es el siguiente:

24 5 11 13 21 22 45 35 39 26 22 11 41 41 33 33 30 35 45 42 13 12 39 45 25 25 20 30 41 42 40 38 20 25 35 40 39 30. Escribe la distribución de frecuencias apropiada para interpretar los porcentajes. ¿Qué porcentaje de aprobados y reprobados existe, sabiendo que la nota de aprobación es 23 ?

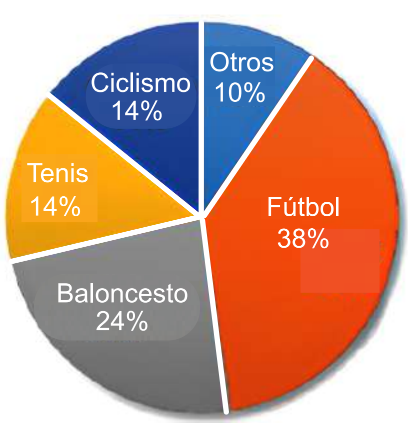
Gráficos estadísticos

5) Representa en un histograma, un gráfico de sectores y construir la tabla de frecuencias, con los pesos extraídos de una muestra de 20 personas:

45, 63, 69, 59, 59, 71, 47, 59, 69, 68,
44, 66, 69, 69, 78, 71, 75, 72, 57, 69

6) El diagrama de sectores sobre gustos por el deporte, es realizado gracias a una encuesta a 3500 personas. Realiza una tabla de frecuencias que organice los resultados:

Deporte favorito



Medidas de tendencia central

7) Un inversor compra 4000 acciones en 5 sesiones diferentes en la bolsa. El precio de compra en cada sesión se adjunta en la siguiente tabla:

Precio	N° de acciones
9	500
8.7	1100
8.4	500
8	1000
7.8	900

Calcula el precio de compra medio, la mediana y la moda.

8) Calcula la media aritmética de la tabla:

xi	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	8	12	14	6

Estadística aplicada

9) Sea la variable bidimensional dada por la tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5	6	8	11	1	13	14	14	17

a) Elabora la tabla de doble entrada
b) Representa la nube de puntos
c) Establece su dependencia Lineal

10) A lo largo de un día se han medido la tensión y el pulso cardiaco de una persona, tratando de decidir si ambas variables tienen alguna relación y los datos obtenidos son:

Nivel mínimo de tensión	6	5	9	4	10	8	6	9
N° de pulsaciones por minuto	60	55	80	40	95	75	55	90

a) Elabora la tabla de frecuencias
b) Dibuja la nube de puntos
c) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación
d) Si la correlación es fuerte, estima las pulsaciones que tendrá la persona cuando su nivel mínimo de tensión sea 15.

11) La siguiente tabla muestra los valores de una variable bidimensional.

x	0.35	1.32	1.24	0.17	– 0.12
y	0.33	0.63	1.55	0.46	0.21

a) Calcula la covarianza
b) Calcula el coeficiente de correlación

(Ejercicios y problemas recopilados)

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

PRÁCTICA

La localidad de Tiahuanaco, es uno de los lugares de mayor fascinación científica en todo el mundo.

Una de sus construcciones más destacadas es "La Puerta del Sol". Algunas teorías sugieren que podría haberse utilizado como un calendario astronómico, entre otras funciones.

El 21 de junio se celebra el año Nuevo Andino Amazónico y del Chaco, además miles de personas se reúnen en esta localidad para festejar esta fiesta ancestral. Lo impresionante es que, en ese día, la salida del sol se alinea perfectamente con "La Puerta del Sol", un fenómeno que solo ocurre en esa fecha debido al ángulo específico de proyección del sol.

Fuente: https://antipode-bolivia.com/en-photo-tiwanaku

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué otro día no se produce este efecto?
- En los meses de junio y julio, a las $06{:}00$ a.m. todavía está oscuro, mientras que a la misma hora en diciembre el sol ya ha salido. ¿Podríamos explicar la razón de este fenómeno?

TEORÍA

Hiparco de Nicea

Fuente: Open, AI. (2024)

Sabías que la trigonometría comienza con los babilonios y egipcios. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. En Grecia, en el siglo II a. C. el astrónomo Hiparco de Nicea, fue quien dio grandes aportes esta área calculando la posición de las estrellas.

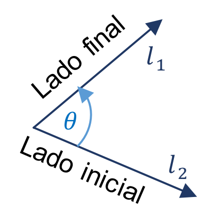
1. La trigonometría

La trigonometría estudia la relación que existen entre los ángulos y lados de un triángulo, utilizando razones trigonométricas. La palabra "trigonometría" significa "medición de triángulos". Deriva de palabras griegas: trigōnos = triángulo y metron = medida.

2. Ángulo trigonométrico y medida angular

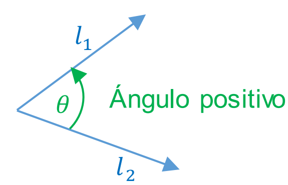
Un ángulo es la abertura formada por dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen.

Para medir un ángulo, se necesita una unidad especial de medida; por lo tanto, es necesario establecer estas unidades.

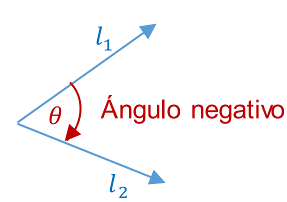


a) Ángulo trigonométrico

Un ángulo trigonométrico es aquel que se genera por la rotación de un rayo alrededor de su origen: desde una posición inicial hasta una posición final.



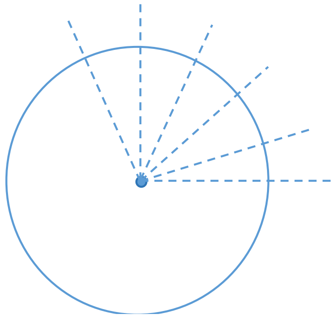
Los ángulos pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido que son medidos.



Un ángulo es positivo si se mide de forma anti horario, es negativo si se mide en sentido horario, es decir igual al movimiento de las agujas del reloj.

b) Medida angular

Una medida angular se basa en el arco de un círculo. La división del círculo genera arcos que sirven como base para la medida angular.



3. Sistemas de medición de ángulos

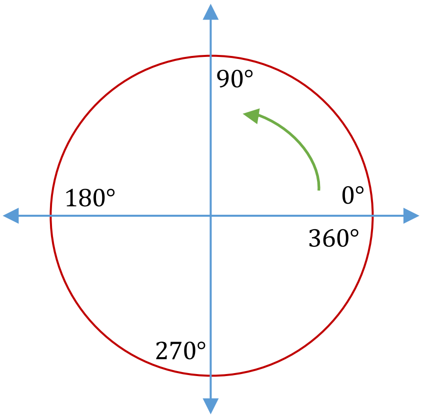
Existen varios sistemas de medición angular, los más importantes son:

- Sistema sexagesimal
- Sistema circular o radiánico

a) Sistema sexagesimal

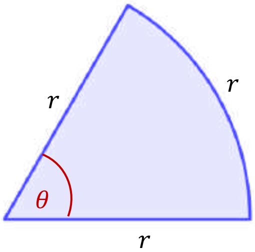
Surge de dividir una circunferencia en 360 partes, cada una de las cuales genera un grado sexagesimal. Cada grado se puede dividir en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

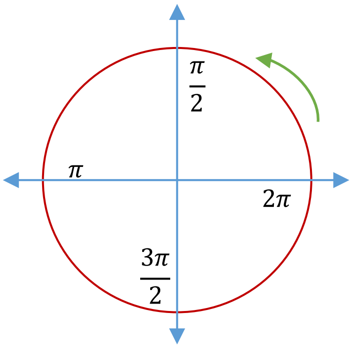
1 vuelta $=360°$
$1°=60'$
$1'=60''$



b) Sistema circular (radiánico)

Cuando el arco y el radio de una circunferencia son iguales se genera un radián; a diferencia del sistema sexagesimal la única referencia que tenemos es que una vuela tiene 2π rad.





1 vuelta $=2\pi$ rad
θ es un radián

Eratóstenes

Fuente: Open, AI. (2024)

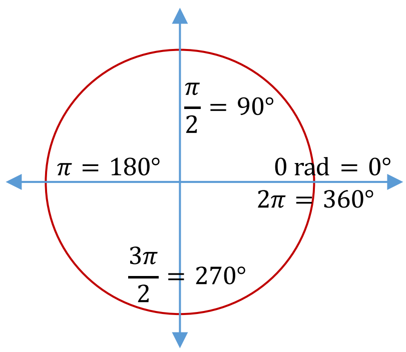
Eratóstenes con su conocimiento de trigonometría midió el tamaño de la Tierra a partir de su curvatura. El astrónomo calculó por primera vez el radio de nuestro planeta hace 23 siglos.

Fuente: Open, AI. (2024)

Eratóstenes midiendo la circunferencia de la Tierra, destacando el uso de la trigonometría y el sol para calcular el tamaño del planeta. La imagen capta el espíritu de su descubrimiento y la grandeza de su logro.

Fuente: Open, AI. (2024)

Uno de los instrumentos que nos ayudan a medir ángulos es el transportador.



4. Conversión entre sistemas angulares

Para la conversión de un sistema a otro, utilizaremos las siguientes equivalencias entre sistemas:

Según la gráfica se observa que 2π rad $= 360°$ y también que π rad $= 180°$; para facilitar los cálculos utilizaremos la última equivalencia.

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

Ejemplo:

Para transformar $150°$ a rad utilizamos la anterior equivalencia:

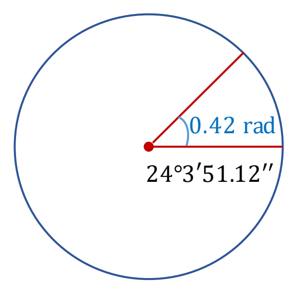
$$150° \quad \longrightarrow \quad 150° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

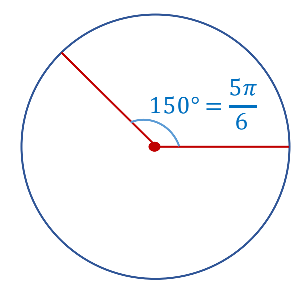
Ejemplo:

Para transformar 0.42 rad a "°" procedemos de la misma forma que el anterior.

$$0.42 \text{ rad} \quad \longrightarrow \quad 0.42 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} \approx 24.0642$$

$$\approx 24°3'51.12''$$





Ejemplo:

Encuentre la medida exacta del ángulo en grados:

$$\text{a) } \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \qquad \text{b) } \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \qquad \text{c) } \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{a) } \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot (1 \text{ rad}) = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{360°}{3} = 120° \qquad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120°$$

$$\text{b) } \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \cdot (1 \text{ rad}) = \frac{3\pi}{4} \cdot \left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{540°}{4} = 135° \qquad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135°$$

$$\text{c) } \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot (1 \text{ rad}) = \frac{11\pi}{6} \cdot \left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \frac{1980^o}{6} = 330° \qquad \Rightarrow \quad \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = 330°$$

Actividad

– **Transformamos al sistema sexagesimal los siguientes ángulos:**

1) $\frac{2}{3}\pi$ rad **3)** $\frac{3}{4}\pi$ rad **5)** $\frac{7}{8}\pi$ rad **7)** $\frac{11}{12}\pi$ rad

2) 3π rad **4)** 0.12π rad **6)** 4.12π rad **8)** 5.07π rad

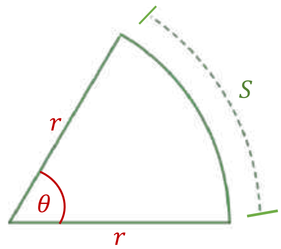
– **Transformamos al sistema radial los siguientes ángulos:**

9) $120°$ **11)** $36°$ **13)** $330°$ **15)** $400°$

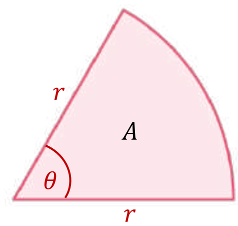
10) $246.26°$ **12)** $176.59°$ **14)** $32°21'32''$ **16)** $153°40'$

5. Longitud de arco y área de un sector circular

El arco y área de cierto sector circular puede ser calculado utilizando las siguientes ecuaciones. El ángulo siempre estará en radianes.



$$S = \theta \cdot r$$



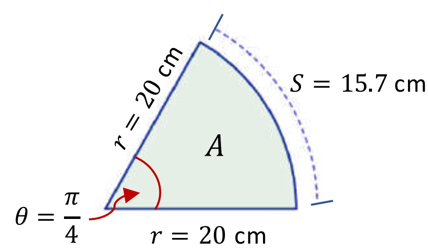
$$A = \frac{\theta \cdot r^2}{2}$$

Ejemplo:

Calculamos la longitud de un arco y área que es generando por un ángulo de $45°$ y tiene una radio de 20 cm.

Notar que $45°$ debe estar en radianes. Convirtiendo tenemos que $45° = \frac{\pi}{4}$rad finalmente tenemos

$$\begin{aligned} S &= \theta \cdot r \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 20 \text{ cm} \\ &= 5\pi \text{ cm} \\ S &= 15.7 \text{ cm} \end{aligned}$$

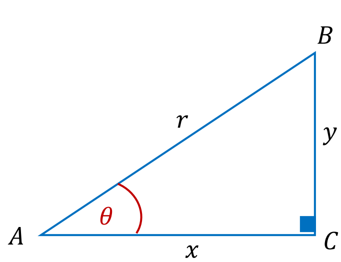


$$A = \frac{\theta \cdot r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ cm})^2}{2} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 400 \text{ cm}^2}{2} = \frac{100\pi \text{ cm}^2}{2} = 50\pi \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad A = 157.079 \text{ cm}^2$$

6. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas relacionan los ángulos y lados de un triángulo. Consideremos un triángulo rectángulo con las siguientes características:



$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

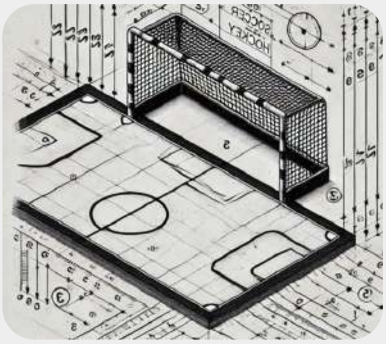
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotan}\,\theta = \frac{x}{y}$$

En el triángulo ΔABC la relación de sus lados se expresa como $r^2 = x^2 + y^2$, de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Concluyendo, las razones trigonométricas son $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$; y las razones inversas son $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$ y $\text{cotan}\theta$.

Ángulos en la realidad

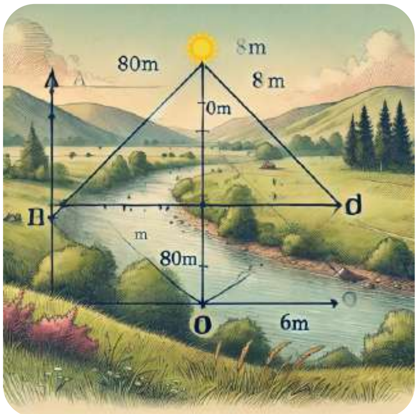
Fuente: Open, AI. (2024)

La caza con arco y flecha fue una de las actividades que sirvió como supervivencia para la humanidad hoy todavía son utilizados en las zonas de los llanos de nuestro país, es una herramienta fundamental para la supervivencia de algunas comunidades indígenas.



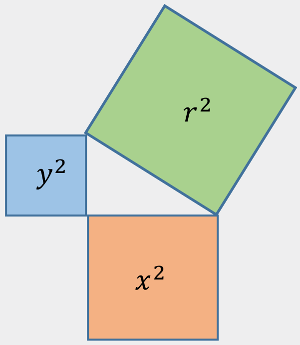
Fuente: Open, AI. (2024)

En el futsal o futbol sala, el arquero tiene un área de gol, que tiene forma circular.



Fuente: Open, AI. (2024)

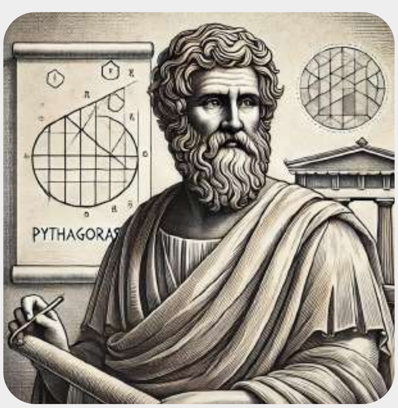
Teorema



$$r^2 = x^2 + y^2$$

El teorema de Pitágoras señala que el cuadrado construido con la hipotenusa del triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados construidos con cada uno de los catetos.

Pitágoras



Fuente: Open, AI. (2024)

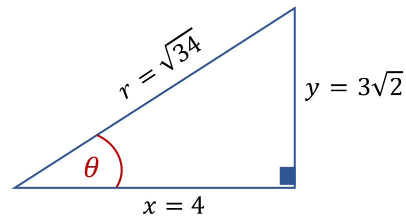
Pitágoras fue un filósofo y matemático griego, se cree que la escuela donde fue maestro descubrió el Teorema de Pitágoras. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría y la aritmética.

Ejemplo:

Hallar las razones trigonométricas conociendo $x=4$; $y=3\sqrt{2}$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ &= 4^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 16+18 \\ &= 34 \\ r &= \sqrt{34} \end{aligned}$$



Finalmente, las razones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{34}} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

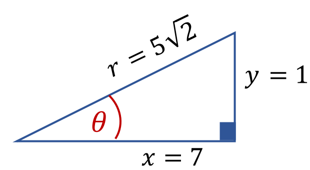
$$\tan\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{34}}{3\sqrt{2}}$$

Ejemplo:

Hallar las razones trigonométricas conociendo que $x = 7;\ r = 5\sqrt{2}$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} r^2 = x^2+y^2 \ \Rightarrow\ \left(5\sqrt{2}\right)^2 &= 7^2+y^2 \\ 50 &= 49+y^2 \\ 50-49 &= y^2 \\ y^2 = 1 \quad &\Rightarrow\ y = 1 \end{aligned}$$



Finalmente, las razones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{7}{1} = 7$$

$$\cos\theta = \frac{7}{5\sqrt{2}} \qquad \sec\theta = \frac{5\sqrt{2}}{7}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{7} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5\sqrt{2}}{1} = 5\sqrt{2}$$

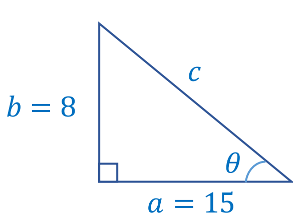
Ejemplo:

Encontrar las seis razones trigonométricas del menor ángulo θ de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 8 y 15 unidades.

En el triángulo rectángulo los catetos son $a = 15,\ b = 8$ y por Teorema de Pitágoras se calcula la hipotenusa

$$c^2 = a^2 + b^2 \ \Rightarrow\ c = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{255 + 64} = \sqrt{289} = 17 \quad \Rightarrow \quad c = 17$$



Las razones trigonométricas en el triángulo son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{17} \qquad \tan\theta = \frac{8}{15} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{17}{8}$$

$$\cos\theta = \frac{15}{17} \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{15}{8} \qquad \sec\theta = \frac{17}{15}$$

7. Ángulos notables

Son ángulos que constantemente se repiten en el estudio de la trigonometría, los más importantes son:

Grados	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

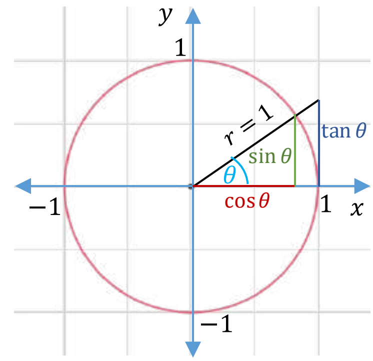
Ejemplo:

Simplificar:
$$M=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Reemplazando valores se tiene:
$$M=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

8. Círculo trigonométrico y líneas trigonométricas

El circulo trigonométrico es un círculo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano y su radio mide uno. En el círculo trigonométrico se observa las líneas de funciones trigonométricas.



Actividad

Simplificamos utilizando los ángulos notables:

1) $M=\frac{\text{sen}\,45°+\cos 45°}{\tan 45°}$

2) $R=\frac{\text{sen}^2\,30°+\cos^2 30°}{\text{cotan}^2\,60°}$

3) $A=\frac{\sec 45°+\cos 30°}{\text{sen}\,45°}$

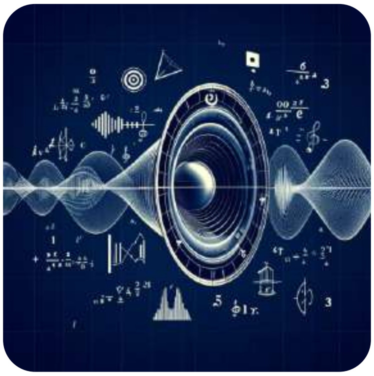
4) $E=2\,\text{sen}\,30^o+\sec^2 45^o+\tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)$

VALORACIÓN

La trigonometría se aplica en muchas áreas como la física, astronomía, telecomunicaciones, navegación, ingeniería, cartografía y música, porque permite calcular distancias de forma precisa sin necesidad de medirlas directamente. Algunas aplicaciones son:

- El ritmo cardiaco es una mezcla de variaciones de las funciones trigonométricas con ciertas variaciones.
- Determinamos la distancia entre dos puntos coordenados, aunque uno o ambos no se puedan alcanzar directamente.

Analiza qué situaciones más, de la vida diaria, se pueden interpretar con ángulos y funciones trigonométricas.



Fuente: Open, AI. (2024)

Las frecuencias del sonido son estudiadas con la trigonometría.

PRODUCCIÓN

Construcción de medidor de ángulos:

- Con la ayuda de nuestro maestro construimos un teodolito casero o astrolabio. Los materiales necesarios son: Cartón, bombilla o sorbete, hilo, cinta adhesiva, pegamento y objeto pesado.
- Una vez que tengamos el astrolabio, medimos los ángulos de distintas alturas de nuestra comunidad: edificios, árboles, montañas entre otros.
- Medimos el ángulo que genera la altura de cierto objeto. ¿Qué pasa con el ángulo si nos alejamos o acercamos?

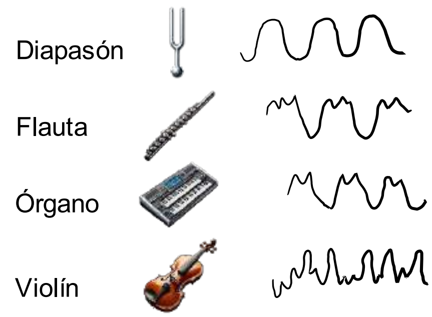
TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

PRÁCTICA

Los sonidos, en su propagación, describen ondas desde muy simples hasta otras combinaciones más complejas. Éstas pueden ser estudiadas como funciones trigonométricas, que han sufrido distintas variaciones.

Es así que los sonidos de instrumentos musicales producen sonidos diferentes, por ejemplo, el sonido de un violín comparado con el de una flauta.

Los ingenieros de sonido, deben analizar los diferentes sonidos y ecualizar los mismos para que el sonido en un ambiente determinado sea lo más agradable posible.



Actividad

¿En qué profesiones crees que también se debe estudiar las funciones trigonométricas?

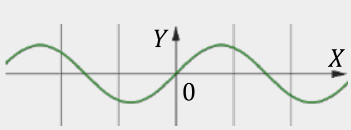
Todas las situaciones que se repiten (cíclicas o periódicas) se pueden interpretar con funciones trigonométricas. Menciona 3 situaciones en las que se presente lo repetitivo o cíclico.

TEORÍA

Aryabhatta

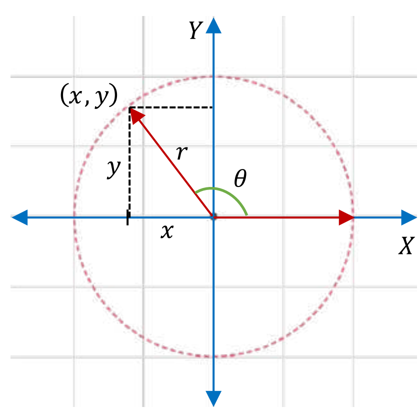
Fuente: Open, AI. (2024)

Astrónomo y matemático indio, estudió el concepto de «seno» con el nombre sánscrito de ardhá-jya. El término "seno" proviene del latín "sinus", que significa "curva" o "bahía". Los matemáticos árabes adoptaron esta función y la introdujeron en Europa durante la Edad Media.



1. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Consideremos $P(x, y)$ un punto del plano cartesiano y forma un ángulo θ con el eje "X", se tiene las funciones trigonométricas: (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente).



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{x}{y}$$

En la gráfica se debe considerar:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ejemplo:

Calcular las seis funciones trigonométricas sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$

Notemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$, de ahí tenemos $y = -3,\ r = 5$. Para hallar "x" aplicamos el teorema de Pitágoras:

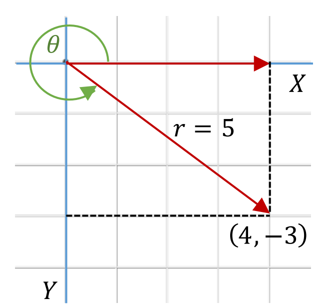
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$5^2 = x^2 + (-3)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16}$$
$$\Rightarrow x = 4$$

Las funciones serán:

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5} \qquad \operatorname{cotan}\theta = -\frac{4}{3}$$

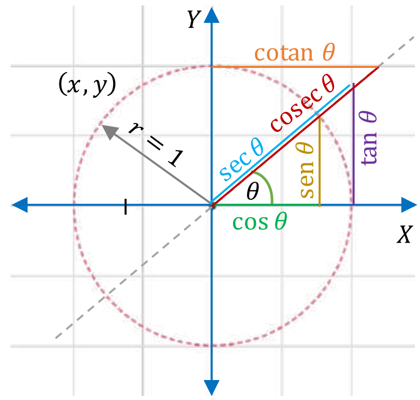
$$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = -\frac{3}{4} \qquad \operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{3}$$



a) Líneas trigonométricas en el plano cartesiano

Si consideramos una circunferencia con $r = 1$, entonces se obtiene la circunferencia goniométrica, que nos muestra inmediatamente el valor de las razones trigonométricas y su representación gráfica como se explica a continuación para un ángulo del primer cuadrante.



Note que con $r = 1$:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = y$$

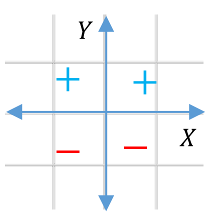
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = x$$

Luego un par ordenado $(x, y) = (\cos x, \operatorname{sen} y)$

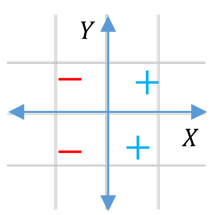
b) Signos de las funciones trigonométricas

La siguiente tabla indica los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante.

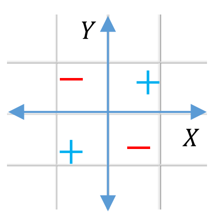
Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
$\operatorname{sen} x$ $\operatorname{cosec} x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$ $\sec x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan x$ $\operatorname{cotan} x$	$+$	$-$	$+$	$-$



sen θ y cosec θ



cos θ y sec θ



tan θ y cotan θ

El canadarm 2

Fuente: Open, AI. (2024)

Es un brazo manipulador robótico, ubicado en la Estación Espacial Internacional, está operando a través del control de ángulos en sus articulaciones.

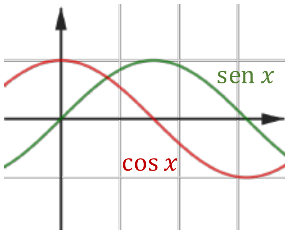
Al calcular las posiciones del brazo en los movimientos que se realizan, se aplica la trigonometría.

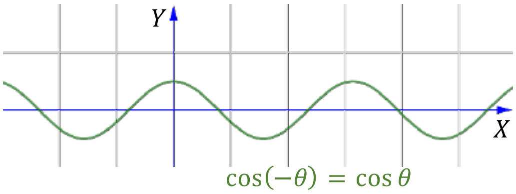
2. Funciones trigonométricas pares e impares

Una función es par si: $f(x) = f(-x)$

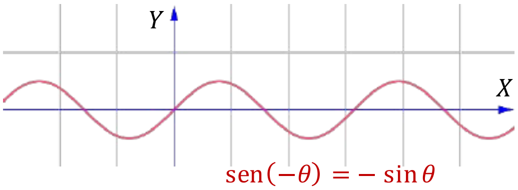
Una función es impar si: $f(x) = -f(x)$

Funciones Pares	Funciones Impares
	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\operatorname{cotan}(-\theta) = -\operatorname{cotan}\theta$





$\cos(-\theta) = \cos\theta$



$\operatorname{sen}(-\theta) = -\sin\theta$

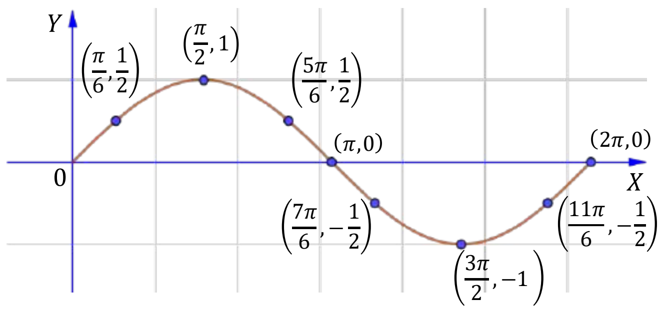
La gráfica de una función par presenta simetría respecto del eje de las ordenadas y una función impar presenta simetría rotacional (rotación de 180 grados).

3. Gráficas funciones trigonométricas y sus aplicaciones

a) Gráfica de sen x

Iniciemos construyendo la gráfica de $\operatorname{sen} x$. Realizamos la tabla de valores para $y = \operatorname{sen} x$, donde los valores de x están determinados por: $0 \leq x \leq 2\pi$, comenzando en el origen.

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=sen x	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	– 0.5	– 0.87	– 1	– 0.87	– 0.5	0



El dominio es el conjunto de todos los números reales.

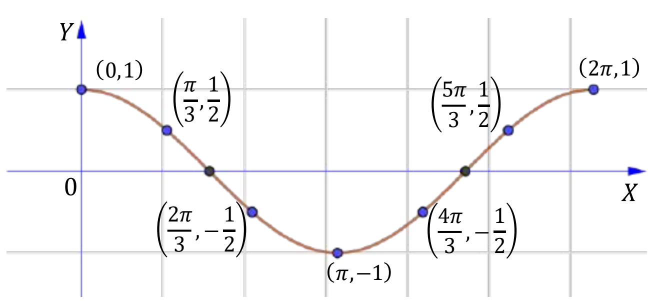
El rango consiste en todos los números reales desde -1 hasta 1.

La función seno es una función impar.

La función seno es periódica, con periodo 2π.

b) Gráfica de cos x

Realizamos la tabla de valores para $y = \cos x$, donde x están determinados por: $0 \leq x \leq 2\pi$, comenzando en el origen.



El dominio es toda la recta real (sobre el eje "X").

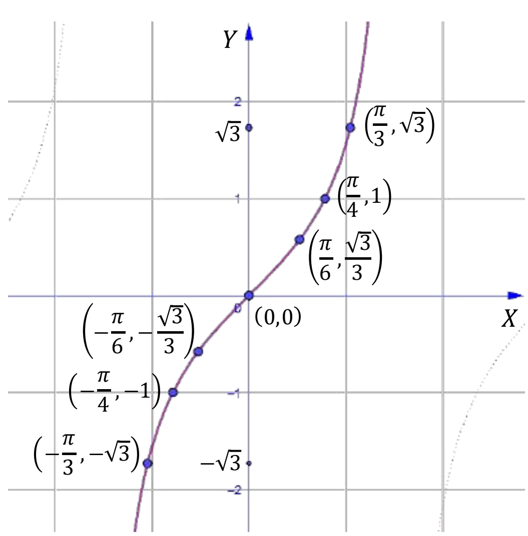
El rango consiste en todos los números reales desde -1 hasta 1.

La función coseno es una función par.

La función coseno es periódica, con periodo 2π.

c) Gráfica de tan x

Elaboramos la tabla de valores para $y=\tan x$, donde x están determinados por: $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$



El dominio es toda la recta real que está sobre el eje "X", excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

El rango es el conjunto en todos los números reales.

La función tangente es una función impar.

La función tangente es periódica, con periodo π.

d) Características de estas funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas, en general, tienen las siguientes partes:

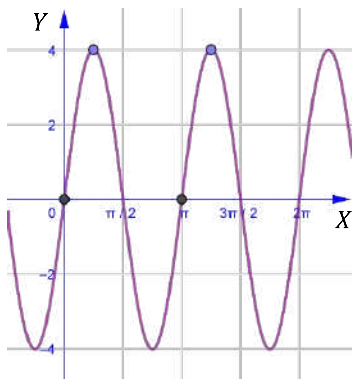
$$y = A\ \mathrm{sen}(Bx+C)+D$$

Cada uno de estos elementos produce una determinada variación, veamos:
La **amplitud** A, ajusta la amplitud (lo alto de las ondas).
B: Controla la frecuencia (qué tan juntas están las ondas).

El **periodo** $\frac{2\pi}{B}$, esto significa que, cuanto mayor es el valor de B, más rápido se repiten los ciclos de la onda, por lo tanto, el período es más corto.

El **desfase** C, desplaza la gráfica horizontalmente (hacia la izquierda o derecha).

El **desplazamiento** D, desplaza la gráfica verticalmente (hacia arriba o abajo).



Ejemplo:

Graficar $y = 4\ \mathrm{sen}(2x)$ comparando con $y = A\ \mathrm{sen}(Bx+C)+D$

De la gráfica podemos deducir:

- La amplitud $A = 4$. La altura desde la línea central hasta el pico es 4.
- El periodo es $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, es decir cada π se repite la gráfica.
- No se desfasa, pues $C = 0$.
- No se desplaza, pues $D = 0$.

4. Problemas de trigonometría aplicados al contexto y la tecnología

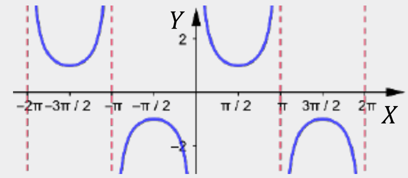
Los modelos trigonométricos se pueden utilizar para una variedad de aplicaciones, son un instrumento poderoso que puede utilizarse para modelar una variedad de fenómenos. Son precisos, versátiles y fáciles de utilizar. Las áreas donde se utilizan son:

- Predicción de fenómenos naturales.
- Control de sistemas.
- Visualización de datos.

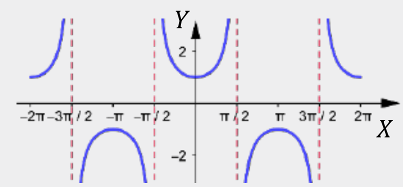
Funciones inversas

Gráficas de las funciones trigonométricas inversas

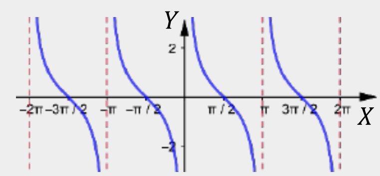
Función cosecante $\mathrm{cosec}\ x$



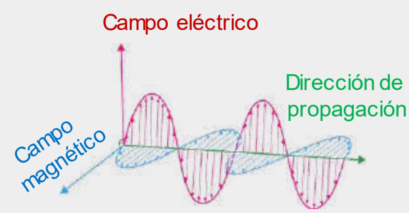
Función secante $\sec x$



Función cotangente $\mathrm{cotan}\ x$



Ondas electromagnéticas



Actividad

1) Ubiquemos en el plano los siguientes puntos y hallemos el valor de r:
$(3, 4)$; $(-1, 5)$; $(3, -3\sqrt{3})$; $(-7, -1)$

2) Establecemos el cuadrante en que termina cada ángulo y el signo del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos: $45°,\ 135°,\ 255°,\ 721°,\ 1000°,\ -60°$.

3) Graficamos y establecemos el cuadrante que termina β si:

a) $\mathrm{sen}\ \beta$ y $\cos\ \beta$ son positivos
b) $\cos \beta$ y $\tan \beta$ son positivos
c) $\mathrm{sen}\ \beta$ y $\sec \beta$ son positivos
d) $\cos \beta$ y $\mathrm{cotan}\ \beta$ son positivos
e) $\tan \beta$ es positiva y $\sec \beta$ es negativa
f) $\tan \beta$ es negativa y $\sec \beta$ es positivos

Ejemplo: (Modelaje del movimiento de un resorte)

Se suspende un resorte en el techo, oscilando hacia arriba y abajo. Se elabora una tabla muestra donde se muestra la altura de una partícula, ubicada en el resorte, cada segundo después de que el movimiento haya comenzado.

Estudio de un resorte

Fuente: Open, AI. (2024)

De la gráfica podemos deducir:

La amplitud $A = 5$, *la altura desde la línea central hasta el pico es* 5.

El periodo hallamos de la distancia entre picos $(2, 8)$ *y* $(10, 8)$, *que es* 8.

Para el modelaje notamos que los datos se ajustan a la función coseno $y = \cos x$, *es decir podemos ajustar como:*

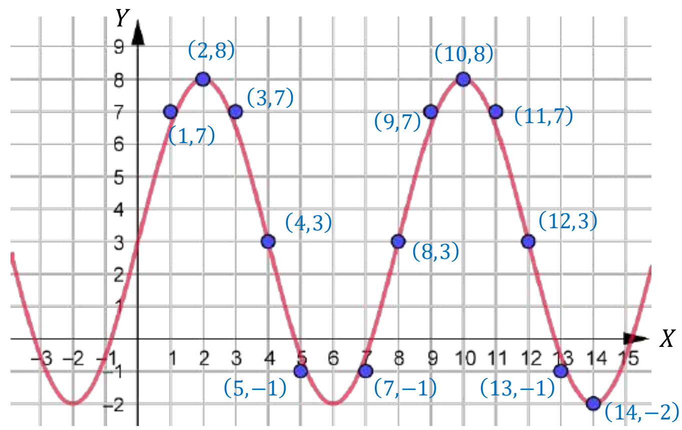
$$y = 5\cos(Bx - C) + D$$

Fuente: Microsoft, IA. (2024)

El movimiento de los planetas es periódico.

Tiempo en segundos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura del objeto	7	8	7	3	-1	-2	-1	3	7	8	7	3	-1	-2

La tabla puede ser representada gráficamente en un plano cartesiano.



Los valores de B, C y D se calculan como:

$$T = \frac{2\pi}{B} = 8 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi}{4}\ ; \qquad C = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad D = 3$$

La ecuación que modela el comportamiento del resorte suspendido en el techo será:

$$y = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

1) Encontramos los valores de las funciones trigonométricas de θ si:

a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{8}$ c) $\cos\theta = \dfrac{5}{6}$ e) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ g) $\sec\theta = -4$

b) $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{5}{2}$ d) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ f) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ h) $\operatorname{cosec}\theta = -0.5$

2) Conociendo que $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{3}{4}$ y θ pertenece al IV. Calculamos $M = \sec\theta - \tan\theta$.

3) Si el punto $B(-2, -3)$, pertenece al lado final del ángulo θ. Calculamos $A = \sec\theta + \tan\theta$.

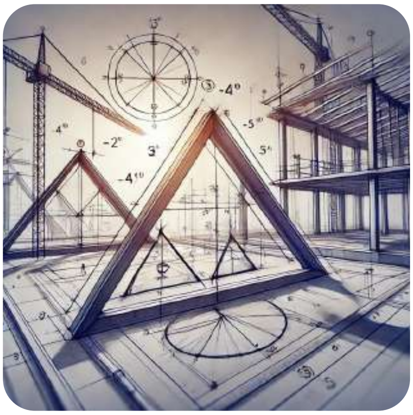
VALORACIÓN

Sin lugar a dudas la utilidad de la trigonometría es inmensa en diversas áreas del conocimiento, en especial de áreas científicas.

En física, entre otras utilidades, se requiere de trigonometría para realizar cálculos de movimientos circulares o en el lanzamiento de proyectiles.

En medicina es innegable el aporte que realiza la trigonometría, en especialidades como la cardiología y también en neumología, que requieren el estudio de combinaciones de funciones trigonométricas.

En construcciones se requiere bastante los diseños triangulares, que proporcionan estabilidad, la combinación de ángulo y longitudes que hace indispensable el uso de funciones trigonométricas.



Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

La trigonometría es una herramienta esencial en una variedad de campos. Es una rama de las matemáticas que es muy útil para estudiar el mundo que nos rodea, por tanto, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿Cuáles son las aplicaciones de la trigonometría en la tecnología?
- ¿En qué se utilizan las funciones seno, coseno y tangente?

PRODUCCIÓN

Estaciones del año, las diferentes estaciones del año (otoño, primavera, verano e invierno) se producen debido al ángulo de inclinación del eje terrestre. Este fenómeno también determina la cantidad de horas de luz diurna, que varía en diferentes partes del planeta.

Estas situaciones se repiten cada año, es decir son cíclicas, tienen un periodo, por lo tanto, se pueden estudiar gracias a funciones trigonométricas.

Fuente: Open, AI. (2024)

Cálculos meteorológicos. En latitudes medias es posible estimar la distancia entre regiones consecutivas. Si la latitud está en $\theta=44°$ grados sexagesimales, R es el radio de la Tierra que es 6369 kilómetros, aproximadamente y "v" la velocidad horizontal del viento en 30 km/h, además la distancia "d" en kilómetros. Se puede calcular la distancia entre dos zonas consecutivas utilizando la siguiente ecuación:

$$d = 2\pi\left(\frac{vR}{0.52\cos\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- Realizamos la gráfica de $y = 2\operatorname{sen}(2x)$; $y = -4\cos x$ (Utilicemos hojas milimétricas para la gráfica).
- Graficamos en planos diferentes las funciones: $y=3\operatorname{sen}(2x); y = 3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

  ¿qué conclusión obtienes?

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PRÁCTICA

Uno de los elementos más importantes en la geometría es la perpendicularidad. Recordemos que dos rectas son perpendiculares cuando al intersecarse o cortarse forman cuatro ángulos congruentes (de la misma medida $90°$)

Si puedes observar a tu alrededor encontrarás la perpendicularidad en varias situaciones, fíjate que el techo y la pared de nuestro curso son perpendiculares.

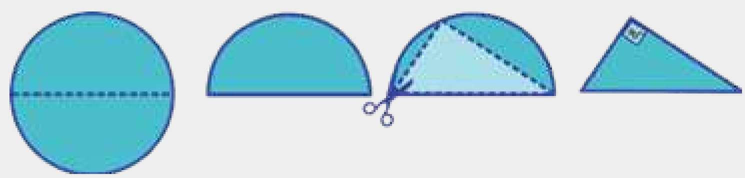
Si observamos el trazado de la cancha encontraremos varias rectas perpendiculares.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

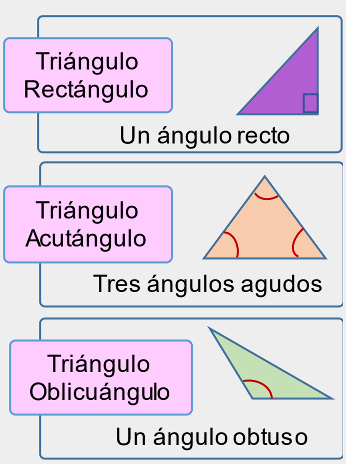
Construyendo un triángulo rectángulo

- Trazamos sobre un cartón un círculo de 10 cm de radio.
- Trazamos el diámetro y recortarlo de tal forma de tenga la mitad del círculo.
- Ubicamos un punto del arco de la circunferencia.
- Desde el punto hacia los extremos del diámetro trazamos dos segmentos.
- Recortamos el triángulo obtenido.
- Es un triángulo rectángulo.



TEORÍA

Clasificación según sus ángulos

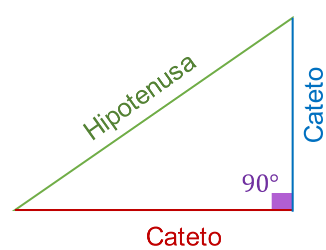


1. Definición de triángulo rectángulo

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto (cuya medida es de $90°$) y dos ángulos agudos (menores a $90°$). Los lados de un triángulo rectángulo se llaman catetos e hipotenusa.

Los catetos son los dos lados que están al lado del ángulo recto. Ambos son perpendiculares.

La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de $90°$, es el lado mayor del triángulo.



Las herramientas para resolver un triángulo rectángulo son: la ley de suma de ángulos, teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.

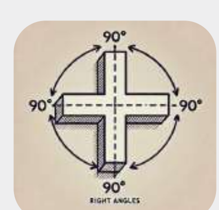
Actividad

1) Dibujamos triángulos rectángulos con las siguientes características:

a) Catetos 4 y 3 cm, hipotenusa 5 cm

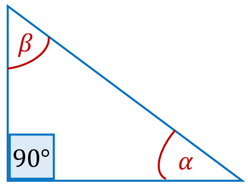
b) Dos catetos 5 cm, hiptenusa $\sqrt{50}$

2) Mencionamos y dibujamos tres ejemplos de objetos en la cotidianidad donde observemos ángulos de $90°$ (Por ejemplo, una cruz tiene 4 ángulos rectos)



a) Suma de ángulos en un triángulo rectángulo

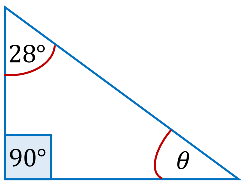
La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es siempre $90°$.



$$\alpha+\beta=90°$$

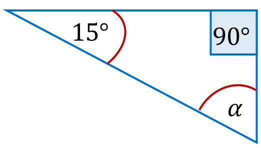
Ejemplo:

De los siguientes triángulos, calculamos los ángulos desconocidos:



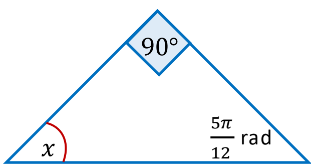
Para la primera gráfica tenemos:

$$28°+\theta = 90°$$
$$\theta = 90°-28°$$
$$\theta = 62°$$



Para la segunda gráfica tenemos:

$$15°+\alpha = 90°$$
$$\alpha = 90°-15°$$
$$\alpha = 75°$$

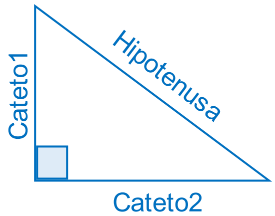


Para la tercera gráfica, convirtiendo: $\frac{5\pi}{12}$ rad$= 75°$

$$75°+x = 90°$$
$$x = 90°-75°$$
$$x = 15°$$

b) Teorema de Pitágoras

“En un triángulo rectángulo: el valor de la hipotenusa al cuadrado, es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.”



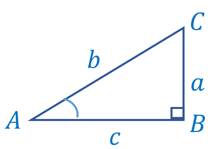
La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de $90°$ y es el lado más largo del triángulo.

Los catetos son los lados que forman el ángulo de $90°$.

$$(\text{Hipotenusa})^2=(\text{Cateto1})^2+(\text{Cateto2})^2$$

Ejemplo:

Calculamos el cateto en el triángulo rectángulo ΔABC, si $b=\sqrt{17}$ y $a=2$.



Datos:

$a=2;\ b=\sqrt{17}$ y $c=?$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$b^2=c^2+a^2 \ \Rightarrow \ c^2=b^2-a^2$$

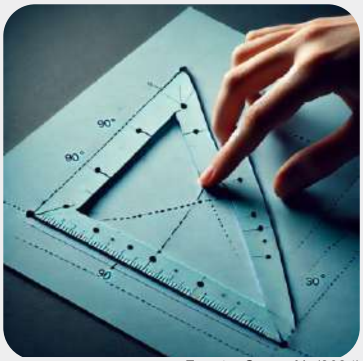
$$\Rightarrow \ c = \sqrt{b^2-a^2} = \sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2-2^2}$$

$$= \sqrt{17-4} = \sqrt{13}$$

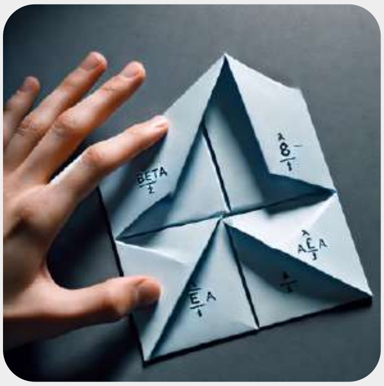
$$\Rightarrow \ c = \sqrt{13}$$

Construcción

Construcción de la suma de ángulos mediante dobleces de papel.

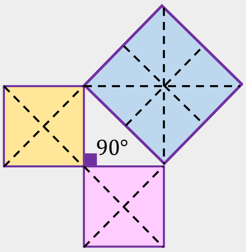


Fuente: Open, AI. (2024)



Fuente: Open, AI. (2024)

Demostración



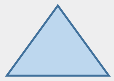
Demostración del Teorema de Pitágoras

Al contar los triángulos en cada uno de los cuadrados, observamos que el número de triángulos celestes es igual a la suma del número de triángulos amarillos y rosados.

Este cambio asegura que la relación entre los triángulos en los diferentes cuadrados se expresa de manera más directa y precisa.

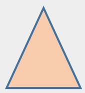
Clasificación según sus lados

Triángulo Equilátero



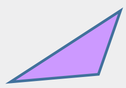
Todos los lados iguales

Triángulo Isósceles



Dos lados iguales

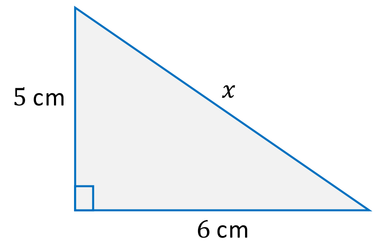
Triángulo Escaleno



Todos los lados diferentes

Ejemplo:

De los siguientes triángulos. Calculamos los lados desconocidos:

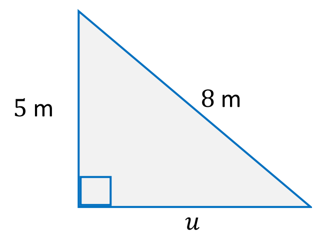


$$x^2 = (6\text{ cm})^2+(5\text{ cm})^2$$

$$x^2 = 36\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2 = 61\text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{61\text{ cm}^2} = \sqrt{61}\text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{61}\ cm$$



$$(8\text{ m})^2 = u^2+(5\text{ m})^2$$

$$\Rightarrow \quad 64\text{ m}^2 = u^2+25\text{ m}^2$$

$$64\text{ m}^2-25\text{ m}^2 = u^2$$

$$39\text{ m}^2 = u^2$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt{39}\text{ m}$$

c) Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

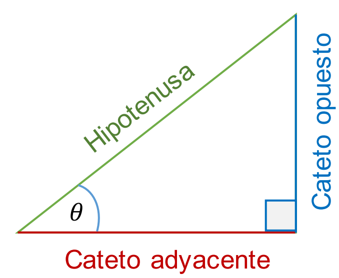
$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$$

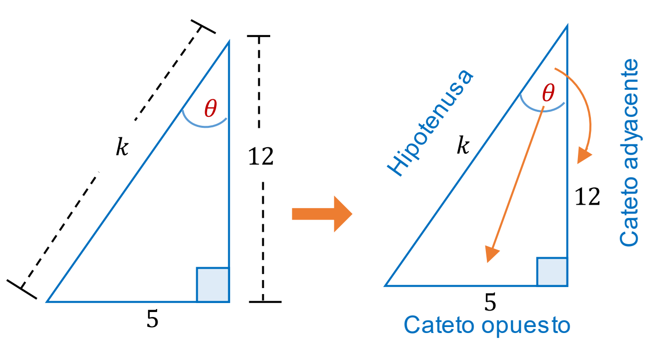
$$\operatorname{csec}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$



Ejemplo:

Dado el triángulo rectángulo, Hallamos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo θ.



Identificamos los catetos y la hipotenusa y finalmente escribimos las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{c. op}}{\text{h}} = \frac{5}{13} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{h}}{\text{c. op}} = \frac{13}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{c. ody}}{\text{h}} = \frac{12}{13} \qquad \sec\theta = \frac{\text{h}}{\text{c. ady}} = \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{c. op}}{\text{c. ady}} = \frac{5}{12} \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{\text{c. ady}}{\text{c. op}} = \frac{12}{5}$$

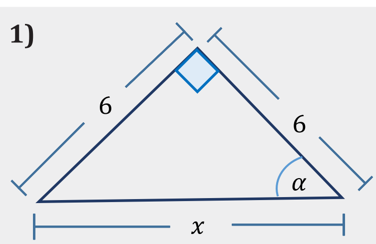
Primero calculamos el valor de la hipotenusa:

$$k^2 = 12^2 + 5^2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \quad \Rightarrow \quad k = 13$$

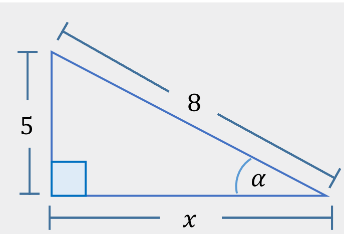
Actividad

Hallamos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α.

1)



2)

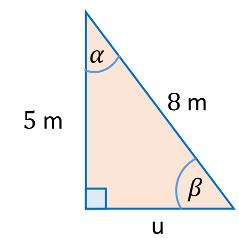
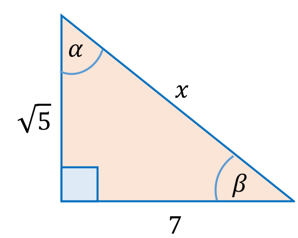


2. Resolución gráfica y analítica de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo significa encontrar las longitudes de sus lados y los valores de sus ángulos. Un triángulo rectángulo puede resolverse si se conocen al menos dos de sus lados o un lado y un ángulo agudo. Las herramientas utilizadas para resolver un triángulo rectángulo son: la ley de la suma de ángulos, el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.

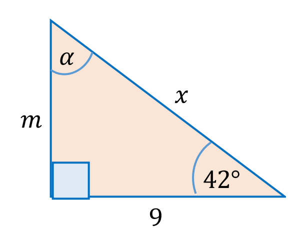
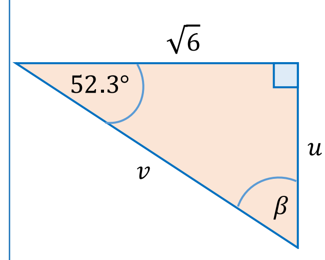
Ejemplo:

Resolvemos los triángulos, conocidos dos lados.

Calculamos "u" por Teorema de Pitágoras: $(8\text{ m})^2=(5\text{ m})^2+u^2$ $64\text{ m}^2=25\text{ m}^2+u^2$ $u^2=64\text{ m}^2-25\text{ m}^2=39\text{ m}^2$ $u=\sqrt{39\text{ m}^2}$ $\Rightarrow\ u=\sqrt{39}\text{ m}$	Calculamos α por razones trigonométricas: $\cos\alpha=\frac{5\text{ m}}{8\text{ m}}$ $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ $\alpha=51.32°$	Hallemos β por razones trigonométricas: $\operatorname{sen}\beta=\frac{5\text{ m}}{8\text{ m}}$ $\alpha=\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ $\alpha=38.68°$	
Calculamos "x" por Teorema de Pitágoras: $x^2=7^2+\left(\sqrt{5}\right)^2$ $x=\sqrt{49+5}$ $=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ $\Rightarrow\ x\approx 7.35$	Para α por razones trigonométricas: $\tan\alpha=\frac{7}{\sqrt{5}}$ $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)=72.28°$ $\alpha=72°17'3''$	Para β por razones trigonométricas: $\tan\beta=\frac{\sqrt{5}}{7}$ $\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)=17.71°$ $\beta=17°42'7''$	

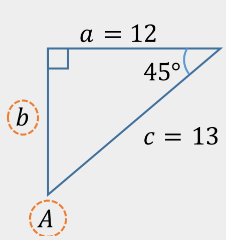
Ejemplo:

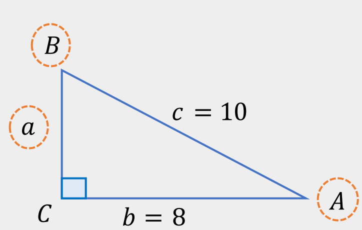
Resolvemos los triángulos, conocidos un ángulo agudo y un lado.

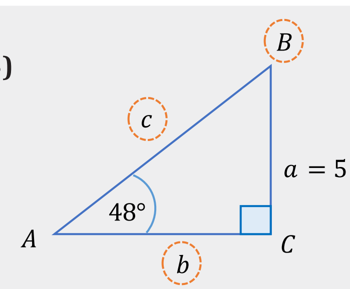
Calculamos α suma de ángulos: $\alpha+42°=90°$ $\alpha=90°-42°$ $\Rightarrow\ \alpha=48°$	Para x aplicamos razones trigonométricas: $\cos 42°=\frac{9}{x}$ $x=\frac{9}{\cos 42°}\approx 12.11$ $\Rightarrow\ x=12.11$	Para m aplicamos razones trigonométricas: $\tan 42°=\frac{m}{9}$ $m=9\cdot\tan 42°$ $m=8.1$	
Calculamos "β" por suma de ángulos: $\beta+52{,}3°=90°$ $\beta=90°-52.3°$ $\Rightarrow\ \beta=37.7°$	Para "u" aplicamos funciones trigonométricas: $\tan 52{,}3°=\frac{u}{\sqrt{6}}$ $\sqrt{6}\cdot\tan 52{,}3°=u$ $\Rightarrow\ u=3.17$	Para "v" aplicamos funciones trigonométricas: $\cos 52.3°=\frac{\sqrt{6}}{v}$ $v=\frac{\sqrt{6}}{\cos 52.3°}$ $v=4.01$	

Actividad

– Resolvemos los triángulos:

1) 

2) 

3) 

Sugerencias de resolución de problemas (George Pólya)

Paso 1: *Entender el problema. ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?*

Paso 2: *Configurar un plan. Elaborar una estrategia que le permita encontrar la o las operaciones necesarias para resolver el problema*

Paso 3: *Ejecutar el plan. En este paso el estudiante debe implementar la o las estrategias que escogió para solucionar completamente el problema.*

Paso 4: *Mirar hacia atrás. Comprobar la solución. ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema? ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?*

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Un uso común de la trigonometría es medir alturas y distancias cuyas mediciones por medios normales son incómodas o imposibles, veamos ejemplos.

Problema:

Se desea calcular la longitud de la escalera de un camión bombero que esta 10 m de la base de un edificio y la altura desde el techo del camión a un balcón es de $20{,}5$ metros.

Fuente: Open, AI. (2024)

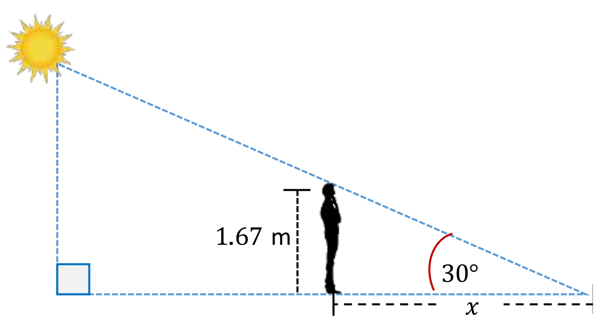
De la gráfica, podemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 20.5^2 + 10^2$$
$$= 420.25 + 100 = 520.25$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{520.25} \approx 22.81$$
$$\Rightarrow \quad x = 22.81$$

R. La longitud de la escalera es 23 metros aproximadamente.

Problema:

Calcular la longitud de la sombra que genera una persona de $1{,}67$ m, cuando el sol está a $30°$ respecto al horizonte.

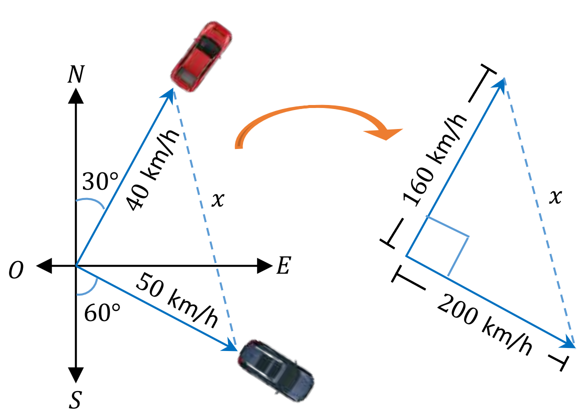


Utilizamos funciones trigonométricas

$$\tan 30° = \frac{1{,}67 \text{ m}}{x}$$
$$x \cdot \tan 30° = 1.67 \text{ m}$$
$$x = \frac{1.67 \text{ m}}{\tan 30°} \approx 2.89$$
$$\Rightarrow \quad x = 2.89 \text{ m}$$

Problema:

Dos automóviles con direcciones $30°\ NE$ y $60°\ SE$, parten con velocidades 40 km/h y 50 km/h respectivamente. Calcular la distancia de separación entre ambos después de 4 horas.



Primero calculamos las distancias recorridas por cada móvil en 4 horas:
El móvil de 40 km/h es 4 horas recorre 160 m
El móvil de 50 km/h es 4 horas recorre 200 m
También notemos de la figura que se forma un triángulo rectángulo, luego podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 160^2 + 200^2$$
$$= 25\,600 + 40\,000 = 65\,600$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{65\,600} = 40\sqrt{41} \approx 256.12$$
$$\Rightarrow \quad x = 256.12 \text{ m}$$

R. Después es 4 horas la distancia de separación entre ambos móviles es de 256 m aproximadamente.

Problema:

Desde un bote se divisa lo alto de un faro de 66 metros, con un ángulo de elevación de $25°$, ¿a qué distancia se encuentra el bote del pie del faro?

Fuente: Open, AI. (2024)

Notemos de la figura forma un triángulo rectángulo, luego podemos aplicar la función trigonométrica tangente:

$$\tan 25° = \frac{66 \text{ m}}{d} \quad \Rightarrow \quad d \cdot \tan 25° = 66 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{66 \text{ m}}{\tan 25°} \approx 141.54 \quad \Rightarrow \quad d = 141.54 \text{ m}$$

R. La distancia del bote al faro es 141.54 m

Problema:

Ernesto requiere calcular las pulgadas (in) de una pantalla de Smart TV. Se sabe que las longitudes de su base y altura miden $155{,}62$ cm y $89{,}93$ cm.

Utilizando el teorema de Pitágoras para la diagonal, tenemos:

$$x^2 = 155.62^2 + 89.93^2 = 32\,304.98$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{32\,304.98} \approx 179.74 \text{ cm}$$

Transformando a pulgadas (in):

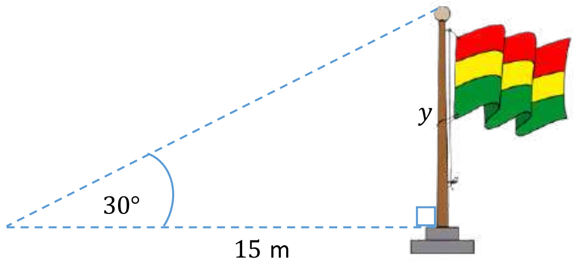
$$x = 179.74 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} = 70.76 \text{ in}$$

$$\Rightarrow \quad x = 70.76 \text{ in}$$

R. Ernesto calculó que su televisión es de 71 pulgadas.

Problema:

Calcular la altura del mástil de una escuela, si su ángulo de elevación respecto al suelo es $30°$ y la distancia desde la base del mástil hasta el punto de medición es de 15 metros



Utilizamos la función tangente:

$$\tan 30° = \frac{y}{15} \quad \Rightarrow \quad y = 15 \cdot \tan 30°$$

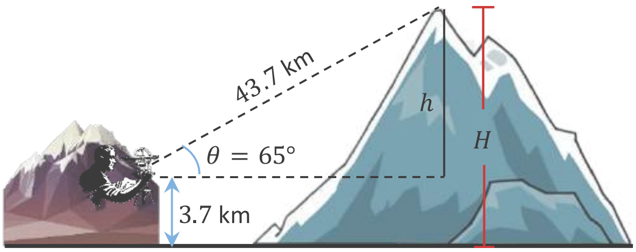
$$\approx 8.66 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad y = 8.66 \text{ m}$$

R. La altura estimada del mástil es de 8.66 metros.

Problema:

Un topógrafo desea calcular la altura de un cerro, los datos que obtuvo ubicado a 3.7 km de altura, fue el ángulo de elevación $65°$ y 43.7 km como la distancia hacia el vértice de la montaña.



Fuente: Open, AI. (2024)

Primero calculemos la altura h, utilizando la función tangente:

$$\tan 65° = \frac{h}{43.7} \quad \Rightarrow \quad h = 43{,}7 \cdot \tan 65°$$

$$\approx 93.71 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \quad h = 93.71 \text{ km}$$

Para la altura total, calculamos H, que será la suma de dos alturas:

$$H = 3.7 + 93.71 = 97.41 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \quad H = 97.41 \text{ km}$$

R. La montaña mide 97.41 km aproximadamente.

Topógrafo

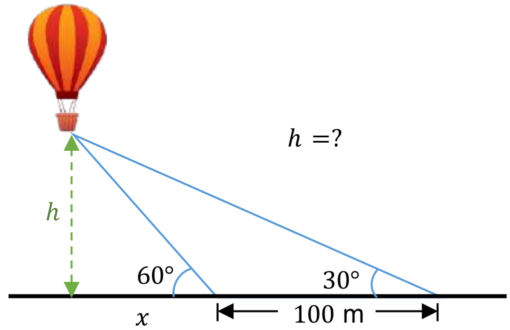
Fuente: Open, AI. (2024)

Un topógrafo se encarga de medir y cartografiar el terreno, esto incluye la toma de medidas de elevación, distancia y ángulos y también utilizan sistemas de GPS para cartografiar el terreno. Los topógrafos suelen trabajar en empresas de construcción, ingeniería o topografía.

La trigonometría se ha convertido en una poderosa herramienta que ayuda a la topografía a tomar mediciones, tales como calcular las dimensiones del levantamiento de un terreno.

Problema:

Desde un punto en el suelo se observa un globo aerostático con un ángulo de elevación de $30°$, acercándonos 100 metros en línea recta, el ángulo de elevación es de $60°$, ¿a qué altura se encuentra el globo?



Podemos identificar dos triángulos rectángulos.

En cada triangulo relacionamos lados y ángulos con la función tangente:

$$\tan 60° = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = x \cdot \tan 60° \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\tan 60°}{h} \qquad (1)$$

$$\tan 30° = \frac{h}{x+100} \quad \Rightarrow \quad h = (x+100) \cdot \tan 30° \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan 30°} - 100 \qquad (2)$$

Igualamos (1) y (2):

$$\frac{\tan 60°}{h} = \frac{h}{\tan 30°} - 100 \quad \Rightarrow \quad \tan 60° \cdot \tan 30° = h^2 - 100 \cdot h \cdot \tan 30°$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = h^2 - 100 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = h^2 - 100 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

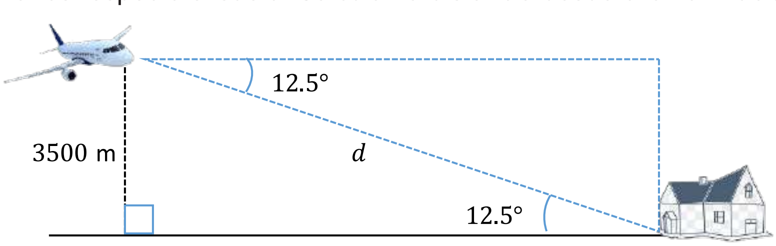
$$\Rightarrow \quad 3 = 3h^2 - 100\sqrt{3} \cdot h \qquad // \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad 3h^2 - 100\sqrt{3}h - 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se tiene: $h = 57.75$ y $h = -0.02$ Como la altura no puede ser negativa, entonces solamente indicamos que la altura del globo es de 57.75 metros.

Problema:

Desde un avión se divisa una casa con un ángulo de depresión de $12.5°$, la altura que sobrevuela el avión es de 3500 metros respecto el suelo. Calcular la distancia desde el avión hacia la casa.



Utilizamos la función seno:

$$\operatorname{sen} 12.5° = \frac{3500}{d} \quad \Rightarrow \quad d \cdot \operatorname{sen} 12.5° = 3500$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{3500}{\operatorname{sen} 12.5°} \approx 16\,170.79$$

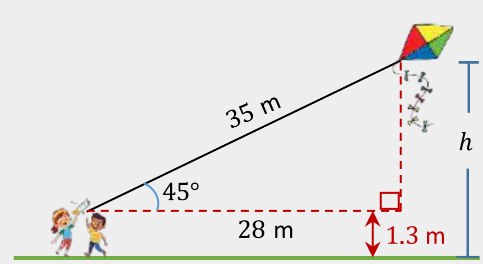
$$\Rightarrow \quad d = 16\,170.79 \text{ m}$$

R. La distancia estimada desde el avión hacia la casa es $16\,170.8$ metros.

Actividad

Resolvemos

- Dos niños juegan con su cometa que tiene una cuerda de 35 m, el cometa esta con un ángulo de elevación de $45°$; María sujeta el cometa a 1.3 m del suelo. Calculamos la altura del cometa respecto al suelo.



VALORACIÓN

El uso de la trigonometría se extiende en diferentes áreas:

Ingeniería, Arquitectura y Construcción

Se utilizan en diseño estructural, arquitectura e ingeniería civil para calcular fuerzas, determinar la estabilidad y analizar elementos estructurales. Los triángulos rectángulos son esenciales en el diseño arquitectónico. Se crean estructuras geométricamente equilibradas, Hallamos ángulos de inclinación de un techo, perpendicularidad del suelo y los muros, entre otros.

Física

En mecánica, los triángulos rectángulos se utilizan para descomponer fuerzas en componentes y calcular sus magnitudes y direcciones.

Topografía y Navegación

Los métodos de triangulación, que se basan en los principios de los triángulos rectángulos, se utilizan para determinar distancias, ángulos y posiciones de puntos en la superficie de la Tierra.

Arquitectura y Construcción

Los triángulos rectángulos son esenciales en el diseño y la construcción arquitectónicos. Crean estructuras geométricamente equilibradas, Hallamos ángulos de inclinación del techo.

Astronomía

La triangulación, siempre ha sido determinante para medir el tiempo, desde tiempos ancestrales se utilizaron tanto la geometría como la trigonometría para identificar las diferentes variaciones climáticas de nuestro planeta.

La trigonometría en la topografía y navegación.

Fuente: Open, AI. (2024)

Trigonometría en la ingeniería y construcción.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

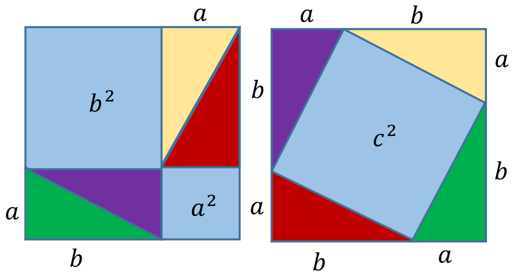
- Identifica tres triángulos rectángulos que se pueden formar en el curso.
- Identificamos triángulos rectángulos en tu casa.
- Invéntate tres problemas que se puedan resolver con triángulos rectángulos.

PRODUCCIÓN

El Teorema de Pitágoras es uno de los más utilizados, no solo en los problemas de triángulos rectángulos, también tiene muchas otras utilidades en diferentes ocasiones que las irás descubriendo a medida que aprendas más de la matemática.

El Teorema de Pitágoras establece que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es exactamente igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos. Y esto es exclusivo para un triángulo rectángulo.
El teorema de Pitágoras es el que tiene más demostraciones conocidas, alrededor de 300, desde muy sencillas, hasta otras muy complejas e ingeniosas, otras gráficas y otras totalmente algebraicas.

- Construimos un rompecabezas que muestra el teorema de Pitágoras de forma gráfica.



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

PRÁCTICA

La torre inclinada de Pisa, es una de las obras de arquitectura más sobresalientes de la historia, es catalogada como una de las maravillas arquitectónicas y de construcción de la humanidad.

La Torre de Pisa comenzó a inclinarse desde el inicio de su construcción en 1173. Tiene una altura de 55.86 metros, un peso aproximado de $14\,700$ toneladas y una inclinación de $4°$, desviándose 3.9 metros de la vertical. En 1964, el gobierno italiano pidió ayuda internacional para evitar su colapso.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

Fuente: Open, AI. (2024)

Realizamos las siguientes actividades:

- En diferentes construcciones se utilizan o diseñan triángulos, ¿cuál será el motivo?
- Identifica en las construcciones de tu colegio diferentes tipos de triángulos y enuméralos.

TEORÍA

Clasificación según sus ángulos

Son de dos tipos: acutángulos y obtusos.

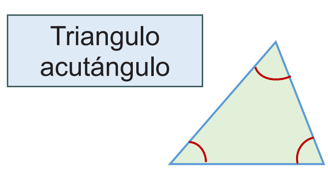
Triángulo acutángulo: *Tiene tres ángulos internos agudos, es decir, la medida de cada uno de sus ángulos es menor a* $90°$

Triángulo obtusángulo: *Se caracteriza por tener uno de sus ángulos interiores obtuso, eso quiere decir que el ángulo es mayor a* $90°$*, por lo tanto, los ángulos internos restantes son menores a* $90°$.

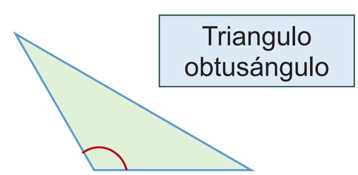
1. Definición de triángulo oblicuángulo

Un triángulo es oblicuángulo, si ninguno de sus ángulos es un ángulo recto $(90°)$.

Un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos; o dos ángulos agudos y uno obtuso.



Tres ángulos agudos



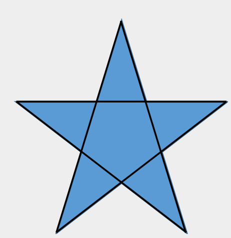
Un ángulo obtuso y dos ángulos agudos

Las herramientas para resolver un triángulo oblicuángulo son: la ley de suma de ángulos, ley de senos y ley de cosenos.

Actividad

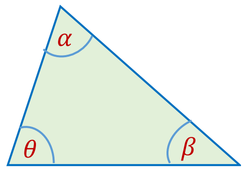
Realizamos las siguientes actividades:

- Analizamos, ¿Existirá un triángulo escaleno y que sea oblicuángulo?
- ¿Existirá un triángulo rectángulo y que también sea equilátero?
- Construimos un triángulo equilátero de 10 cm de lado. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? ¿Un triángulo equilátero es oblicuángulo?
- La estrella de cinco puntas era un símbolo que representaba a los pitagóricos. ¿Cuántos triángulos se observa en la estrella pitagórica? ¿Qué tipo de triángulos son los que lo componen?



a) Suma de ángulos de un triángulo

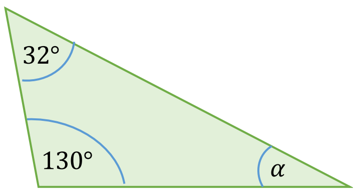
La suma de los ángulos de todo triángulo es siempre $180°$.



$$\alpha+\beta+\theta = 180°$$

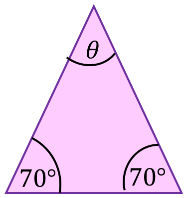
Ejemplo:

De los siguientes triángulos oblicuángulos. Calcular los ángulos desconocidos:



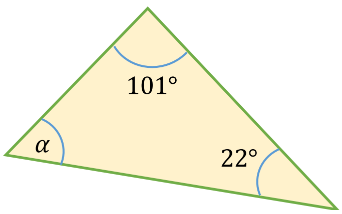
Para la primera gráfica tenemos:

$$\alpha+32°+130° = 180°$$
$$\alpha = 180°-32°-130°$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 18°$$



En la segunda gráfica tenemos un triángulo isósceles:

$$\theta+70°+70° = 180°$$
$$\theta = 180°-70°-70°$$
$$\Rightarrow \quad \theta = 40°$$



En la tercera gráfica tenemos:

$$\alpha+101°+22° = 180°$$
$$\alpha = 180°-101°-22°$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 57°$$

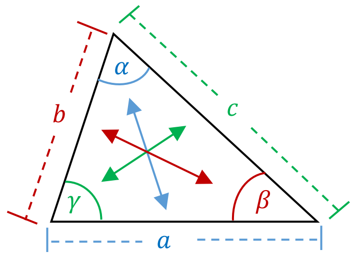
b) Ley de senos

La ley de senos establece que, en un triángulo, cada lado es proporcional al seno de su ángulo opuesto. Esto significa que la relación entre un lado y el seno de su ángulo es la misma para los tres lados del triángulo.

Las ecuaciones de la ley de senos pueden ser representadas de dos formas:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$



Para usar la ley de senos debemos conocer los datos de una diagonal, (es decir un lado y su ángulo opuesto) y además un lado o ángulo del triángulo.

Curiosidades

Suma de los ángulos internos de cualquier triángulo:

En cualquier triángulo (sin importar su tipo), la suma de los tres ángulos internos siempre es $180°$. *Esto es cierto tanto para triángulos equiláteros, isósceles o escalenos y es una propiedad clave en geometría euclidiana.*

Fuente: Open, AI. (2024)

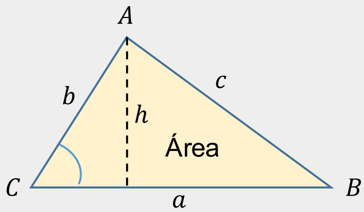
La Ley de los Senos no solo se aplica a los triángulos rectángulos, sino también a cualquier tipo de triángulo: acutángulo, obtusángulo o escaleno. Esto la convierte en una herramienta versátil para resolver triángulos en geometría.

Al-Battani

Fuente: Open, AI. (2024)

Astrónomo y matemático, generalizó el resultado de Euclides en la geometría esférica a principios del siglo X, lo que permitió efectuar los cálculos de la distancia angular entre el Sol y la Tierra.

Área en función de seno

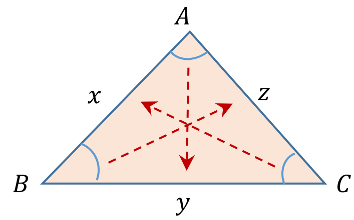


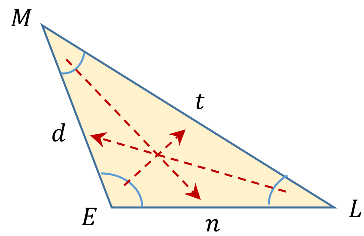
Una forma distinta para hallar el área de un triángulo es aplicando la siguiente igualdad:

$$\text{Área} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\, C}{2}$$

Ejemplo:

De los siguientes triángulos. Aplicar la ley de senos.





Por ley de senos tenemos:

$$\frac{x}{\text{sen}\, C} = \frac{y}{\text{sen}\, A} = \frac{z}{\text{sen}\, B}$$

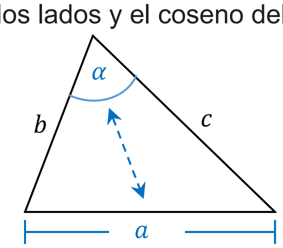
$$\frac{\text{sen}\, C}{x} = \frac{\text{sen}\, A}{y} = \frac{\text{sen}\, B}{z}$$

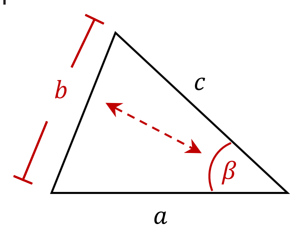
$$\frac{t}{\text{sen}\, E} = \frac{d}{\text{sen}\, L} = \frac{n}{\text{sen}\, M}$$

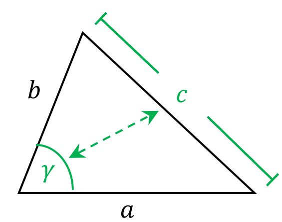
$$\frac{\text{sen}\, E}{t} = \frac{\sin L}{d} = \frac{\text{sen}\, M}{n}$$

c) Ley de Cosenos

La ley de los cosenos establece que, en un triángulo, la longitud de un lado está relacionada con las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo opuesto a ese lado.







$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Algo útil es también el despeje de los ángulos:

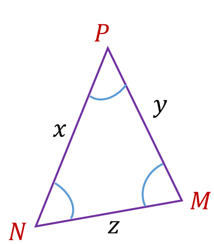
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$

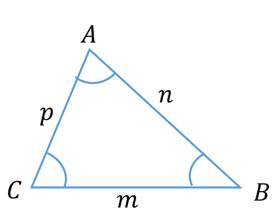
Ejemplo:

Aplicar la ley de cosenos para cada lado del triángulo:



Aplicamos la ley de cosenos:

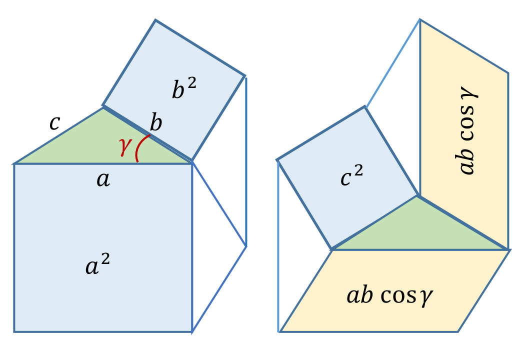
$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos M$$
$$y^2 = x^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos N$$
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos P$$



Apliquemos ley de cosenos, tenemos:

$$m^2 = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos A$$
$$n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos C$$
$$p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos B$$

Demostración del teorema del coseno:



2. Resolución triángulos oblicuángulos

Resolver un triángulo oblicuángulo significa encontrar las longitudes de sus lados y sus ángulos. Para hacerlo, es necesario conocer: la longitud de un lado y dos ángulos; la longitud de dos lados y un ángulo; la longitud de tres lados. Para resolver un triángulo oblicuángulo utilizaremos la ley de suma de ángulos, ley de senos y ley de cosenos. Existen cuatro casos a considerar:

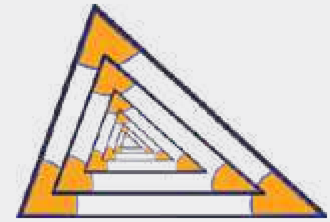
Caso ALA: Conocidos dos ángulos y un lado.

Caso ALL: Conocidos dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos.

Caso LAL: Conocidos dos lados y un ángulo entre los lados conocidos.

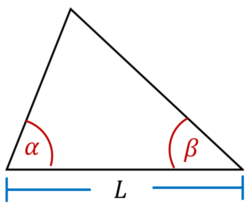
Caso LLL: Conocidos tres lados.

Curiosidad

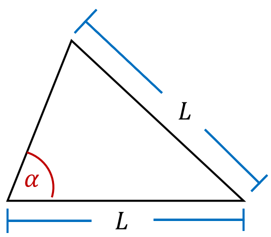


Fuente: Open, AI. (2024)

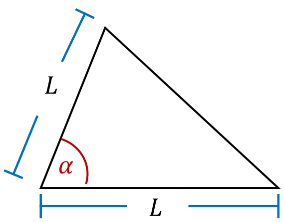
El caso AAA genera un número infinito de triángulos semejantes, por lo cual el triángulo no puede ser resuelto.



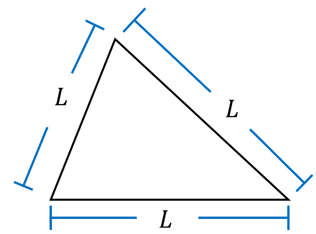
Caso ALA
(Ángulo, Lado, Ángulo)



Caso ALL
(Ángulo, Lado, Lado)



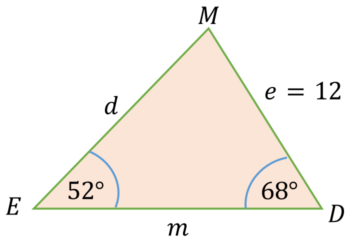
Caso LAL
(Lado, Ángulo, Lado)

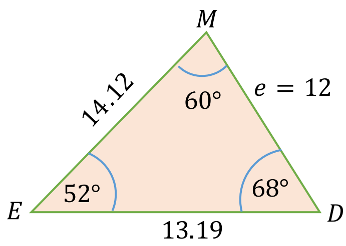


Caso LLL
(Lado, Lado, Lado)

Ejemplo:

(Caso ALA). Resolver el siguiente triángulo sabiendo que $E = 52°$; $D = 68°$; $e = 12$.





Para resolverlo, notemos los ángulos y lados que desconocemos M, m, d.

Ahora para M calculamos por la ley de suma de ángulos:

$$M + 52° + 68° = 180°$$
$$M = 180° - 52° - 68°$$
$$M = 60°$$

Para d aplicamos la ley de senos:

$$\frac{d}{\text{sen } 68°} = \frac{12}{\text{sen } 52°}$$

$$d = \sin 68° \cdot \frac{12}{\text{sen } 52°}$$

$$\Rightarrow \quad d = 14.12$$

Para n por la ley de senos:

$$\frac{m}{\text{sen } 60°} = \frac{12}{\text{sen } 52°}$$

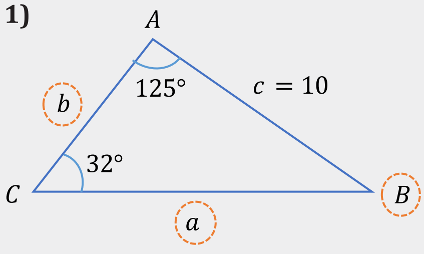
$$m = \sin 60° \cdot \frac{12}{\text{sen } 52°}$$

$$\Rightarrow \quad m = 13.19$$

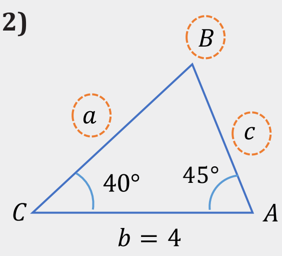
Actividad

- Resolvemos los triángulos:

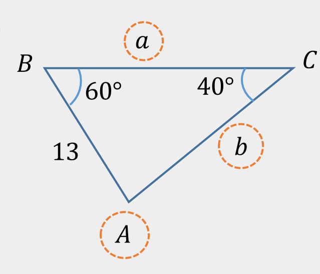
1)



2)

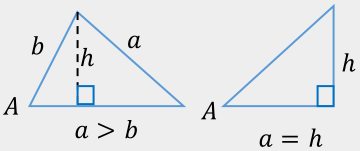


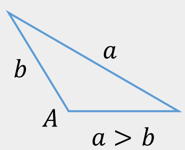
3)



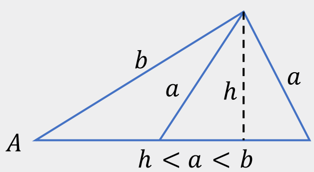
Casos ambigos en la ley de senos

Solo forma un triangulo

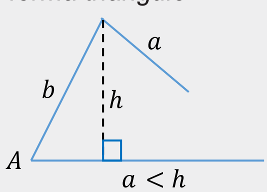


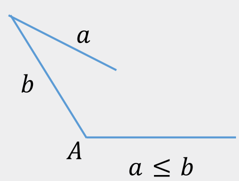


Se forma dos triángulos



No se forma triangulo



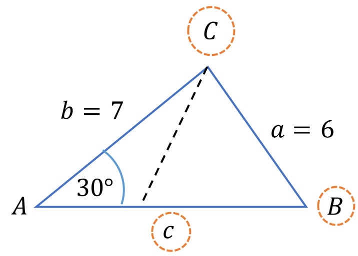


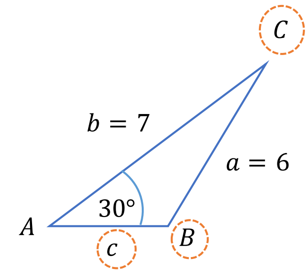
Fuente: Open, AI. (2024)

Ejemplo:

(Caso ALL). Resolver el triángulo, sabiendo que $A=30°$; $a=6$; $c=7$.

El triángulo tendrá dos soluciones, pues su altura es menor que sus lados.





Notemos que tenemos una diagonal conocida, luego aplicamos la ley de senos para hallar B:

$$\frac{\text{sen } B}{7} = \frac{\text{sen } 30°}{6}$$

$$\text{sen } B = 7 \cdot \frac{\text{sen } 30°}{6}$$

$$B = \sin^{-1}\left(7 \cdot \frac{\text{sen } 30°}{6}\right)$$

$B=35.68°$ (ángulo agudo)

Para c por la ley de senos:

$$\frac{c}{\text{sen } 114.32°} = \frac{6}{\sin 30°}$$

$$c = \text{sen } 114.32° \cdot \frac{6}{\sin 30°}$$

$$c = 10.93$$

Para C por la ley de la suma de ángulos:

$$C+35.68°+30° = 180°$$

$$C = 180°-35.68°-30°$$

$$C = 114.32°$$

Para hallar el ángulo obtuso B, notemos que es un ángulo suplementario, luego:

$$B = 180°-35.68°$$

$$B = 144.32°$$

(ángulo obtuso)

Para c por la ley de suma de ángulos:

$$C+144{,}32°+30° = 180°$$

$$C = 180°-144.32°-30°$$

$$C = 5.68°$$

Para c por la ley de senos:

$$\frac{c}{\text{sen } 5{,}68°} = \frac{6}{\text{sen } 30°}$$

$$c = \text{sen } 5.68° \cdot \frac{6}{\text{sen } 30°}$$

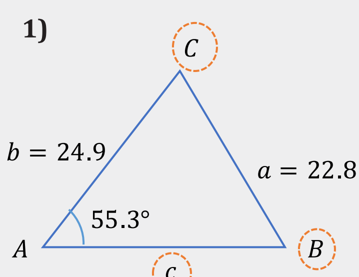
$$c = 1.18$$

Fuente: Open, AI. (2024)

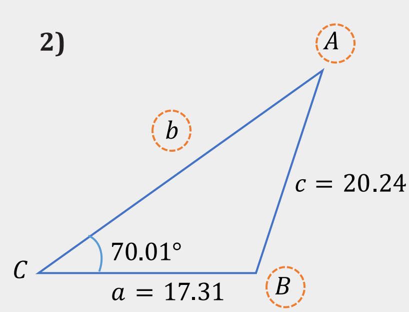
Actividad

Resolvemos los triángulos:

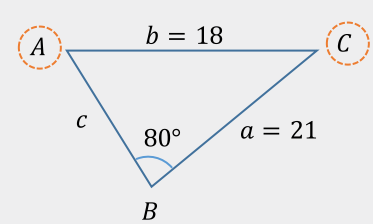
1)



2)

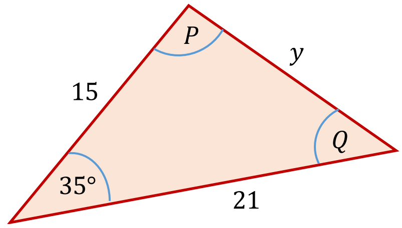


3)



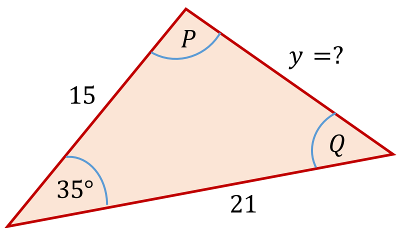
Ejemplo:

(Caso LAL). Resolver el triángulo, sabiendo que:



Ejemplo:

De los siguientes triángulos oblicuángulos. Calcular los ángulos desconocidos:



Para hallar P aplicamos la ley de senos, pues ya conocemos la diagonal:

$$\frac{\operatorname{sen} P}{21} = \frac{\operatorname{sen} 35°}{12.24}$$

$$\operatorname{sen} P = 21 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35°}{12.24}$$

$$P = \operatorname{sen}^{-1}\left(21 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35°}{1.24}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = 79.76°$$

Notemos que no existe una diagonal conocida por lo cual no podemos aplicar ley de senos, por tanto, la única opción es la ley de cosenos:

Hallemos y:

$$y^2 = 21^2 + 15^2 - 2 \cdot 21 \cdot 15 \cdot \cos 35°$$

$$y = \sqrt{441 + 225 - 630 \cos 35°}$$

$$\Rightarrow \quad y = 12.24$$

Para "a" por la ley de senos:

$$\frac{\operatorname{sen} Q}{15} = \frac{\operatorname{sen} 35°}{12.24}$$

$$\operatorname{sen} Q = 15 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35°}{12.24}$$

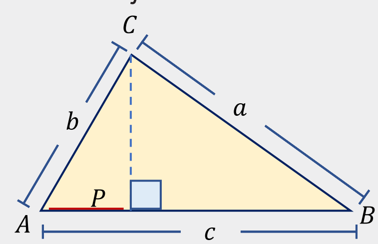
$$Q = \operatorname{sen}^{-1}\left(15 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35°}{12.24}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q = 44.66°$$

Euclides

Fuente: Open, AI. (2024)

La ley de los cosenos aparece primero en el libro Elementos (Libro II) de Euclides, pero en una forma disfrazada en la que los cuadrados de los lados de los triángulos se suman y un rectángulo que representa el término del coseno se resta. Así que todos los matemáticos la conocían debido a su familiaridad con el trabajo de Euclides.



Ley de cosenos:

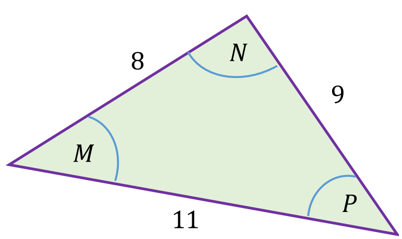
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Teorema de Euclides:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot p \cdot c$$

Ejemplo:

(Caso LLL) Resolvemos el triángulo, sabiendo que los lados miden: 8; 9 y 11.



Para hallar N aplicamos la ley de cosenos, con el ángulo despejado:

$$N = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 + 9^2 - 11^2}{2 \cdot 8 \cdot 9}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{64 + 81 - 121}{144}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N = \cos^{-1}\left(\frac{24}{144}\right) \approx 80.41$$

$$\Rightarrow \quad N = 80.41°$$

Para hallar M:

$$M = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 + 11^2 - 9^2}{2 \cdot 8 \cdot 11}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{24}{176}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N = 53.78°$$

Para hallar P:

$$P = \cos^{-1}\left(\frac{9^2 + 11^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 11}\right)$$

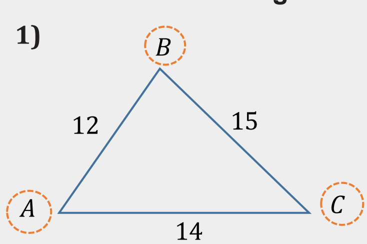
$$= \cos^{-1}\left(\frac{138}{198}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = 45.82°$$

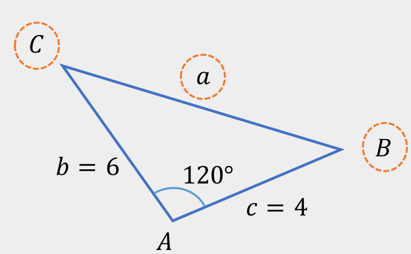
Actividad

Resolvemos los triángulos:

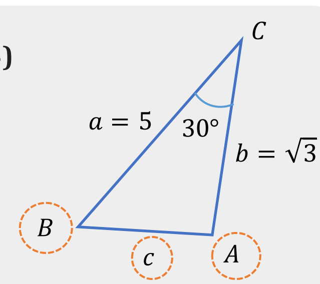
1)



2)



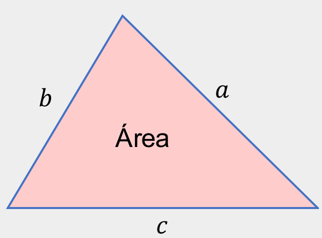
3)



Herón

Fuente: Open, AI. (2024)

Herón fue un ingeniero y matemático helenístico que vivió en Alejandría (provincia roma de Egipto). Fue uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad. Entre sus logros cuenta la invención de la primera máquina de vapor y el primer libro de robótica de la historia. Su logro más destacado en el campo de la geometría es la denominada fórmula de Herón.



Si se conocen las longitudes de los lados de un triángulo podemos calcular el área de dicho triangulo, a través de la fórmula de Herón.

Si se conocen las longitudes de los lados de un triángulo podemos calcular el área de dicho triangulo, a través de la fórmula de Herón.

$$Área = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde s es el semiperímetro del triángulo:

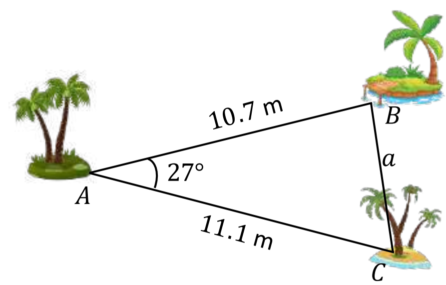
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

3. Resolución triángulos problemas

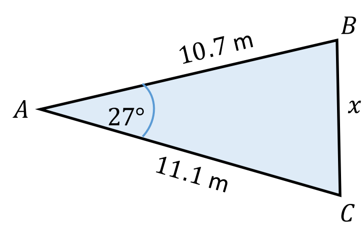
Las leyes de senos y cosenos pueden utilizarse para resolver diversos problemas aplicados al entorno, siempre que dichos problemas involucren triángulos. Para su resolución en algunos casos es conveniente utilizar suma de ángulos, ley de senos o ley de cosenos, por tal razón es conveniente que se realice una gráfica o dibujo donde se identifiquen los datos y las incógnitas para decidir cuál de las leyes utilizar.

Problema:

Se construyeron tres islas artificiales para incrementar el turismo en la localidad de Lupalaya a orillas del Titicaca, ¿Qué distancia separa a las islas B y C?



Podemos aplicar la ley de cosenos, puesto que tenemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, como indica la siguiente figura:



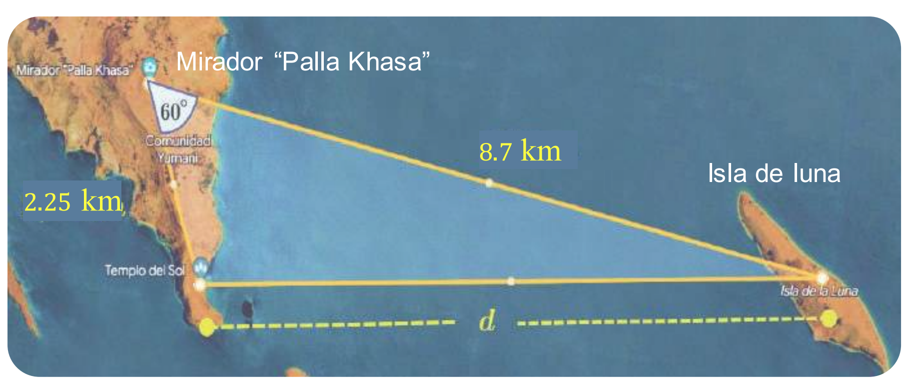
Entonces aplicando la ley de cosenos, tenemos:

$$x^2 = 10.7^2+11.1^2-2\cdot 10.7\cdot 11.1\cdot \cos 27°$$
$$= 114.49+123.21-2\cdot 10.7\cdot 11.1\cdot 0.89$$
$$= 114.49+123.21-211.41 = 26.29$$
$$\Rightarrow\ x = \sqrt{26.29} \approx 5.13$$
$$\Rightarrow\ x = 5.13 \text{ m}$$

R. La distancia que separa a las dos islas es de 5.13 m aproximadamente.

Problema:

Gabriela hizo un recorrido por la población de Copacabana en el cual visito las islas que lo circunda. Utilizando Google Earth calculó que desde la Isla del Sol hasta el mirador de Palla Khasa son 8.7 Km; y la distancia desde el Templo del Sol hacia el mirador en 2.25 Km; además el ángulo que se genera desde el mirador de Khasa es de $60°$. Calculamos la distancia entre el Templo del Sol y la Isla de la luna.



Notemos que podemos aplicar la ley de cosenos para calcular la distancia d:

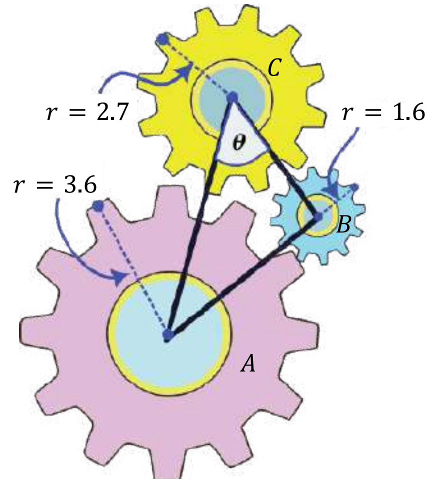
$$d^2 = 2.25^2 + 8.7^2 - 2\cdot 2.25\cdot 8.7\cdot Cos\ 60°$$

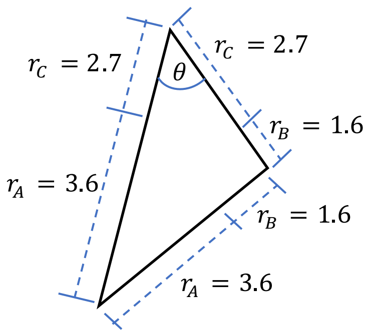
$$d = \sqrt{2.25^2 + 8.7^2 - 2\cdot 2.25\cdot 8.7\cdot Cos\ 60°}$$

$$\Rightarrow\quad d = 2.79 \text{ km}$$

Problema:

De cierto sistema de engranajes se midió los radios de cada uno de ellos, se desea calcular el ángulo que genera el centro del engranaje superior respecto a los centros de los engranajes inferiores.





Sumando las radios de los engranajes y luego aplicando la ley de cosenos para el ángulo θ tenemos:

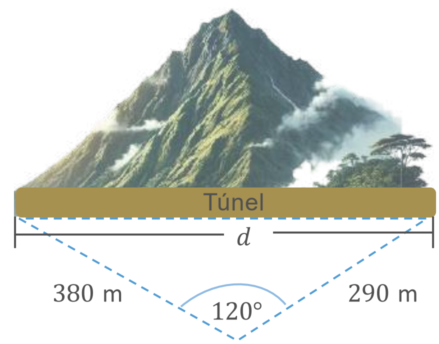
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4.3^2 + 6.3^2 - 5.2^2}{2 \cdot 4.3 \cdot 6.3}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{31{,}14}{54.18}\right) \approx 54.91°$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 54.91°$$

Problema:

En los Yungas se desea construir un túnel que atraviese una montaña. Un topógrafo desde un punto divisa los extremos del monte los cuales generan $120°$ y las distancias hacia los puntos es de 380 metros y 290 metros. Calcular la longitud del túnel que atraviesa el monte.



Aplicando la ley de cosenos para d, tenemos:

$$d^2 = 380^2 + 290^2 - 2 \cdot 380 \cdot 290 \cdot \cos 120°$$

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{380^2 + 290^2 - 2 \cdot 380 \cdot 290 \cdot \cos 120°} = \sqrt{226\,700}$$

$$\Rightarrow \quad d = 476.13 \text{ m}$$

VALORACIÓN

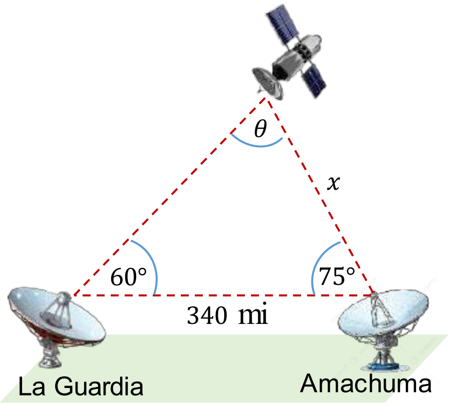
La trigonometría es una rama muy importante de la matemática, debido a que los ángulos tienen muchísimas aplicaciones en diversas ramas del conocimiento y de nuestro contexto en general. Por ejemplo, en la física, la trigonometría se utiliza para analizar las ondas, las oscilaciones y las fuerzas en diferentes direcciones. En la ingeniería, es fundamental para el diseño y la construcción de estructuras, como puentes, edificios y carreteras, donde se necesita calcular las inclinaciones y las fuerzas.

Fuente: https://n9.cl/81kz7

- En diversas construcciones se pueden observar ángulos oblícuos y por ende la generación de triángulos oblicuángulos es inevitable, su aplicación en generación de estabilidad de estructuras de gran magnitud es amplia y esencial.

PRODUCCIÓN

- El satélite TKSAT-1 (Túpac Katari) es el primer satélite artificial de telecomunicaciones del Estado Plurinacional de Bolivia. Es controlado desde la Estación Terrena de Amachuma en La Paz y desde la Estación Terrena de La Guardia, en el departamento de Santa Cruz. Investigando distancias entre las dos estaciones, podemos calcular algunas distancias utilizando conocimientos esenciales de trigonometría.



- Identificamos otras situaciones de nuestro entorno que pueden ser representadas a través de triángulos ya sean rectángulos u oblicuángulos.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Sistemas de medición de ángulos

1) Representamos gráficamente los siguientes ángulos sexagesimales:

a) $60°$ c) $100°$
b) $90°$ d) $-120°$

2) Representamos gráficamente los siguientes ángulos radiánicos:

a) $\frac{\pi}{2}$ rad c) $\frac{\pi}{6}$ rad
b) $-\frac{\pi}{3}$ rad d) $\frac{\pi}{4}$ rad

3) Transformamos al sistema sexagesimal:

a) $\frac{5\pi}{2}$ rad c) $\frac{7\pi}{6}$ rad
b) $\frac{\pi}{3}$ rad d) $\frac{5\pi}{4}$ rad

4) Transformamos al sistema radiánico:

a) $30°$ d) $22.5°$
b) $150°$ e) $390°$
c) $-60°$ f) $2025°$

Longitud de arco

5) Graficamos y hallamos la longitud de arco (S) sabiendo que:

a) $r = 6$ cm; $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad d) $r = 0.5$ m; $\theta = 270°$
b) $r = 3$ m; $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad e) $r = 3$ m; $\theta = 150°$
c) $r = 2$ m; $\theta = 135°$ f) $r = 5$; $\theta = 22.5°$

6) Graficamos y hallamos la longitud de la radio (r) sabiendo que:

a) $S = 24$ cm; $\theta = \frac{5\pi}{4}$ rad
b) $S = 32$ m; $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad
c) $S=11$ m; $\theta=45°$
d) $S=67$ m; $\theta=40°$

7) Graficamos y hallamos el ángulo (θ) sabiendo que:

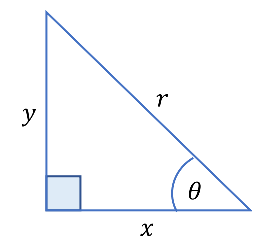
a) $S = 14$ cm; $r = 10$ cm
b) $S = 15$ m; $r = 0.9$ m
c) $S = 0.45$ m; $r = 1.5$ m
d) $S = 446$ cm; $r = 0.25$ m

Área sector circular

8) Hallamos el área del sector circular que tienen las siguientes características:

a) $r = 5$ m; $\theta = \pi$ rad
b) $r = 2.6$ m; $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad
c) $r = 1.8$ m; $\theta = 180°$

9) Hallamos las razones trigonométricas de θ si:



a) $r = 6$; $x = 2$ d) $x = 2$; $r = \sqrt{2}$
b) $r = 12$; $y = 6$ e) $y = 1$; $r = 2\sqrt{3}$
c) $x = 7$; $y = 7$ f) $x = 9$ m ; $y = 2$

10) Sabiendo que $\sin\theta = \frac{4}{5}$. Calculamos:

a) $C = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$ c) $N = \frac{\operatorname{cotan}\theta - \sec\theta}{\tan\theta}$

b) $O = \frac{\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$ d) $V = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{2\tan\theta}$

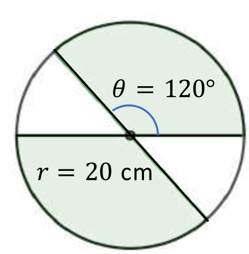
11) Utilizando razones de ángulos notables. Calcular:

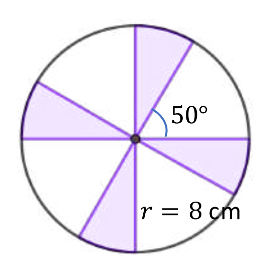
a) $S = \frac{\cos 90° + \operatorname{sen} 30°}{\tan 45°}$ c) $E = \frac{\operatorname{cotan} 45° - \sec 60°}{\tan 45°}$

b) $H = \frac{\operatorname{sen} 60° + 1}{\cos 45°}$ d) $P = \frac{\operatorname{sen} 90° + \cos 0°}{4\tan 45°}$

12) Se tiene un círculo de 4 centímetros de radio. Calcular el área del círculo.

14) Calculamos el área del sector sombreado:





TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

1) Graficar en el plano cartesiano y establecer el cuadrante en el que terminan los siguientes ángulos:

a) $55°$ d) $400°$
b) $135°$ e) $56°$
c) $271°$ f) $1550°$

2) Representar gráficamente los siguientes pares ordenados y halar r:

a) $(-4, 3)$ d) $(0, -4)$
b) $(3, -1)$ e) $(-5, -4)$
c) $(6, 5)$ f) $(-1, -5)$

Signos de las funciones trigonométricas

3) Graficar en el plano cartesiano y señalar los signos de seno, coseno y tangente de los siguientes pares:

a) $(-3, 4)$ d) $(-1, -1)$
b) $(3, 8)$ e) $(-3, -6)$

4) Calcular las seis funciones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ d) $\cot\theta = \dfrac{1}{5}$

b) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{5}$ e) $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

c) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{5}{2}$ f) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

5) Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{5}$. Calculamos:

a) $A = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta}$

b) $M = \dfrac{\tan\theta - \sec\theta}{1 + \sin^2\theta}$

c) $O = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}$

d) $R = \dfrac{\csc\theta \cdot \sec^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$

6) Sabiendo que $\operatorname{cotan}\theta = 1$. Calculamos:

a) $M = \dfrac{2\operatorname{sen}^2\theta + 1}{2\tan\theta + 2}$

b) $Y = \dfrac{\operatorname{cotan}\theta - \sec\theta}{\sin^2\theta}$

c) $J = \dfrac{\sec\theta}{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}$

Gráficas de funciones trigonométricas

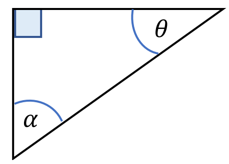
7) Analizando las características de funciones, graficar:

a) $y = 3\cos x$ d) $y = -\operatorname{sen}(4x)$
b) $y = 2\operatorname{sen} x$ e) $y = 0.5\operatorname{sen}(2x)$
c) $y = 4\cos(3x)$ f) $y = 5\cos(4x)$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Suma de Ángulos

1) Dado el triángulo rectángulo, hallamos el ángulo desconocido:



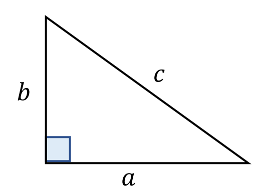
a) $\alpha = 40°;\ \theta = ?$ d) $\alpha = 22.5°;\ \theta = ?$

b) $\alpha = 57°;\ \theta = ?$ e) $\alpha = ?;\ \theta = \dfrac{\pi}{4}\text{rad}$

c) $\alpha = ?;\ \theta = 83°$ f) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}\text{rad};\ \theta = ?$

Teorema de Pitágoras

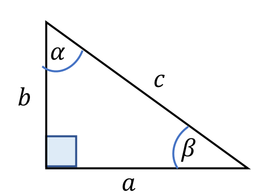
2) Dado el triángulo rectángulo, hallar el lado desconocido:



a) $a=5;\ b=8$ d) $c=12;\ b=10$
b) $a=4;\ b=\sqrt{3}$ e) $c=\sqrt{5};\ b=\sqrt{2}$
c) $a=6;\ b=6$ f) $a=5;\ b=4\sqrt{2}$

Funciones trigonométricas

3) Utilizando funciones trigonométricas. Calculamoos:



a) Hallar α sabiendo que: $c = 2;\ b = 1$

b) Hallar β sabiendo que: $a = 6;\ b = 3$

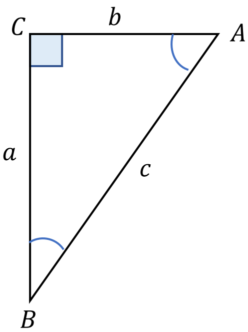
c) Hallar β sabiendo que: $c = 7;\ b = 5$

d) Hallar a sabiendo que: $\alpha = 45°;\ b = 6$

e) Hallar c sabiendo que: $\beta = 60°;\ b = 8$

Resolución de triángulos

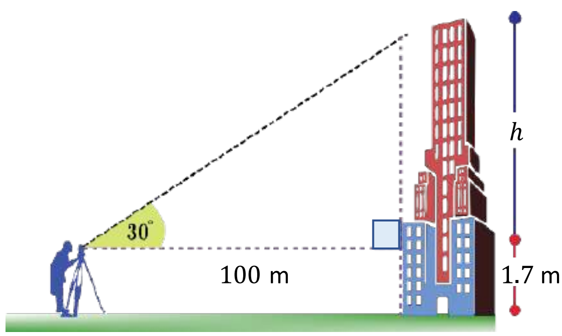
4) Resolvemos los siguientes triángulos ($C = 90°$):



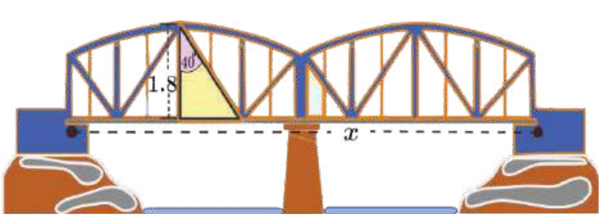
a) $A=65°\,;\, b=7$
b) $B=35°\,;\, c=\sqrt{3}$
c) $A=65°\,;\, a=7$
d) $a=20\,;\, c=27$
e) $b=1{,}2\,;\, c=2\sqrt{3}$
f) $A=50°\,;\, c=13$
g) $a=33°\,;\, c=100$
h) $b=2\,;\, c=2\sqrt{3}$
i) $A=22°\,;\, c=60$
j) $a=5\sqrt{2}\,;\, c=6\sqrt{17}$

Problemas:

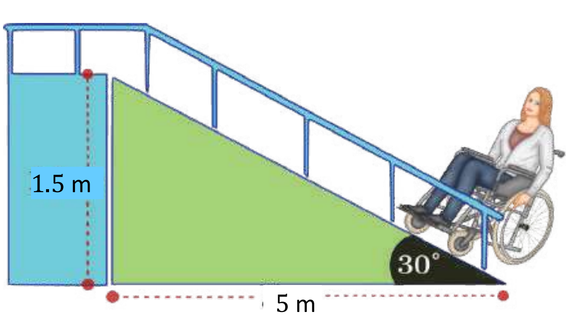
5) La altura de Rómulo es de 1.7 m, con un teodolito calcula el ángulo de elevación de la cima del edificio que es $30°$. Rómulo está ubicado 100 metros de la base del edificio. Calculamos la altura del edificio.



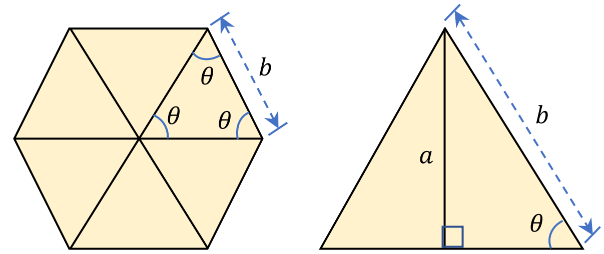
6) La estructura de un puente está formado por triángulos rectángulos de altura 1.8 metros y un ángulo agudo de $40°$. Calcular la longitud del puente.



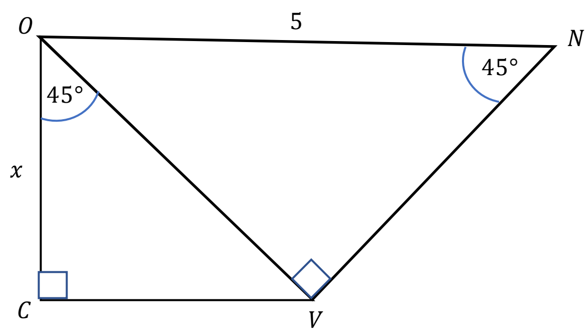
7) Un pendiente tiene un ángulo de inclinación de $30°$, la forma triangular tiene lados de 1.5 metros; 5 metros. Calculamos la longitud de la pendiente.



8) Una celda solar convierte la energía de la luz solar directamente en energía eléctrica. La cantidad de energía que produce una célula depende de su zona de forma hexagonal. Hallamos su área hexagonal, sabiendo que su lado mide 10 cm.



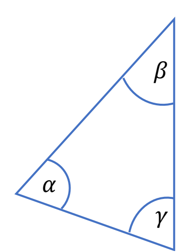
9) Dado el triángulo rectángulo, hallamos el lado desconocido:



Suma de ángulos

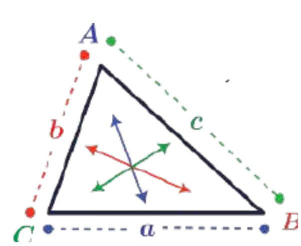
10) Dado el triángulo oblicuángulo, hallamos el ángulo desconocido:

a) $\alpha=40°\,;\; \beta=65°\,;\; \gamma=?$
b) $\alpha=110°\,;\; \beta=?\,;\; \gamma=50°$
c) $\alpha=35°\,;\; \beta=85°\,;\; \gamma=?$
d) $\alpha=?\,;\; \beta=45°\,;\; \gamma=70°$
e) $\alpha=?\,;\; \beta=80°\,;\; \gamma=17°$



Ley de senos

11) Dado el triángulo oblicuángulo, hallamos el dato pedido:



a) $B=40°\,;\; C=55°\,;\; c=8\,;\, b=?$
b) $A=35°\,;\; B=65°\,;\; b=8\,;\, a=?$
c) $a=7\,;\; b=9\,;\; B=60°\,;\, A=?$

d) $a=6$; $C=54°$; $B=72°$; $c=?$
e) $a=4$; $c=7$; $A=74°$; $C=?$
f) $a=9$; $A=67°$; $B=35°$; $b=?$

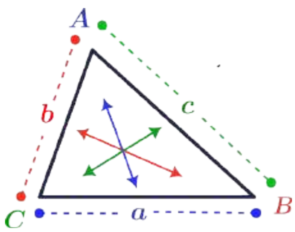
Ley de Cosenos

12) Dado el triángulo oblicuángulo, hallamos el dato pedido:

a) $a=5$; $b=9$; $C=60°$; $c=?$
b) $b=3$; $c=5$; $A=55°$; $a=?$
c) $a=4$; $b=7$; $c=12$; $C=?$
d) $b=6$; $c=10$; $A=57°$; $a=?$
e) $a=13$; $b=9$; $c=5$; $A=?$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

13) Resolvemos los triángulos



a) $A=58.22°$; $B=43.12°$; $a=15.32$

b) $C=64.18°$; $B=29.78°$; $c=25.19$ m

c) $B=18.5°$; $a=440$ cm ; $b=777$ cm

d) $B=24.5°$; $a=911$; $b=663$

e) $A=44.2°$; $b=67.7\ m$; $c=22.8\ m$

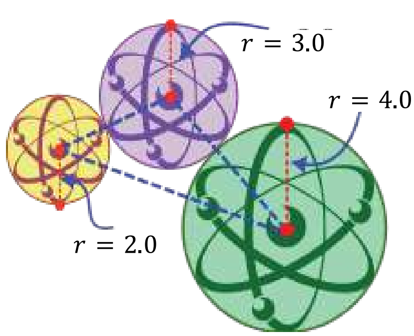
f) $C=58.5°$; $b=2.79$; $a=3.22$

g) $a=32$; $b=23$; $c=19$

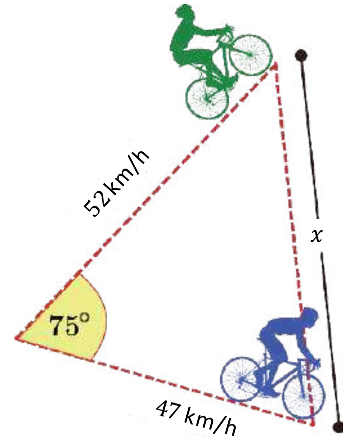
h) $a=1.54\ m$; $b=1.79\ m$; $c=1.83\ m$

i) $a=65$; $b=76$; $c=55$

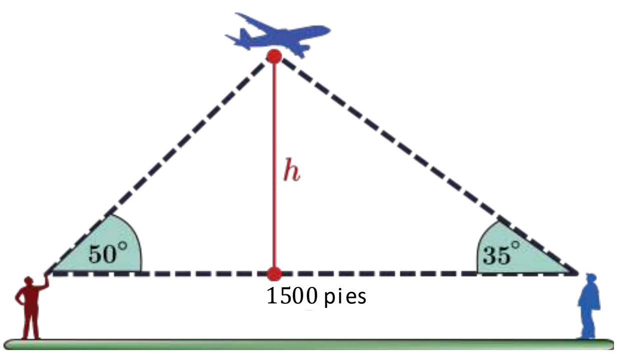
14) Tres átomos con radios atómicos de 2.0; 3.0 y 4.5 están dispuestos como en la figura. Encuentra la distancia entre los centros de los átomos y sus ángulos interiores.



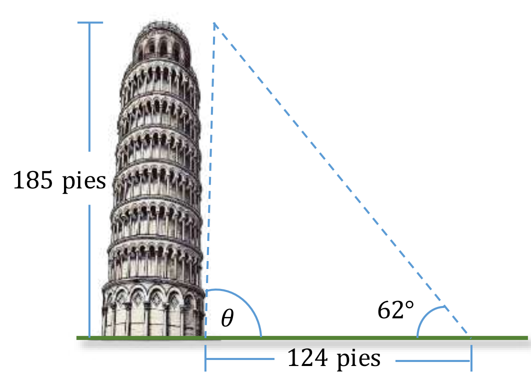
15) Dos ciclistas salen juntos de un punto común y viajan en direcciones distintas y tienen un ángulo de 75° entre ellos. Si cada uno recorre 52 km/h y 47 km/h ¿Cuál es la distancia que los separa?



16) Dos observadores que están separados por 1000 pies detectan un avión. Cuando el avión pasa sobre la línea que los une, cada uno hace una observación del ángulo de elevación al avión, como se indica en la figura. ¿A qué altura va el avión?



17) La famosa torre inclinada de Pisa tiene aproximadamente 185 pies de altura. A una distancia de 124 pies de la base de la torre, el ángulo de elevación a la punta de la torre es de 62°. Encontramos el ángulo θ indicado en la figura.

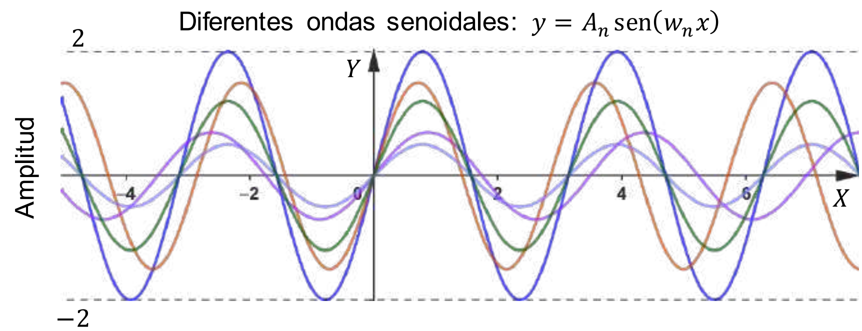


(Ejercicios y problemas recopilados)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

PRÁCTICA

En muchas profesiones se deben interpretar ondas, como el sonido, electrocardiogramas, entre otros, lo más importante es expresarlo de manera simple y sencilla. Una identidad nos indica que existe el mismo valor sin importar lo diferente de las representaciones que se tienen.



Entonces, las expresiones trigonométricas pueden ser expresadas de varias formas y todas ellas tienen el mismo valor.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

- ¿En lenguaje común cómo interpretas la palabra identidad?
- ¿Cuál es el número de tu cedula de identidad?
- ¿Por qué crees que una expresión trigonométrica se puede representar de varias formas?

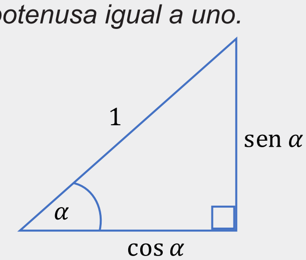
TEORÍA

Teorema Fundamental de la Trigonometría

Se considera como el Teorema fundamental de la trigonometría a la identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Que se deduce a partir del triángulo trigonométrico de hipotenusa igual a uno.

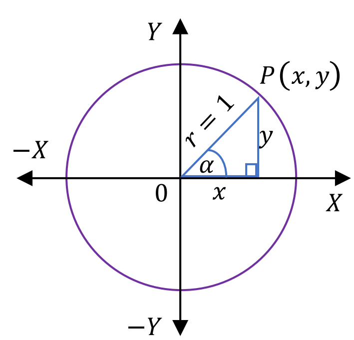


Fuente: Open, AI. (2024)

1. Identidades trigonométricas fundamentales

Una identidad trigonométrica es una igualdad establecida entre dos expresiones que involucren funciones trigonométricas de una o más variables (o ángulos), las cuales se verifican para todo valor admisible de dichas variables.

Las identidades o relaciones fundamentales se clasifican: Identidades reciprocas o inversas, identidades de cociente e Identidades Pitagóricas. A partir de la circunferencia trigonométrica de radio igual a uno (radio es uno solo por fines de simplificación)



Tendremos las siguientes definiciones de las funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{x}{y}$$

a) Relaciones inversas

Para obtener las identidades inversas, emplearemos las definiciones de las funciones trigonométricas anteriormente encontradas.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

b) Relaciones por cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: tangente y cotangente y tiene la propiedad de relacionar por medio de un cociente, las funciones trigonométricas de seno y coseno.

$$\tan\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad \tan\ \alpha = \frac{\operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

$$\operatorname{cotan}\ \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotan}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\ \alpha}$$

c) Relaciones pitagóricas

Si aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la circunferencia trigonométrica tendremos:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Si dividimos entre coseno a la anterior expresión trigonométrica tendremos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ \Rightarrow \ \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Si dividimos entre coseno a la anterior expresión trigonométrica tendremos:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \ \Rightarrow \ 1 + \operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

En resumen, tendremos:

Recíprocas o inversas	Por cociente	Pitagóricas
$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\tan\ \alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\ \alpha}$	$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\operatorname{cotan}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\ \alpha}$	$\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1$
$\tan\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotan}\alpha}$		$\operatorname{cosec}^2\alpha=1+\cot^2\alpha$

Curiosidades matemáticas

Los antiguos babilonios, auténticos maestros de las matemáticas, realizaron sus investigaciones utilizando un sistema de numeración en base 60 en lugar de base 10. Como resultado, hoy un minuto se divide en 60 segundos y un círculo en 360 grados.

Fuente: Open, AI. (2024)

Observación

De cada identidad, es siempre posible despejar algún valor necesario, lo que se constituye como consecuencia, sin dejar de ser identidad.

Sea:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

entonces

$$\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$$

Fuente: Open, AI. (2024)

La imagen que representa las identidades trigonométricas en la naturaleza, combinando elementos como ondas, espirales y montañas con curvas matemáticas sutiles.

Simplificación

En cualquier expresión trigonométrica, al momento de reemplazar las expresiones trigonométricas con identidades trigonométricas, se procede con el efecto de simplificación, así:

Esta es una expresión trigonométrica,

$$\cos x \cdot \tan x$$

Con la identidad

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

se tiene

$$\cos x \cdot \tan x = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= 1 \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

De este modo:

$$\cos x \cdot \tan x = \operatorname{sen} x$$

2. Demostración de identidades trigonométricas

Demostrar o verificar una identidad significa transformar un miembro de una identidad en otra igual al miembro opuesto, empleando relaciones fundamentales, mediante diferentes operaciones como factorización, operaciones con fracciones y otras. Algunas sugerencias para demostrar las identidades trigonométricas son las siguientes:

- Transformar el miembro más complicado.
- Expresamos las funciones en términos de seno y coseno, luego simplificar.
- Efectuar operaciones algebraicas y factorizaciones convenientes.

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$\operatorname{sen} A \cot A \sec A = 1$ reemplazando con identidades por cociente e inversa

$\operatorname{sen} A \cdot \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{1}{\cos A} = 1$ simplificando

$1 = 1$ queda demostrado la identidad

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{cotan}^2 \theta}{\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2 \theta \operatorname{cotan}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Empezando por el lado izquierdo de la identidad:

$$\frac{\operatorname{cotan}^2 \theta}{\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2 \theta \operatorname{cotan}^2 \theta = \operatorname{cotan}^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{cosec}^2 \theta \right)$$

$= \operatorname{cotan}^2 \theta (\sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta)$ Por identidades inversas

$= \operatorname{cotan}^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta (\sec^2 \theta - 1)$ Factorizando

$= \operatorname{cotan}^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta (\tan^2 \theta) = \frac{1}{\tan^2 \theta} \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta \cdot \tan^2 \theta$

$= \operatorname{cosec}^2 \theta$ La identidad queda demostrada

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \sec^2 x$$

$\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \sec^2 x$ Calculamos el m.c.m. $(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)$

$\frac{1 - \operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = 2 \sec^2 x$ Realizamos operaciones en la fracción y simplificamos

$\frac{2}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 2 \sec^2 x$ Aplicando identidad trigonométrica

$2 \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 2 \sec^2 x$ $\quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$2 \sec^2 x = 2 \sec^2 x$ La identidad queda demostrada

Ejemplo:

Demostramos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1+\sec x}{\operatorname{sen} x+\tan x}=\operatorname{cosec} x$$

$$\frac{1+\sec x}{\operatorname{sen} x+\tan x}=\operatorname{cosec} x$$ Expresamos en términos de seno y coseno

$$\frac{1+\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Realizamos las operaciones de adición y sustracción de fracciones

$$\frac{\frac{\cos x+1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x\ \cos x+\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Multiplicamos extremos y medios

$$\frac{\cos x\ (\cos x+1)}{\cos x\ (\operatorname{sen} x\ \cos x+\operatorname{sen} x)}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Simplificando

$$\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x\ \cos x+\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Sacamos el factor común del denominador

$$\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x\ (\cos x+1)}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Simplificamos nuevamente

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Queda demostrada la identidad

Actividad

Demostramos las siguientes identidades trigonométricas:

1) $\operatorname{sen} x+\cos x=\dfrac{1+\tan x}{\sec x}$

2) $\dfrac{\tan x}{\operatorname{cosec} x}=\operatorname{sen} x\cdot\tan x$

3) $\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{sen} x}+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=2\operatorname{cotan} x$

4) $\dfrac{\cos x+\operatorname{cotan} x}{\tan x+\sec x}=\csc x-\sin x$

5) $\dfrac{\operatorname{cotan} x}{\sec x-\tan x}=\operatorname{cosec} x+1$

6) $\dfrac{\sec x}{\tan x+\operatorname{cotan} x}=\operatorname{sen} x$

7) $\dfrac{1+\operatorname{cosec} x}{\sec x}-\operatorname{cotan} x=\cos x$

8) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\tan^2 x}=\operatorname{cotan}^2 x$

9) $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\sec x+\tan x$

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función de lo aprendido

- ¿Cuál es la importancia de aprender identidades trigonométricas?
- ¿Dónde se aplican las identidades trigonométricas?

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

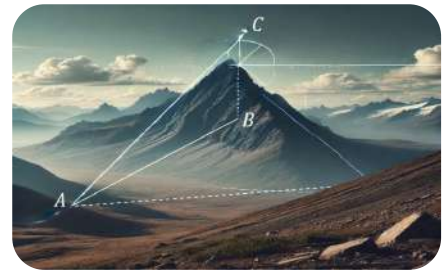
- Realizamos un formulario con todas las identidades trigonométricas.
- Realizamos un listado de situaciones en las que se podrían utilizar las identidades trigonométricas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

PRÁCTICA

En diferentes ocasiones podemos observar que al realizar mediciones o simplemente observaciones de objetos se pueden formar varios ángulos, incluso ángulos adyacentes, es decir, unos a continuación de otros como una suma de ángulos.

La pregunta es inmediata. ¿Cómo serán las relaciones o funciones trigonométricas para una suma de ángulos?



Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

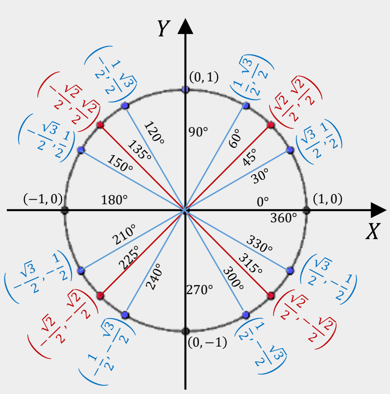
Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

- Analiza: ¿Un río tiene una única inclinación?
- ¿En tus calzados existe una sola inclinación?

TEORÍA

Círculo unitario

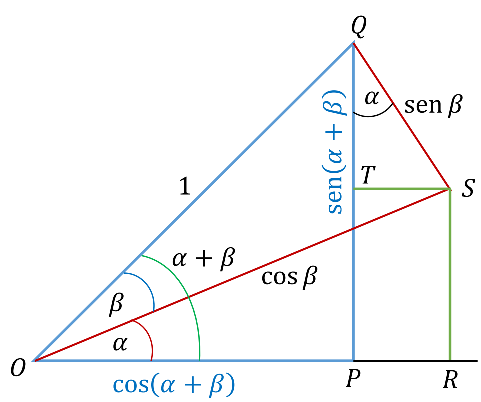
Un círculo de unidad es un círculo con radio 1 centrado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares. Se usa comúnmente en el contexto de trigonometría.




Fuente: Open, AI. (2024)

1. Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos

En trigonometría las identidades de suma y diferencia de dos ángulos son útiles para calcular los valores de las funciones trigonométricas de dos ángulos.



$$\operatorname{sen}\beta = \overline{SQ}\,; \qquad \cos\beta = \overline{OS} \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ} \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PT}}{\cos\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{PT} = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\cos\,\alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{TQ}}{\operatorname{sen}\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{TQ} = \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Luego en (2):

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\,\alpha\cdot\cos\,\beta + \cos\,\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

Del mismo modo, de la figura se tiene:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP} = \overline{OR} - \overline{PR} \qquad (3)$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\cos\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{OR} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{TS}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{PR}}{\text{sen}\,\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{PR} = \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

Luego en (3):

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}$$

El procedimiento de las anteriores deducciones también se puede aplicar en las identidades para la diferencia de ángulos:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}$$

Para la tangente:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

Del mismo modo se deduce:

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

Ejemplo:

Calculamos el valor exacto de $\sin 15°$.
Para calcular el valor exacto de $\sin 15°$ de $45°$ restaremos $30°$

$$\text{sen}15°=\text{sen}(45°-30°)=\text{sen}45°\cdot\cos30°-\cos45°\cdot\text{sen}30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\ 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo:

Halla el valor de $\sin 135°$. Para este procedimiento, apliquemos la suma de ángulos para seno y ángulos notables:

$$\text{sen}135°=\text{sen}(90°+45°)=\text{sen}90°\cdot\cos45°+\text{sen}45°\cdot\cos90°$$

$$= 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Recuerda

	$30°$	$45°$	$60°$
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Curiosidades matemáticas

Fuente: Open, AI. (2024)

Las tablas de senos para ángulos notables se conocían desde la antigüedad en India. El matemático Aryabhata, en el siglo V, ya había calculado valores de senos para ángulos como $30°$ y $60°$ usando métodos geométricos.

$$\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo:

Calcular el valor exacto de $\tan 15°$.

Para calcular el valor exacto de $\tan 15°$ de $45°$ restaremos $30°$ y aplicando la propiedad de tangente:

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \cdot \tan 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9-3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$

Ejemplo:

Simplificar la expresión:

$$A = \frac{2\,\text{sen}(30^o + x) - \cos x}{\text{sen}\,x}$$

Aplicando la fórmula de suma en el numerador de la expresión:

$$A = \frac{2\,\text{sen}(30^o + x) - \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{2\,(\text{sen}\,30^o \cos x + \cos 30^o\,\text{sen}\,x) - \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\,x\right) - \cos x}{\text{sen}\,x}$$

$$= \frac{\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \quad A = \sqrt{3}$$

Ejemplo:

Simplificar la siguiente expresión: $\quad N = \dfrac{\text{sen}^4 x - \cos^4 x}{\text{sen}\,x - \cos x} - \cos x$

Aplicando la diferencia de cuadrados y la identidad pitagórica: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, luego:

$$N = \frac{\text{sen}^4 x - \cos^4 x}{\text{sen}\,x - \cos x} - \cos x = \frac{(\text{sen}^2 x - \cos^2 x)(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\text{sen}\,x - \cos x} - \cos x$$

$$= \frac{(\text{sen}\,x - \cos x)(\text{sen}\,x + \cos x)(1)}{\text{sen}\,x - \cos x} - \cos x$$

$$= \text{sen}\,x + \cos x - \cos x = \text{sen}\,x$$

$$\Rightarrow \quad N = \text{sen}\,x$$

Actividad

Comprobamos las siguientes identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos:

1) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

2) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos(90° - x) = \text{sen}\,x$

4) $\tan(270° + x) = -\text{cotan}\,x$

5) $\cos(x+\pi) = -\cos x$

6) $\text{sen}(360°+x) = \text{sen}\,x$

Calculamos el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

7) $\cos 135°$	**10)** $\text{sen}(-30°)$	**13)** $\cos 15°$
8) $\text{sen}\,75°$	**11)** $\text{sen}\,105°$	**14)** $\cos 75°$
9) $\tan 135°$	**12)** $\cos 120°$	**15)** $\sec 75°$

2. Identidades trigonométricas de ángulos dobles

Para hallar las identidades de ángulo doble partiremos de la identidad suma de ángulos.

$$\sin(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Reemplazando $\beta = \alpha$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Reduciendo términos semejantes se tiene:

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$

Se realiza el mismo procedimiento para coseno y tangente.

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2}$$ Aplicando identidad del coseno doble

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\tan^2 x} + \operatorname{sen}^2 x}{2}$$ De la identidad fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2}$$ Suma de términos semejantes

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{2}$$ Simplificando

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$ Saquemos el factor común del denominador

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble:

$$\frac{1+\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \operatorname{cotan} x$$

$$\frac{1+(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \operatorname{cotan} x$$ Aplicando identidad del seno y coseno doble

$$\frac{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \operatorname{cotan} x$$ Suprimiendo paréntesis

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x} + \operatorname{sen}^2 x}{2}$$ De la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

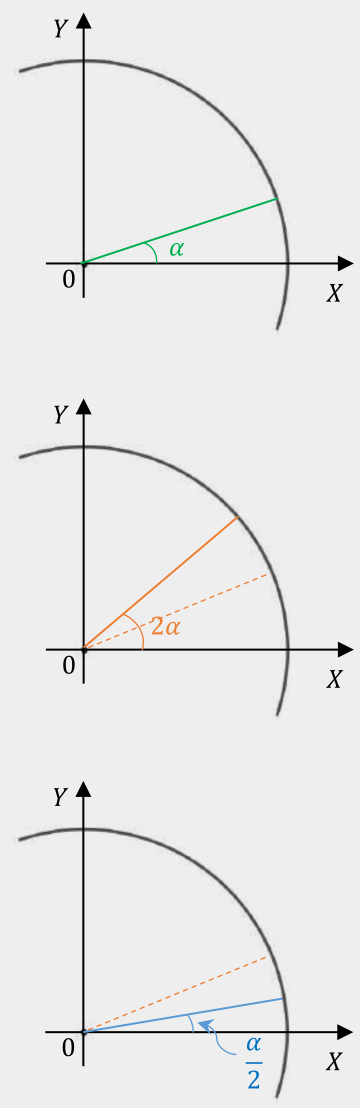
$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \operatorname{cotan} x$$ Suma de términos semejantes

$$\frac{2\cos^2 x}{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \operatorname{cotan} x$$ Simplificamos

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x$$ Identidades por cociente

$$\operatorname{cotan} x = \operatorname{cotan} x$$

En el círculo trigonométrico



Para tu conocimiento

El S.I. y la I.S.O. en su norma 80 000 admiten actualmente dos símbolos, como separadores de los números decimales: la coma "," y el punto "."

Por otro lado la ASALE, en las normas ortográficas recomienda utilizar el punto decimal: "."

Tomando en cuenta estos hechos, se utilizará el punto decimal como separador.

Ejemplo:

π≈3.14 ; e≈2.71 ; -0,93

$$-\frac{5}{2}=-2.5\,;\quad \frac{13}{5}=2.6\,;$$

$$-\frac{25}{100}=-0.25$$

Ejemplo:

Reducir la siguiente expresión:

$$M=\frac{\tan(45^o-x)-1}{\tan 2x}$$

Aplicando la propiedad de ángulo doble y suma de tangente:

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta};\qquad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

Luego:

$$M=\frac{\tan(45^o-x)-1}{\tan 2x}=\frac{\frac{\tan 45^o-\tan x}{1+\tan 45^o\tan x}-1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\frac{\frac{1-\tan x-(1+1\cdot\tan x)}{1+1\cdot\tan x}}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$=\frac{-2\tan x(1-\tan^2 x)}{2\tan x\,(1+\tan x)}=-\frac{(1-\tan x)(1+\tan x)}{1+\tan x}$$

$$=-(1-\tan x)=\tan x-1$$

$$\Rightarrow\quad M=\tan x-1$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble:

$$\sec(2x)=\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sec(2x)=\frac{1+\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1-\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$$

Aplicando la identidad por cociente

$$\tan^2 x=\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\sec(2x)=\frac{\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$$

Operando las fracciones y simplificando

$$\sec(2x)=\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}$$

Identidad fundamental pitagórica $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\sec(2x)=\frac{1}{\cos(2x)}$$

Coseno del ángulo doble e identidad recíproca

$$\sec(2x)=\sec(2x)$$

Actividad

Calculamos las siguientes identidades de ángulo doble:

1) $\dfrac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}\,x}-\dfrac{\cos(2x)}{\cos x}=\sec x$

2) $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}=\cos^2 x$

3) $\text{cosec}(2x)=\dfrac{1}{2}\sec x\cdot\text{cosec}\,x$

4) $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}=\text{sen}^2\,x$

5) $\dfrac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}\,x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{4\cos x}=\dfrac{1+\cos x}{4\cos x}$

6) $\dfrac{\cos(2x)}{\cos x-\text{sen}\,x}=\text{sen}\,x+\cos x$

3. Identidades trigonométricas de ángulo mitad

Las identidades trigonométricas del ángulo mitad se deducen a partir de las identidades del coseno del ángulo doble.

A partir de la propiedad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

Se deduce:

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad &\Rightarrow\ \cos(2x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &\Rightarrow\ \cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &\Rightarrow\ 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x) \end{aligned}$$

Reemplazando x por $\frac{x}{2}$:

$$2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}$$

Dato

Fuente: Open, AI. (2024)

Las identidades trigonométricas son utilizadas para la interpretación de equipos electrónicos.

Para hallar el ángulo mitad del coseno deduciremos a partir del coseno doble de un ángulo.

De la misma forma: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

Se deduce:

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad &\Rightarrow\ \cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &\Rightarrow\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \\ &\Rightarrow\ 2\cos^2 x = \cos(2x) + 1 \end{aligned}$$

Reemplazando x por $\frac{x}{2}$:

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}}$$

Para hallar el ángulo mitad de la tangente deduciremos a partir de las identidades por cociente y reemplazando x por $\frac{x}{2}$:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \Rightarrow\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

Otras identidades de la tangente del ángulo mitad son:

$$\boxed{\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}} \qquad \boxed{\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

Formulario

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Ejemplo:

Calcular las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo mitad de $45°$.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45°}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{45°}{2}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{45°}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{45°}{2}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica de ángulo mitad:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=\frac{\sqrt{(1-\cos x)^2}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Ejemplo:

Reducir la expresión:

$$E=\frac{2\cos^2 A-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}$$

Aplicando las identidades de suma y resta se tiene:

$$\frac{2\cos^2 A-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}=\frac{2\cos^2 A-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\right]^2}=\frac{2\cos^2 A-(\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A)}{2\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan A}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos A+\operatorname{sen} A\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\operatorname{sen}^2 A}{2\left(\frac{1-\tan A}{1+1\cdot\tan A}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{sen} A\right)^2}=\frac{(\cos A-\operatorname{sen} A)(\cos A+\operatorname{sen} A)}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{1+\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}\right)(\cos A+\operatorname{sen} A)^2}$$

$$=\frac{\cos A-\operatorname{sen} A}{\left(\frac{\frac{\cos A-\operatorname{sen} A}{\cos A}}{\frac{\cos A+\operatorname{sen} A}{\cos A}}\right)(\cos A+\operatorname{sen} A)}=\frac{\cos A-\operatorname{sen} A}{\frac{\cos A-\operatorname{sen} A}{\cos A+\operatorname{sen} A}\cdot(\cos A+\operatorname{sen} A)}=\frac{\cos A-\operatorname{sen} A}{\cos A-\operatorname{sen} A}=1$$

$$\Rightarrow E=1$$

Actividad

1) Demostramos las siguientes identidades trigonométricas del ángulo mitad:

a) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

b) $\cos x=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

c) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{cosec} x-\operatorname{cotan} x$

d) $\sin x=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

e) $2\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)-2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen} x$

f) $\frac{\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\cos x}$

2) Calculamos las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo mitad de:

a) $150°$ **b)** $30°$ **c)** $90°$ **d)** $120°$

4. Transformaciones de expresiones trigonométricas

a) Transformación de suma a producto y de producto a suma

Transformar una expresión trigonométrica es convertirla en otra equivalente que contiene funciones trigonométricas mucho más simples. Por ello que podemos indicar varios tipos de transformaciones.
De suma o de diferencia a producto.

Las sumas o las restas de razones trigonométricas pueden transformarse en productos de sí mismas.
De las fórmulas del seno de la suma y de la resta tenemos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad (1)$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \qquad (2)$$

Sumando las igualdades tenemos:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b \qquad (3)$$

Si transformamos:

Sumando

$$\left.\begin{aligned} a + b &= \alpha \\ a - b &= \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2a &= \alpha + \beta \\ 2b &= \alpha - \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{\alpha + \beta}{2} \;; \quad b = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Restando

Sustituyendo en la ecuación (3), se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Las otras fórmulas se obtienen analógicamente.
Transformación de la resta de senos en producto:

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Transformación de la suma de cosenos en producto:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Transformación de la resta de cosenos en producto:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

b) Transformación de producto a suma o diferencia

De las fórmulas del coseno del ángulo suma y el ángulo resta tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \qquad (4)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \qquad (5)$$

Sumando ambas identidades tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \qquad (6)$$

Despejando se tiene:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

Curiosidades matemáticas

Fuente: Open, AI. (2024)

Cuando se estudian fenómenos de interferencia de ondas, como en la acústica o la óptica, las transformaciones entre sumas y productos de ángulos son clave para entender cómo las ondas se combinan o cancelan entre sí, lo que es fundamental en el análisis de patrones de interferencia.

Fuente: Open, AI. (2024)

Los terremotos generan ondas sísmicas que viajan por la Tierra, estas ondas también tienen comportamiento sinusoidal. Al usar las transformaciones trigonométricas de suma a producto, es posible descomponer una señal compleja de ondas sísmicas en componentes más simples. Esto facilita el análisis de las frecuencias involucradas y la identificación de patrones, ayudando a prever réplicas o la magnitud de las ondas.

Fuente: Open, AI. (2024)

Transformación entre el producto del seno y coseno, en suma.

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

Transformación entre el producto del coseno y seno, en resta.

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

Transformación entre el producto de los senos, en suma.

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

Dato

Las identidades trigonométricas son utilizadas en el cálculo e interpretación de los movimientos sísmicos que se producen en el planeta.

Fuente: Open, AI. (2024)

Ejemplo:

Expresar las sumas y diferencias como productos.

a) $$\cos(5a)-\cos(3a)=-2\operatorname{sen}\left(\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\right)$$

$$=-2\operatorname{sen}\left(\frac{8\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=-2\operatorname{sen}(4\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow\quad \cos(5a)-\cos(3a)=-2\operatorname{sen}(4\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

b) $$\operatorname{sen}(9a)-\operatorname{sen}(7a)=2\cos\left(\frac{9\alpha+7\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{9\alpha-7\alpha}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{16\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=2\sin(8\alpha)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{sen}(9a)-\operatorname{sen}(7a)=2\sin(8\alpha)\sin\alpha$$

Ejemplo:

Expresar los productos como sumas o diferencias:

a) $$\operatorname{sen}(6x)\cdot\cos(3x)=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(6x+3x)+\operatorname{sen}(6x-3x)]$$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(9x)+\operatorname{sen}(3x)]=\frac{\operatorname{sen}(9x)}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{2}\quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}(6x)\cdot\cos(3x)=\frac{\operatorname{sen}(9x)}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{2}$$

b) $$\cos 80^\circ\cdot\operatorname{sen}20^\circ=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(80^\circ+20^\circ)-\operatorname{sen}(80^\circ-20^\circ)]$$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}100^\circ-\operatorname{sen}60^\circ]=\frac{\operatorname{sen}100^\circ}{2}-\frac{\operatorname{sen}60^\circ}{2}\quad\Rightarrow\quad \cos 80^\circ\cdot\operatorname{sen}20^\circ=\frac{\operatorname{sen}100^\circ}{2}-\frac{\operatorname{sen}60^\circ}{2}$$

Ejemplo:

Simplificar la expresión:

$$F=\frac{\operatorname{sen}4\beta+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 4\beta+\cos 2\beta}$$

Por las fórmulas suma y producto:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Luego:

$$F=\frac{\operatorname{sen}4\beta+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 4\beta+\cos 2\beta}=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{4\beta+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta-2\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{4\beta+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta-2\beta}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}(3\beta)\cdot\cos(\beta)}{\cos(3\beta)\cdot\cos(\beta)}=\frac{\operatorname{sen}(3\beta)}{\cos(3\beta)}=\tan(3\beta)$$

$$\Rightarrow\quad F=\tan(3\beta)$$

Actividad

1) Expresamos las sumas y diferencias como productos:

a) $\operatorname{sen}(6x)-\operatorname{sen}(4\alpha)$
b) $\operatorname{sen}(7\beta)+\operatorname{sen}(3\beta)$
c) $\cos(5\beta)+\cos(4\beta)$
d) $\cos(6x)-\cos(3x)$
e) $\operatorname{sen}(5x)+\operatorname{sen}(3x)$
f) $\operatorname{sen}(5\alpha)-\operatorname{sen}(2\alpha)$

2) Demostremos las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cos(8x)+\cos(6x)}{\operatorname{sen}(8x)-\operatorname{sen}(6x)}=\tan x$ **b)** $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos\alpha+\cos(3\alpha)}=\tan(2\alpha)$ **c)** $\dfrac{\cos(12x)+\cos(8x)}{\operatorname{sen}(12x)-\operatorname{sen}(8x)}=\cot(2x)$

3) Reducimos las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(5x)+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(4x)-\operatorname{sen}(2x)}$ b) $\dfrac{\sin(7\alpha)-\operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos(7\alpha)+\cos(3\alpha)}$ $c)$ $\dfrac{\operatorname{sen}80°+\operatorname{sen}20°}{\cos 20°-\cos 80°}$

4) Expresamos los productos como sumas o diferencias:

a) $\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(2x)$
b) $\cos(6x)\cdot\cos(4x)$
c) $\operatorname{sen}(7x)\cdot\cos(5x)$
d) $\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(2x)$
e) $\cos(6x)\cdot\operatorname{sen}(4x)$
f) $\operatorname{sen}(10x)\cdot\operatorname{sen}(4x)$

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función a lo aprendido:

- ¿Qué parecido encuentras en las gráficas de la función seno y de la función coseno?
- ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las funciones seno y coseno?
- ¿Cómo las identidades del ángulo mitad nos ayudan a resolver problemas en nuestra comunidad?

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Ampliamos el formulario de identidades trigonométricas con los de suma y resta, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, transformación de suma a producto y de producto a suma.
- Realizamos un esquema referido a identidades trigonométricas de suma y resta, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, transformación de suma a producto y de producto a suma para compartir en la clase.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

PRÁCTICA

¿Jugaste alguna vez “ANGRY BIRDS”?

El ángulo que elijes para lanzar a las aves es determinante para poder alcanzar los objetivos a derribar, dependiendo de este ángulo y la fuerza designada podrás llegar a derribar los objetivos.

Cuando realizas el lanzamiento de un objeto, siempre será importante el ángulo con el cual realices dicho lanzamiento.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

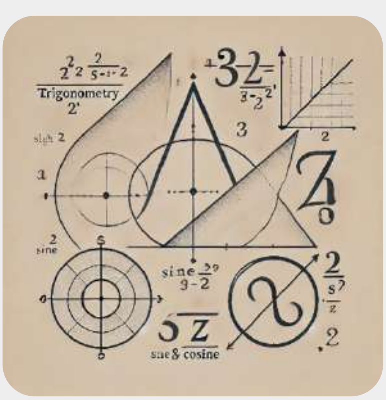
Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué deporte se practica realizando lanzamientos? Menciona tres.
- ¿Qué relación tiene las ecuaciones trigonométricas con el lanzamiento de jabalina?
- ¿Qué deporte es tu agrado y lo practicas?

TEORÍA

Ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones trigonométricas es necesario conocer y emplear las operaciones básicas del algebra como la factorización, productos notables, operaciones con fracciones, es primordial conocer las funciones e identidades trigonométricas.



Fuente: Open, AI. (2024)

1. Raíces de una ecuación trigonométrica

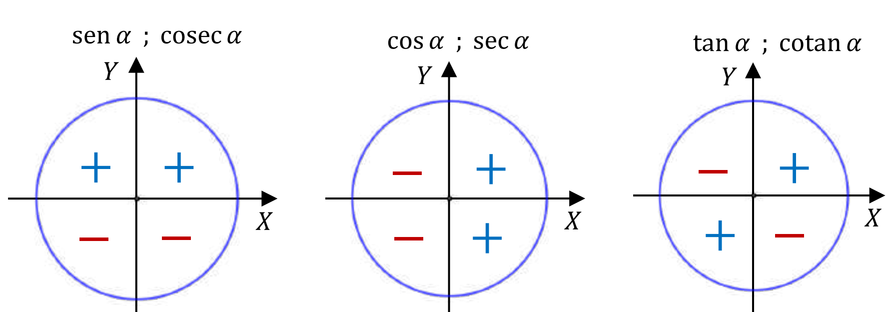
Una ecuación trigonométrica es una igualdad que incluye funciones trigonométricas, como seno o coseno y que se cumple solo para ciertos valores del ángulo.

A los valores de la variable que verifiquen la ecuación trigonométrica son llamados raíces o soluciones de la ecuación trigonométrica.

Para resolver las ecuaciones trigonométricas debemos tener en cuenta lo siguiente:

Valores positivos	Valores negativos
$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$	$-\sin\alpha = \operatorname{sen}(180° + \alpha)$
$\cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$	$-\cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$
$\tan\alpha = \tan(180° + \alpha)$	$-\tan\alpha = \tan(360° + \alpha)$

Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.



Conocido el valor de la incógnita en el primer cuadrante se puede considerar su equivalente en cualquier otro cuadrante de la siguiente manera.

$$(180°-x)\quad II\ C \qquad (180°+x)\quad III\ C \qquad (360°-x)\quad IV\ C$$

2. Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales (lineales)

Toda ecuación trigonométrica tiene una solución principal y una solución general, la solución principal está en los intervalos del valor principal con menor valor posible y de una función trigonométrica inversa.

La solución general de una ecuación trigonométrica es el conjunto de valores que satisfacen la ecuación y no están en los intervalos de valores principales de una función trigonométrica inversa.

Para resolver una ecuación trigonométrica es necesario despejar la variable, para hallar el valor que satisfaga la igualdad, si la ecuación trigonométrica tiene más de una función trigonométrica es preciso convertir a una sola función mediante las identidades trigonométricas ya conocidas, si es necesario aplicar operaciones algebraicas como la factorización y otros.

Para resolver ecuaciones trigonométricas, sigue estos pasos generales:

- Simplifica la ecuación
- Aisla la función trigonométrica
- Resuelve para el ángulo
- Considera el período de la función trigonométrica
- Verifica las soluciones dentro del intervalo dado
- Verifica las soluciones

Recuerda

$$\text{sen}^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

$$\text{cosec}^2 x = 1+\text{cotan}^2 x$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{\text{cosec}\, x}; \quad \cos x = \frac{1}{\sec x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\text{cotan}\, x}$$

Ecuación trigonométrica

Las primeras ecuaciones trigonométricas fueron desarrolladas por astrónomos en la antigua Babilonia y Grecia, quienes las utilizaban para medir distancias entre planetas y estrellas.

Para calcular las soluciones principales y las soluciones generales nos guiaremos con el siguiente cuadro:

Ecuación trigonométrica	Solución principal	Solución general Sistema sexagesimal	Solución general Sistema radial
$\text{sen}\, x = A$	$x = (180°-x_1)$	$x_G = k\cdot 180°+(-1)^n x_1$	$x_G = k\cdot\pi\ \text{rad}+(-1)^n x_1$
$\cos x = A$	$x = (360°-x_1)$	$x_G = k\cdot 360°\pm x_1$	$x_G = k\cdot 2\ \text{rad}\pm x_1$
$\tan x = A$	$x = (180°+x_1)$	$x_G = k\cdot 180°+x_1$	$x_G = k\cdot\pi\ \text{rad}+x_1$

Recordamos los valores notables de las funciones trigonométricas de ángulos más utilizados.

DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\text{sen}\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $2\cos x = 1$

$$2\cos x = 1 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 60° \quad \text{ó} \quad x_1 = \frac{\pi}{3}$$

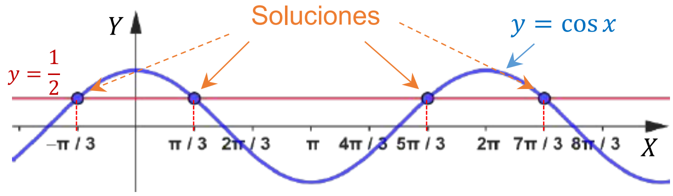
Recordemos que para convertir 60° a radianes debemos aplicar la fórmula: $\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi \text{ rad}}$

$$60° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \;\wedge\; 300° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

Solución principal:

$$x = (360° - x_1) = (360° - 60°) = 300°$$

$$\Rightarrow\; x = 300° \quad \text{ó} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$



Solución general:

$$x_G = k \cdot 360° \pm 60° \quad \text{ó} \quad x_G = k \cdot 2\pi \text{ rad} \pm \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo:

Encontrar la solución de la siguiente ecuación trigonométrica: $2\,\text{sen}\, x = 1$

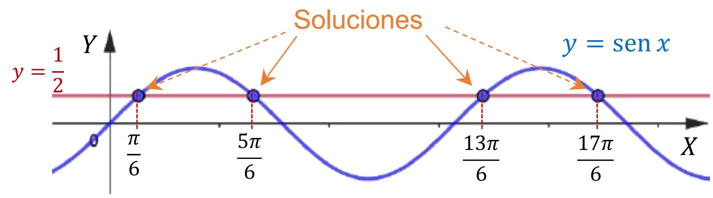
$$2\,\text{sen}\, x = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}\, x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 30° \quad \text{ó} \quad x_1 = \frac{\pi}{6}$$

Solución principal:

$$x = (180° - x_1) = (180° - 30°) = 150°$$

$$\Rightarrow\; x = 150° \quad \text{ó} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$



Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° + (-1)^n 30° \quad \text{ó} \quad x_G = k \cdot 2\pi \text{ rad} \pm \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación $2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, si $0^o \leq x \leq 360^o$.

$$2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Para $k=0, 1$ en la solución fundamental se tiene:

$$x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105^o \;\Rightarrow\; x_1 = 105^o$$

$$x_2 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} = 15^o \;\Rightarrow\; x_2 = 15^o$$

De donde: $x_1, x_2 \in [0°; 360°]$

Ejemplo:

Encontrar la solucion de la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos(2x) = \frac{\sqrt{12}}{4}$

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; 2x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30° \;\Rightarrow\; x_1 = 15°$$

Solución principal:

$$2x = (360° - x_1) \Rightarrow 2x = 360° - 15° = 345°$$

$$\Rightarrow x = \frac{345°}{2} = 172.5°$$

$$\Rightarrow x = 172.5°$$

Solución general:

$$2x_G = k \cdot 360° \pm 15° \qquad 2x_G = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x_G = \frac{k \cdot 360° \pm 15°}{2} \qquad x_G = \frac{k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$x_G = k \cdot 180° \pm 7.5° \qquad x_G = k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{12}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$4\cos x = \sqrt{8}$$

$$4\cos x = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

$$\Rightarrow x_1 = 45°$$

Solución principal:

$$x = (360° - x_1) \Rightarrow x = 360° - 45° = 315°$$

$$\Rightarrow x = 315°$$

Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° \pm 45° \qquad x_G = k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación para x, si $0° \leq x \leq 3\,60°$: $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$

Despejando la incógnita x de la ecuación dada:

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow 2x = \arctan\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}$$

Para determinar los valores en la primera vuelta, si k=0,1,2,3 en la solución fundamental se tiene:

$$2x_1 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$$

$$2x_2 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{3} = 120°$$

$$2x_3 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6} = 210°$$

$$2x_4 = \arctan\sqrt{3} + \pi \cdot 3 = \frac{\pi}{3} + 3\pi \Rightarrow x_4 = \frac{10\pi}{6} = 300°$$

De donde: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0°; 360°]$

Nota importante

Para resolver este tipo de ejercicios se debe reemplazar $2x = 0$ en la solución principal y en la solución general luego recién despejar y simplificar.

Regla para hallar las soluciones fundamentales para tangente:

$\tan x = a \Rightarrow x = \arctan a + \pi k$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Actividad

1) Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ **b)** $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **c)** $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{4}$

d) $\tan \beta = \frac{3}{7}$ **e)** $3\cos x - 1 = 0$ **f)** $4\operatorname{sen} x - 1 = 0$

2) Solucionamos las siguientes ecuaciones con funciones trigonométricas:

a) $3\tan \alpha = \sqrt{3}$ **b)** $6\cos(2x) = \sqrt{18}$ **c)** $2\tan \alpha = \sqrt{3} + 2\tan \alpha$

d) $8\operatorname{sen}(2\theta) = 4\sqrt{3}$ **e)** $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $\cos(4x) - 2 = 0$

a) Ecuaciones trigonométricas de la forma $m \cdot \text{sen}\, x = n \cdot \cos x$

Las ecuaciones trigonométricas que tiene la forma $m \cdot \text{sen}\, x = n \cdot \cos x$, se debe realizar las operaciones adecuadas para expresar en forma de cociente:

$$\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{n}{m}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $3 \cdot \text{sen}\, x = \sqrt{27} \cdot \cos x$

$3 \cdot \text{sen}\, x = \sqrt{27} \cdot \cos x$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60° \Rightarrow x_1 = 60°$$

Solución principal:

$$x = (180° + x_1)$$
$$\Rightarrow x = 180° + 60° = 240°$$
$$\Rightarrow x = 240°$$

Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° \pm 60°$$

$$x_G = k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica: $4 \cdot \sin x = 4 \cdot \cos x$

$4 \cdot \text{sen}\, x = 4 \cos x$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = 1$$

$$\Rightarrow x = \tan^{-1}(1) = 45° \Rightarrow x_1 = 45°$$

Solución principal:

$$x = (180° + x_1)$$
$$\Rightarrow x = 180° + 45° = 225°$$
$$\Rightarrow x = 225°$$

Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° \pm 45°$$

$$x_G = k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo:

Determinamos la siguiente ecuación trigonométrica $6 \cdot \text{sen}\, x = \sqrt{12} \cos x$

$6 \cdot \text{sen}\, x = \sqrt{12} \cos x$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30° \Rightarrow x_1 = 30°$$

Solución principal:

$$x = (180° + x_1)$$
$$\Rightarrow x = 180° + 30° = 210°$$
$$\Rightarrow x = 210°$$

Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° \pm 30°$$

$$x_G = k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{6}$$

b) Ecuaciones trigonométricas de la forma $\alpha(Ax+b)=N$

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica: $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \tan^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}; \qquad 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{12}; \qquad \frac{7\pi}{12} = 105°$$

Solución principal:

$$x = (180° + x\_1)$$
$$\Rightarrow x = 180° + 105° = 285°$$
$$\Rightarrow x = 285°$$

Solución general:

$$x_G = k \cdot 180° \pm 105°$$

$$x_G = k \cdot \pi \pm \frac{7\pi}{12}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\,;\qquad 45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}\qquad\Rightarrow\qquad x_1=\frac{5\pi}{6}\quad\text{ó}\quad x_1=150^\circ$$

Solución principal:

$$x=(180^\circ-x_1)\quad\Rightarrow\quad x=180^\circ-150^\circ=30^\circ\quad\Rightarrow\quad x=30^\circ$$

Solución general:

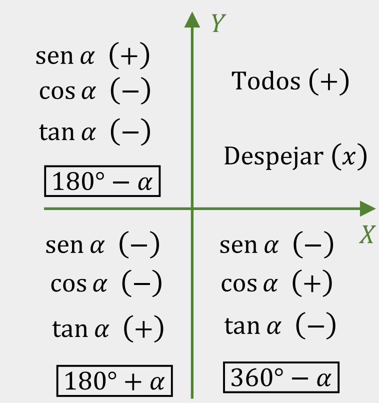
$$x_G=k\cdot180^\circ+(-1)^n150^\circ$$

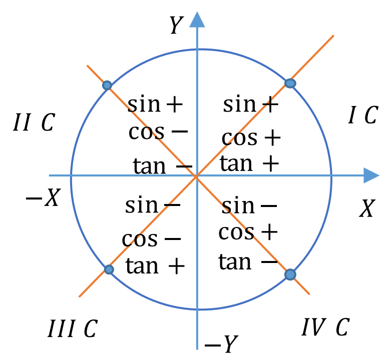
$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=k\cdot\pi+(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{2}=k\cdot\pi+(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad x=2\,k\cdot\pi+\frac{\pi}{3}+(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad x_G=2\,k\cdot\pi+\frac{\pi}{3}+(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{6}$$

Signos de las funciones en cada cuadrante





Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $\tan(3x+15^\circ)=1$

$$\tan(3x+15^\circ)=1$$

$$\Rightarrow\quad 3x+15^\circ=\tan^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow\quad 3x+15^\circ=45^\circ\quad\Rightarrow\quad 3x=45^\circ-15^\circ$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{30^\circ}{3}\quad\Rightarrow\quad x_1=10^\circ$$

Solución principal:

$$x=(180^\circ+x_1)$$

$$\Rightarrow\quad x=180^\circ+10^\circ=190^\circ$$

$$\Rightarrow\quad x=190^\circ$$

Solución general:

$$x_G=k\cdot180^\circ+10^\circ$$

$$x_G=k\cdot\pi+\frac{\pi}{18}$$

Ejemplo:

Hallar la solución principal de la siguiente ecuación: $3\tan^2x-\sec^2x-1=0$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sec^2x=1+\tan^2x$:

$$3\tan^2x-\sec^2x-1=0\quad\Rightarrow\quad 3\tan^2x-(1+\tan^2x)-1=0\quad\Rightarrow\quad 3\tan^2x-1-\tan^2x-1=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\tan^2x=2\quad\Rightarrow\quad(\tan x)^2=1\quad\Rightarrow\quad\tan x=\pm1$$

$$\Rightarrow\quad x=\tan^{-1}(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{4}$$

Actividad

– **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

1) $4\,\text{sen}\,\alpha=3\cos\alpha$

2) $2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$

3) $\tan(3x-15^\circ)=1$

3) $10\,\text{sen}\,x\,6-5\cos(2x)=0$

4) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

5) $\tan(3x-15^\circ)=\sqrt{3}$

6) $9\,\text{sen}^2\,\alpha=3\cos\alpha$

7) $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

8) $\text{sen}(3x-60^\circ)=\frac{1}{2}$

c) Ecuaciones trigonométricas resueltas por factorización

Este método consiste en que uno de los miembros sea cero y al otro miembro se lo puede factorizar, convirtiéndolo en dos factores a los que se iguala a cero por separado para después proceder al despeje.

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica: $2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x \cdot (2 \text{ sen } x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad 2 \sin x - 1 = 0$

De donde:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \cos^{-1}(0) \Rightarrow x_1 = 90°$

$2 \text{ sen } x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30° \quad \Rightarrow \quad x_2 = 30°$

Solución principal:

$x = (360° \pm x_1)$

$\Rightarrow x = 360° \pm 90°$

$\Rightarrow x_3 = 450°, \; x_4 = 270°$

$x = (360° - x_2)$

$\Rightarrow x = 180° - 30°$

$\Rightarrow x_5 = 150°$

Solución general:

$x_G = k \cdot 360° \pm 90°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x_G = k \cdot 180° + (-1)^n 30°$

$x_G = k \cdot \pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

Ejemplo:

Determinamos las soluciones de la ecuación: $2\cos^2 x - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x - 1 = 0$

De donde:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \cos^{-1}(0) \Rightarrow x_1 = 90°$

$2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° \Rightarrow x_2 = 60°$

Solución principal:

$x = (360° - x_1)$

$\Rightarrow x = 360° - 90°$

$\Rightarrow x_3 = 270°$

$x = (360° - x_2)$

$\Rightarrow x = 360° - 60°$

$\Rightarrow x_4 = 300°$

Solución general:

$x_G = k \cdot 360° \pm 90°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x_G = k \cdot 360° \pm 60°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Ejemplo:

Determinamos las soluciones de la ecuación: $\tan x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos x = 0$

$\tan x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x \cdot \left(\tan x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad \tan x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

De donde:

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \cos^{-1}(0) \Rightarrow x_1 = 90°$

$\tan x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$

$\Rightarrow x_2 = 30°$

Solución principal:

$x = (360° \pm x_1)$

$\Rightarrow x = 360° \pm 90°$

$\Rightarrow x_3 = 270°$

$x = (180° + x_2)$

$\Rightarrow x = 180° + 30°$

$\Rightarrow x_4 = 210°$

Solución general:

$x_G = k \cdot 360° \pm 90°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x_G = k \cdot 180° + 30°$

$x_G = k \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$

Actividad

– **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

1) $2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0$

2) $2\cos x \cdot \tan x = 1$

3) $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x = 0$

4) $3 \text{ sen } x \cdot \cos x - 2 \text{ sen } x = 0$

5) $\tan x \cdot \text{sen } x - \sqrt{3} \cdot \text{sen } x = 0$

6) $2\cos x - 4 \text{ sen } x \cdot \cos x = 0$

3. Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales (Cuadráticas)

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $\sin^2 x = \dfrac{3(1-\cos x)}{2}$

Desarrollando:

$2(1-\cos^2 x) = 3-3\cos x$

$\Rightarrow\ 2-2\cos^2 x = 3-3\cos x$

$\Rightarrow\ 2\cos^2 x-3\cos x+1 = 0$

$\Rightarrow\ (2\cos x-1)(\cos x-1) = 0$

$\Rightarrow 2\cos x-1 = 0 \quad \vee \quad \cos x-1 = 0$

$\Rightarrow\ \cos x = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = 1$

De donde:

$\cos x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 60°$

$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \cos^{-1}(1) \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0°$

Solución principal:

$x = (360° \pm x_1)$

$\Rightarrow \quad x = 360° \pm 60°$

$\Rightarrow x_3 = 420°,\ x_3 = 300°$

$x = (360° + x_2)$

$\Rightarrow \quad x = 360° + 0°$

$\Rightarrow \quad x_4 = 360°$

Solución general:

$x_G = k \cdot 360° \pm 60°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

$x_G = k \cdot 360° + 0°$

$x_G = k \cdot 2\pi + 0$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $8\cos^3 x-6\cos x+3-4\cos^2 x = 0$

Desarrollando:

$8\cos^3 x-4\cos^2 x-6\cos x+3 = 0$

$\Rightarrow 4\cos^2 x\,(2\cos x-1)-3(2\cos x-1) = 0$

$\Rightarrow\ (2\cos x-1)(4\cos^2 x-3) = 0$

$\Rightarrow 2\cos x-1=0 \quad \vee \quad 4\cos^2 x-3 = 0$

$\Rightarrow\ \cos x = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad \cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

De donde:

$\cos x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 60°$

$\cos^2 x = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

$\Rightarrow \quad x = \cos^{1}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right); \qquad x = \cos^{1}\left(-\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right);$

$\Rightarrow \quad x_2 = 30°, \quad x_3 = 150°$

Solución principal:

$x = (360° \pm x_1)$

$\Rightarrow \quad x = 360° \pm 60°$

$\Rightarrow x_4 = 420°, \qquad x_5 = 300°$

$x = (360° \pm x_2)$

$\Rightarrow \quad x = 360° \pm 30°$

$\Rightarrow x_6 = 390°,\ x_7 = 330°$

$x = (360° \pm x_3)$

$\Rightarrow \quad x = 360° \pm 150°$

$\Rightarrow x_8 = 510°, \quad x_9 = 210°$

Solución general:

$x_G = k \cdot 360° \pm 60°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

$x_G = k \cdot 360° \pm 30°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$

$x_G = k \cdot 360 \pm 150°$

$x_G = k \cdot 2\pi \pm \dfrac{5\pi}{6}$

Ejemplo:

Hallar los valores principales de los ángulos que satisfacen la ecuación: $2\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

Despejando la incógnita:

$$2\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Para $k = 0$ en la solución fundamental se tiene:

$$\frac{x_1}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad x_1=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi \quad\Rightarrow\quad x_1=\pi$$

$$\frac{x_2}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad x_2=3\pi-3\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi \quad\Rightarrow\quad x_2=2\pi$$

Por tanto, las soluciones principales son π y 2π.

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica: $3\ \text{sen}\ x+2\cos^2 x+3=0$

Desarrollando:

$3\ \text{sen}\ x-2(1-\text{sen}^2 x)+3=0$

$\Rightarrow 3\ \text{sen}\ x-2+2\ \text{sen}^2 x+3=0$

$\Rightarrow 2\ \text{sen}^2 x+3\ \text{sen}\ x+1=0$

$\Rightarrow (2\ \text{sen}\ x+1)(\text{sen}\ x+1)=0$

$\Rightarrow 2\ \text{sen}\ x+1=0 \quad \vee \quad \text{sen}\ x+1=0$

$\Rightarrow \text{sen}\ x=-\frac{1}{2} \quad \vee \quad \text{sen}\ x=-1$

De donde:

$\text{sen}\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x_1=-30°$

$\text{sen}\ x=-1 \Rightarrow x=\text{sen}^{-1}(-1)$

$\Rightarrow x_2=-90°$

Solución principal:

$x=(180°-x_1)$

$\Rightarrow x=180°-(-30°)$

$\Rightarrow x_3=210°$

$x=(180°-x_2)$

$\Rightarrow x=180°-(-90°)$

$\Rightarrow x_4=270°$

Solución general:

$x_G=k\cdot 360°+(-1)^n 60°$

$x_G=k\cdot 2\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

$x_G=k\cdot 180°+(-1)^n(-90°)$

$x_G=k\cdot\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $3\tan x-2\ \text{cotan}\ x+1=0$

Desarrollando:

$3\tan x-2\cdot\frac{1}{\tan x}+1=0$

$\Rightarrow 3\tan^2 x-2+\tan x=0$

$\Rightarrow 3\tan^2 x+\tan x-2=0$

$\Rightarrow (3\tan x-2)(\tan x+1)=0$

$\Rightarrow 3\tan x-2 \quad \vee \quad \tan x+1=0$

$\Rightarrow \tan x=\frac{2}{3} \quad \vee \quad \tan x=-1$

De donde:

$\tan x=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x_1=33°41'$

$\tan x=-1 \Rightarrow x=\tan^{-1}(-1) \Rightarrow x_2=-45°$

Solución principal:

$x=(180°+x_1)$

$\Rightarrow x=180°+33°41'$

$\Rightarrow x_3=213°41'$

$x=(180°+x_2)$

$\Rightarrow x=180°+(-45°)$

$\Rightarrow x_4=135°$

Solución general:

$x_G=k\cdot 180°\pm 33°41'$

$x_G=k\cdot 180°+135°$

$x_G=k\cdot\pi+\frac{3\pi}{4}$

Actividad

– **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

1) $\text{sen}^2 x+\text{sen}\ x=6$

2) $2\cos^2 x-\cos x-2=0$

3) $4\tan^2 x+12\tan x-27=0$

4) $8\ \text{sen}^2 x-11\ \text{sen}\ x+3=0$

5) $2\cos x=1-\text{sen}\ x$

6) $8+\text{sen}\ x=10\cos^2 x$

4. Resolución de problemas con ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas tienen su aplicabilidad en la vida cotidiana en la realización de cálculos en ingeniería, telecomunicaciones, situaciones de física y otros.

a) Movimiento parabólico

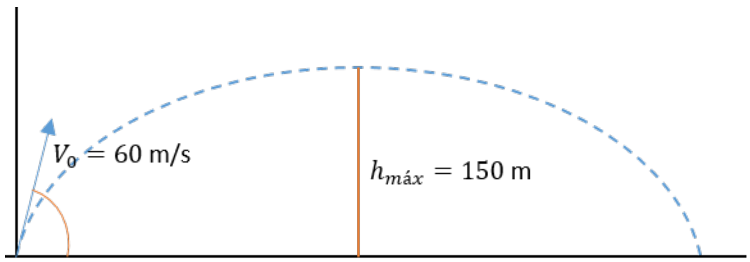
Ejemplo:

Un proyectil es disparado al aire con una velocidad de 60 m/s y alcanza una altura máxima de 150 metros. Calcular el ángulo de lanzamiento.

$$h_{máx} = \frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x}{2g} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{h_{máx} \cdot 2g}{V_0^2} \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{h_{máx} \cdot 2g}{V_0^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{150 \cdot 2 \cdot (9.8)}{60^2}}\right) \approx 64°38'$$

$$\Rightarrow \quad x = 64°38'$$



b) Aeronáutica

Cuando un avión se mueve más rápido que el sonido, sus ondas sonoras forman un cono. La fórmula que relaciona la velocidad del avión en unidades Mach (1 Mach $= 1368$ km/h), con el ángulo α del vértice del cono de ondas es:

$$\frac{1}{M} = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Si la velocidad de un avión es Mach 2, determinar el valor de α.

Datos: $M = 2,\ \alpha = ?$

$$\frac{1}{M} = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2 \cdot 30°$$

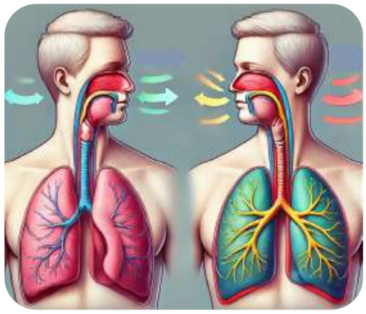
$$\Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

Fuente: Open, AI. (2024)

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función a lo aprendido. Todo lo que se repite (es cíclico o periódico) puede expresarse como una función trigonométrica a través de ecuaciones, como el proceso de respiración.

- ¿Dónde se aplican las ecuaciones trigonométricas?
- ¿Cómo las ecuaciones trigonométricas, nos ayudan a resolver problemas en nuestra comunidad?
- ¿Qué utilidad tienen las ecuaciones trigonométricas en otras áreas de saberes y conocimientos?



Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Realizamos un esquema y mapa conceptual del tema de ecuaciones trigonométricas.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

PRÁCTICA

Hoy en día han proliferado mucho los pedidos y entregas de distintos productos de consumo a través de mensajes, los llamados "delivery"

Jhovana desea realizar una compra de comida rápida, para lo cual hace un pedido por delivery, desde su celular.

El encargado le solicita que envíe la dirección de su domicilio para la entrega de lo solicitado. Ella envía su ubicación en tiempo real, de esa manera el encargado sabe dónde dirigirse y llegará sin mayor problema al domicilio de Jhovana.

Fuente: Open, AI. (2024)

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior:

- ¿Cómo funciona lo de enviar la ubicación en tiempo real?
- También se da la información a través de coordenadas ¿Qué es eso?

TEORÍA

Descartes

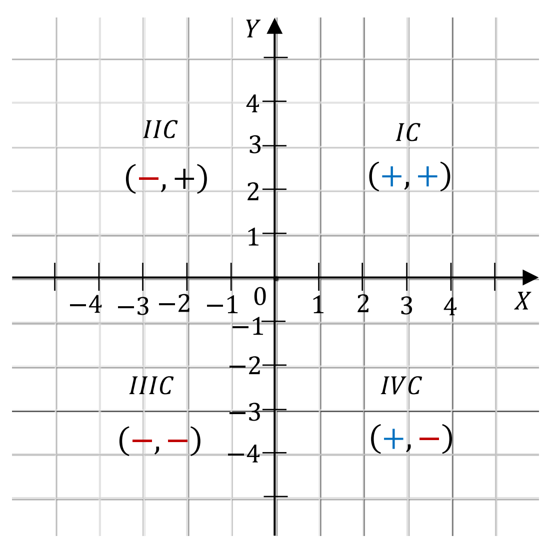
Fuente: Open, AI. (2024)

El nacimiento de la geometría analítica se le atribuye a Descartes, por el apéndice La Geometría incluido en su discurso del método, publicado en 1637.

Pierre de Fermat ya conocía y utilizaba el método antes de que este procedimiento sea publicado por Descartes.

1. Sistema de coordenadas rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares es denominado plano cartesiano en honor a René Descartes, se conforma por dos rectas llamadas ejes que se cortan perpendicularmente en el origen de coordenadas formando cuatro cuadrantes. La recta horizontal es llamada eje de abscisas o eje de las "X" y la recta vertical es llamada eje de las ordenadas o ejes de las "Y".

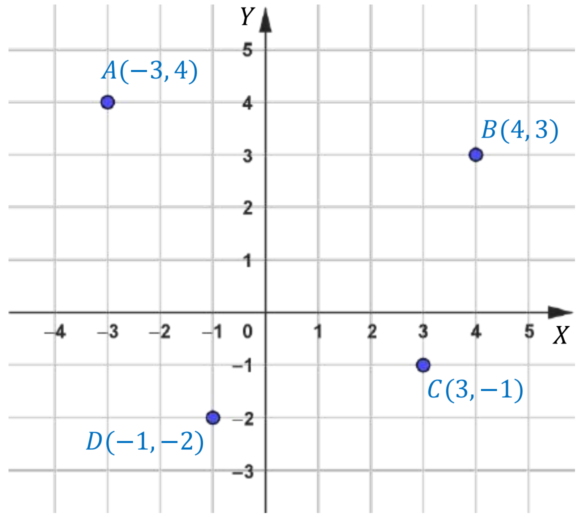


a) Par ordenado

En matemática, un par ordenado es una pareja de elementos, dónde se distingue un elemento de otro. El par ordenado cuyo primer elemento es "X" y el segundo elemento es "Y" se denota por (x, y).
El primer valor "x" pertenece al eje horizontal "X" o eje de las abscisas; y el segundo elemento "y" pertenece al eje vertical "Y" o eje de las ordenadas; (x, y).

Ejemplo:

Graficar los puntos en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados $A(-3,4)$; $B(4,3)$; $C(3,-1)$ y $D(-1,-2)$.

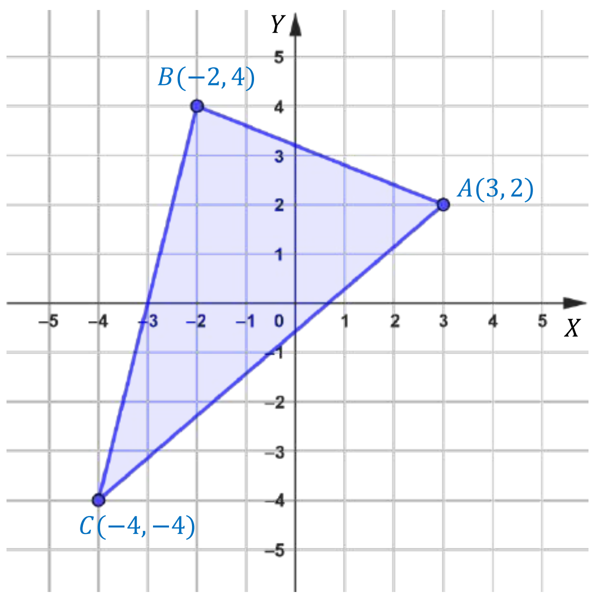


Geometría Analítica

La geometría analítica relaciona la geometría con el álgebra mediante el sistema de coordenadas rectangulares, más conocido como el plano cartesiano, en el cual se pueden representar una infinidad de puntos (pares ordenados) y figuras geométricas. Esta rama de la matemática es muy útil para la navegación, facilita la ubicación de coordenadas en la aviación y la navegación marítima.

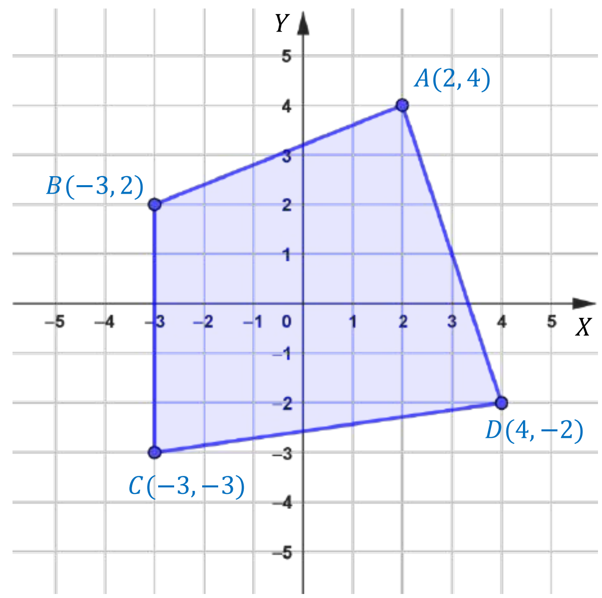
Ejemplo:

Graficar el triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(3,2)$;$B(-2,4)$ y $C(-4,-4)$.



Ejemplo:

Graficar el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos: $A(2,4)$;$B(-3,2)$;$C(-3,-3)$ y $D(4,-2)$.



Actividad

- **Ubicamos los siguientes pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:**

  1) $A(2,3)$; $B(-4,5)$; $C(-1,-4)$ y $D(5,-2)$

  2) $M(-6,2)$; $N(-3,4)$; $O(-6,-1)$ y $P(3,-3)$

  3) $R(6,3)$; $B(3,6)$; $C(-2,0)$ y $D(0,-2)$

- **Graficamos las siguientes figuras geométricas mediante pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:**

  4) $A(3,7)$; $B(-6,2)$ y $C(-4,-5)$

  5) $A(4,6)$; $B(-2,5)$; $C(-3,-4)$ y $D(4,-3)$

  6) $R(3,9)$; $S(-3,5)$; $T(-2,-7)$; $U(6,-2)$ y $V(8,2)$

  7) $A(6,4)$; $B(2,6)$; $C(-2,4)$; $D(-2,0)$; $E(2,-2)$ y $F(6,0)$

Geometría analítica, problemas fundamentales

La geometría analítica se caracteriza por dar respuesta a dos problemas: Si se conoce el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, se debe determinar la ecuación que los represente y si se conoce la ecuación de un lugar geométrico, se debe determinar el lugar geométrico en el plano cartesiano del conjunto de puntos que la verifican.

2. Distancia entre dos puntos

Para los puntos que se encuentran sobre el eje horizontal, o en una paralela, la distancia entre los puntos es el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

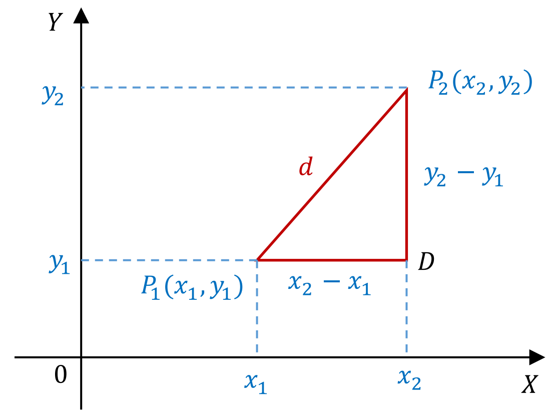
$$x_2 - x_1 = d$$

Para los puntos que se encuentran sobre el eje vertical, o en una paralela, la distancia entre los puntos es el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

$$y_2 - y_1 = d$$

Si los puntos están en cualquier lugar del plano, la distancia entre los dos puntos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Curiosidad matemática

La fórmula que usamos comúnmente para calcular la distancia entre dos puntos en un plano cartesiano se llama "distancia euclidiana", que deriva del famoso matemático griego Euclides.

Esta fórmula es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias en las coordenadas.

Dados los puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, definimos la distancia entre ellos, $d(P_1, P_2)$ como la longitud del segmento de recta que los separa.

Teniendo los puntos:

$$P_1(x_1, y_1) \quad \wedge \quad P_2(x_2, y_2)$$

Trazamos por P_1 y P_2 paralelas a ambos ejes se forma el triángulo rectángulo. Donde la hipotenusa es la distancia y los catetos son las rectas P_1D y P_2D.

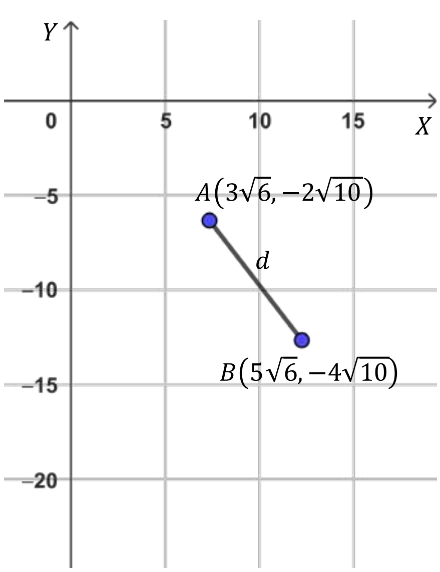
De la gráfica, por teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:

Encuentre la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:

$$A\left(3\sqrt{6},\ -2\sqrt{10}\right),\quad B\left(5\sqrt{6},\ -4\sqrt{10}\right).$$



Identificando las coordenadas de puntos dados, es decir:

$$A\left(3\sqrt{6}, -2\sqrt{10}\right) = A(x_1, y_1) \ \Rightarrow\ x_1 = 3\sqrt{6}, \qquad y_1 = -2\sqrt{10}$$

$$B\left(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10}\right) = B(x_2, y_2) \ \Rightarrow\ x_2 = 5\sqrt{6}, \qquad y_2 = -4\sqrt{10}$$

Luego, aplicando la fórmula de la distancia:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{6} - 3\sqrt{6}\right)^2 + \left(-4\sqrt{10} - \left(-2\sqrt{10}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 + \left(-2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 6 + 4 \cdot 10}$$

$$= \sqrt{64} = 8$$

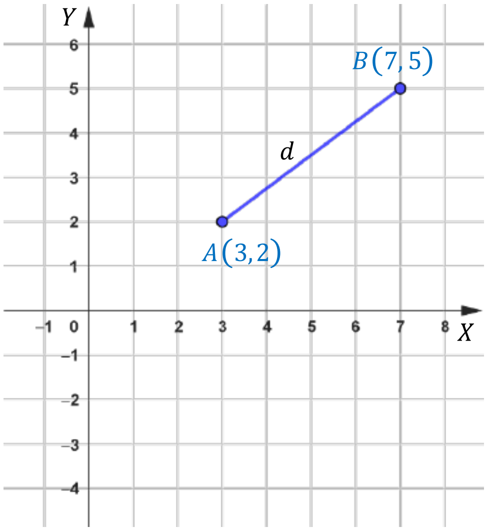
$$\Rightarrow \quad d = 8$$

Ejemplo:

Calculamos la distancia entre los puntos: $A(3,2)$ y $C(7,5)$.

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}$$
$$=\sqrt{4^2+3^2}$$
$$=\sqrt{16+9}$$
$$=\sqrt{25}=5$$
$$\Rightarrow \boxed{d=5}$$

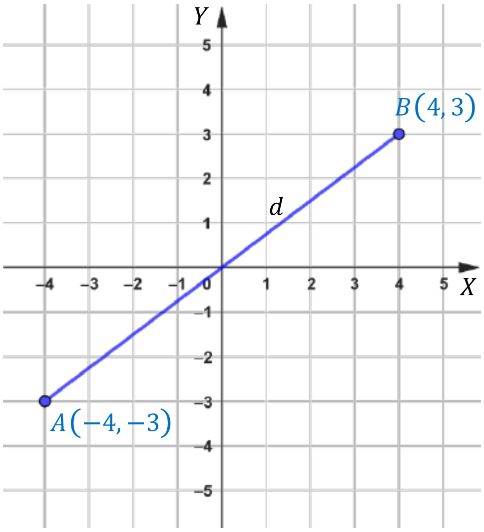


Ejemplo:

Calculamos la distancia entre los puntos: $A(-4,-3)$ y $C(4,3)$.

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{[4-(-4)]^2+[3-(-3)]^2}$$
$$=\sqrt{(4+4)^2+(3+3)^2}$$
$$=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}$$
$$=\sqrt{100}=10$$
$$\Rightarrow \boxed{d=10}$$



Ejemplo:

Determinar el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(-3,5)$; $B(-1,-2)$ y $C(8,1)$.

Cálculo de la distancia AB:

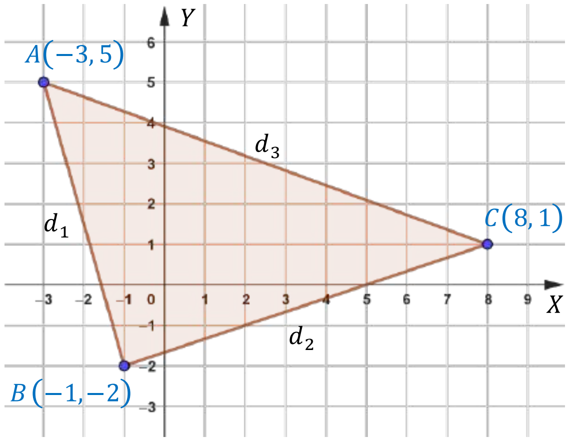
$$d_1=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-2-5)^2}=\sqrt{4+49}=7.28$$

Cálculo de la distancia BC:

$$d_2=\sqrt{(8-(-1))^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{81+9}=9.49$$

Cálculo de la distancia AC:

$$d_3=\sqrt{(8-(-3))^2+(1-5)^2}=\sqrt{121+16}=11.70$$

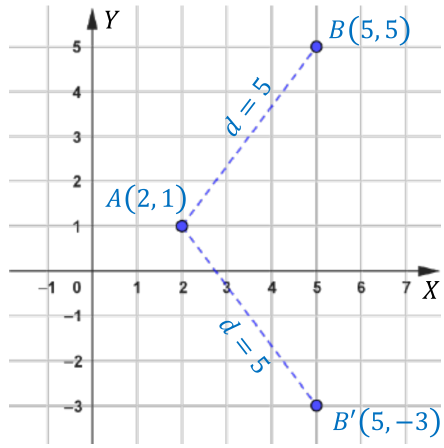


Para calcular el perímetro del triángulo se suman los tres lados: $P=d_1+d_2+d_3$

$$P=7.28+9.49+11.70=28.47 \quad \Rightarrow \quad P=28.47$$

Ejemplo:

La distancia del punto $A(2,1)$ al otro extremo del segmento es de longitud 5. Si la abscisa del otro extremo es 5. Hallar su ordenada.



Los datos son: $P_1(2,1)$; $B(5,y)$ y $d=5$.

En la distancia entre dos puntos:

$$5 = \sqrt{(5-2)^2+(y-1)^2} \qquad //\cdot(\ \ )^2$$

$$\Rightarrow \quad 5^2 = 3^2 + (y-1)^2$$

$$16 = (y-1)^2 \quad //\cdot\sqrt{\ }$$

$$\pm 4 = y - 1$$

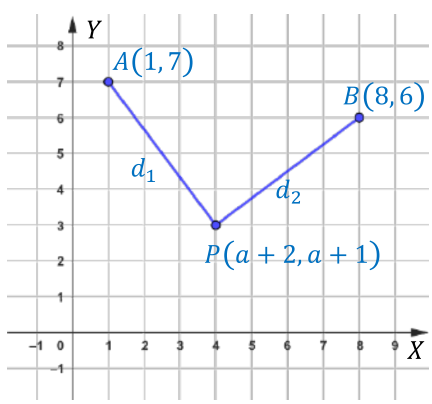
$$y = \pm 4 + 1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 5, \quad y_2 = -3$$

$$\therefore \quad (5,5); \quad (5,-3)$$

Ejemplo:

Si $P(a+2, a+1)$ es un punto que equidista de $A(1,7)$ y $B(8,6)$. Calcular el valor de "a".



$$d_1 = d_2 = d$$

$$PA = PB$$

Aplicando distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Calculando distancia PA:

Como $P(a+2, a+1)$ y $A(1,7)$, luego

$$d = \sqrt{[1-(a+2)]^2 + [7-(a+1)]^2}$$

$$= \sqrt{(1-a-2)^2 + (7-a-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-a)^2 + (6-a)^2}$$

$$\Rightarrow d^2 = 1 + 2a + a^2 + 36 - 12a + a^2$$

$$d^2 = 2a^2 - 10a + 37 \qquad (1)$$

Calculando distancia PB:

Como $P(a+2, a+1)$ y $B(8,6)$, luego

$$d = \sqrt{[8-(a+2)]^2 + [6-(a+1)]^2}$$

$$= \sqrt{(8-a-2)^2 + (6-a-1)^2}$$

$$= \sqrt{(6-a)^2 + (5-a)^2}$$

$$\Rightarrow d^2 = 36 - 12a + a^2 + 25 - 10a + a^2$$

$$d^2 = 2a^2 - 22a + 61 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), se tiene el valor de "a:

$$d_1^2 = d_2^2$$

$$2a^2 - 10a + 37 = 2a^2 - 22a + 61$$

$$-10a + 22a = 61 - 37$$

$$12a = 24$$

$$a = \frac{24}{12} = 2$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

El punto P es:

$$(a+2, a+1) = (2+2, 2+1)$$

$$= (4,3)$$

$$\Rightarrow \quad P(4,3)$$

Actividad

1) Calculamos la distancia entre los siguientes puntos:

a) $A(4,-6)$ y $B(-4,1)$ **b)** $M(-2,7)$ y $N(-3,8)$ **c)** $T(-2,5)$ y $U(4,8)$

2) Calculamos el perímetro de las siguientes figuras geométricas:

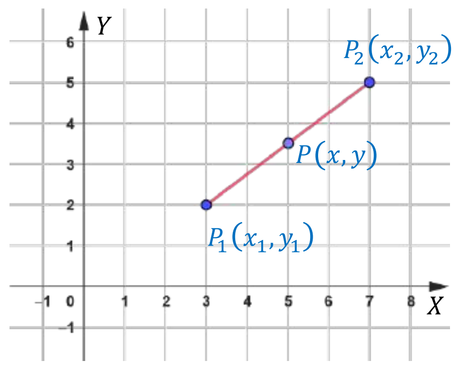
a) $A(5,6)$; $B(-4,8)$ y $C(2,-3)$ **b)** $P(3,5)$; $Q(-2,4)$; $R(-3,-1)$ y $S(7,-6)$

3. Punto medio

Las coordenadas del punto medio de un segmento están dadas por las semisumas de las coordenadas de sus extremos.

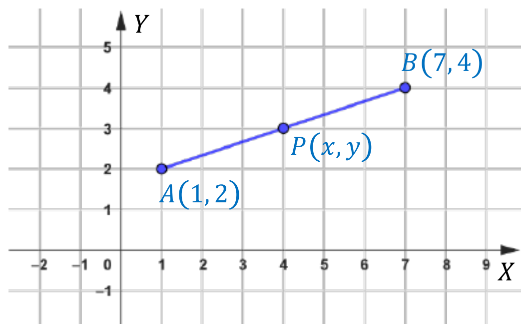
Dado los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, las coordenadas del punto medio están dadas por las siguientes expresiones:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$



Ejemplo:

Determinar el punto medio del segmento AB delimitado por los puntos: $A(1, 2)$ y $B(7, 4)$.



Datos: $A(1, 2)$ y $B(7, 4)$

$$x = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$y = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Por tanto, el punto medio es:

$$P(4, 3)$$

Actividad

Calculamos la distancia entre los siguientes puntos:

1) $A(-5,\ 4)$ y $B(3, 8)$

2) $A(5, -3)$ y $B(3, 7)$

3) $A(6, -2)$ y $(3, 0)$

4) $A(-4, -8)$ y $B(5, -6)$

5) $A(-7, -1)$ y $B(5,\ 7)$

6) $A(-6, -3)$ y $B(3, -2)$

VALORACIÓN

El aprendizaje de la geometría analítica es fundamental para entender la relación entre el álgebra y la geometría a través del uso de sistemas de coordenadas, esta rama de las matemáticas permite representar figuras geométricas mediante ecuaciones y estudiar sus propiedades algebraicamente. Es especialmente útil en campos como la ingeniería, la física y la informática, donde se requiere modelar y analizar formas y trayectorias en el espacio.

Realizamos una reflexión en función a lo aprendido:

- ¿Cuál es la importancia de la geometría analítica?
- ¿Para ubicarnos en un mapa mundo, lo que se utiliza es un plano cartesiano? ¿Por qué?
- ¿Cómo aplicamos la distancia entre dos puntos para realizar cálculos de distancias inaccesibles?

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Con objetos del contexto construyamos un sistema de coordenadas rectangulares (plano cartesiano).
- Elaboramos un geoplano calcular perímetros de figuras geométricas conocidas.
- Elaboramos un formulario con las fórmulas que se emplean en geometría analítica.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO CON UNA RAZÓN DADA

PRÁCTICA

Una de las características más peculiares de la ciudad de La Paz, son las subidas y bajadas de sus calles. La topografía de esta hermosa ciudad es realmente incomparable.

Muchas veces escuchamos decir que una calle tiene mucha mayor pendiente que otras calles.

Fuente: https://n9.cl/l01c2q

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior:

- ¿A qué se refiere con el termino pendiente?
- ¿La pendiente está relacionada con los ángulos?
- ¿Según tu perspectiva, en tu ciudad o comunidad cual es la calle con mayor pendiente?

TEORÍA

Razón

Una razón es una comparación entre dos o más cantidades. Esta comparación se puede hacer mediante una diferencia, en tal caso se llama “razón aritmética”, o mediante una división en tal caso se llama “razón geométrica”.

Razón aritmética
$a-b=d$

Razón geométrica
$a\div b \quad a/b \quad \dfrac{a}{b}$

Dato importante

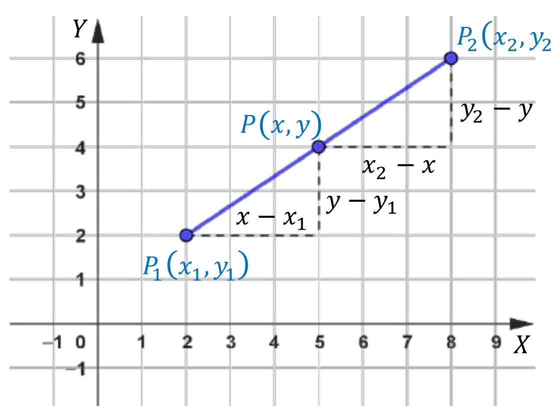
La división de un segmento en una razón dada es fundamental en muchas áreas de la geometría, incluyendo la construcción de triángulos semejantes, la creación de secciones áureas, la generación de patrones simétricos en el diseño arquitectónico.

1. División de un segmento con una razón dada

Dividir un segmento P_1P_2, en una relación dada “r”, es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento P_1P_2 de modo que las dos partes P_1 y P_2 están en relación r, es decir:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Donde $P(x, y)$ es el punto P.



$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Ejemplo:

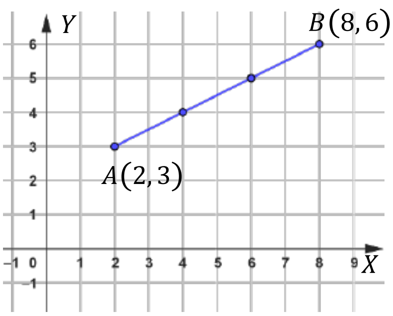
Determinar los puntos de trisección de un segmento cuyos extremos son los puntos: $A(2, 3)$ y $B(8, 6)$.

$P_1 \rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$

$$x_1 = \frac{2 + 8 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 + \frac{8}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4+8}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4$$

$$y_1 = \frac{3 + 6 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3 + \frac{6}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3+3}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 4$$



$P_2 \rightarrow \boxed{r = 2}$

$$x_2 = \frac{2 + 8 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2 + 16}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 6$$

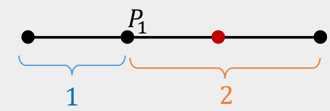
$$y_2 = \frac{3 + 6 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{3 + 12}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = 5$$

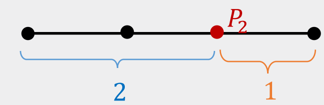
Los puntos de trisección son:
$P_1(4, 4)$ y $P_2(6, 5)$

Observación

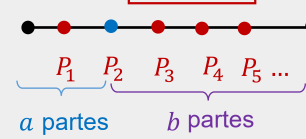
Si se divide un segmento en 3 partes iguales, se tienen dos puntos interiores:



$\boxed{r = \frac{1}{2}}$



$\boxed{r = \frac{2}{1} = 2}$



$\boxed{r = \frac{a}{b}}$

Con $a+b$, las partes en que se divide (AB)

Ejemplo:

Dividir en 4 partes iguales el segmento que une los puntos: $P_1(4, 4)$ y $P_2\,(6, 5)$

$P_1 \rightarrow \boxed{r = \frac{1}{3}}$

$P_2 \rightarrow \boxed{r = 1}$

$P_3 \rightarrow \boxed{r = 3}$

$$x_1 = \frac{-4 + 8 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-4 + \frac{8}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{-12+8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

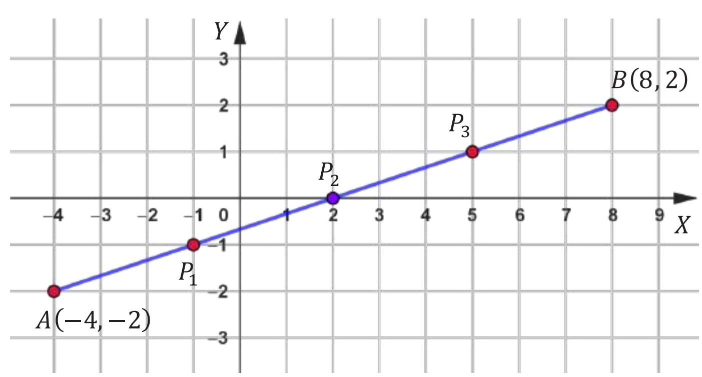
$$y_1 = \frac{-2 + 2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-2 + \frac{2}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{-6+2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 + 8 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{-4 + 8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$y_2 = \frac{-2 + 2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{-2 + 2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{-4 + 8 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{-4 + 24}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$$

$$y_3 = \frac{-2 + 2 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{-2 + 6}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 1$$



Los puntos buscados son: $P_1(-1, -1)$; $P_2(2, 0)$ y $P_3(5, 1)$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios de punto de división de un segmento con una razón dada:

1) Calculamos los puntos de trisección del segmento que une los puntos $A(-4, -6)$ y $B(2, 3)$

2) Dividimos en cuatro partes iguales el segmento que une los puntos $A(-7, -3)$ y $B(9, 1)$

3) Hallamos el punto de división del segmento que une los puntos $A(-5, -4)$ y $B(9, 3)$ y la razón es $r = 4/3$

4) Dividimos en cinco partes iguales el segmento que une los puntos $A(4, -5)$ y $B(-1, 5)$

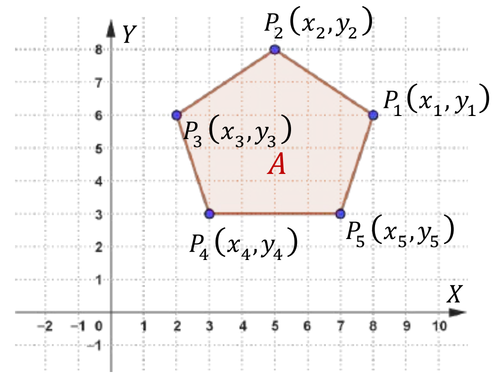
2. Área de un polígono

El área de un polígono de vértices $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$; ... ; $N(x_n, y_n)$ esta dado por:

Observación

Para calcular el área de un polígono irregular, se puede dividir el polígono en triángulos y sumar las áreas de estos triángulos. Esto se relaciona con el principio de triangulación en geometría, que permite calcular áreas más complejas.

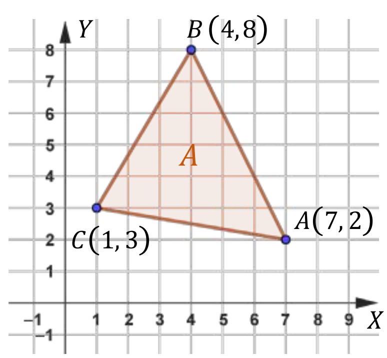
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \text{u}^2$$



Para calcular el área de un polígono emplearemos determinantes con los datos de los vértices. La diagonal primaria lleva el signo positivo y la diagonal secundaria lleva el signo negativo.

Ejemplo:

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(7, 2)$; $B(4, 8)$ y $C(1, 3)$.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 8 \\ 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(56 + 12 + 2) - (8 + 8 + 21)]$$

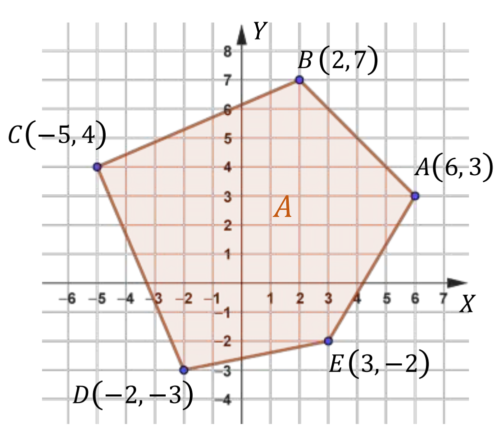
$$= \frac{1}{2}[70 - 37]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 33 = 16.5$$

$$\Rightarrow A = 16.5 \text{ u}^2$$

Ejemplo:

Calcular el área del polígono delimitado por los puntos: $A(6, 3)$; $B(2, 7)$; $C(-5, 4)$; $D(-2, -3)$ y $E(3, -2)$



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ -5 & 4 \\ -2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(42 + 8 + 15 + 4 + 9) - (6 - 35 - 8 - 9 - 12)]$$

$$= \frac{1}{2}[78 - (-58)] = \frac{1}{2}[78 + 58]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 136 = 68$$

$$\Rightarrow \quad A = 68 \text{ u}^2$$

Actividad

Calculamos el área de los siguientes polígonos:

1) $A(1, 5)$; $B(-3, 7)$ y $C(-2, -3)$

2) $A(2, 3)$;$B(-4, 5)$; $C(-3, -9)$; $D(1, -8)$ y $E(7, -3)$

3) $A(7, 3)$;$B(4, 6)$; $C(1, 3)$; $D(1, -3)$; $E(4, -6)$ y $F(7, -3)$

4) $P(5, 3)$; $Q(-3, 2)$; $R(-4, -1)$ y $S(5, -7)$

5) $A(6, 4)$;$B(-2, 8)$ y $C(-3, -4)$

3. Pendiente de una recta

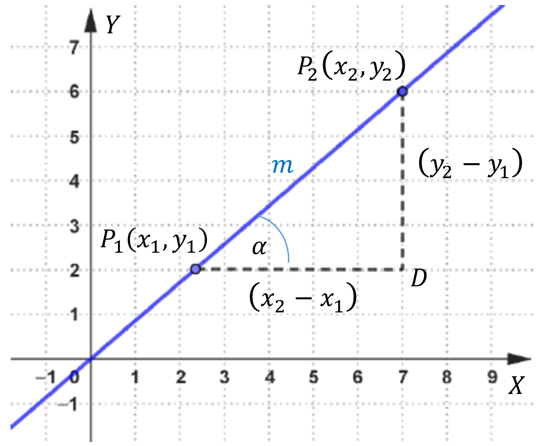
La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación θ que forma la recta con respecto al eje horizontal. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$m = \tan\theta$$

Si $m>0$, la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la pendiente positiva del eje OX es agudo.

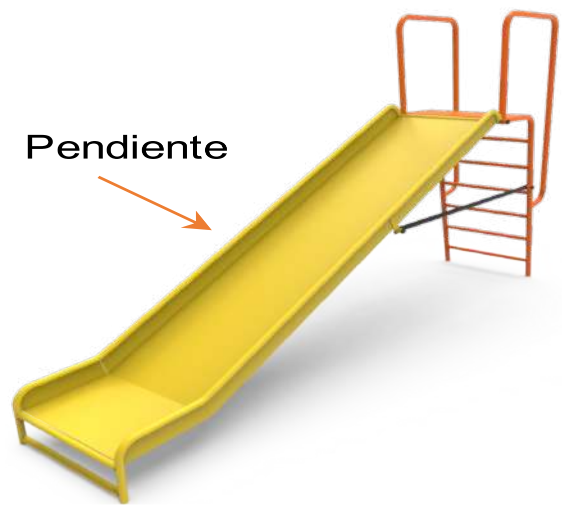
Si $m<0$, la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la pendiente positiva del eje OX es obtuso.

Teniendo $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en la misma recta y el ángulo α de inclinación. Se trazan paralelas desde ambos puntos hacia los ejes y queda expreso el triangulo P_1DP_2 posteriormente deducimos:



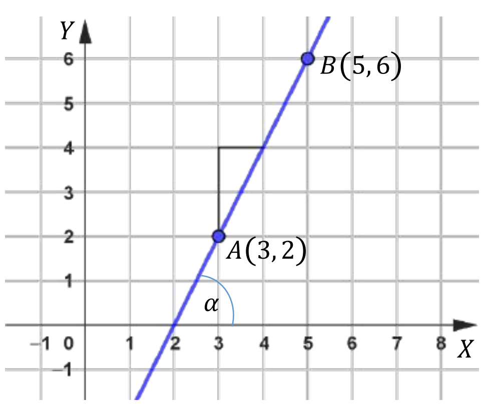
$$m = \tan\alpha = \frac{DP_2}{P_1D} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Ejemplo:

Calcular la pendiente que pasa por los puntos: $A(3, 2)$ y $B(5, 6)$.



Pendiente:

$$A(3,2);\; B(5,6) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow m = \frac{6-2}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow m = 2$$

Ángulo de inclinación:

$$\tan\alpha = m \Rightarrow \tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63.43°$$

$$\Rightarrow \alpha = 63°26'$$

Actividad

Calculamos la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos:

1) $A(-1, 2)$ y $B(3, 7)$

2) $A(3, 1)$ y $B(-4, 3)$

3) $A(6, -4)$ y $B(-1, 5)$

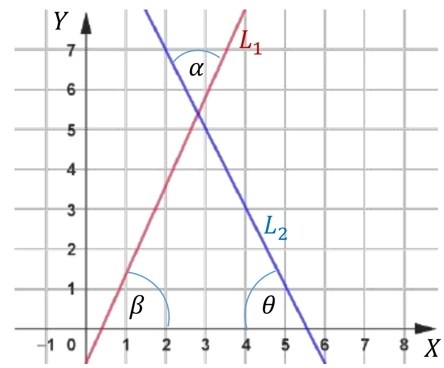
4) $A(-1, -7)$ y $B(5, 8)$

5) $A(1, -2)$ y $B(-3, 2)$

6) $A(5, -7)$ y $B(2, -8)$

4. Ángulo entre dos rectas

El ángulo α entre las rectas L_1 y L_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la recta L_1 con pendiente m_1 hacia la recta L_2 con pendiente m_2 es:

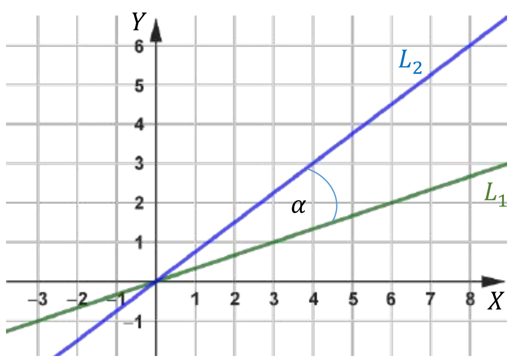


$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right)$$

Ejemplo:

Calcular el ángulo comprendido entre las rectas L_1 y L_2 de pendientes $m_1 = \frac{1}{3}$ y $m_2 = \frac{3}{4}$



$$\tan\,\alpha = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{9-4}{12}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.43°$$

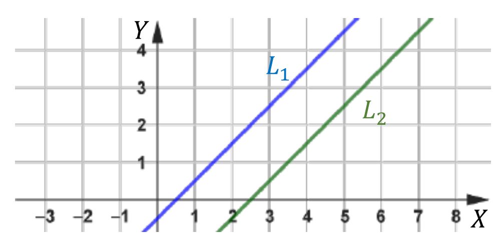
$$\Rightarrow \quad \alpha = 18°26'$$

5. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Paralelismo

Dos restas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales.

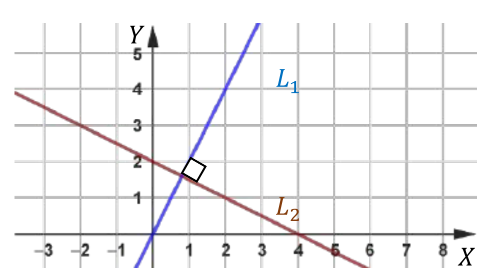
$$m_1 = m_2$$



Perpendicularidad

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a 1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \vee \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



Ejemplo:

Hallar el ángulo entre las siguentes rectas:
L_1: $(4,1)$, $(-1,-2)$ y L_2: $(0,3)$, $(2,-1)$

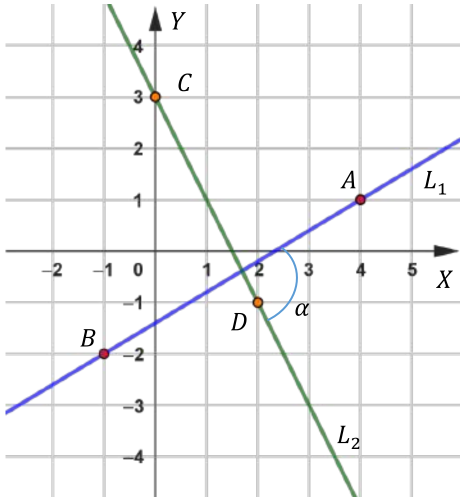
$$m_1 = \frac{-2-1}{-1-4} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{3}{5}$$

$$m_2 = \frac{-1-3}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -2$$

$$\tan\alpha = \frac{-2-\frac{3}{5}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)\cdot(-2)} = \frac{\frac{-10-3}{5}}{1-\frac{6}{5}} = \frac{-\frac{13}{5}}{-\frac{1}{5}} = 13$$

$$\alpha = \tan^{-1}(13) = 85.6°$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 85.6°$$



Actividad

Calculamos los ángulos comprendidos entre las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son:

1) $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$

2) L_1: $(3,4)$, $(-2,-1)$
L_2: $(1,3)$, $(-2,-4)$

3) $m_1 = -\frac{2}{3}$ y $m_2 = 5$

4) L_1: $(0,3)$, $(-4,0)$
L_2: $(1,1)$, $(-2,-2)$

5) $m_1 = \frac{3}{2}$ y $m_2 = \frac{7}{2}$

6) $m_1 = \frac{1}{4}$
L_2: $(-3,1)$ $(2,-3)$

VALORACIÓN

La utilidad y aplicabilidad de la geometría analítica en nuestro entorno son muchas y de variadas situaciones. Desde la medición de terrenos, construcción de planos y carreteras de gran magnitud, hasta situaciones más recientes con el uso de la tecnología como el VAR en el futbol.

Después de cada partido, los entrenadores de cada equipo tienen una serie de información sobre la cantidad de km que ha recorrido un jugador en el partido, esto se hace a través de computadoras que calculan el recorrido de los jugadores con las fórmulas de distancia entre dos puntos.

De la misma forma con paralelismo y perpendicularidad se puede determinar si un jugador se encuentra en posición adelantada u offside.

Fuente: Open, AI. (2024)

PRODUCCIÓN

- Menciona otras situaciones en las que se utilizan los términos de pendientes.
- Con materiales de contexto, construyamos una maqueta donde se pueda observar pendientes y ángulos de inclinación.
- Elaboramos un formulario con las fórmulas abarcadas en el tema.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Demostración de identidades trigonométricas

1) Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{\text{cotan}\, x + \tan x}{\text{cosec}\, x} = \sec x$

b) $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

c) $\dfrac{\cos x \cdot \tan x}{\text{sen}\, x} - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

d) $\dfrac{1 + \text{cotan}\, x}{1 + \tan x} = \text{cotan}\, x$

e) $\dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x}$

f) $\dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \sec x + \tan x$

g) $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \text{cosec}^2 x$

h) $\dfrac{\text{cotan}^2 x}{\text{cosec}\, x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x}$

i) $\dfrac{\text{cotan}\, x}{\sec x} = \text{cosec}\, x - sen\ x$

j) $\dfrac{\sec x - 1}{1 - \cos x} = \sec x$

Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos.

2) Comprobar las siguientes identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\, x\right)$

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x\right)$

c) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

d) $\cos(x - \pi) = -\cos x$

3) Calcular el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\text{sen}\ 75°$ b) $\cos 15°$

c) $\tan 120°$ d) $\tan 105°$

e) $\cos 105°$

Identidades trigonométricas de ángulos dobles

4) Comprobar las siguientes identidades de ángulo doble:

a) $\dfrac{2\ \text{s2n}\, x}{\tan(2x)} + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$

b) $\dfrac{1 + \cos(2x)}{\text{cotan}\, x} = \text{sen}(2x)$

c) $\dfrac{\cos(2x)}{1 - \text{sen}(2x)} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

d) $\dfrac{\text{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan x$

e) $\dfrac{\text{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)} + \dfrac{1}{\tan(2x)} = \dfrac{1}{\text{sen}(2x)}$

f) $\dfrac{\text{sen}\, x + \sin(2x)}{1 + \cos x + \cos(2x)} = \tan x$

g) $\dfrac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan^2 x$

h) $\dfrac{\text{sen}(2x) + \cos(2x) + 1}{\text{cosec}\, x \sin(2x) - \cos(2x) + 1} = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos.

5) Comprobar las siguientes identidades:

a) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2}{\text{sen}\, x}$

b) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x}$

c) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2\ \text{sen}\, x - \text{sen}(2x)}{2\ \text{sen}\, x + \text{sen}(2x)}}$

d) $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{1 + \text{sen}\, x}$

e) $\text{cotan}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin(2x) \cdot \cos x}{[1 + \cos(2x)](1 - \cos x)}$

TRANSFORMACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Transformación de suma a producto y de producto a suma

1) Expresar las sumas y diferencias como productos:

a) $\operatorname{sen}(9\alpha)+\operatorname{sen}(3\alpha)$ b) $\cos(5\beta)-\cos(3\beta)$

c) $\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(5x)$ d) $\operatorname{sen}(10\beta)+\operatorname{sen}(4\beta)$

e) $\cos(5x)+\cos(3x)$ f) $\operatorname{sen}(8\alpha)-\operatorname{sen}(6\alpha)$

2) Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=4\operatorname{sen}x$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(5\alpha)+\operatorname{sen}(3\alpha)}{\cos(5\alpha)+\cos(3\alpha)}=\tan(4\alpha)$

3) Reducir las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(4x)+\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(6x)+\operatorname{sen}(2x)}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen}(9\alpha)-\operatorname{sen}(5\alpha)}{\cos(9\alpha)+\cos(5\alpha)}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}35°+\operatorname{sen}25°}{\cos 50°-\cos 40°}$ d) $\dfrac{\cos(4\alpha)+\cos(8\alpha)}{\operatorname{sen}(9\alpha)-\operatorname{sen}(3\alpha)}$

De producto a suma o diferencia

4) Expresar los productos como sumas o diferencias:

a) $\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(7x)$ b) $\operatorname{sen}(7x)\cdot\cos(3x)$

c) $\cos(4x)\cdot\operatorname{sen}(3x)$ d) $\cos(4x)\cdot\cos(3x)$

e) $\operatorname{sen}(8x)\cdot\operatorname{sen}(3x)$ f) $\operatorname{sen}(8x)\cdot\operatorname{sen}(6x)$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Raíces de una ecuación trigonométrica

1) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan\alpha=\sqrt{3}$ b) $\operatorname{sen}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e) $2\cos x-\sqrt{2}=0$ f) $4\operatorname{sen}x-2=0$

g) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\tan\beta=1$

i) $2\operatorname{sen}x-\sqrt{3}=0$ j) $4\operatorname{sen}x+2=0$

2) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $5\operatorname{sen}\alpha=5\cos\alpha$ b) $5\operatorname{sen}x-15\cos x=0$

c) $\tan x-\dfrac{1}{\cos x}=0$ d) $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)=1$

e) $2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ f) $3\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1=0$

g) $\tan(3x-15°)=\sqrt{3}$ h) $3\tan(3x-15°)=1$

i) $\operatorname{sen}(2x-60°)=\dfrac{1}{2}$ j) $\cos(2x-20°)=\dfrac{1}{2}$

3) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\operatorname{sen}x\cdot\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{sen}x=0$

b) $2\cos^2 x-\cos x=0$

c) $\tan x\cdot\operatorname{sen}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos x=0$

d) $2\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{cotan}x=1$

e) $2\operatorname{sen}x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cdot\cos x=0$

f) $\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}x\cdot\cos x=0$

g) $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$

h) $\operatorname{sen}(2x)=\operatorname{sen}x$

Resolución de ecuaciones trigonométricas no elementales (Cuadráticas)

4) Resolver las siguientes ecuaciones trigonometricas:

a) $2\tan^2 x+\sec^2 x-2=0$

b) $1-\cos x=\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}x$

c) $1+\operatorname{sen}^2 x-7\cos^2 x=0$

d) $2\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=3$

e) $\cot x+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=2$

f) $(2\cos x+1)(\sin x-1)=0$

g) $\operatorname{sen}^2 x\,4\operatorname{sen}x-3=0$

h) $2\cot x-4\tan x=2$

i) $4\operatorname{sen}^2 x\cdot\tan x-4\operatorname{sen}^2 x=3\tan x-3$

j) $\dfrac{2}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{3}{\cos^2 x}$

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sistema de coordenadas rectangulares y su relación con los saberes ancestrales

1) Ubicar los siguientes pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:

a) $A(5,6)$; $B(-2,4)$ y $C(-6,-1)$

b) $M(5,2)$; $N(-1,6)$; $O(-3,-7)$ y $P(9,-2)$

c) $R(6,5)$; $S(-5,3)$; $T(-7,-9)$ y $U(8,-4)$

d) $A(3,6)$; $B(1,7)$; $C(-5,8)$ y $D(-5,-3)$

e) $D(-3,1)$; $E(-7,-4)$; $F(6,-4)$ y $G(4,7)$

2) Graficar las siguientes figuras geométricas mediante pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:

a) $A(7,3)$; $B(-2,7)$ y $C(-1,-3)$

b) A$(5,7)$; $B(-1,9)$; $C(-4,-7)$ y D$(6,-3)$

c) $R(4,8)$; $S(-4,6)$; $T(-3,-8)$; $U(7,-3)$ y $V(9,3)$

d) $A(5,6)$; $B(3,7)$; $C(-3,5)$; $D(-3,0)$ y E$(3,-3)$

e) $R(5,7)$; $S(-5,5)$; $T(-2,-7)$; $U(9,-2)$ y V$(8,2)$

Distancia entre dos puntos

3) Calcular la distancia entre los siguientes puntos:

a) $A(4,-6)$; $B(3,5)$

b) $M(-2,-7)$; $N(-3,8)$

c) $T(8,-5)$; $U(7,1)$

d) $P(-6,-5)$; $O(-1,3)$

e) $A(3,4)$; $B(-4,-3)$

4) Calcular el perímetro de las siguientes figuras geométricas:

a) $A(4,7)$; $B(-3,5)$ y $C(1,-1)$

b) $P(4,6)$; $Q(-1,3)$; $R(-4,-2)$ y $S(5,-5)$

c) $A(5,3)$; $B(-3,7)$ y $C(5,-2)$

d) $D(1,5)$; $E(-2,5)$; $F(-5,-5)$ y $G(4,-3)$

e) $M(8,3)$; $N(3,7)$; $O(-3,6)$; $P(-4,-6)$ y $Q(5,-3)$

Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos resolver los siguientes ejercicios:

5) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $A(3,-2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada.

6) Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto $B(-3,6)$.

7) Si: $P(1,3)$ y$Q(4,k)$, hallar el valor de k para que la distancia entre P y Q sea $d{=}5$.

8) Hallar "x", si la distancia entre $(4,1)$ y $(x,3)$ es de 5 unidades.

9) El punto $(x,x{+}1)$ equidista de $(2,1)$ y de $(-6,5)$. Hallar "x".

10) Demostrar que los puntos: $A(-2,-1)$; $B(2,2)$; $C(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

11) Demostrar que los puntos: $L(-8,4)$; $M(2,-2)$; $N(5,3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

12) Demostrar que los tres puntos: $A(12,1)$; $B(2,-1)$; $C(-3,-2)$ son colineales.

13) Tres vértices de un rectángulo son los puntos $A(2,-1)$; $B(7,1)$ y $C(7,3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

14) Tres vértices de un rectángulo son $A(-1,4)$; $B(1,-1)$ y $C(6,-1)$. Si la ordenada del cuarto vértice D es 6. Halle su abscisa.

Punto medio

15) Calcular el punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-4,3)$; $B(6,5)$

b) $A(-3,-7)$; $B(5,-3)$

c) $A(5,-2)$; $B(2,5)$

d) $A(-2,-2)$; $B(3,3)$

e) $A(6,-4)$; $B(5,0)$

f) $A(-2,-5)$; $B(4,-3)$

g) $A(4,6)$; $B(-6,4)$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO CON UNA RAZÓN DADA

Resolver los siguientes ejercicios de punto de división de un segmento con una razón dada:

1) Calcular los puntos de trisección del segmento que une los puntos $A(-5,-3)$ y $B(4,0)$.

2) Dividir en cuatro partes iguales el segmento que une los puntos $A(4,-5)$ y $B(0,3)$.

3) Hallar el punto de división del segmento que une los puntos $A(-5,-5)$ y $B(10,5)$ y la razón es $r=\frac{3}{2}$

Área de un polígono

4) Calcular el área de los siguientes polígonos:

a) $A(3,4)$; $B(-2,6)$ y $C(-4,-1)$

b) $P(6,2)$; $Q(-6,1)$; $R(-5,-2)$ y $S(6,-3)$

c) $A(5,4)$; $B(-1,3)$; $C(-2,-8)$; $D(4,-5)$ y $E(8,-1)$

d) $A(3,2)$; $B(-2,6)$ y $C(-5,-3)$

e) $A(6,5)$; $B(2,7)$; $C(1,4)$; $D(1,-4)$ y $E(6,-6)$

Pendiente de una recta

5) Hallar la pendiente del segmento que une los puntos $A(-2,3)$ y $B(-3,4)$.

6) Hallar la pendiente del segmento que une los puntos $P(-5,2)$ y $R(3,-2)$.

7) Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $A(2,4)$ y $B(-2,4)$

b) $C(5,-3)$ y $D(2,-3)$

c) $E(6,0)$ y $F(6,\sqrt{3})$

8) Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) $A(\sqrt{3},2)$ y $B(0,1)$

b) $E(4,6)$ y $F(1,3)$

9) Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2,-2)$; $B(-1,4)$ y $C(4,5)$.
Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

10) Aplicar el concepto de pendiente para demostrar que los puntos $A(2,4)$; $B(4,8)$ y $C(6,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

11) Aplicar el concepto de pendiente para demostrar que los puntos $A(6,5)$; $B(1,3)$ y $C(5,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

12) Un punto dista 7 unidades del origen de coordenadas y la pendiente de la recta que lo une.

13) Por los puntos $(x, x+1)$ y $(1,-2)$, pasa una recta de pendiente 3. Hallar el valor de "x"

14) Una recta de pendiente 3 pasa por los puntos $(4,5)$ y $(3,y)$. Hallar "y"

Ángulo entre dos rectas

15) Calcular los ángulos comprendidos entre las rectas L_1 y L_2, cuyas pendientes son:

a) $m_1=\frac{2}{3}$ y $m_2=\frac{3}{2}$

b) $m_1=-\frac{1}{3}$ y $m_2=3$

c) $m_1=\frac{3}{5}$ y $m_2=\frac{1}{2}$

Resolver los siguientes ejercicios de ángulo entre dos restas.

16) Hallar el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, cuyas pendientes son: $m_1=\dfrac{3}{5}$ y $m_2=-2$

17) Hallar el ángulo entre las rectas que pasa por los puntos $A(-1,-3)$ y $B(2,5)$ y L_2 que pasa por los puntos $C(1,3)$ y $D(-2,4)$.

18) Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(-3,-2)$; $B(2,5)$ y $C(4,2)$.

19) Dos rectas que se cortan forman un ángulo de $135°$, si se sabe que una recta tiene pendiente -3, Determinar la pendiente de la otra recta.

20) Dos rectas que se cortan forman un ángulo de $45°$, la recta inicial pasa por $A(-2,1)$ y $B(9,7)$ y la recta final que pasa por $C(3,9)$ y por el punto cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de R.

21) Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(-2,1)$; $B(3,4)$ y $C(5,-2)$.

22) Hallar el ángulo entre los segmentos L_1 y L_2, que unen los puntos $A(-1,2)$; $B(1,-1)$ y $C(-5,-3)$; $C(1,2)$.

23) Hallar el ángulo α entre las rectas L_1 y L_2, cuyas pendientes son $m_1=\dfrac{3}{2}$ y $m_2=3$.

24) Hallar el ángulo α entre las rectas L_1 y L_2, cuyas pendientes son $m_1=\dfrac{3}{4}$ y $m_2=\dfrac{2}{5}$.

(Ejercicios y problemas recopilados)

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México.

Allen R. A. (2007). *Álgebra Elemental*. Pearson. México.

Allen R. A. (2008). *Algebra Intermedia*. Ed. Pearson. México.

Dennis G. Z. (2012). *Álgebra y trigonometría*. McGRAW-HILL. México.

Diccionario de Matemáticas (2000), Editorial Cultural S. A. *Polígono Industrial Arroyomolinos* – España.

Earl W. S. (2009). *Álgebra y trigonometría*. Cengage Learning Editores.

Escalante Loayza Edwin, 2019 *Compendio de trigonometría plana*, Edit. Cosmo

Frank Ayres. (1990). *Trigonometría plana y esférica*. McGRAW-HILL. Colombia.

Laura Valencia, R. 2023. *Compilado de Matemática* 5, texto inédito.

Londoño, N. & Bedoya, H. (2003), *Matemática Progresiva* 5, Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

México. Murray R. (2007). *Algebra Superior* Ed. McGRAW-HILL. México.

Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje*" *5to. Año*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación, (2023). Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz – Bolivia.

Ministerio de Educación (2022). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje*" *5to. Año (3er. trimestre)*. La Paz, Bolivia.

Olmos Millán, A. & Martínez C, L. C. (2003), *Matemática Práctica* 5, Editorial Voluntad S.A. – Colombia.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **5 TO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología - Geografía
Judith Banegas Peña

Lengua Castellana
Luz Marina Mollo Yupanqui

Ciencias Sociales
Luis Alberto Serrano Ayala

Matemática
Edwin Noel Escalante Loayza

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología - Geografía
Melizza Fuentes Vera

Lengua Castellana
Lilian Paulina Peñas Aldana

Ciencias Sociales
Juan Alfredo Marquez Suaznabar

Matemática
Edwin Noel Escalante Loayza

TERCER TRIMESTRE

Biología - Geografía
Melizza Fuentes Vera

Ciencias Sociales
Juan Alfredo Marquez Suaznabar

Matemática
Edwin Noel Escalante Loayza

Química
Jonathan Vino Varias

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

minedu.gob.bo

@minedubol

minedu_bol