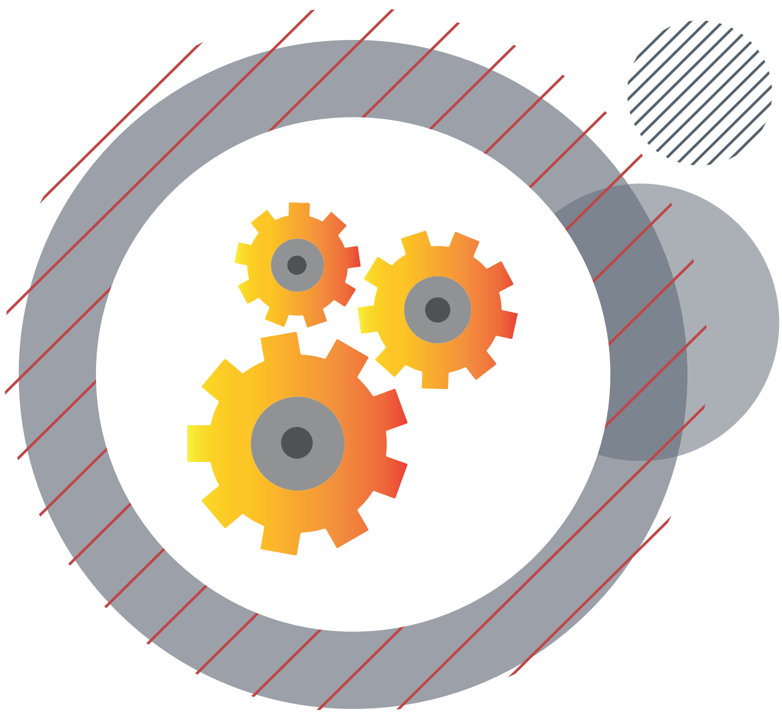
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

2

SECUNDARIA

TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024



SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA
ÁREA
MATEMÁTICA

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024
Educación secundaria comunitaria productiva
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Bartolomé Puma Velásquez
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

María Salomé Mamani Quispe
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Coordinación general
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Índice

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Matemática

Segundo año de secundaria

PRESENTACIÓN

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:

Glosario

Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.

Investiga

¿Sabías que...?

¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.

Noticiencia

Escanea el QR

Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.

Aprende haciendo

Desafío

Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.

¡Taller de Ortografía!

¡Taller de Caligrafía!

¡Razonamiento Verbal!

2 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

CIENCIA TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN
Matemática

LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 1

Susana organizó una reunión con sus compañeros de la promoción 2022, la invitación era para las 14:00, todos llegaron por grupos, el primer grupo llegó $\frac{3}{4}$ de hora tarde, el segundo $\frac{1}{2}$ hora después del primero, el tercer grupo $\frac{5}{6}$ de hora después del segundo y el último grupo llegó $\frac{1}{3}$ de hora después del tercero ¿A qué hora se reunieron todos?

Vamos a sumar los tiempos de demora.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{9+6+10+4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$$

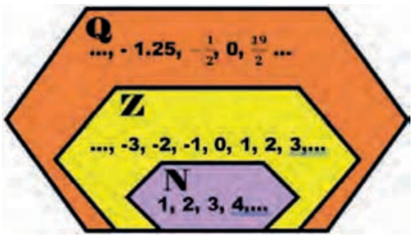
Dividiendo 60 minutos entre 12 tenemos: $\frac{60}{12}$=5 min, tenemos entonces 5(5 *min*) = 25 *min*

Interpretación: Por lo tanto, 14:00 más 2 h y 25 min es 16:25, hora en la que estuvieron todos sus invitados.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Número racional

Todo número racional **Q**, tiene la forma $\frac{a}{b}$, donde "a" y "b" son números enteros, en el cual "a" es el numerador (indica cuántas partes tomamos de la unidad a dividida) y "b" el denominador (indica en cuántas partes se ha dividido la unidad) y "b" distinto de cero.



Clases de fracciones

Fracción propia	, cuando el numerador es **menor** que el denominador.
Fracción impropia	, cuando el numerador es **mayor** que el denominador.
Fracción igual a la unidad	, el numerador es **igual** al denominador.
Fracción mixta	, son el resultado de las fracciones impropias, está compuesta de un número entero y una fracción propia.
Fracciones equivalentes	$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{9}{21}=\frac{33}{77}$, son fracciones con el mismo valor y se puede demostrar cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Actividad 2:

Suma y resta

1) =

2) =

3) =

4) =

5) =

6) =

7) =

8) =

9) =

10) =

1. Operaciones con números racionales

Suma y resta de fracciones

a) Fracciones homogéneas, son aquellas que tienen igual denominador.

Ejemplo: 1) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{16}{3}-\frac{7}{3}=\frac{-16-7}{3}=-\frac{23}{3}=-7\frac{2}{3}$

b) Fracciones heterogéneas, son aquellas que tienen denominadores diferentes.

Ejemplo:

1) $\frac{11}{8}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}=\frac{33+28-6}{24}=\frac{61-6}{24}=\frac{55}{24}=2\frac{7}{24}$

8	6	4	2
4	3	2	2
2	3	1	2
1	3		3
	1		

m.c.m. $=2^3 * 3 = 24$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones, se multiplica el numerador con numerador y denominador con denominador.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{7}{8}\right)\left(\frac{24}{35}\right)=-\frac{168}{280}=-\frac{3}{5}$$

División de fracciones

En la división se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el producto se escribe como numerador del resultado, posteriormente se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, cuyo producto es el denominador del resultado.

Ejemplo: efectuamos.

$$-\frac{23}{19}\div-\frac{23}{33}=\frac{23*33}{19*23}=\frac{33}{19}=1\frac{14}{19}$$

Actividad 3:

Multiplicación

1) = 2) =

3) = 4) =

5) =

División

6) = 7) =

8) = 9) =

10) =

Potenciación y radicación de fracciones

Ejemplo:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{64}{125} \rightarrow \sqrt[3]{-\frac{64}{125}}=-\frac{4}{5}$$

2. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Ejemplo 1. Resolvemos los siguientes ejercicios combinados:

$$\sqrt{\frac{49}{81}}+5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^2-5\frac{5}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+5\left(\frac{27-2}{18}\right)-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+5\left(\frac{25}{18}\right)-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+\frac{125}{18}-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$= \frac{14+125-8-105}{18} = \frac{139-113}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{9} = \mathbf{1\frac{4}{9}}$$

Ejemplo 2: efectuamos

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - \sqrt[3]{\frac{8}{27}} + 0{,}4 + \sqrt{0{,}25} - (1.5)^2$$

$$= \left(-\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-15-80+48+60-270}{120}$$

$$= \frac{108-365}{120} = -\frac{257}{120} = \mathbf{-2\frac{17}{120}}$$

RECORDATORIO

Cómo convertir un decimal a fracción

1. $0,\mathbf{4} = \frac{4}{\mathbf{10}} = \frac{2}{5}$
2. $0,\mathbf{25} = \frac{25}{\mathbf{100}} = \frac{1}{4}$
3. $1,\mathbf{5} = \frac{15}{\mathbf{10}} = \frac{3}{2}$

Actividad 4. Resolvemos las siguientes operaciones combinadas:

1) $\sqrt{\frac{25}{36}} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\frac{1}{6} + 1{,}25 =$ 2) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \sqrt[4]{\frac{81}{16}} + 0{,}2 + \sqrt{0{,}36} - (0.5)^2 =$ 3) $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{49}{144}} + 2{,}4 - \left(-\frac{3}{2}\right)^4 =$

3. Problemas de números racionales aplicados al contexto y la tecnología

Juan tiene en su celular 1GB de datos móviles, debe enviar 2 archivos de 1/5 de GB cada uno y necesita mínimamente 7/10 de GB para pasar sus clases por Zoom, ¿podrá cumplir con sus responsabilidades de estudio?, ¿cuántos megas le sobrarán o faltarán? (1GB = 1024 MB).

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Analicemos la siguiente historia:

HISTORIA DE LAS FRACCIONES

El origen de las fracciones se remonta hace miles de años cuando los egipcios resolvían problemas mediante operaciones con fracciones, como la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides y el estudio de la tierra. En el siglo VI, los hindúes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones. Las reglas que utilizamos en la actualidad con las fracciones, fueron obra del Mahavira en y Bháskara.

Como podemos ver, desde tiempos antiguos hubo la necesidad de dividir un entero en partes iguales. Por ejemplo, cuando compramos pan y lo dividimos en partes iguales.

Respondamos las siguientes preguntas:

¿Quiénes crees que fueron las civilizaciones más antiguas en resolver sus problemas a través de las fracciones?
¿En qué situaciones de la cotidianidad aplicamos los números racionales?
¿Cómo a través de los números racionales se desarrolló la ciencia y la tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Un grupo de voluntarios tienen como dato que hay 29 niños en una comunidad alejada, deben llevar solo lo necesario, ya compraron unos presentes, pero desean invitar algo de comer y pensaron en 2/4 tajadas de manzana, 3/4 de cada plátano, 1/10 de papaya y un vaso de yogurt para cada porción. Cada botella contiene 8 vasos, entonces ¿Cuántas frutas y botellas necesitan para los 29 niños? ¿Cuántos trozos les sobraron?

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES Y REALES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 5

En la clase de matemática, medimos el radio de algunos objetos con forma de círculo: del reloj del curso, de 1 llanta de la bicicleta y de un basurero de forma circular. Con seguridad, obtuvimos diferentes resultados.

1. En la fórmula para calcular el área de una circunferencia utilizamos el número π ¿Te preguntaste por qué se utiliza este número para las formas circulares?

2. ¿Sabes por qué el valor de π no se puede convertir a fracción?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Números irracionales, son aquellos que no pueden ser expresados como fracción y que se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas y se representa con la letra "I".

1. Los números irracionales y su clasificación

a) Irracionales algebraicos	Son el conjunto de todos los números que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, pero que no puede ser expresado como una fracción de números enteros con denominador no nulo. **Ejemplo:** La siguiente ecuación $x^2 - 2 = 0$ *despejando* $x = \sqrt{2}$ tenemos un número irracional. Entonces, un número es algebraico irracional, si este es solución de un polinomio de coeficientes enteros, pero que es irreducible en los racionales.
b) Irracionales transcendentes	No son solución de ningún polinomio con coeficientes racionales; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.) **Ejemplo:** e ≈ 2,71828182845904…

Actividad 6. Marcamos en el cuaderno, en cada ejercicio con **I.A.** sí es Irracional Algebraico, con **I.T.** sí es Irracional Transcendente y con **R** si es número racional.

1) $\boldsymbol{\pi}$	2) $\sqrt{\mathbf{3}}$.............	3) $\sqrt[3]{-27}$	4) e	5) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ....
6) $\sqrt{\mathbf{20}}$	7) $\left(\sqrt{5}\right)^2$	8) $\boldsymbol{\Phi}$	9) $\sqrt[3]{\mathbf{3}}$	10) 1,25 ....

2. Operaciones con números irracionales

Los números irracionales son decimales con infinitas cifras por lo tanto las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para los números irracionales no son operaciones bien definidas. Sin embargo, debemos tomar en cuenta estas dos afirmaciones, que siempre son válidas:

Si a es racional y b es irracional, entonces la suma $a + b$ siempre es irracional.	$\frac{7}{9}+\sqrt{7}$ es irracional.
Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional, entonces el producto $a*b$ siempre es irracional.	$\frac{5}{11}*\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{11}$ es irracional.

Así mismo

El inverso aditivo de un número irracional es un número racional.	**Ejemplo:** 1) $-b+b=0$ 2) $\pi+(-\pi)=0$

El inverso multiplicativo de un irracional es un número racional.	**Ejemplo:** Tenemos π y su inverso es $\frac{1}{\pi}$. entonces $\pi*\frac{1}{\pi}=1$

Así mismo el inverso aditivo de un número irracional, es un número racional.

Ejemplo: $-b + b = 0$, tenemos el $\sqrt{2}$ y su inverso es $-\sqrt{2}$ ahora sumamos $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$

Como también el inverso multiplicativo de un irracional, es un número racional.

Ejemplo: $b*\frac{1}{b}=1$, tenemos el $\sqrt{3}$ y su inverso es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ahora multiplicamos $\sqrt{3}*\frac{1}{\sqrt{3}}=1$

3. Racionalización

Es el proceso mediante el cual expresiones que tienen denominador irracional, transforman su denominador en racional. Se tiene dos casos de racionalización:

Cuando el denominador es un monomio.	$\frac{a}{b\sqrt{c}}$	$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$
		$\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}\left(1+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{7}*\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+7}{7}$
	$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$	$\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}*\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{5\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{5\sqrt[5]{4}}{2}$
Cuando el denominador es un binomio.	$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ ó $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$	$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}*\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$ $=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{7-5}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{2}$

Actividad 7. Racionalizamos los siguientes ejercicios en el cuaderno:

1) $\frac{6}{\sqrt{5}}=$ 2) $\frac{8}{4\sqrt{3}}=$ 3) $\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}=$ 4) $\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$ 5) $\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}=$ 6) $\frac{1}{5\sqrt{2}}=$ 7) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$ 8) $\frac{3-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=$

4. Números reales y su relación de orden

En el conjunto de los números reales existe un orden que queda constatado al representarlos gráficamente en la recta numérica.

Ejemplo:

Donde $a \leq b$

5. Propiedades de los números reales

PROPIEDAD	EJEMPLO
Tricotomía de números R $a < b$ ó $a > b$ ó $a = b$	$2 < 3$; $9 > 4$; $5 = 5$
Transitiva $Si\ a > b\ y\ b > c \iff a > c$	$9 > 4\ y\ 4 > 0 \iff 9 > 0$
Respecto a la adición $a < b \iff a + c < b + c$	$2 < 7 \iff 2+3 < 7+3$ $5 < 10$
Respecto a la multiplicación $a < b$ con $c > 0$ entonces $ac < bc$	$8 < 11$ con $3 > 0$ entonces $(8)(3) < (11)(3)$ $24 < 33$

6. Operaciones con los números reales

Propiedades de la adición de números reales.

PROPIEDAD	EJEMPLO
1.- Interna: resultado de sumar dos números reales es otro número real. $\boldsymbol{a + b\ \varepsilon\ R}$	$3\pi + 4 = 13.424777996...$
2.- Asociativa: el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado. $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$	$(2 + 1) + \frac{4}{5} = 2 + (1 + \frac{4}{5})$ $3 + \frac{4}{5} = 2 + \frac{9}{5}$ $\frac{19}{5} = \frac{19}{5}$
3.- Conmutativa: el orden de los sumandos no varía la suma. $\boldsymbol{a + b = b + a}$	$\sqrt[3]{5} + 3{,}5 = 3{,}5 + \sqrt[3]{5}$ $5{,}20997 = 5{,}20997$
4.- Elemento neutro: el 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número. $\boldsymbol{a + 0 = a}$	$e + 0 = e$
5.- Elemento opuesto: dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero. $\boldsymbol{e - e = 0}$ El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número. $\boldsymbol{-(-\varphi) = \varphi}$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ $-(-\sqrt{7}) = \sqrt{7}$

Actividad 8. Resolvemos las siguientes sumas aplicando las propiedades estudiadas, en el cuaderno de ejercicios:

1) $\pi - \pi =$ **2)** $(3 + 2{,}5) + \frac{8}{9} = 3 + \left(2{,}5 + \frac{8}{9}\right)$ **3)** $-(-0.333\ldots) =$ **4)** $\sqrt[5]{7} + 2 = 2 + \sqrt[5]{7}$ **5)** $\frac{11}{935} + 0 =$

Propiedades de la multiplicación de los números reales

PROPIEDAD	EJEMPLO
1.- Interna: resultado de multiplicar dos números reales. $a*b \in R$	$(\pi \cdot 10) = 31.4159265359...$
2.- Asociativa: el modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que: $(a*b)*c=a*(b*c)$	$(7*8)*\frac{3}{5} = 7*(8*\frac{3}{5})$ $(56)*\frac{3}{5} = 7*(\frac{24}{5})$ $\frac{168}{5} = \frac{168}{5}$
3.- Conmutativa: el orden de los factores no varía el producto. $a*b = b*a$	$\sqrt{11}*\frac{1}{2} = \frac{1}{2}*\sqrt{11}$ $\frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$
4.- Elemento neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número. $a*1=a$	$e * 1 = e$
5.- Elemento inverso: un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad. $a*\frac{1}{a} = 1$	$\pi * \frac{1}{\pi} = 1$
6.- Distributiva: el producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. $a*(b+c)=a*b+a*c$	$\sqrt{19}*\left(\frac{1}{2}+3\right) = (\sqrt{19}*\frac{1}{2}) + (\sqrt{19}*3)$ $\sqrt{19}*\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\sqrt{19}}{2} + 3\sqrt{19}$ $\frac{7\sqrt{19}}{2} = \frac{7\sqrt{19}}{2}$

Actividad 9. Resolvemos los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la multiplicación e indicamos la propiedad aplicada, en el cuaderno de ejercicios:

1) $\sqrt{5}*\frac{1}{5} = \frac{1}{5}*\sqrt{5}$ **2)** $e*\frac{1}{e} = 1$ **3)** $\frac{1}{3}*\left(\sqrt{7}+8\right) =$ **4)** $\left(3*\sqrt{2}\right)*\frac{7}{11} = 3*\left(\sqrt{2}*\frac{7}{11}\right)$ **5)** $1*\frac{33}{85}$

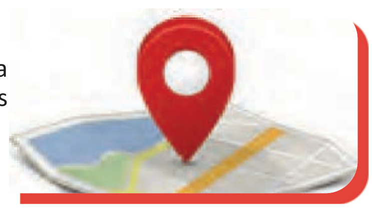
7. Números trascendentes

Los números transcendentes no pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Como ejemplos más representativos de este conjunto numérico tenemos al número **π** y al número ***e*** .

8. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

a) Número Pi (π)

GPS: Calcular el número Pi con una alta precisión, es necesario, para que la tecnología moderna como el GPS funcione en la ubicación de aviones y barcos, debido a que los mismos recorren el arco de un círculo en viajes de larga distancia.



b) Número de Euler (e)

Crecimiento exponencial: para este tipo de crecimiento se aplica la siguiente fórmula:

$$N = No \cdot e^{t}$$

Esto nos permite precisar cual será la población "N" en un tiempo "t" a partir de la población inicial "No"

c) Número de Oro (φ)

En la naturaleza y el arte: existen diversos patrones y proporciones que son visibles que sin darnos cuenta, están presentes en el medio ambiente. El número de oro equivale a 1,618034...

¡Realicemos la valoración!

Escanea el QR

Observemos el siguiente video sobre la aplicabilidad del número pi y el número de Euler.

Actividad 10. Analizando reflexivamente el contenido de los números irracionales y reales, respondemos las siguientes preguntas y realizamos las actividades mencionadas:

- ¿Crees qué sin la utilización de números irracionales y reales podemos aplicar o desarrollar nuevas tecnologías? Fundamenta tu respuesta.
- Describimos ¿Qué número irracional te llamo más la atención? ¿Por qué?
- En tu casa o comunidad educativa identifica y menciona alguna aplicación de los números irracionales.
- ¿Cuál es la aplicación del conjunto de los números irracionales y reales?

¡Es hora de la producción!

Actividad 11. Realizamos las siguientes actividades:

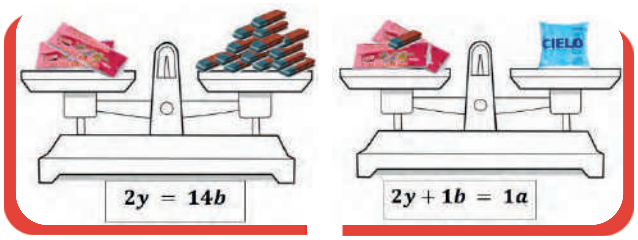
- Dibuja o recorta en tu cuaderno imágenes de la naturaleza donde se encuentre el número de Oro (φ).
- Investigamos otras aplicaciones del número “e” y los números trascendentes para socializar con los compañeros del curso.

EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES DE LA VIDA COTIDIANA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 12. En la clase de matemática reunimos los siguientes materiales:

Ubicamos nuestros objetos sobre la balanza buscando diferentes valores e igualdades, que lo registraremos en nuestros cuadernos.



Objeto	Cantidad	Valor en unidades
	30 borradores = ($30b$)	$1b = 1u$
	13 bolsas de yogurt = ($13y$)	$1y = 7u$
	3 bolsas de agua = ($3a$)	$1a = 15u$

¿Qué igualdades, más puedes encontrar?

Escribe en tu cuaderno, todas las opciones posibles.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Nociones básicas de álgebra

El álgebra es una rama de la matemática que emplea números, letras y signos para hacer referencia a las distintas operaciones aritméticas que se realizan. En la actualidad el álgebra como recurso matemático se usa en las relaciones de estructuras y cantidad. El álgebra elemental es el más común ya que emplea operaciones aritméticas como la suma, resta, multiplicación y división ya que a diferencia de la aritmética, ésta se vale de símbolos como "x", "y" siendo los más comunes en lugar de usar números.

2. Expresiones algebraicas y la modelización

Ante los problemas que se presentan en la vida cotidiana, es importante plantear un modelo matemático correcto para buscar una solución al mismo, para lo cual podemos seguir los siguientes pasos:

1. Se observa el problema.
2. Una vez hecho un análisis e investigación pasamos a la formulación del problema (definir las variables).
3. Se plantea el modelo matemático con expresiones algebraicas.
4. Se busca el algoritmo correcto para solucionar el modelo matemático.
5. Finalmente, la interpretación de los resultados obtenidos debe ser lógicos y coherentes.

Para construir modelos matemáticos con base a expresiones algebraicas es importante traducir correctamente el lenguaje común al lenguaje algebraico, para ello tenemos algunos ejemplos:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número par cualquiera	$2x$
Un número cualquiera aumentado en siete	$x+7$
La diferencia de dos números cualesquiera	$x-y$
El doble de un número excedido en cinco	$2x+5$
La división de un número entero entre su antecesor	$\frac{x}{x-1}$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número	x^2
La semisuma de dos números	$\frac{x+y}{2}$

Ejemplo 1:

Problema	Verónica guarda Bs 30 en su billetera, para sumar una cuarta parte del dinero que ya tiene. ¿Cuánto dinero hay en la billetera?
Análisis e investigación	Si x es el dinero que tiene en la billetera Bs 30 es la cuarta parte de lo que tiene.
Modelo matemático	$30 = \frac{x}{4}$
Algoritmo de solución	$x = 30*4$ $x = 120$
Interpretación	La cantidad total es Bs 30 + Bs 120 = Bs 150, es el total que ahora tiene en su billetera.

Ejemplo 2:

Problema	Se tiene tres peceras y 56 peces. El tamaño de las peceras es pequeño, mediano y grande, siendo la mediana el doble del pequeño y la grande el doble del mediano. Como no se tiene ninguna preferencia en cuanto al reparto de los peces, se decidió que en cada pecera haya la cantidad proporcional al tamaño de cada pecera. ¿Cuántos peces habrá en cada pecera?		
Análisis e investigación	$\frac{x}{2}$ es la cantidad de peces que estarán en la pecera pequeña. x es la cantidad de peces que estarán en la pecera mediana. $2x$ los peces que estarán en la grande.		
Modelo matemático	$x + \frac{x}{2} + 2x = 56$		
Algoritmo de solución	$3x + \frac{x}{2} = 56$ $\frac{6x + x}{2} = 56$ $\frac{7x}{2} = 56$	$7x = 56 * 2$ $7x = 112$ $x = \frac{112}{7}$ $\boldsymbol{x = 16}$	**Entonces:** $\frac{x}{2} = \frac{16}{2} = 8$ $2(16) = 32$
Interpretación	En la pecera pequeña estarán 8 peces. En la mediana 16 peces. En la grande 32 peces.		

Actividad 13. En nuestros cuadernos realizamos los siguientes ejercicios:

a) Expresemos las siguientes oraciones en lenguaje algebraico.

1) Luis tiene Bs 15 más que Karen.
2) Un número que es la cuarta parte de otro número.
3) Dos múltiplos de tres números consecutivos.
4) El 35% de un número cualquiera.
5) La diferencia del costo de un objeto que cuesta Bs A y se vende por Bs B.
6) El valor de un lápiz, si 15 lápices cuestan Bs A.
7) La edad de José es nueve veces la de Ramiro.
8) Un número que representa 16 unidades menos que otro.
9) Un número que es tres veces mayor que el número “n”.
10) La suma de un número más su quinta parte.

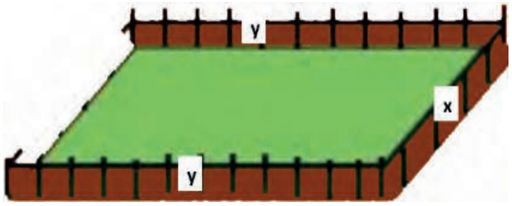
b) Expresamos los siguientes términos algebraicos en lenguaje común.

1) xy
2) $2x + y$
3) $m - 3n$
4) $\frac{x-y}{2}$
5) $\frac{x}{4} - 3$
6) $xy - 2(x - y)$
7) $x(x + 1)$
8) $\sqrt{a^2 + b^2}$
9) $c^2 = a^2 + b^2$
10) $x - \frac{x}{2} + 2x$

Para expresar y analizar eventos un tanto más complejo utilizamos un proceso de cuatro pasos denominado modelo matemático.

Modelación matemática: este proceso trata de traducir a través de expresiones matemáticas los fenómenos y problemas cotidianos. Comprende cuatro etapas, detectar el problema de la vida real, formular el modelo matemático, obtener las conclusiones a partir de la resolución del modelo planteado e interpretar las predicciones realizadas y por último validar lo obtenido. Sin embargo, solo nos centraremos en las dos primeras etapas enfocándonos en la representación del problema o evento del cotidiano vivir, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Tenemos que amurallar un terreno rectangular solo en tres de sus cuatro lados. Si el área del terreno es de 180m², representamos a través de una expresión la longitud del muro en relación al lado no amurallado.



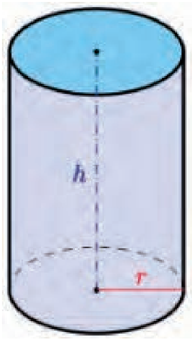
Solución: como el terreno es rectangular los lados son; "x" y "y"

Por lo tanto: la longitud de los muros es $= x + 2y$

Ejemplo 2. En un estacionamiento del centro de nuestra ciudad se cobra Bs 10 la primera hora, posteriormente Bs 5 por cada hora adicional. Representamos a través de una expresión algebraica la cuota de estacionamiento en relación al número de horas estacionadas.

Solución: "x" representa número de horas.

Hora adicional $5(x-1)$ Por lo tanto: Cuota de estacionamiento $= 10 + 5(x-1)$

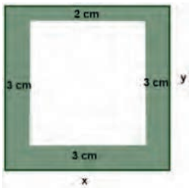


Actividad 14. Para fortalecer la capacidad de abstracción matemática que desarrollamos, resolvamos los siguientes problemas propuestos:

1) Debemos construir un recipiente cilíndrico sin tapa con un volumen de 68 π centímetros cúbicos. El costo del material usado para la base es el triple que el del material usado para la parte lateral curva. Representamos el costo del recipiente en función del radio de la base de dicho cilindro.

2) Calculamos el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitud de sus dos catetos es equivalente a 12 cm.

3) Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm² de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 3 cm. y el superior mide 2 cm. Calculamos las dimensiones de la página que nos permitan obtener la mayor área de impresión posible.



4) Debemos construir un depósito abierto similar a un prisma de base cuadrada con capacidad para 22,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.

5) A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. de lado. Decidir si la observación es correcta o no. (PAU, JUN 2001).

3. Estudio de variables y constantes

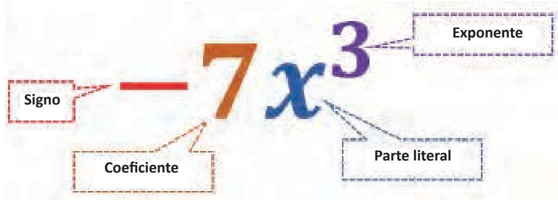
Las variables, llamadas también incógnitas están representadas por letras, los cuales pueden tener diferentes valores.
Las constantes son números los cuales tienen un valor específico.

Ejemplo: 1

Sean $4a,\ -7x,\ \pi,\ \sqrt{7},\ 0.5\,n,\ \frac{3}{7}m - \frac{m}{n}$

Donde 4, -7, π, 0.5, $\sqrt{7}$, $\frac{3}{7}$ son constantes y a, x, m, n son variables

4. Término algebraico



Por lo general el 1 no se anota cuando es coeficiente o exponente, tampoco el signo (+) cuando esta al inicio de una expresión algebraica, $m5 + 6n - mn$

Ejemplo 1.

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal (base/s)	Exponente/s
$6x^2$	+	6	x	2
$-\frac{2}{3}ab^x$	-	$\frac{2}{3}$	a,b	$1,x$
$-\frac{1}{5}\,m^{a-1}$	-	$\frac{1}{5}$	m	a-1

Actividad 15. Completamos la tabla en el cuaderno de ejercicios separando los elementos de un término o lo construimos según corresponda:

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal (base/s)	Exponente/s
$-12a^6$			a	6
$\frac{1}{7}x^a y$				
$-\frac{3}{4}\,m^2n^3$	-			2,3
	+	15	a	$x+1$
$2(x-y)^{2m}$				
$-\frac{7}{9}\,m^{3x}$	-			$3x$

5. Términos semejantes, reducción y su aplicación

Cuando hablamos de semejantes, nos referimos a objetos, eventos o personas, que tienen características en común, por ejemplo, el uniforme de los estudiantes que identifiquen a su unidad educativa.

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma base y el mismo exponente.

Ejemplo:

a) $3x, -8x, x$ son semejantes

b) $-\frac{2}{7}x^{2n}y^5z^{-4}, 3x^{2n}y^5z^{-4}$ son semejantes

c) $-7a^4b, -7ab^4$ NO son semejantes

Reducción de términos semejantes

Para reducir o simplificar expresiones algebráicas que contengan términos semejantes, debemos sumar o restar sus coeficientes aplicando la ley de signos y copiamos la parte literal.

Ejemplo 1. Reducir la siguiente expresión $-4ab^3+6ab^3-ab^3$.

$$-4ab^3+6ab^3-ab^3=(-4+6-1)ab^3=\boldsymbol{ab^3}$$

Ejemplo 2. Reducir $0{,}4m^2n^3+2m^2n-\frac{5}{3}m^2n^3-0{,}8m^2n+5m^2n^3$

$$\begin{aligned}0{,}4m^2n^3+2m^2n-\frac{5}{3}m^2n^3-0{,}8m^2n+5m^2n^3&=\frac{2}{5}m^2n^3+2m^2n-\frac{5}{3}m^2n^3-\frac{4}{5}m^2n+5m^2n^3\\&=\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}+5\right)m^2n^3+\left(2-\frac{4}{5}\right)m^2n\\&=\left(\frac{6-25+75}{15}\right)m^2n^3+\left(\frac{10-4}{5}\right)m^2n\\&=\boldsymbol{\frac{56}{15}m^2n^3+\frac{6}{5}m^2n}\end{aligned}$$

Ejemplo 3. $9x-3y+z-3+12y-8x-2z+1-8y-x$

Agrupamos los términos semejantes

$$\begin{aligned}9x-3y+z-3+12y-8x-2z+1-8y-x&=(9-8-1)x+(-3+12-8)y+(1-2)z-3+1\\&=0x+(1)y+(-1)z-2\\&=\boldsymbol{y-z-2}\end{aligned}$$

Actividad 16.

En nuestros cuadernos simplificamos los siguientes ejercicios propuestos:

1) $3x-5x$ 2) $8m^3n+9m^3n$ 3) $-14xy^4-3xy^4-xy^4$ 4) $6x^2y^3z-6x^2y^3z$ 5) $12ab-3ab+4ab-9ab$ 6) $-x+y+x+y$	7) $\frac{2}{3}y^3z-\frac{1}{3}y^3z-\frac{5}{3}y^3z$ 8) $-x^{2a}y^b+5x^2y^a+7x^{2a}y^b-2x^2y^a$ 9) $0{,}25x+\frac{1}{7}y+z-\frac{3}{5}x-\frac{22}{7}y$ 10) $0{,}5m^{x-1}+0{,}2n^{x-2}+0{,}8m^{x-1}-n^{x-2}-\frac{1}{5}mn$

6. Clasificación de expresiones algebraicas y su notación

Las expresiones algebraicas se clasifican por el número de términos que la componen.

Expresión	Tipo	Descripción
$-12x^3y$	*Monomio*	Expresión algebraica que consta de un solo término.
$\frac{1}{2}a^2b+\sqrt[3]{5a^2bc}$	*Binomio*	Expresión algebraica que consta de dos términos.
$-x+\frac{3}{2}x^7y+9$	*Trinomio*	Expresión algebraica que consta de tres términos.
$3a^3-7ab+b^3c-8c+3$	*Polinomio*	Cuando la expresión algebraica consta de dos o más términos.

7. Grado relativo y absoluto de un monomio y un polinomio

a) Grado de un monomio

– Grado absoluto (G.A.). El grado absoluto de un monomio se determina por la suma de todos los exponentes de sus variables (bases).
– Grado relativo (G.R.). Es el grado con respecto a cada exponente de las variables.

Ejemplo 1. Determinamos los grados del siguiente monomio: $-6x^3y^5z^7$ tenemos entonces:

$G.A. = 3 + 5 + 7 = 15$; el monomio es de grado absoluto 15

$$G.R. = \begin{cases} GR_x = 3 \text{ con respecto a } x \\ GR_y = 5 \text{ con respecto a } y \\ GR_z = 7 \text{ con respecto a } z \end{cases}$$

Actividad 17. Completa el siguiente cuadro, en el cuaderno de ejercicios:

Monomio	G. A.	GR_x	GR_y	GR_z
x^6yz^3				
$-\frac{1}{5}x^9y^3z^{11}$				
$-xy^8z^5$				
$2x^4z^7$				
$3x^{19}y^{13}z^{17}$				

b) Grado de un polinomio

– Grado absoluto de un polinomio (G.A.P.). El grado absoluto de un polinomio está determinado por el término que tiene mayor grado absoluto.

– Grado relativo de un polinomio (G.R.P.). Este grado está determinado por el término cuya variable (base) contiene al mayor exponente.

Ejemplo 1. Determinar los grados del siguiente polinomio P.

$$P(x; y; z) = \frac{2}{3}x^6y^2z^7 + 5x^5y^4z^3 + 0{,}4x^7y^3z^8$$

Solución: como no podemos especificar el grado, debemos realizar el análisis del absoluto y el relativo.

$$G.A.P. = \begin{cases} G.A.\ de\ \ \frac{2}{3}x^6y^2z^7\ \ es\ \ 6 + 2 + 7 = 15 \\ G.A.\ de\ \ 5x^5y^4z^3\ \ es\ \ 5 + 4 + 3 = 12 \\ G.A.\ de\ \ 0{,}4x^7y^3z^8\ \ es\ \ 7 + 3 + 8 = 18 \end{cases}$$

Por lo tanto: el *G.A.P.*= 18

Para el grado relativo, debemos tomar el mayor exponente de cada variable (base).

$$G.R.P. = \begin{cases} GR_x = 7\ con\ respecto\ a\ x \\ GR_y = 4\ con\ respecto\ a\ y \\ GR_z = 8\ con\ respecto\ a\ z \end{cases}$$

Por tanto: el G.R.P. es con respecto a z, porque tiene el mayor exponente.

Actividad 18. Completa el siguiente en el cuaderno de ejercicios:

Monomio	$\mathbf{G.A.}$	$\mathbf{GR_x}$	$\mathbf{GR_y}$	$\mathbf{GR_z}$
$3x^2yz^3 + x^9y^3z^7$				
$-xyz^8 + x^3y^6z^{11} - \frac{9}{32}x^2y^3z^5$				
$x^{12}y^7z^2 + xy^8z^5 - xy^8z^5$				
$x^{27}y^{19} - x^{31}y^{40} + x^{15}y^{15}$				
$x^6y^2z^2 + xy^5z^9 - x^{14}y^{13}z^7$				

8. Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta de sustituir las variables de dicha expresión por valores numéricos y realizar las operaciones indicadas. Una misma expresión algebraica puede tener muchos valores numéricos diferentes, en función del número que se asigne a cada una de las variables de la misma.

Ejemplo 1: Hallamos el valor numérico del siguiente monomio.

$$P(a,b,c) = \frac{5a+6b^3}{9c} \quad \text{con} \quad a = 3;\ b = -2 \ y \ c = 5$$

Reemplazando los valores dados, tenemos lo siguiente:

$$P(3,-2,5) = \frac{5(3)+6(-2)^3}{9(5)} = \frac{15-48}{45} = \frac{-33}{45} = -\mathbf{\frac{11}{15}}$$

Ejemplo 2: Hallamos el valor numérico del siguiente polinomio.

$$Q(x,y) = \frac{x^3}{2} - \frac{5xy^2}{3} + \frac{y}{2x};\ \text{con}\ x = 2, \quad y = \frac{1}{2}$$

Reemplazando los valores dados, tenemos lo siguiente:

$$Q\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{(2)^3}{2} - \frac{5(2)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{2(2)} = \frac{(8)}{2} - \frac{10\left(\frac{1}{4}\right)}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{8}{2} - \frac{\frac{10}{4}}{3} + \frac{1}{8} = 4 - \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{96-20+3}{24} = \frac{79}{24}$$

Actividad 19. Calculamos el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

Si $a = 2;\ b = 5;\ c = -3; d = -1; f = \frac{1}{2}$

1) $6ab =$	**2)** $-adf =$	**3)** $3bc^3 - \frac{4}{9}c^3f =$	**4)** $2a^2 - 3bc - 7d =$	**5)** $4ab + 3\,bc - 15d =$
6) $\frac{3}{4}a^3f =$	**7)** $a^2 - \frac{7}{4}b - 3c^2 - \frac{2}{5}d^5 =$	**8)** $-4(a-b) + 2(d-f) =$	**9)** $\frac{c}{6} + \frac{b}{4} - \frac{a}{5} =$	**10)** $(c+f)^3 =$

9. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Como observamos a lo largo del texto, las matemáticas son utilizadas como un lenguaje representativo de los acontecimientos en nuestro entorno. Analicemos los siguientes ejemplos de aplicación de lo aprendido:

Ejemplo. Se cuenta solo con una cinta métrica de $5m\ (1u=5m)$, con el cual se mide un terreno rectangular, cuyo largo es $7u$-$9m$ y el ancho $5u+2m$ ¿Cuál es el área de dicho terreno?

Solución: Para determinar el área, debemos multiplicar las expresiones y reducir términos semejantes.

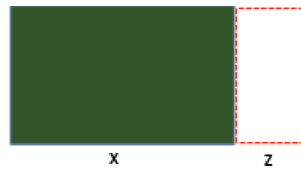
Reemplazando $u = 5m$ Largo: $7u - 9m = 7(5m) - 9m = 35m - 9m = 26m$ Ancho: $3u + 2m = 3(5m) + 2m = 15m + 2m = 17m$	**Solución:** $A = (26m)(17m) = 442m^2$ área del terreno

Actividad 20. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes ejercicios, posteriormente compartimos los resultados con los compañeros.

1. Calcular el valor del polinomio $E = P(-3)$; Sabiendo que: $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x - 9$
2. Calcular el valor del polinomio $N = M(-1)$; Sí $M(x) = x^2 - 2x + 1$

Resolver los siguientes problemas:

3. El jardín de legumbres de María mide $x=30m$ por $y=10m$, de modo que su área es de $x \cdot y=300\ m^2$. Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a A = y(x+z) ¿Cuál será área después de aumentar z?



4. Un automóvil recorre una distancia d=480 km a una velocidad constante $v = 80\ km/h$, es decir no acelera ni desacelera, si la fórmula para calcular es $t=d/v$. ¿Cuál es el tiempo?

5. Se debe calcular la distancia entre dos coordenadas cartesianas P_1 (2; 3) y P_2 (5;7) , por ello, se recurre a calcular dicha distancia través de la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

¡Realicemos la valoración!

Fórmula de velocidad	Fórmula de interés simple	Regla de tres simple
$\boldsymbol{Velocidad} = \dfrac{\boldsymbol{desplazamiento}}{\boldsymbol{tiempo}}$ $\vec{V} = \dfrac{\vec{d}}{t}$	$CF = C * \left(1 + \frac{n*i}{100}\right)$ $CF = Capital\ Final$ $C = Capital\ Inicial$ $n = Periodo$ $i = interés$	$x = \dfrac{b * c}{a} \Rightarrow \begin{cases} a \to b \\ c \to x \end{cases}$

Las fórmulas que se observan son algunas de las más utilizadas en nuestro diario vivir, los datos se van reemplazando con los que conocemos y otros que los encontramos realizando las operaciones correspondientes.

Ejemplo: cuando alguien está conduciendo un automóvil se aplica la primera fórmula para calcular el tiempo y distancia de acuerdo a la velocidad con la que se transita.

El segundo ejemplo cuando nos prestamos dinero con interés de algún familiar, amigo o el banco. Debemos calcular el monto a devolver.

Y la tercera regla de 3 simple es aplicado a datos proporcionales, cuando conocemos tres datos y desconocemos del cuarto. Aplicando la formula, obtendremos el dato que falta.

Reflexivamente respondemos las siguientes preguntas:
¿Qué otras aplicaciones del algebra se aplican en nuestro contexto? menciona 5 ejemplos.
¿Cómo aplicamos el lenguaje algebraico en nuestra cotidianidad?
¿Cómo aportó el algebra en el desarrollo de la ciencia y tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 21. De acuerdo a las fórmulas observadas anteriormente resolvemos los siguientes problemas:

1) Si José corre a una velocidad de $35\ m/min$ ¿Cuál es la distancia de su casa a su colegio si demora $9\ min$?
2) María le presta a su amiga $Bs\ 5000$ con un interés del $20\%\ anual$ ¿Cuánto debe cancelar en total su amiga en $2\ años$?
3) Si acomodamos a 2 estudiantes por pupitre y en el aula se tiene $16\ pupitres$ ¿Cuántos estudiantes pueden ingresar?

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Los comerciantes de un mercado se encuentran vendiendo sus productos en las calles, ofreciendo, ropa, frutas, verduras, juguetes, zapatos, etc.

Debido al comercio los vecinos del lugar hicieron aprobar la construcción de un mercado donde deben instalarse lo comerciantes.

Actividad 22. Analicemos lo sucedido y respondemos las siguientes preguntas, en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Los comerciantes deben ingresar como les guste y al puesto de su preferencia?
2. ¿Cómo deberían organizarse los representantes de los comerciantes?
3. ¿Cómo aplicamos nuestros conocimientos algebráicos para esta distribución?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Operaciones con expresiones algebraicas

1.1. Adición y sustracción

Adición y sustracción de monomios: Se suman o restan los coeficientes y se copia la o las mismas letras y exponentes.

Ejemplo 1. Sumamos los siguientes monomios

a) $3x; -2x, -8x$

Solución: $3x + (-2x) + (-8x) = 3x - 2x - 8x = (3 - 2 - 8)x = -7x$

b) $-5x^2yz^5; \frac{2}{3}x^2yz^5; -x^2yz^5$

Solución: $\left(-5 + \frac{2}{3} - 1\right)x^2yz^5 = \left(-6 + \frac{2}{3}\right)x^2yz^5 = \left(\frac{-18+2}{3}\right)x^2yz^5 = -\frac{16}{3}x^2yz^5$

Actividad 23. En nuestro cuaderno realizamos las siguientes sumas de monomios

1) $-m; 2m; -3m$	4) $x^{a-1}; -3x^{a-1}; 10x^{a-1}$	7) $3ab; -\frac{7}{3}ab; -\frac{5}{6}ab; ab$
2) $\frac{1}{2}ab; -\frac{3}{2}ab; -ab$	5) $3mn^{\frac{1}{2}(a-b)}; -9mn^{\frac{1}{2}(a-b)}; mn^{\frac{1}{2}(a-b)}$	8) $2z^{2a^{2a}}; -5z^{2a^{2a}}; 7z^{2a^{2a}}; -2z^{2a^{2a}}$
3) $10\frac{x^2}{y}; 2\frac{x^2}{y}; -12\frac{x^2}{y}$	6) $0{,}75m; -0{,}25m$	9) $x^{y^a+a}; -5x^{y^a+a}; \frac{1}{5}x^{y^a+a}$
		10) $2n^{\sqrt{x+y}}; -7n^{\sqrt{x+y}}; 5n^{\sqrt{x+y}}$

Adición y sustracción de polinomios: Seleccionamos los términos semejantes y aplicamos la suma y resta de monomios en cada grupo.

Ejemplo1: Sumamos los siguientes polinomios: $7x^2 - 4x^3 + 3x - 6; -2x^2 + 3x^3 + 2; 3x^2 + x^3 - 2x + 4$

Solución: $7x^2 - 4x^3 + 3x - 6 - 2x^2 + 3x^3 + 2 + 3x^2 + x^3 - 2x + 4 = 8x^2 + x$

Procedimiento: $7x^2 - 2x^2 + 3x^2 = (7 - 2 + 3)x^2 = 8x^2$

$$-4x^3 + 3x^3 + x^3 = (-4 + 3 + 1)x^3 = 0$$

$$3x - 2x = (3 - 2)x = x$$

$$-6 + 2 + 4 = 0$$

Ejemplo 2: $\left(\frac{1}{3}x^{m-2} - \frac{5}{6}y^{n-2} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{2}x^{m-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} + \frac{1}{3}\right)$

Solución: $\frac{1}{3}x^{m-2} - \frac{5}{6}y^{n-2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2}x^{m-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{6}x^{m-2} - \frac{7}{12}y^{n-2} + \frac{2}{9}}$

Procedimiento: $\frac{1}{3}x^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^{m-2} = \boldsymbol{\frac{5}{6}x^{m-2}}$

$$-\frac{5}{6}y^{n-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right)y^{n-2} = -\boldsymbol{\frac{7}{12}y^{n-2}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{-1 + 3}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

Actividad 24. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios propuestos:

1) Sumar $5x - y + z; 13x + 4y - 6z$

2) Sumar los poligonos $-10a - 6b + 9; 7a + 4b - 3$

3) Efectuar $(a^3 - 15a^2 + 4a) + (6a^3 + 3a^2 - 6a + 2)$

4) $5m^4 - n^4;\ 6m^3n - m^2n^2 + mn^3;\ -5m^4 - 8m^3n + 2m^2n^2; -5mn^3 + 11n^4$

5) Sumar $\frac{5}{3}x^3 - 7xy + \frac{3}{2}y^2;\ -\frac{1}{5}x^3 + \frac{7}{2}xy - \frac{1}{6}y^2;\ -5x^3 + \frac{5}{3}xy + \frac{3}{5}y^2$

6) $\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{9}{8}mn\right) + \left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{7}{4}mn\right) + \left(-3m^2 + \frac{1}{2}mn - 4n^2\right)$

7) $\left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 5x + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right)$

8) $4m^{3x} - 6m^{2x-1} + 4m^{2x-2}; m^{3x} + 5m^{2x-1} + m^{2x-2}; -5m^{3x} - 7m^{2x-1}$

9) $\frac{7}{5}a^{1-x} - \frac{3}{4}a^{1-2x} - a^{1-3x}; -\frac{1}{10}a^{1-x} + \frac{2}{3}a^{1-3x} + a^{1-2x}; \frac{5}{3}a^{1-x} + \frac{9}{2}a^{1-2x}$

10) Sumar $\frac{1}{8}y^{3x} - \frac{2}{3}y^x + y; -\frac{1}{2}y^{3x} + y^x - \frac{3}{5}y; -y^{3x} + 11y$

1.2. Multiplicación de expresiones algebraicas

Producto de bases iguales. En la multiplicación de bases iguales los exponentes se suman.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Producto de monomios: Primero se anota el signo correspondiente de acuerdo a la regla de signos, posteriormente se multiplican los coeficientes y en la parte literal se aplica la ley de bases iguales.

Ejemplo 1. Multiplicamos $-\frac{1}{2}m^2n^5; \frac{3}{5}m^2n^5; -2ab$

Solución: $\left(-\frac{1}{2}m^2n^5\right)\left(\frac{3}{5}m^2n^5\right)(-2ab) = \left(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times(-2)\right)m^{2+2}n^{5+5}ab = \frac{3}{5}x^5yz^7$

Ejemplo 2. Multiplicamos $(2x^{3m-2}y^{2m})(-7x^{2m-1}y^{3m})$

Solución: $(2x^{3m-2}y^{2m})(-7x^{2m-1}y^{3m}) = -14x^{3m-2+(2m-1)}y^{2m+3m} = \boldsymbol{-14x^{5m-3}y^{5m}}$

Actividad 25. Multiplicamos los siguientes monomios, en el cuaderno de ejercicios.

1) $(7x)(-4x)$	7) $(-mnp)(mnp)$	12) $(-2x^{2a-5}y^{4a+1})(-3x^{4a+1}y^{5a-7})$
2) $(5x^3y^3z)(7x^5y^6z)$	8) $\left(-\frac{4}{7}mn\right)\left(-\frac{3}{5}m^3np\right)$	13) $\left(-\frac{6}{7}a^{3x-2}b^{3x}c\right)\left(-\frac{3}{11}a^{x+1}bc^{x-1}\right)$
3) $(-8a^7c^4)(3a^2b^2c^3)$	9) $(0{,}4xyz)(0{,}75xyz)$	14) $\left(-\frac{1}{3}m^{2x-1}n^{4x}\right)(9m^{2+3x}n^{1-3x})$
4) $\left(\frac{2}{3}abc\right)\left(-\frac{3}{5}c^5\right)$	10) $(0{,}12x^6y^4)(0{,}5xy^2)$	15) $(5x^3y)(-3x^2y)(2x^6y^2)(-7y^3)$
5) $(-11m^5n)(-7m^3n^3)$	11) $(7a^{3x+4}b^{3x})(-5a^{x-3}b^3)$	
6) $(6a^5b^8c^2)\left(-\frac{1}{3}a^3b\right)$		

Producto de un polinomio por un monomio. Se debe multiplicar cada término del polinomio por el monomio o viceversa, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Hallamos el producto de $(3x^4y^3 - 5x^3y^2z + 2xz^4)(-2x^5y)$

Solución: multiplicamos los términos del polinomio por el monomio.

$$= (3x^4y^3 - 5x^3y^2z + 2xz^4)(-2x^5y) = (3x^4y^3)(-2x^5y) + (-5x^3y^2z)(-2x^5y) + (2xz^4)(-2x^5y)$$
$$= -6x^9y^4 + 10x^8y^3z - 4x^5yz^4$$

Ejemplo 2. $\left(\frac{3}{2}x^{a-2} - \frac{5}{3}x^{a-3} + \frac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right)$

Solución: multiplicamos los términos del polinomio por el monomio.

$$\left(\frac{3}{2}x^{a-2} - \frac{5}{3}x^{a-3} + \frac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) = \left(\frac{3}{2}x^{a-2}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) + \left(-\frac{5}{3}x^{a-3}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) + \left(\frac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-2+a+2} + \left(-\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-3+a+2} + \left(\frac{7}{4}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-4+a+2}$$
$$= -\frac{9}{14}x^{2a} + \frac{5}{7}x^{2a-1} - \frac{3}{4}x^{2a-2}$$

Actividad 26. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes multiplicaciones de polinomios:

1) $(-7x)(-3x - 2x)$	6) $(5x^3y^3)\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3x^3y - 5y^{\frac{1}{3}}\right)$
2) $(x^3y^3z)\left(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 7x^5y^6z\right)$	7) $\left(\frac{1}{2}x^4y^3 - \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y^7\right)$
3) $\left(-\frac{1}{3}a^3c^2\right)\left(7a^6b^2c^3 - \frac{3}{5}a^4b^3c^7\right)$	8) $\left(\frac{4}{5}x^3y^2z\right)\left(\frac{15}{2}x^6yz^3 - \frac{9}{7}yz^3 + 4xy\right)$
4) $\left(\frac{5}{3}abc\right)\left(-2abc - \frac{3}{4}c^5\right)$	9) $(8ab)\left(\frac{8}{3}a^xb^{3y-1} + \frac{11}{2}a^{x-2}b^{3y-4}\right)$
5) $(15m^3n^3 - 11m^3n)(-m^3n^3)$	10) $\left(-\frac{2}{7}m^{6x}n^4\right)\left(\frac{5}{2}m^{2x+7}n^{4a} - \frac{2}{5}m^{3x+4}n^{3x-1} - \frac{1}{9}m^{5x}n\right)$

Producto de un polinomio por un polinomio

El producto de polinomios se obtiene multiplicando cada término del primer polinomio por el segundo y reduciendo luego, los términos semejantes. De este modo obtenemos el polinomio resultante.

Ejemplo 1: Multiplicamos $(3x^2-2x-2)(5x-5x^2-7)$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 3x^2 & -2x & -2 \\
\times & & -5x^2 & +5x & -7 \\
\hline
-15x^4 & +10x^3 & +10x^2 & & \\
 & 15x^3 & -10x^2 & -10x & \\
 & & -21x^2 & +14x & +14 \\
\hline
-15\boldsymbol{x}^4 & +25\boldsymbol{x}^3 & -21\boldsymbol{x}^2 & +4\boldsymbol{x} & +14
\end{array}
$$

Ejemplo 2: $\left(\frac{3}{2}a^2-4ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b\right)$

Solución: Estos polinomios podemos ordenarlos de manera horizontal.

$$\left(\frac{3}{2}a^2-4ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b\right)=\frac{3}{6}a^3-\frac{4}{3}a^2b+\frac{1}{9}ab^2-\frac{6}{10}a^2b+\frac{8}{5}ab^2-\frac{2}{15}b^3$$

$$=\frac{1}{2}a^3+\left(-\frac{4}{3}-\frac{6}{10}\right)a^2b+\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{5}\right)ab^2-\frac{2}{15}b^3=\boldsymbol{\frac{1}{2}a^3-\frac{29}{15}a^2b+\frac{77}{45}ab^2-\frac{2}{15}b^3}$$

Ejemplo 3: Efectuamos $(3x^{a+2}+4x^{a+1}-x^{a-1}-x^{a-2})(x^{a+2}-3x^a-x^{a-1})$

Solución: Ordenamos los polinomios en forma general y realizamos el procedimiento anterior.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 3x^{a+2} & +4x^{a+1} & -x^{a-1} & -x^{a-2} & & & \\
\times & & x^{a+2} & -3x^{a} & -x^{a-1} & & & \\
\hline
3x^{2a+4} & +4x^{2a+3} & & -x^{2a+1} & -x^{2a} & & & \\
 & & -9x^{2a+2} & -12x^{2a+1} & & +3x^{2a-1} & +3x^{2a-2} & \\
 & & & -3x^{2a+1} & -4x^{2a} & & +x^{2a-2} & +x^{a-3} \\
\hline
\boldsymbol{3x^{2a+4}} & \boldsymbol{+4x^{2a+3}} & \boldsymbol{-9x^{2a+2}} & \boldsymbol{-16x^{2a+1}} & \boldsymbol{-5x^{2a}} & \boldsymbol{+3x^{2a-1}} & \boldsymbol{+4x^{2a-2}} & \boldsymbol{+x^{a-3}}
\end{array}
$$

Actividad 27. En nuestros cuadernos realizamos la multiplicación de los siguientes polinomios:

1) $(7x^3+5x^2-x)(3x-4x^2-4x^3)$
2) $(6a^5b^8c^2-8a^7c^4)\left(-\frac{1}{3}a^3b-\ 3a^2b^2c^3\right)$
3) $\left(\frac{2}{3}\ a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a\right)\left(-\frac{3}{5}a^2+\frac{1}{3}a\right)$
4) $(m^5n-4m^4n^2-5m^3n^3-7m^2n^4)(6mn+2)$
5) $(6a^3b+9a^2b^2-3ab^3)\left(-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{6}a^2b-2ab^2\right)$
6) $\left(-\frac{3}{2}mn-\frac{2}{5}m^2n^2-\frac{1}{2}m^3n^3\right)\left(\frac{1}{2}m^3n^3+\frac{3}{2}m^2n^2+\frac{1}{3}mn\right)$
7) $(3a^{4x}b^4-4a^{3x}b^3-7a^{2x}b^2-5a^xb)(a^{3x}b^2-2a^{2x}b+5a^x)$
8) $(-2x^{2a+1}y^{3b+1}-5x^{2a+2}y^{3b+2})\left(\frac{1}{2}x^{a+1}y^{b+1}-\frac{1}{5}x^{a+2}y^{b+2}\right)$
9) $\left(\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}mn-\frac{5}{6}n^2\right)\left(3m^2+\frac{1}{2}mn-\frac{2}{3}n^2\right)$
10) $\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a^4-2a^3+3a^2+a\right)$

1.3. División de monomios y polinomios

División de bases iguales: en la división de bases iguales se copia la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

División entre monomios: para dividir monomios, primero debemos dividir los coeficientes y luego aplicamos la ley de división de bases iguales a las variables, siempre y cuando sean las mismas, caso contrario se mantienen.

Ejemplo 1. Dividimos $-8x^5yz^3$ entre $2x^3y^2z^3$

Solución: $\frac{-8x^5yz^3}{2x^3y^2z^3}=-4x^{5-3}y^{1-2}z^{3-3}=-4x^2y^{-1}z^0=-\boldsymbol{\frac{4x^2}{y}}$

Ejemplo 2. Dividimos $-9a^4b^7c^5$ entre $-15a^{-2}b^3c^{-1}$

Solución: $\frac{-9a^4b^7c^5}{-15a^{-2}b^3c^{-1}}=\left(\frac{-9}{-15}\right)a^{4-(-2)}b^{7-3}c^{5-(-1)}=\frac{3}{5}a^{4+2}b^4c^{5+1}=\boldsymbol{\frac{3}{5}a^6b^4c^6}$

Ejemplo 3. Dividimos $-10x^{2n-1}y^{n+4}z^4$ entre $2x^{n+2}y^{3n+3}c^{-n}$

Solución:

$$\frac{-10x^{2n-1}y^{n+4}z^4}{2x^{n+2}y^{3n+3}c^{-n}}=-\frac{10}{2}x^{2n-1-(n+2)}y^{n+4-(3n+3)}z^{4-(-n)}=-5x^{2n-1-n-2}y^{n+4-3n-3}z^{4+n}=\boldsymbol{-5x^{n-3}y^{-2n+1}z^{4+n}}$$

Actividad 28. En nuestro cuaderno de ejercicios resolvemos las siguientes divisiones de monomios:

1) $\frac{5x^8y^7z}{7x^5y^6z}$	4) $\frac{-11m^5n}{-77m^3n^3}$	7) $0{,}4xyz^2 \div 0{,}2xyz$
		8) $\left(7a^{3x}b^x\right)\div\left(-5a^{-3}b^2\right)$
2) $\frac{-8a^7b^2c^4}{12a^2b^2c^3}$	5) $(6a^5b^8c^2)\div\left(-\frac{1}{3}a^3bc\right)$	9) $\left(-3x^{9a}y^{7a}\right)\div\left(-3x^{4a}y^{5a}\right)$
3) $\frac{\frac{2}{3}abc}{-\frac{3}{5}abc^5}$	6) $\left(-\frac{4}{7}mn\right)\div\left(-\frac{3}{5}m^3np\right)$	10) $\left(-\frac{6}{7}a^{3x-2}b^{3x}c\right)\div\left(-\frac{3}{11}a^{x+1}bc^{x-1}\right)$

División de un polinomio entre un monomio: cuando se presente este caso debemos dividir cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Dividimos la siguiente expresión: $\frac{21x^8y^6z-9x^6y^4z^2+3x^4y^2}{-3x^2yz}$

Solución: dividimos cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{21x^8y^6z}{-3x^2yz}-\frac{9x^6y^4z^2}{-3x^2yz}-\frac{3x^4y^2}{-3x^2yz}=7x^{8-2}y^{6-1}+3x^{6-2}y^{4-1}z^{2-1}-\frac{x^{4-2}y^{2-1}}{z}=\boldsymbol{7x^6y^5+3x^4y^3z-\frac{x^2y}{z}}$$

Ejemplo 2. Calculamos el cociente de: $\frac{3x^{2m-1}-7x^{3m-2}-16x^{m+1}}{2x^{m-2}}$

Solución: dividimos cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{3x^{2m-1}-7x^{3m-2}-16x^{m+1}}{2x^{m-2}}=\frac{3x^{2m-1}}{2x^{m-2}}-\frac{7x^{3m-2}}{2x^{m-2}}-\frac{16x^m}{2x^{m-2}}$$

$$=\frac{3}{2}x^{2m-1-(m-2)}-\frac{7}{2}x^{3m-2-(m-2)}-8x^{m-(m-2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}x^{m+1}-\frac{7}{2}x^{2m}-8x^2}$$

Actividad 29. Realizamos las siguientes divisiones de polinomios entre monomios en nuestro cuaderno de ejercicios.

1) $(-3x-2x^2)\div(-7x)$	6) $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3x^3y-5y^{\frac{8}{3}}\right)\div(5x^3y^3)$
2) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2+6x^5y^6z\right)\div(x^3y^3z)$	7) $\left(\frac{1}{2}x^4y^3-\frac{1}{3}xy^3-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{2}x^2y^7\right)$
3) $\left(7a^6b^2c^3-\frac{3}{5}a^4b^3c^7\right)\div\left(-\frac{1}{3}a^3c^2\right)$	8) $\left(\frac{2}{15}x^6yz^3-\frac{7}{9}yz^3+4xy\right)\div\left(\frac{3}{5}x^3y^2z\right)$
4) $\left(7abc-\frac{3}{2}c^5\right)\div\left(\frac{1}{3}abc\right)$	9) $\left(\frac{8}{3}a^xb^{3y-1}+\frac{11}{2}a^{x-2}b^{3y-4}\right)\div(8ab)$
5) $(4m^3n^3-3m^3n)\div(-m^3n^3)$	10) $\left(\frac{1}{2}m^{6x+7}n^x-m^{3x+4}n^{x-1}-\frac{1}{9}m^{5x}n\right)\div\left(-\frac{2}{7}m^{2x}n^4\right)$

División de un polinomio entre otro polinomio

Para dividir polinomios, debemos observar el orden de los términos según el exponente de la base y si falta un término lo completamos con un cero.

Método Clásico

Ejemplo 1. Efectuamos la división de $4a^2-7a+\frac{3}{2}$ entre $2a-3$

Solución: Expresamos en forma de división

$$\begin{array}{rrr|l} 4a^2 & -7a & +\frac{3}{2} & 2a-3 \\ \cline{4-4} \underline{-4a^2} & \underline{+6a} & & 2a-\frac{1}{2} \\ 0 & -a & +\frac{3}{2} & \\ & \underline{a} & \underline{-\frac{3}{2}} & \\ & & 0 & \end{array}$$

Anotamos en el cociente $2a$ y multiplicamos por el divisor

$(2a)(2a)=4a^2$, pero al pasar a restar se registra con signo contrario. $-4a^2$.

Luego multiplicamos $(2a)(-3)=-6a$, pero pasa a restar con signo contrario $6a$.

Posteriormente realizamos la misma operación con $-\frac{1}{2}$

Por lo tanto: el cociente es: $2a-\frac{1}{2}$ y el resto 0

Ejemplo 2. Dividimos $-3x+2x^4-x^2-1$ entre $x+x^2+1$

Solución: debemos ordenar tanto el dividendo como el divisor de forma decreciente respecto a los exponentes.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & 0 & -x^2 & -3x & -8 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} \underline{-2x^4} & \underline{-2x^3} & \underline{-2x^2} & & & 2x^2-2x-1 \\ 0 & -2x^3 & -3x^2 & -3x & & \\ & \underline{2x^3} & \underline{+2x^2} & \underline{+2x} & & \\ & 0 & -x^2 & -x & -8 & \\ & & \underline{x^2} & \underline{+x} & \underline{+1} & \\ & & & & -7 & \end{array}$$

Por lo tanto: el cociente es: $2x^2$-$2x$-1 y el resto es *-7*

Actividad 30. En nuestro cuaderno de ejercicios dividimos los siguientes polinomios.

1) $\frac{15x^2-xy-28y^2}{5x-7y}$	5) $\frac{3a^4-9a^2-40}{a^2-8}$	8) $\frac{5a^4-9a^3-23a^2+36a+12}{a^2-4}$
2) $\frac{7x^2-31xy+12y^2}{x-4y}$	6) $\frac{12a^4-36a^3-29a^2+38a+14}{2a^2-5a-6}$	9) $\frac{12a^4+9a^3-11a^2-6a+2}{3a^2-2}$
3) $\frac{12a^2-5ab-2b^2}{4a+b}$	7) $\frac{a^4+2a^2+5a+3}{a^2-3a+6}$	10) $\frac{10x^4-41x^3y+9x^2y^2+38xy^3+14y^4}{2x-7y}$
4) $\frac{18a^4-21a^2b^2-15b^4}{6a^2+3b^2}$		

Método de Horner

Este método nos permite dividir polinomios a través de las operaciones con sus coeficientes, por ejemplo:

Dividimos los siguientes polinomios $P(x) \div E(x)$ donde: $P(x) = 2x^5 + x^3 - 3x + 1$ y $E(x) = x^3 - 2x + 2$

1ro. Si los polinomios no tienen todos los términos en relación al exponente de su variable, debemos completar con ceros ambos polinomios. Posteriormente ubicamos los coeficientes:

$P(x) = 2x^5 + 0x^4 + x^3 + 0x^2 - 3x + 1$ $\qquad\qquad$ $E(x) = x^3 + 0x^2 - 2x + 2$

Colocamos una línea divisora punteada en los coeficientes de $P(x)$, para ello contamos de derecha a izquierda la misma cantidad de columnas que el exponente del divisor, que en este caso es 3.

Cociente de $P(x)$

1	2	0	1	0	-3	1
0						
-2						
2						

Coeficiente de $E(x)$ con signo cambiado a partir del segundo término.

Coeficiente $q(x)$ $\qquad$ Coeficiente $r(x)$

2do. Dividimos el primer coeficiente del dividendo por el primer coeficiente del divisor y anotamos el resultado en la parte inferior $q(x)$ sobre la misma columna, posteriormente multiplicamos el resultado por los demás coeficientes del divisor y anotamos los resultados sobre cada columna.

1	2	0	1	0	-3	1
0		0	-4	4		
-2		0				
2						
	2	0				

$2/1 = 2$ $\qquad$ $0+0 = 0$

3er. Repetimos el procedimiento anterior, sumando $0+0$ y el resultado lo dividimos con 1, el resultado se anota en q(x), y luego se multiplica este número por los coeficientes del divisor.

1	2	0	1	0	-3	1
0		0	-4	4		
-2		0	0	0	0	
2			-3			
	2	0				

4to. Nuevamente realizamos el mismo procedimiento, ahora sumamos 1 + (-4) + 0 = -3, el resultado lo dividimos entre 1 y anotamos el resultado en q(x). posteriormente multiplicamos el resultado por los coeficientes del divisor.

1	2	0	1	0	-3	1
0		0	-4	4		
-2		0	0	0	0	
2			-3	0	6	-6
	2	0	-3	4	3	-5

Por lo tanto, tenemos que cociente $q(x)$ y resto $r(x)$ son:

$$q(x) = 2x^2 + 0x - 3 = 2x^2 - 3$$

$$r(x) = 4x^2 + 3x - 5$$

Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

La regla de Ruffini es un método particular que permite determinar el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x \pm a$.

Divisor	Dividendo	Término independiente
	Cociente	resto

Analicemos los pasos a través de un ejemplo:

Ejemplo 1. Determinamos el cociente de: $(6x^3 - 3x + 4) \div (x - 2)$

1ro. Ordenamos en forma decreciente en relación al exponente del dividendo y se anotan en orden sus coeficientes. Si en el polinomio del dividendo faltan términos, se completa con ceros. Debajo, y desplazado a la izquierda, **el divisor** es el término independiente 2 con signo contrario. El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo; por lo cual, bajamos el número 6.

	6	0	−3	4
2	↓			
	6			

2do. Se multiplica el divisor por el primer valor del cociente y se anota el producto debajo del segundo dividendo. Luego sumamos o restamos lo valores del segundo término.

	6	0	−3	4
2		12		
	6	12		

3er. Sumamos $0+12=12$ y multiplicamos el divisor con el resultado.

	6	0	−3	4
2		12	24	
	6	12		

4to. Luego de sumar $-3+24=21$ se multiplica el divisor por el resultado.

	6	0	−3	4
2		12	24	42
	6	12	21	46

5to. Se expresa el cociente en forma de polinomio y se identifica el resto.

$$\frac{6x^3-3x+4}{x-2} = 6x^2 + 12x + 21$$

$$P(x) = 6x^2 + 12x + 21$$

Resto = 46

Ejemplo 2. Hallar el cociente y el resto de $(9x^4 - 2x^3 - x - 2) \div (3x - 2)$

Solución: aplicamos los pasos del anterior ejemplo.

$3x - 2 = 0$					
$\frac{2}{3}$	9	-2	0	-1	-2
	$\downarrow$	6	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{14}{27}$
	9	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{40}{27}$

Por lo tanto, **Cociente** $= 9x^3 + 4x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{7}{9}$ y el **Resto** = $-\frac{40}{27}$

Actividad 31.

Resolver por la regla de Ruffini:

1) $(x^4 - x^3 - 9x - 15) \div (x - 3)$
2) $(2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$
3) $(-2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5) \div (x - 3)$
4) $(x^5 + 4x^4 + 5x + 2) \div (x + 1)$
5) $(a^4 - 3a^3 - 7a^2 - 3a - 5) \div (a - 5)$
6) $(3m^5 + 9) \div (m - 2)$
7) $(-3x^4 + 2x^2 - 7x) \div (x - 2)$
8) $(x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 18) \div (x + 3)$
9) $(x^4 - 3x^2 - 5) \div (x + 4)$
10) $(3x^4 + 2x^3 + 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

1.4. Teorema del resto

Este teorema nos permite calcular el resto o residuo de la división de un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $Q(x)$ de primer grado y de la forma x-a, donde el resto es $r(a)$.

Ejemplo 1: dividir $P(x) = -3x^4 + 4x^2 - 5$ y $Q(x) = x - 2$

Solución: Igualamos a cero el divisor y despejamos x

$x - 2 = 0$ entonces $\boldsymbol{x = 2}$

Remplazando el valor de $\boldsymbol{x}$, tenemos $P(2) = -3(2)^4 + 4(2)^2 - 5 = -3(16) + 4(4) - 5 = -37$

Por lo tanto, el resto es $\boldsymbol{-37}$

Ejemplo 2: dividir $P(x) = 2x^3 - 3x + 6$ entre $Q(x) = 3x - 2$

Solución: igualamos a cero el divisor y despejamos x

$3x - 2 = 0$ entonces $x = \frac{2}{3}$

Remplazando el valor de $\boldsymbol{x}$, tenemos $P\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{16}{27} - 2 + 6 = \frac{124}{27}$

Por lo tanto, el resto es 124/27

Actividad 32. En nuestro cuaderno determinamos el resto de los siguientes polinomios.

1) $(2x^3 - 9x - 15) \div (x - 2)$	4) $(x^4 - 4x^3 + 5x + 2) \div (3x + 2)$
2) $(4x^3 - x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$	5) $(4a^2 - 3a - 5) \div (2a - 5)$
3) $(3x^4 + 4x^3 + x^2 - 5) \div (7x - 7)$	6) $(3m^4 + 6m^3 + 4m^2 + 2m - 1) \div (2m - 1)$

2. Operaciones algebraicas combinadas

Para resolver operaciones combinadas con fracciones y expresiones algebraicas, se debe tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

1ro. Si se tiene signos de agrupación debemos suprimir los mismos y después efectúamos el resto de las operaciones.

2do. Si no existen signos de agrupación, debemos resolver primero las multiplicaciones y las divisiones, posteriormente las sumas y las restas.

Observemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Simplificamos la siguiente expresión.

$$\frac{2}{3}+\frac{a+3}{2}-\frac{2(a-1)}{5}$$

Solución: Hallamos el m.c.m. de los denominadores y aplicamos procedimientos de suma y resta de fracciones.

$$\frac{20+15(a+3)-12(a-1)}{30}=\frac{20+15a+45-12a+12}{30}=\frac{3\boldsymbol{a}+77}{30}$$

Ejemplo 2. Simplificamos la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}$$

Solución: Calculamos el común denominador y posteriormente realizamos las operaciones.

$$\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+2+2(x-1)}{x-1}}{\frac{x+2-1(x-1)}{x-1}}=\frac{x+2+2x-2}{x+2-x+1}=\frac{\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}}{3}$$

Actividad 33. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes ejercicios.

1) $(2x+3x-11)(7x-15+7)$ 2) $\left(2m^3-5m^2-6m\right)\div(15m-11m)$ 3) $\frac{3a}{8}-\frac{6a}{5}+\frac{a}{2}$ 4) $\frac{2x+5}{4}+\frac{6x-7}{3}-\frac{x}{6}$	5) $\dfrac{\frac{1+x}{4}+\frac{1-x}{2}}{\frac{1-x}{2}-\frac{1-x}{4}}=$ 6) $\dfrac{x}{\dfrac{1+\frac{1+x}{x}}{1-\frac{1-x}{x}}}=$	7) $\dfrac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}=$ 8) $\dfrac{x}{1-\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}}=$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Gran parte de los problemas de la vida cotidiana están expresados en forma de expresiones algebraicas los cuales son resueltos siguiendo los pasos que corresponde y aplicados a diferentes situaciones y contextos.

Ejemplo. Un club deportivo después de gestionar donaciones con algunas instituciones para la compra de poleras, logro reunir $4x^2+4x$ del cual se destinó *Bs 20* para transporte. Comprando por mayor se rebajo *Bs 3*, siendo x el precio de cada polera *(x=50 Bs)*, respondemos las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto de dinero se logró reunir? b) ¿Cuántas poleras compraron? c) ¿Les sobró dinero?

Solución: Sumamos la cantidad recaudada, restamos el pasaje y el sobrante dividimos entre el precio de las poleras.

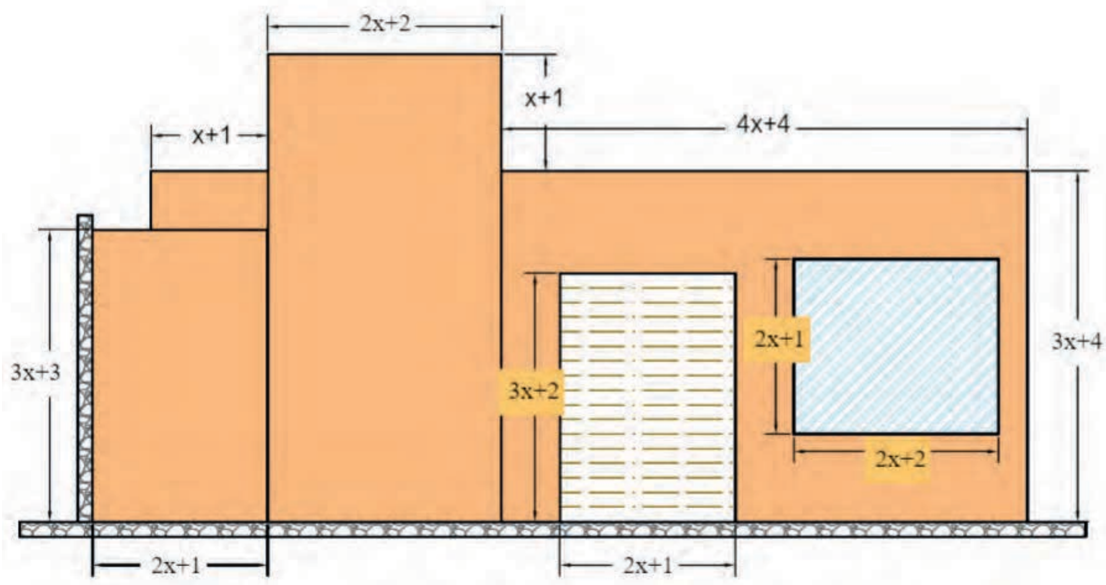
$4x^2 + 4x - 20 \quad \vert \; x - 3$ $\underline{-4x^2 + 12x} \quad \vert \; 4x + 16$ $16x - 20$ $\underline{-16x + 48}$ $\mathbf{28}$	**Reemplazando** $x=50$ $4(50)^2+ 4(50)-20 =10180$ Costo de 1 polera con la rebaja x-3 = 47 Cantidad de poleras adquiridas 4(50)+16 = 216	**Respuesta:** a) Total Bs 10200 b) 216 poleras c) Sí, Bs 28

Actividad 34. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes problemas:

1. Se desea calcular el volumen de una piscina de base rectangular cuyas dimensiones longitudinales son: $2x-4$ de largo, $5x+2$ de ancho y $6x+1$ de altura. ¿Cuál es el volumen de la piscina?

2. Debemos cargar gasolina en botellas plásticas de capacidad $x-y$ litros, y tenemos $4x^2-7xy+3y^2$ litros. ¿Cuántas botellas plásticas se necesitan?

3. Debemos pintar la fachada frontal de una tienda cuyas dimensiones se observa en la imagen.
¿Cuál es el área total que se debe pintar?
Tomemos en cuenta que no se pintara la ventana y la puerta de persiana metálica.



4. Encontrar el área y perímetro de una cancha de futbol que tiene de largo igual a $12x+6$ y ancho igual $7x-4$.

5. Cada semana, un jardín cuya forma es cuadrada, es podado solo por los alrededores. El resto del jardín se mantiene sin podar para que los animales se refugien en él. El jardín mide b metros por b metros y la franja podada es de x metros de ancho. Representar el problema en expresiones algebraicas y graficar.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

En el mundo existen términos y valores que son iguales o semejantes, el estudio de las ciencias exactas, los símbolos y valores los cuales son comprendidos de la misma forma en casi todo el mundo, ejemplo los símbolos de las operaciones matemáticas, entre otros.

Actualmente con el incremento del uso de la tecnología, muchos de los términos usados son iguales o semejantes, veamos algunos ejemplos y completamos la tabla con otros que conozcamos:

GLOSARIO DE TÉRMINOS UTILIZADOS EN LAS TICs	
Android: Conjunto de herramientas y aplicaciones para teléfonos móviles.	**Chip:** Circuito integrado (CI)
Antivirus: Aplicaciones dedicadas a la prevención, búsqueda, detección y eliminación de programas malignos en sistemas informáticos.	**Hacker:** Experto en informática capaz de de entrar en sistemas cuyo acceso es restringido.
Aplicación: Programa diseñado para una determinada función, como los procesadores de texto o las	
plantillas de cálculo.	
Avatar: Los avatares pueden ser fotografías o dibujos, e incluso algunas tecnologías permiten el uso de representaciones en 3D.	

Actividad 35. Analicemos y reflexionemos para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué es importante las operaciones algebraicas en la resolución de problemas del contexto?
2. ¿Cómo influye la aplicación del lenguaje algebraico en el desarrollo tecnológico?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

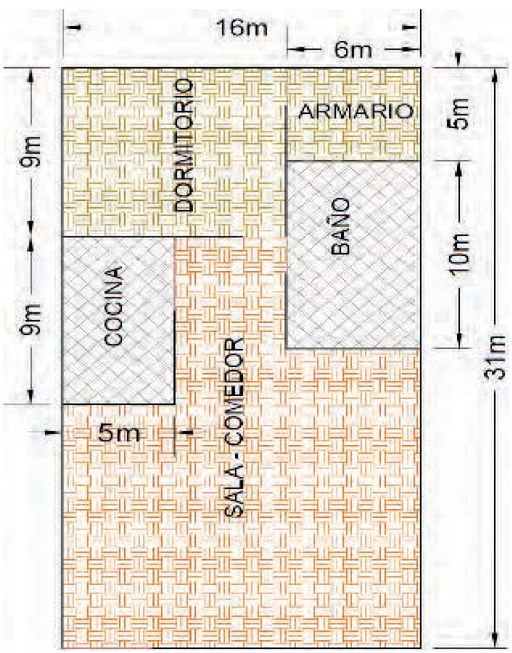


Figura 2

Actividad 36. Realicemos las siguientes actividades:
1. Debemos calcular el área de cada dependencia en el plano. Para ello realizamos las siguientes operaciones: (figura 2)

a) Área de la cocina $A=9m\times5m=\mathbf{45m^2}$
b) Área del baño $A=10m\times6m=\mathbf{60m^2}$
c) Área del armario $A=5m\times6m=\mathbf{30m^2}$

d) Área del dormitorio: Para calcular el área del dormitorio debemos restar 6 m a los 16 m que es la longitud total de uno de los lados del lote.

$$A=9m\times(16m-6m)$$
$$A=9m\times10m=\mathbf{90m^2}$$

e) Área del comedor: para calcular el área del comedor debemos restar del área total el área de las demás dependencias.

$$A=(31m\times16m)-(45m^2+60m^2+30m^2+90m^2)$$
$$A=496m^2-225m^2$$
$$A=271m^2$$

2. Elabora una maqueta escala tomando como datos las áreas de los diferentes ambientes de la figura 2.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA COMUNIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 37. Analicemos el siguiente problema y respondemos las preguntas planteadas: Gabriel le pregunta a Josué la edad de sus padres, y él responde de la siguiente forma: mi mamá es menor por 4 años que mi padre y la mitad de la edad de mi mamá es 19.

1. ¿Cómo puedes plantear este problema en tu cuaderno?
2. ¿Cuál es la edad de los papás de Josué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición de igualdad, identidad y ecuaciones

Igualdad, es la expresión de equivalencia de dos cantidades numéricas o literales.

Identidad, es una igualdad de expresiones algebraicas que es cierta siempre, para cualquier valor que tomen las variables.

Ejemplo:

a) $(x+5)(x-5)=x^2-25$

b) $5x(3x-2)=15x^2-10x$

Ecuación es una igualdad que sólo es cierta para determinados valores de la variable que se denominan soluciones de la ecuación.

$6x-3=-x+11$ sí y solo si $x=2$

$x^2-3x=x+5$ sí y solo si $x_1=5\,,\ x_2=-1$

Lo que cambia de lugar pasa con signo u operación contraria.

- La suma pasa al otro miembro como resta, y viceversa.
- La multiplicación pasa al otro miembro a dividir y viceversa.
- La potencia pasa al otro miembro como raíz y viceversa.

2. Definición de ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado o ecuación lineal es una igualdad algebraica cuya potencia es equivalente uno, pudiendo contener una, dos o más incógnitas.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita poseen la forma: $\boldsymbol{ax+b=0}$

Con a y b E R y x la incógnita

3. Elementos de una ecuación

En una ecuación se pueden distinguir varios elementos:

Incógnita. Es la letra que aparece en la ecuación.
Términos. Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
Miembro. Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo "=".
Grado. Es el mayor de los exponentes de las incógnitas.

$$\overbrace{\mathbf{5x-7}}^{\text{Primer miembro}}=\overbrace{\mathbf{4x+3}}^{\text{Segundo miembro}}$$

Donde:
x es la incognita
5x,4x términos dependientes
-7,3 términos independientes

Actividad 38

Resuelvemos las siguientes ecuaciones y realiza la verificación correspondiente.

1) $3x + 1 = 6x - 8$

2) $7x + 8 = 5x + 6$

3) $15 - 2x = 3x + 10$

4) $2(x - 5) = 3x - 17$

5) $20 = 2x - (10 - 4x)$

6) $10 - 9x = 4(x - 4)$

7) $5x + 3 = 2x + 5$

8) $4x + 6 = 4 + 10x$

9) $\frac{2x}{6} - \frac{x}{4} = x - 11$

10) $\frac{3x}{2} + 1 = x + 2$

4. Resolución de ecuaciones

Regla de transposición de términos en la ecuación, consiste en pasar todos los términos con las "x" a un lado de los miembros y los términos independientes al otro miembro.

Verificación de la solución es aplicar valor numérico, reemplazar las variables con el valor encontrado.

Ejemplo 1.	**Verificación**
$4x - 7 = 3x + 5$ $4x - 3x = 7 + 5$ $\boldsymbol{x = 12}$	$4(\mathbf{12}) - 7 = 3(\mathbf{12}) + 5$ $48 - 7 = 36 + 5$ $41 = 41$
Ejemplo 2.	**Verificación**
$8x + 4 - 2x = 2 - 2x - 6$ $8x - 2x + 2x = 2 - 4 - 6$ $8x = -8$ $x = \frac{-8}{8}$ $\boldsymbol{x = -1}$	$8(\mathbf{-1}) + 4 - 2(\mathbf{-1}) = 2 - 2(\mathbf{-1}) - 6$ $-8 + 4 + 2 = 2 + 2 - 6$ $-2 = -2$

5. Aplicación de ecuaciones en la resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Ejemplo 1.

Si un número aumentado en 3 unidades es igual al doble de dicho número, el número aumentado en 5 unidades ¿cuánto será?

Solución:	**Planteamiento de la ecuación**
Analicemos los datos Sea el número Un numero aumentado en 3 unidades: $x+3$ Doble de dicho número: $2x$	$x+3 = 2x$ $3 = 2x-x$ $3 = x$
Por tanto, el número aumentado en 5 unidades: $x+5=3+5=8$	

Ejemplo 2.

Julieta tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños tienen 2 y 3 años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

Solución:	**Planteamiento de la ecuación**
Analicemos los datos $x=$ años que tienen que pasar Cuando pasen esos años los hermanos tendrán: $2+x$ el menor y $3+x$ el mayor. La edad de Julieta será $16+x$.	$2[(2 + x) + (3 + x) = 16 + x]$ $2(2x + 5) = 16 + x$ $4x + 10 = 16 + x$ $4x - x = 16 - 10$ $3x = 6$ $x = \frac{6}{3} = 2$
Interpretación. Es decir, tienen que pasar 2 años.	

Actividad 39. En el cuaderno de ejercicios resolvemos los siguientes problemas con ecuaciones.

1) ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es 150 cm, si su base es el doble de su altura?

2) María enviará por correo tres paquetes A, B y C. La oficina de correo cobra por peso, y se sabe que el paquete A pesa cinco gramos menos que el B, y el C pesa diez gramos más que A. Si los tres paquetes juntos pesan 32 gramos, ¿cuánto pesa cada paquete?

3) Se compraron 9 materiales de escritorio entre laminas y lápices. El precio de una lámina es Bs 4 y el de un lápiz Bs 2. Si se gastaron Bs 26, ¿cuántas laminas y lápices se compró?

4) Hallar tres números consecutivos pares que sumados sea igual a 24.

5) Si la edad de Susana es el triple que la de Paola y dentro de 10 años será el doble, ¿cuál es la edad actual de Susana y Paola?

¡Realicemos la valoración!

En la vida diaria se nos presentan problemas con datos que no conocemos y hacemos varias operaciones mentales para encontrar esa información, pero aplicando ecuaciones podemos encontrar datos exactos y de forma más rápida y sencilla. Por ejemplo, cuando compramos unas bolsas de galletas y refrescos, y nos cobran un monto económico y solo sabemos que el refresco es el doble de las galletas.

Actividad 40. Respondemos de manera reflexiva las siguientes preguntas:
¿Cómo aplicamos la resolución de ecuaciones de primer grado en la cotidianidad?
¿Por qué es importante resolver ecuaciones de primer grado?

¡Es hora de la producción!

Actividad 41. Realicemos las siguientes actividades:
- Investiguemos problemas del contexto y la tecnología que se resuelven con ecuaciones de primer grado.
- Elaboramos un modelo matemático para dar solución a los problemas investigados

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

¡Iniciemos desde la práctica!

Si observamos las gradas están construidas sobre una recta horizontal y vertical que forman un ángulo recto. Vamos a observar la forma de los triángulos que están debajo de las gradas, registraremos los datos en un cuaderno y analizaremos los datos obtenidos (medida de ángulos y lados).

Si ya pudiste observar o hacer memoria, casi todas las gradas están construidas sobre un triángulo rectángulo.

Actividad 42. Respondemos las siguientes preguntas:
1. ¿Será que todas las gradas se construyen sobre una recta vertical y horizontal?, ¿por qué?
2. ¿Existen otros modelos de escalera que ofrecen mayor resistencia a la gravedad?

¡Continuemos con la teoría!

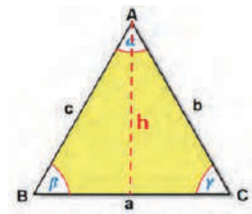
Trigonometría. Es una rama de las matemáticas cuyo propósito es el estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

La palabra **TRIGONOMETRÍA** está compuesta de dos términos griegos “trigonon” significa triángulo y “metron” medir. Relaciona los lados de un triángulo con sus ángulos.

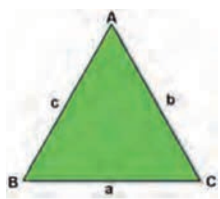
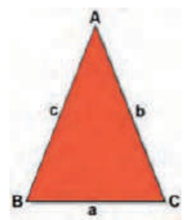
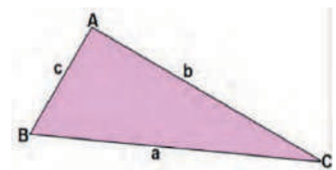
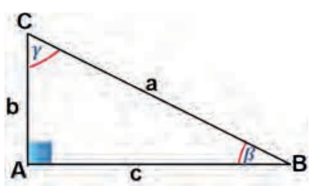
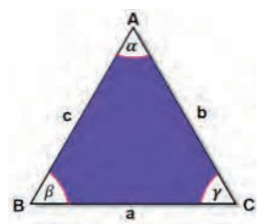
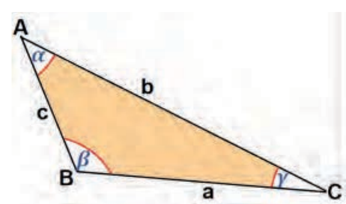
TRI: Tres

GONO: Ángulo

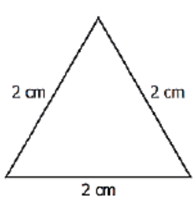
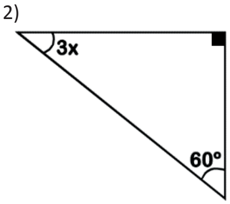
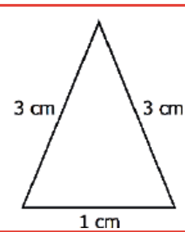
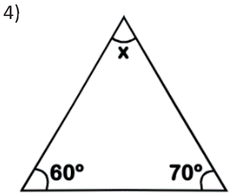
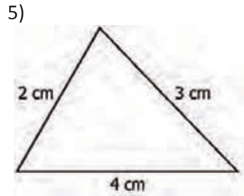
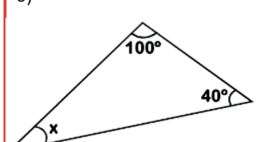
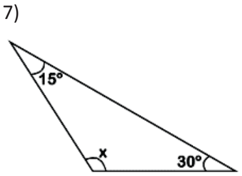
METRÍA: Medida

Partes de un triángulo	
	- Lados (a, b, c) - Altura (h) - Vértices (A, B, C) - Ángulos (α, β, γ)

1. Triángulos y su clasificación

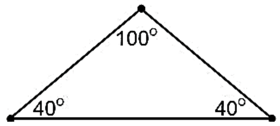
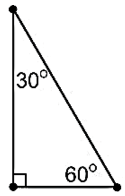
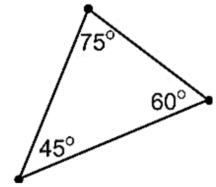
TRIÁNGULOS SEGÚN SUS LADOS		
Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**
		
Todos sus lados son iguales a = b = c	Dos lados son iguales b = c	Todos sus lados son diferentes a ≠b ≠ c
TRIÁNGULOS SEGÚN SUS ÁNGULOS		
Rectángulo	**Acutángulo**	**Obtusángulo**
		
Uno de sus ángulos es igual a 90° Â = 90°	Todos sus ángulos son menos de 90° α,β,γ <90°	Uno de sus ángulos es mayor a 90° β>90°

Actividad 43. Observemos los gráficos e indicamos que clase de triángulos son, de acuerdo a sus lados o ángulos.

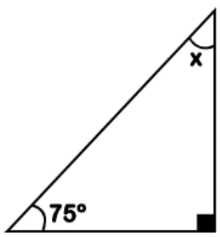
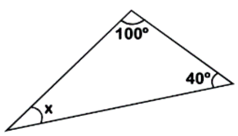
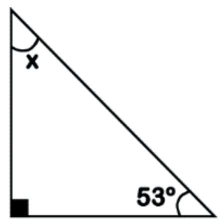
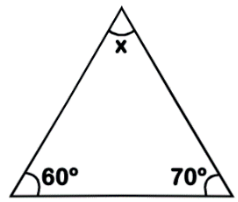
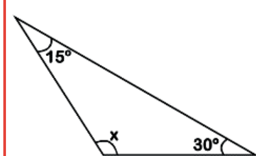
1) 	2) 	3) 	4) 	5) 
6) 	7) 	8) Grafica un triángulo rectángulo	9) Grafica un triángulo oblicuángulo	10) Grafica un triángulo isósceles

2. Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

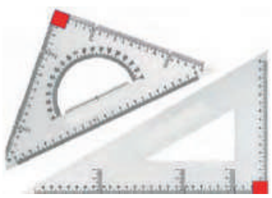
La suma de los ángulos de cualquier triangulo es siempre 180°.

 40° + 40° + 100° = 180°	 90° + 30° + 60° = 180°	 45° + 75° + 60° = 180°

Actividad 44. En los siguientes triángulos calculemos el valor de "x".

 $x=$________	 $x=$________	 $x=$________	 $x=$________	 $x=$________

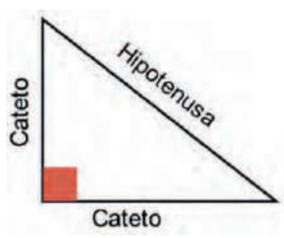
3. Triángulo Rectángulo

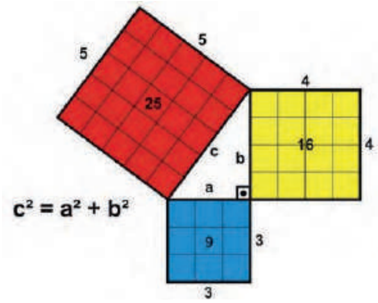


De acuerdo a la clasificación de los triángulos por sus ángulos, el triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos igual a 90°.

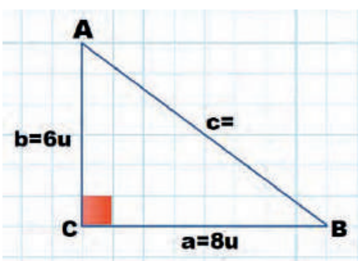
3.1. Teorema de Pitágoras

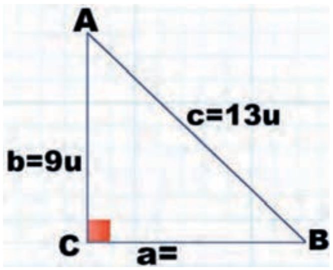
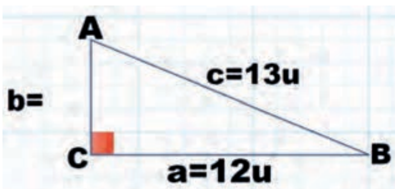
El teorema recibe su nombre del reconocido filósofo griego Pitágoras, este teorema combina nociones de matemáticas, geometría y trigonometría. Dentro de su enunciado se establece que el cuadrado del lado más largo, conocido como hipotenusa, equivale a la suma de los cuadrados de los catetos, siendo estos los lados más cortos del triángulo rectángulo. Para que se comprenda mejor vamos a ver el siguiente gráfico donde cada lado del triángulo es el lado de un cuadrado.



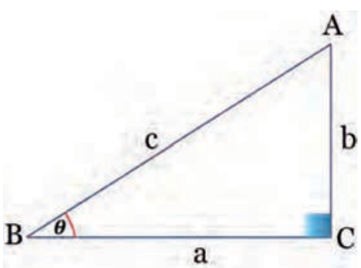


Ejemplos:

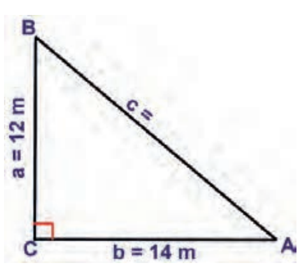
	**Reemplazando la fórmula** $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = (8u)^2 + (6u)^2$ $c^2 = 64u^2 + 36u^2$ $c = \sqrt{100u^2}$ $c = 10u$	

	**Despejando "a" de la fórmula tenemos:** $a^2 = c^2 - b^2$ $a^2 = (13u)^2 - (9u)^2$ $a^2 = 169u^2 - 81u^2$ $a = \sqrt{88u^2}$ $a = 9.4u$	
	**Despejando "b" de la fórmula tenemos:** $b^2 = c^2 - a^2$ $b^2 = (13u)^2 - (12u)^2$ $b^2 = 169u^2 - 144u^2$ $b = \sqrt{25u^2}$ $b = 5u$	

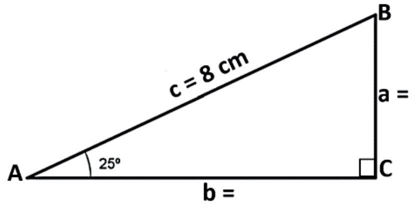
3.2. Razones trigonométricas

	$\mathbf{Sen}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$ $\mathbf{Cos}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$ $\mathbf{Tan}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \dfrac{b}{a}$	$\mathbf{Csc}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto} = \dfrac{c}{b}$ $\mathbf{Sec}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \dfrac{c}{a}$ $\mathbf{Cot}\ \boldsymbol{\theta} = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto} = \dfrac{a}{b}$

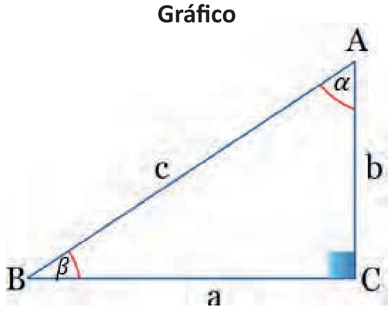
Ejemplo 1: Completar los datos que faltan del siguiente triángulo rectángulo.

Gráfico	Procedimiento
 $= 90°$ $a = 12\ m$ $b = 14\ m$	**Reemplazando en el Teorema de Pitágoras** $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = (12m)^2 + (14m)^2$ $c^2 = 144m^2 + 196m^2$ $c = \sqrt{340m^2}$ $c = 18.4\ m$
Hallamos el ángulo $\hat{B}$ $Sen\ B = \dfrac{14\ m}{18{,}4\ m}$ $Sen\ B = 0{,}76087$ $B = Sen^{-1}(0{,}76087)$ $B = 49°\ 32'\ 27{,}44''$	**Para hallar el ángulo reemplazamos la siguiente igualdad** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ $+ 49°\ 32'\ 27{,}44'' + 90° = 180$ $= 180 - 49°\ 32'\ 27{,}44'' - 90°$ $= 40°36'4{,}32''$

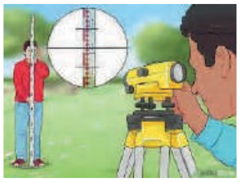
Ejemplo 2:

Gráfico	Procedimiento
 = 90° = 25° c = 8 cm	**Reemplazando** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ 25° + + 90° = 180° = 180° - 25° - 90° = [illegible]°
Hallamos "a" reemplazando $Sen\ A$ $Sen\ A = \frac{a}{c}$ $Sen\ 25° = \frac{a}{8\ cm}$ $Sen\ 25° * 8cm = a$ $a = (0{,}42262)(8cm)$ $a = 3{,}4\ cm$	**Reemplazando en el Teorema de Pitágoras** $b^2 = c^2 - a^2$ $b^2 = (8\ cm)^2 + (3{,}4\ cm)^2$ $b^2 = 64\ cm^2 + 11{,}56\ cm^2$ $b = \sqrt{75{,}56\ cm^2}$ $b = 8{,}7\ cm$

Actividad 45. Grafiquemos y calculemos los datos que faltan de acuerdo al gráfico del triángulo rectángulo:

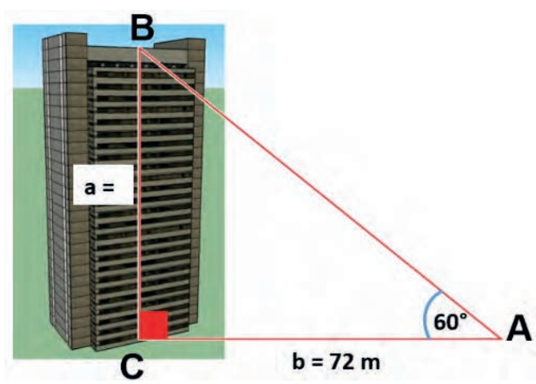
Gráfico	
	*1)* $c = 20\ cm$; $b = 12\ cm$ *2)* $\beta = 50°$; $a = 5u$ *3)* $a = 6\ cm$; $b = 8\ cm$ *4)* $\alpha = 45°$; $b = 5u$ 5) $c = 17\ cm$; $a = 13\ cm$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN Gracias al avance de la tecnología los equipos de medición de alturas, distancias y ángulos, fueron evolucionando y mejorando, haciendo de que cada vez se tenga datos más exactos y sencillos de calcular. El avance tecnológico que abre el camino para realizar levantamientos topográficos de una forma diferente a la realizada en el pasado, en la cual se realizaban levantamientos topográficos primero en mediciones por cinta métrica, después con los avances tecnológicos apareció el teodolito, la estación total y en la actualidad se utiliza los drones.	**Cinta métrica**  **Nivel topográfico o de ingeniero** 	
	GPS 	**Nivel total** 

Drones 	Para el uso correcto de estos equipos tecnológicos, la ubicación y la interpretación de los datos es necesario tener claro los conceptos básicos de trigonometría, caso contrario no se hará el uso correcto de los materiales topográficos.

Ejemplo: Debemos hallar la altura del edificio del Banco Central de Bolivia, teniendo los datos que se observan en el gráfico.



Vamos a buscar la fórmula que mejor se adecue al problema, en este caso para halla *"a"*.

$$Tan\ A = \frac{a}{b}$$

$$Tan\ 60° = \frac{a}{72\ m}$$

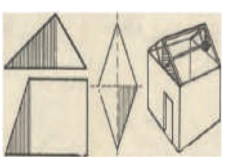
$$Tan\ 60° * 72\ m = a$$

$$a = (1.73205)(72\ m)$$

$$a = 124.7\ m$$

Como veras calculamos la altura del edificio de forma sencilla.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!



Desde tiempos muy antiguos se aplicó las medidas de ángulos rectos en las contrucciones. El triángulo rectángulo es uno de los triángulos más importantes en la geometría, ya que su ángulo recto permite que otros polígonos sean estudiados dibujando en ellos triángulos rectángulos.

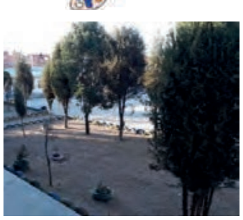
A partir de un triángulo rectángulo se definen los senos, cosenos tangentes (y sus inversas). Estas funciones a su vez tienen amplias aplicaciones en la física, porque describen fenomenos físicos como la corriente alterna, el movimiendo ondulatorio, (péndulo), ondas electromagnéticas etc.

Tiene muchas aplicaciones debido a que los triángulos rectángulos poseen propiedades que ayudan a los ingenieros a construir puentes, edificios, parques, etc, debido a que aplican en el cálculo de distancias y ángulos.

Actividad 46. Respondemos reflexivamente las siguientes preguntas:

1. ¿Qué otras aplicaciones en la ciencia y la tecnología tienen los triángulos rectángulos?
2. ¿Cómo aplicas las propiedades de los triángulos rectángulos en la cotidianidad?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!



Actividad 47. Vamos a elaborar un clinómetro

Construimos un clinómetro como la imagen de la izquierda u otros materiales que veas conveniente de acuerdo a tu contexto.

Ahora podemos probar midiendo la altura de los arboles de la plaza de la zona o nuestro colegio.

LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En la ciudad de La Paz, se puede observar el monumento Alexander, que en la parte superior tiene un objeto en forma de una esfera.


Monumento Alexander

En el otro lado vemos un cubo elaborado con lanas de color, esta misma que se vio en otras tres, se encuentra en varias ciudades.


Hilos y cubos de telar

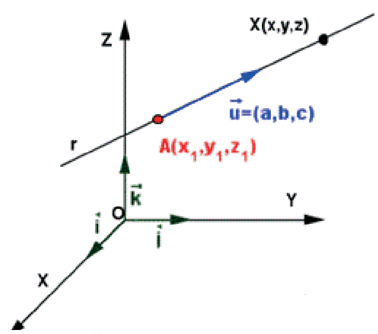
Actividad 48. Menciona y describe en tu cuaderno de ejercicios otras formas tridimensionales que se encuentran en tu entorno y el significado de ellas.

¿Qué son los cuerpos geométricos?

Los cuerpos geométricos son sólidos formados estructuralmente por figuras geométricas o planos delimitados en tres dimensiones (largo, ancho, alto), por que ocupa un lugar en el espacio, en consecuencia, tiene un área y volumen.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. El espacio tridimensional: punto, recta, segmento y plano

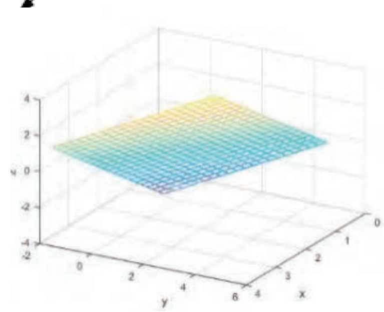


El espacio tridimensional también conocido como 3D y está delimitado por tres planos ortogonales y coordenadas cartesianas (eje x, eje y, eje z) empezamos con los siguientes elementos: punto, recta, segmento y plano.

En la figura se puede observar los puntos $A(x,y,z)$ y $X(x,y,z)$ y la recta $U=(a,b,c)$

Punto: es un ente abstracto que no tiene longitud, área o volumen y que puede ser visible, así mismo geométricamente definido aparece en la intersección de dos rectas.

Recta: es una sucesión infinita de puntos colineales formados con una misma dirección, así también se puede formar por la intersección de dos planos.



Segmento: está definido como una distancia entre un punto de partida y uno final, y se representa con letras para identificarlos.

Plano: es el espacio comprendido entre dos dimensiones, alto y ancho además que contienen infinitos puntos e infinitas rectas.

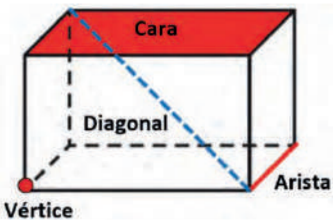
2. Clasificación de los cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos están divididos en dos grupos los poliedros y figuras de revolución además que están limitados por planos o curvas, ejemplo:


Pelota


Cono de transito


Dado



3. Características de los cuerpos geométricos

Poliedros: Es todo cuerpo geométrico limitado por planos y tiene los siguientes elementos: caras, vértices y aristas.

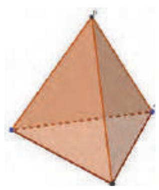
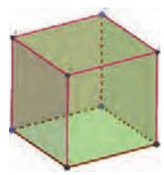
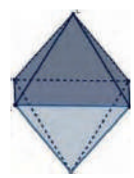
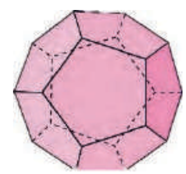
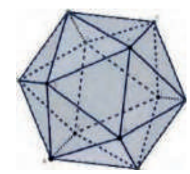
Vértice: Son puntos que se intersecan en tres o más aristas.

Aristas: Son segmentos que limitan a las caras o planos generados.

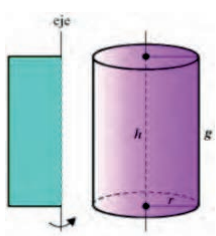
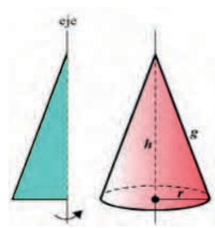
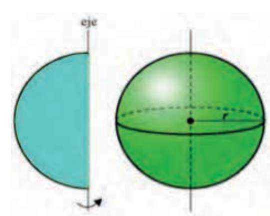
Caras: Son las superficies planas o regiones poligonales limitadas por las aristas.

Diagonal: Segmento que une dos vértices de distintas caras.

Existen **Poliedros de forma regular,** que tienen las mismas figuras geométricas iguales, como el: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
				

Figuras de revolución: El cuerpo de revolución se origina una vez que gira una figura, que es el semicírculo en un eje y este refleja caras en forma de curvas.

El ***cilindro*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.	El ***cono*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.	La ***esfera*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
		
Altura (h) es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases. ***Radio (r)*** es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases. ***Generatriz (g)*** es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura.	***Altura (h)*** es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base. ***Radio (r)*** es el radio del círculo que forma su base. ***Generatriz (g)*** es el segmento que genera el cono.	***Radio (r)*** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera. ***Diámetro (d)*** es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.

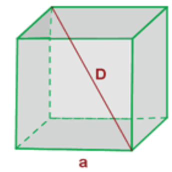
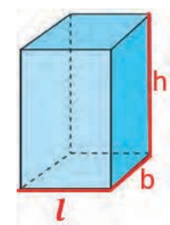
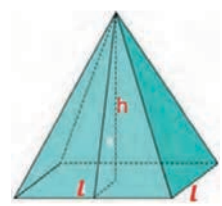
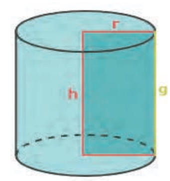
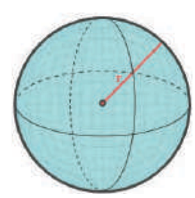
4. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Área: Es una superficie limitada y esta expresada en unidades cuadradas:

mm^2, cm^2, m^2, km^2, etc.

Volumen: Es el espacio que ocupa un cuerpo, esta expresado en unidades cúbicas:

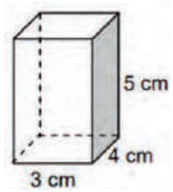
mm^3, cm^3, m^3, km^3, etc.

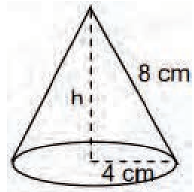
EJEMPLO	ÁREA	VOLUMEN	GRÁFICO
1. ¿Cuál es el área y volumen de un cubo que tiene aristas de 5m de longitud? **Datos:** $a=5m$	$\boldsymbol{A=6a^2}$ Reemplazando: $A=6*(5m)^2$ $\boldsymbol{A=150\ m^2}$	$\boldsymbol{V=a^3}$ Reemplazando: $V=(5m)^3$ $\boldsymbol{V=125\ m^3}$	
2. ¿Cuál el área y volumen del prisma de base rectangular? **Datos:** $Base, b=5m$ $Ancho, l=4m$ $Altura, h=4m$	$\boldsymbol{A=2(bl+lh+hb)}$ Reemplazando: $A=2(5*4+4*4+4*5)$ $=2(20m^2+16m^2+20m^2)$ $A=2(56\ m^2)$ $\boldsymbol{A=112m^2}$	$\boldsymbol{V=b*l*h}$ Reemplazando: $V=5m*4m*4m$ $\boldsymbol{V=80m}$	
3. ¿Cuál es el área y volumen de una pirámide cuadrangular? **Datos:** Lados del cuadrado, $l=4m$ $Altura, h=5m$	$\boldsymbol{A=l^2+2lh}$ Reemplazando: $A=(4m)^2+2(4m)(5m)$ $A=16m^2+40m^2$ $\boldsymbol{A=56m^2}$	$\boldsymbol{V=\frac{1}{3}*A_b*h}$ Reemplazando: $V=1/3\ (4m^2)*(5m)$ $V=1/3\ (16m^2)*(5m)$ $\boldsymbol{V=26.67m^3}$	
4. ¿Cuál es el área y volumen de un cilindro? **Datos:** $Radio, r=5m$ $Altura, h=10m$	$\boldsymbol{A=2\pi r(r+h)}$ Reemplazando: $A=2\pi(5m)(5m+10m)$ $A=\pi(10m)(15m)$ $\boldsymbol{A=471,24\ m^2}$	$\boldsymbol{V=\pi*r^2*h}$ Reemplazando: $V=\pi(5m)^2*10m$ $V=\pi(25m^2)*10m$ $\boldsymbol{V=785.4m^3}$	
5. ¿Cuál es el área y volumen de una esfera? **Datos:** $Radio, r=3m$	$\boldsymbol{A=4\pi r^2}$ Reemplazando: $A=4\pi(3m)^2$ $A=4\pi(9m^2)$ $\boldsymbol{A=113,10m^2}$	$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}*\pi*r^3}$ Reemplazando: $V=\frac{4}{3}*\pi*(3m)^3$ $V=\frac{4}{3}*\pi*27m^3$ $V=113.1m^3$	

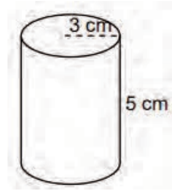
Actividad 49. Realicemos las siguientes actividades:

1. Una piscina tiene 8 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de profundidad ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?
2. Un prisma rectangular tiene una base de 10 m, un ancho de 11 m y una altura de 12 m. ¿Cuál es su área y volumen?
3. Calculamos el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.
4. ¿Cuál es el área total y el volumen de un cilindro si su radio basal mide 8 cm y su altura mide 15 cm?
5. Calculamos el área y volumen de una esfera de 8 cm. de radio.
6. ¿Qué capacidad tiene un depósito cilíndrico si su radio es de 3 m y su altura 5 m?
7. Se desea pintar las paredes y el techo de un salón de planta 12 x 7 m, y altura 3,5 m. Sabiendo que dispone de dos puertas de 1 x 2 m, y tres ventanales de 2 x 2 m, ¿cuánta superficie habrá que pintar? (Hacer un dibujo explicativo) Si disponemos de botes de pintura para 25 m². ¿Cuántos botes necesitaremos?

8. Calculamos el área y volumen de las siguientes figuras geométricas







¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Si observas a tu alrededor encontraras muchos ejemplos de formas tridimensionales.

Todos los balones de fútbol tienen la forma de una esfera.	Algunos envases tienen forma de cilindro.	Edificio la Asamblea Legislativa Plurinacional	Algunos arboles navideños tiene forma de cono
			

Actividad 50. De manera reflexiva respondemos las siguientes preguntas:

¿Para qué nos sirve aprender a calcular áreas y volúmenes de manera geométrica?
¿Cómo ayudaron las formas en el espacio tridimensional al desarrollo tecnológico?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 51. Busca más ejemplos de formas tridimensionales y aplicando las fórmulas usadas anteriormente encuentra el volumen de esas figuras, para construirlos con materiales del contexto.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

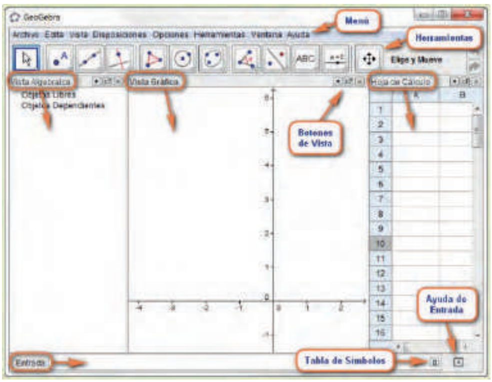
Actividad 52. Respondemos en el cuaderno de ejercicios las siguientes preguntas:
1. ¿Qué te imaginas al escuchar la palabra laboratorio?
2. ¿Estuviste en un laboratorio?
3. ¿Cómo defines laboratorio?
Escribe en tu cuaderno las respuestas y realiza un dibujo de como sería un laboratorio de matemática.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

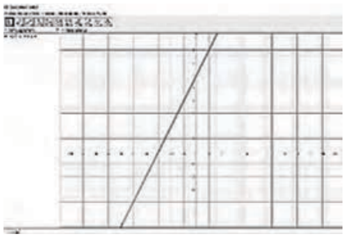
El laboratorio de matemáticas puede ser visto como una estrategia de enseñanza y aprendizaje; porque le permita a los alumnos descubrir, relacionar, aplicar y construir su aprendizaje; porque en definitiva *"Es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil"* De Guzmán (2007, p.47).

1. GeoGebra

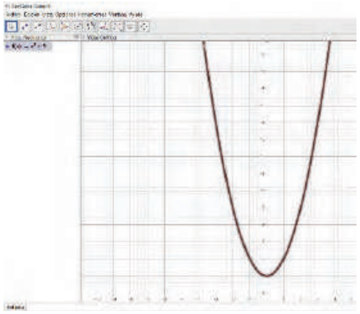
Geogebra es un software matemático creado por Markus Hohenwarter, disponible desde el año 2001, es un software libre y de fácil acceso, GeoGebra es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Combina dinámicamente geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto a nivel operativo, que prepara vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización de tablas y planillas vinculadas.



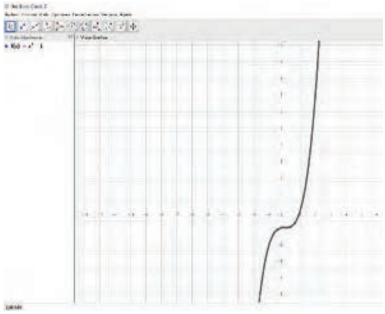
1.1. Gráficas de ecuaciones



Ecuación de una recta
$x+c=0$

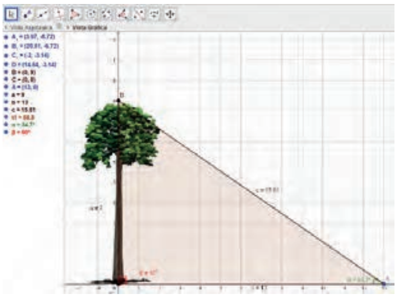


Ecuación cuadrática
$x^2+c=0$

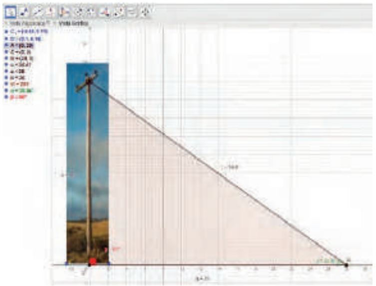


Ecuación cúbica
$x^3+c=0$

1.2. Gráficas de problemas de resolución con triángulos



Teniendo algunos datos podemos encontrar el tamaño de un arbol.



Calcular el tamaño de un poste de luz.

Actividad 53. Gráfiquemos las siguientes ecuaciones en Geogebra.

Ecuación de una recta	Ecuación cuadrática	Ecucación Cúbica
1) y = x+ 1 2) y = 3x - 2 3) y = -x -5	4) $y = x^2 +2$ 5) $y = 2x^2 -3$ 6) $y = x^2 -5$	7) $y = x^3 - 1$ 8) $y = 2x^3 + 2$ 9) $y = 5x^3 -3$

2. Taller de pensamiento lógico

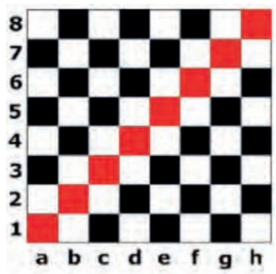
“Concebir el Taller de Pensamiento Lógico-Matemático a la luz del proceso de formación de maestros conlleva, en primera instancia, a plantearse dos aspectos fundamentales: ¿Qué se entiende por taller? y ¿Qué es el pensamiento lógico matemático? Realizando analogías, se entiende al espacio del taller como al estudio de un artesano, se espera un trabajo de producción, de elaboración, de transformación a partir de lo que el alumno sabe. En relación al segundo interrogante, se busca promover la comprensión, el aprendizaje profundo y la transferencia mediante una apuesta a una mayor actividad e involucramiento del alumno y un aumento del grado de conciencia y control sobre su proceso de aprendizaje, dónde se involucra necesariamente a la habilidad de solucionar situaciones nuevas de las que no se conoce de antemano un método mecánico de resolución. La idea central es que los alumnos vivencien la educación matemática como debate, intercambio de ideas, diálogo, respeto, reflexión y crítica. Creando, tanto dentro de los límites aula real como del espacio virtual, una co-construcción del conocimiento”. *(Monfort Florencia Soledad)*

3. Ajedrez II

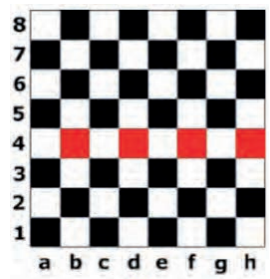
3.1. Nociones básicas de ajedrez

Dos aspectos fundamentales a considerar es el tablero y los movimientos.

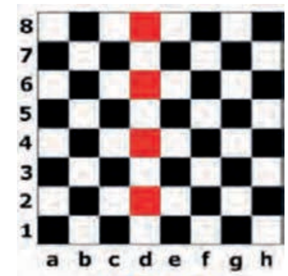
El Tablero



Diagonal



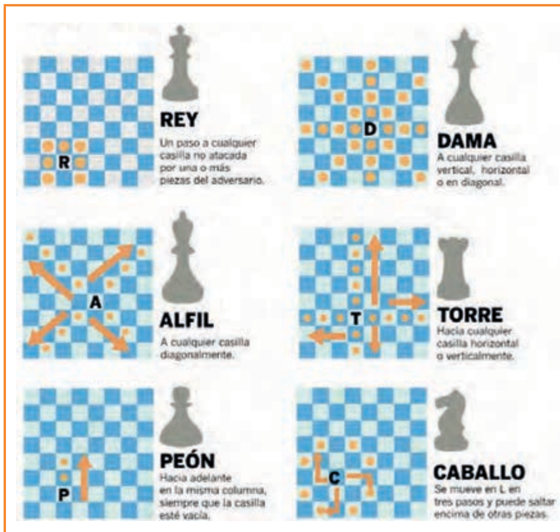
Fila



Columna

Posición de las piezas en el tablero y el movimiento de cada uno de ellos.

Movimientos



Un movimiento especial

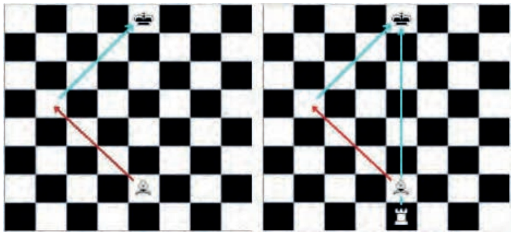
El enroque. Es la única jugada en la que en el mismo turno se mueven dos piezas propias: el Rey y una Torre. Este movimiento sólo puede hacerlo cada jugador 1 vez en toda la partida, siendo opcional, pero cumpliendo una serie de requisitos, uno de ellos que lo imposibilitaría definitivamente y otros sólo temporalmente:

- Debe ser el primer movimiento tanto del Rey como de la Torre a enrocar. Si se mueve el Rey, el enroque queda imposibilitado para el resto de la partida. Si se mueve la Torre, aún es posible usar la otra.
- No debe haber ninguna pieza entre el Rey y la Torre, ni amiga ni contraria.
- El Rey no puede estar en jaque (atacado) en ese momento, ni su casilla destino, ni la intermedia. Otras casillas, como el origen de la Torre, si pueden estarlo.

El movimiento se efectúa en este orden sea cual sea el lado por el que se enroque: primero se desplaza el Rey dos casillas hacia la Torre y después se mueve la Torre a la casilla adyacente al otro lado del Rey.

Jaque. Se dice que un jugador está en jaque cuando su Rey está siendo atacado por una o dos piezas enemigas, y sería posible para el rival el capturarlo al siguiente turno. No es obligatorio anunciar explícitamente el jaque. Siguiendo las normas, el jugador debe actuar en consecuencia de forma que esa situación desaparezca en su turno. Para ello puede:

- Capturar la pieza que ataca, si dispone de alguna pieza que lo haga, y sólo hay una pieza atacando.
- Poner una pieza en el medio a modo de escudo, si la pieza que ataca no es un Caballo y no hay más de una atacando.
- Mover el Rey a una casilla tal que deje de estar en jaque, si hay.



Jaque mate. Se produce jaque mate cuando un jugador no puede ejecutar ningún movimiento que le permita salir del jaque, entonces ha perdido la partida.

Tablas. Existen muchas posibilidades de acabar una partida en tablas:

- Un jugador que no está en jaque no puede mover en su turno (ahogado).
- Ambos jugadores han acordado las tablas.
- Se ha producido la repetición de la misma posición 3 veces (no con los mismos movimientos necesariamente, pero si con las mismas piezas y los mismos posibles movimientos para ambos bandos).
- No existen suficientes piezas por ningún bando para forzar un jaque mate. Si aún queda algún peón, no se aplica. Casos posibles: Rey contra Rey, Rey contra Rey y Caballo o Alfil.
- Se produce una secuencia de 50 jugadas de cada bando seguidas sin captura o movimiento de peón.

Valor de las piezas

Símbolo					
Pieza	**Peón**	**Caballo**	**Alfil**	**Torre**	**Dama**
Valor	**1**	**3**	**3**	**5**	**9**

3.2. Problemas de razonamiento

Los mates más rápidos que existen:
a) Mate del loco. Se produce cuando un jugador abre su rey a un ataque fatal, como se muestra en la siguiente partida:

b) Mate del pastor. Es de los más famosos, sigue la secuencia en las siguientes imágenes:

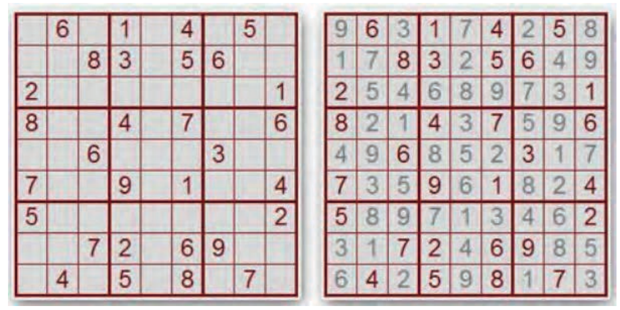
c) El mate del tonto. Es muy raro de ver, pero en los más novatos puede ocurrir, se trata del siguiente diagrama:

IMPORTANTE: Es necesario que investigues y practiques el juego del ajedrez para ser un campeón.

4. Sudoku

- Solo se pueden usar números del 1 al 9.
- Cada bloque de 3×3 solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada columna vertical solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada fila horizontal solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada número del bloque de 3×3, de la columna vertical o de la fila horizontal solo se puede utilizar una vez.
- El juego finaliza cuando toda la cuadrícula de Sudoku se completa correctamente con los números.

Ejemplo: Se tiene a la izquierda el Sudoku sin resolver y a la derecha el resuelto.



Escanea el QR

Ingresa al código QR, para aprender las nociones básicas de ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para resolver problemas de razonamiento, mate en dos y mate en tres movimientos, a través de la plataforma virtual Lichess.

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

¡Realicemos la valoración!

Todo trabajo de investigación tiene como resultado la adquisición de conocimientos, mejorar las tecnicas en alguna actividad, elaborar correctamente un trabajo. Las personas buscamos más información de algo que nos interesa o necesitamos saber.

Actividad 54. Respondemos en el cuaderno de ejercicios las siguientes preguntas:

- ¿Consideras que es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático?, ¿por qué?
- ¿Qué actividades nos ayudan a desarrollar el pensamiento lógico matemático?

¡Es hora de la producción!

Actividad 55. Realicemos las siguientes actividades:

1. Escribe en tu cuaderno la experiencia de haber usado geogebra, haber jugado ajedrez o Sudoku. Cuál de estas actividades te gusto más y si buscaste más información que tus compañeros no conocen.

Actividad	Información	Bibliografía (videos, libros, entrevistas)
Geogebra		
Ajedrez		
Sudoku		

2. Con materiales del contexto construye las piezas y un tablero de ajedrez, para organizar un torneo con la participación de los estudiantes.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

www.minedu.gob.bo
@minedubol
@minedubol
@minedu_bol
Ministerio de Educación - Oficial
MinEduBol
informacion@minedu.gob.bo
(591) 71550970 - 71530671
@minedu_bolivia

Av. Arce No. 2147 • Teléfonos: (591-2) 2442144 - 2442074 • Casilla de Correo: 3116
La Paz - Bolivia