ÁREA:

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA
5to de Secundaria

5to.

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Texto de aprendizaje
5to. Año de Educación Secundaria Comunitaria Productiva

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
Viceministro de Educación Regular
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL
Olga Marlene Tapia Gutiérrez
Directora General de Educación Primaria
Delia Yucra Rodas
Directora General de Educación Secundaria
Waldo Luis Marca Barrientos
Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL
Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria
Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES
Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA
Unidad de Educación Género Generacional
Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo
Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:
Gloria Velazco Gomez

DIAGRAMACIÓN:
Javier Angel Pereyra Morale

Depósito legal:
4-1-22-2024 P.O.

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2024). Subsistema de Educación Regular. Educación Secundaria Comunitaria Productiva. “Texto de Aprendizaje”. 5to. Año. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Una nueva gestión educativa comienza, reafirmando el compromiso que tenemos con el Estado Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi

MINISTRO DE EDUCACIÓN

ANÁLISIS COMBINATORIO

PRÁCTICA

Reina realizó un tablero para demostrar del teorema de Pitágoras, como se muestra en la figura, para este efecto decide usar canicas de colores para realizar la demostración. Es así que decide usar 5 canicas blancas, 5 canicas negras, 5 canicas amarillas, 5 canicas rojas y 5 canicas celestes.

Realizando la suma de estas canicas como resultado de este suceso le da 25 canicas. Lo que él debe demostrar es que $c^2=a^2+b^2$; es decir $5^2=4^2+3^2$. Obteniendo diferentes combinaciones de los 5 colores, al realizar este procedimiento.

Actividad

- Teniendo en cuenta que las 25 canicas se deben distribuir en los dos cuadrados, ¿qué posibles combinaciones de colores se pueden encontrar?
- Para el tablero elaborado, ¿qué otros objetos puedes utilizar, para demostrar el teorema?
- ¿Cuántos colores de canicas podrías utilizar para realizar la demostración?
- Además del tablero, ¿dónde emplearías estos saberes y conocimientos?
- ¿Qué operaciones se utilizan para saber las posibles combinaciones de colores que se den en la demostración del teorema de Pitágoras, a partir del tablero?

TEORÍA

Contar

En matemática, contar cosas es un concepto fundamental. No obstante, no siempre es simple.

El área de las matemáticas que se ocupa de resolver problemas que consisten en contar un cierto número de objetos se llama combinatoria.

En el lanzamiento de dos dados, ¿de cuantas formas se pueden obtener un siete o un ocho?

Fuente: *https://www.pngkit.com/bigpic/u2y3a9t4o0u2u2w7/*

1. Principios básicos de conteo

Muchos problemas tienen que ver con el número de maneras en que un conjunto finito de objetos se puede arreglar, combinar, o seleccionar. Tales problemas se encuentran en el ámbito de la combinatoria.

El estudio del análisis de la combinatoria comenzará presentando dos principios básicos del conteo, de la suma y la del producto.

a) El principio de adición (conector lógico "o")

Si una tarea "A" puede ser realizada de "m" formas diferentes, y otra tarea "B" puede ser realizada de "n" formas diferentes, y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay m + n formas de Realizamos una o la otra.

Ejemplo: Clara entrega piezas de robótica en 3 mercados, en el primero se entrego estos productos en 6 tiendas, en el segundo en 5 tiendas y en el tercero en 7 tiendas. ¿De cuántas maneras una persona puede adquirir las piezas de robótica?

Respuesta: El número total de resultados distintos que se puede obtener es:

$$6 + 5 + 7 = 18$$

Para hallar la respuesta utilizamos la operación de adición, tomando en cuenta el número total de resultados según la pregunta.

Actividad

- Raúl desea viajar de La Paz a Cochabamba y tiene a su disposición 2 líneas aéreas y 7 líneas terrestres. ¿De cuantas maneras diferentes puede realizar su viaje?
- El curso 5to de Secundaria está formado por 15 señoritas y 13 jóvenes, desean elegir su presidente. ¿De cuántas maneras puede ser elegido?
- Jazmín se dedica a la venta de celulares, cuenta con cuatro aparatos de tres marcas reconocidas. ¿De cuántas formas puede ofrecer la venta a sus clientes?
- Megan va a la tienda y quiere elegir una golosina de entre dos frascos. En uno hay 25 caramelos surtidos, mientras que el otro contiene 10 chicles. ¿Cuántas opciones tiene para elegir su golosina?

b) El principio de multiplicación (conector lógico “y”)

Si un evento o suceso *“A”* ocurre, en forma independiente, de *“m”* maneras diferentes y otro suceso *“B”* de “n” maneras diferentes, entonces el número de maneras distintas en que ocurren ambos sucesos es *“m•n”*. Este principio es conocido también como el principio fundamental del análisis combinatorio.

Ejemplo:

Megan tiene seis textos de aprendizaje del nivel secundario. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar en un estante donde sólo caben cuatro libros?

Respuesta:

Suceso I: Para la 1ra casilla existen 6 maneras diferentes.

Suceso II: Para la 2da casilla existen 5 maneras diferentes.

Suceso III: Para la 3ra casilla existen 4 maneras diferentes.

Suceso IV: Para la 4ta casilla existe 3 maneras diferentes.

Debemos realizar los cuatro procedimientos.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Así los textos de aprendizaje se pueden ordenar de 360 formas diferentes.

2. Factorial de un número natural y sus propiedades

a) Factorial de un número natural

Para todo número natural n, se llama n factorial o factorial de n al producto de todos los naturales desde 1 hasta n.

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n; \qquad \forall \; n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

Calculamos los primeros factoriales.

$1! = 1$

$2! = 1\cdot2 = 2$

$3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$

$4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

$5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

$6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$

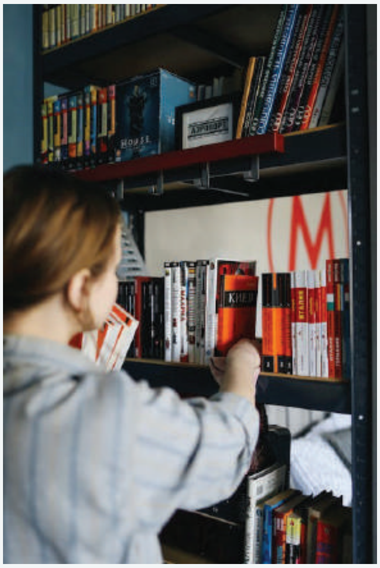
b) Propiedades

a) $n!=n\cdot(n-1)!$ Ejemplo: $8! = 8\cdot7!$

b) $x!=n! \rightarrow x=n$ Ejemplo: $6! = 6! \rightarrow 6 = 6$

c) $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ Ejemplo: $\frac{7!}{7} = (7-1)! = 6!$

d) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$ **Ejemplo:** $\dfrac{9!}{(9-1)!} = 9 \quad \Rightarrow \dfrac{9!}{8!} = 9$



Notación

Con la notación breve para productos,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

El símbolo Se lee “Producto”

Se define $0!=1$, para que la relación $n!=n\cdot(n-1)!$ sea también válida para $n=1$. Esta relación permite definir los factoriales por **recursividad.**

La notación $n!$ fue popularizada por el matemático francés **Christian Kramp.**

Actividad

- Román tiene 3 poleras, 3 busos y 2 pares de chancletas, todas prendas diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede lucir una vestimenta constituida por poleras, busos y chancletas?
- ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda y un dado simultáneamente?
- Verificamos la existencia o no de cada una de las siguientes expresiones:

$\sqrt{13!} =$

$-6! =$

$(-9)! =$

$\left(\frac{5}{3}\right)! =$

$\sqrt{9!} =$

$6! + 2! =$

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 =$

$\frac{7!}{11} =$

Factorial

Además n! se puede desarrollar explícitamente según lo requiera el ejercicio específico. Por ejemplo:

$$n! = (n-2)! \bullet (n-1) \bullet n$$

O también:

$$n! = (n-3)! \bullet (n-2) \bullet (n-1) \bullet n$$

Definición

El factorial también se la puede expresar así:

$$n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$$

Identidades de dobles factoriales

$$n! = n!!\,(n-1)!!$$

$$(2n)!! = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

c) Descomposición en factores de un factorial

Recordemos, si $n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet \ldots \bullet (n-2) \bullet (n-1) \bullet n$, entonces.

$$5! = \underbrace{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4}_{4!} \bullet 5; \text{ luego, } 5! = 4! \bullet 5$$

La siguiente ecuación adquiere importancia cuando se trata de simplificar expresiones, un tanto complicadas, que involucran el uso de factoriales:

$$\boxed{n! = (n-1)! \bullet n}; \qquad \forall \ n \geq 2$$

Ejemplo:

Calcular las siguientes expresiones con factoriales.

$$\frac{15!}{9!} = \frac{15 \bullet 14 \bullet 13 \bullet 12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9!}{9!} = 3603600$$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5!}{5!} = 336$$

$$\frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{2!\,3!} = \frac{20}{2 \bullet 1} = 10$$

Ejemplos:

- Expresar como un solo factorial $(n+3) \bullet (n-1)! \bullet n \bullet (n+1) \bullet (n+2)$

Ordenamos estos factores en forma decreciente:

$$(n+3) \bullet (n+2) \bullet (n+1) \bullet n \bullet (n-1)! \qquad (n+3)!$$

- Expresar como un solo factorial $(2n-1) \bullet (2n) \bullet (2n-2)! \bullet (2n+1)$

$$(2n+1) \bullet (2n) \bullet (2n-1) \bullet (2n-2)! = (2n+1)!$$

- Simplificar:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2) \bullet (n+1) \bullet n \bullet (n-1)!}{(n-1)!} = (n+2) \bullet (n+1) \bullet n$$

d) Doble factorial

Se define el doble factorial de n como:

$$\boxed{n!! = \begin{cases} 1, & si \quad n = 0 \quad o \quad n = 1 \\ n \bullet (n-2)!! & si \quad n \geq 2 \end{cases}}$$

Ejemplo:

Calcular los factoriales:

$6!! = 2 \bullet 4 \bullet 6 = 48$ $\qquad$ $12!! = 2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 8 \bullet 10 \bullet 12 = 46080$

$11!! = 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 7 \bullet 9 \bullet 11 = 10395$ $\qquad$ $7!! = 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 7 = 105$

Actividad

- **Evaluamos las siguientes expresiones con factoriales.**

$$\frac{11!}{5!} = \qquad \frac{15!}{3!} = \qquad \frac{33!}{30!} =$$

$$\frac{11! \bullet 6!}{8!} = \qquad \frac{33!}{8! \bullet 15!} = \qquad \frac{7! \bullet 9!}{3! \bullet 5!} =$$

- **Simplificamos:**

$$\frac{(n-6)!}{(n-4)!} \qquad \frac{(x+9)!}{(n+5)!} \qquad \frac{(n+10)!}{(n-5)!}$$

- **Expresamos como un solo factorial:**

$$(7n-4) \bullet (7n-5) \bullet (7n-7)! \bullet (7n-3) \bullet (7n-6)$$

3. Permutaciones simples

Las permutaciones son ordenamientos o "grupos ordenados" que se forman con un total de elementos. Se calcula con la fórmula

$$P_n = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet \ldots \bullet (n-1) \bullet n = n!$$

Se lee "Permutaciones de n elementos"

Ejemplos:

a) ¿Cuántas palabras distintas se puede formar, con o sin sentido, usando las letras de la palabra EDUCA?

Algunas de las formas son: acude, aduce, …

$$5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 120 \text{ maneras.}$$

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los números 5, 6, 7, 8 y 9 si el 7 debe ocupar siempre el lugar central?

? ? 7 ? ?

El orden de los números 5, 6, 8 y 9 (que son 4), con el 7 al centro, el total de ordenamientos diferentes es:

$$P_4 = 4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24$$

Observe que el número 7 es fijo, no cambia su lugar, por lo tanto, solo nos debemos preocupar por ordenar (permutar) los otros cuatro números.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando en cuenta r de n $(0 \leq r \leq n)$, está dado por:

$$n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet \big(n-(r-1)\big) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

c) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 3 vocales distintas en una fila?

Para elegir la vocal que estará en el primer puesto de 3 espacios, hay 5 posibilidades.

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 5P3 = \frac{5!}{(5-3)!} =$$

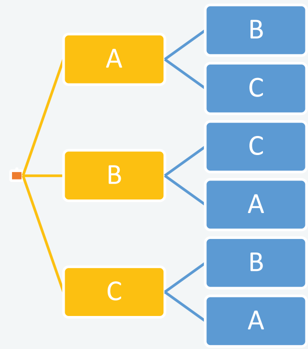
$$5P3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2!}{2!} = 5 \bullet 4 \bullet 3 = 60$$

d) ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?

$$5p2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!} = 5 \bullet 4 = 20$$

Diagrama del árbol

Una técnica que puede ayudar mucho es confeccionar un ***diagrama en árbol.*** *Consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.*



Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como ***permutación.***

Actividad

- Las formas en que pueden llegar a la meta 17 corredores de motos son:
- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra PRODUCTIVA son:
- ¿De cuántas maneras pueden repartirse cuatro estudiantes, cuatro golosinas distintas, comiendo cada estudiante una de ellas?
- Calculemos la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, vicepresidente y un secretario de hacienda de un grupo de 9 estudiantes.
- Determinemos la cantidad de formas que existen para acomodar a 5 padres de familia en una reunión que solo existe 3 sillas.
- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 23 estudiantes que hacen fila para recoger su desayuno escolar, si el presidente del curso debe estar al inicio de la fila?

El cubo Rubik

Hay 43.252.003.274.489.856.000 posibles permutaciones del cubo rubik. Si pusieras un cubo al lado del otro, la fila tendría 261 años-luz. Si movieras una posición por segundo, tomaría 9986 veces la edad del universo pasar por todas las permutaciones.

4. Permutaciones con repetición

Cuando, en un experimento, las condiciones indican que un elemento, o varios, se pueden repetir o suceden nuevamente, las permutaciones se denominan permutaciones con repetición. En un conjunto de n elementos, en el que cierto elemento se repite **a – veces,** otro se repite **b – veces,** otro se repite **c – veces,** y así sucesivamente; es calculado por:

$$PR_n{}^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a!\bullet b!\bullet c!\bullet\ldots}$$

Ejemplos:

a) ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra CLASIFICACIÓN?

En este caso tenemos un conjunto de 13 elementos que corresponden a las 13 letras de la palabra CLASIFICACIÓN, pero si nos fijamos hay elementos del conjunto que se repiten;

Número de veces que se repite la letra $C = 3$

Número de veces que se repite la letra $A = 2$

Número de veces que se repite la letra $I = 3$

Por lo tanto, calculamos una permutación con repetición sobre 13 elementos donde se repite 3 veces, 2 veces y 3 veces.

$$PR_n{}^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\bullet b!\bullet c!\ldots} \quad \Rightarrow \quad PR_{13}{}^{3,2,3} = \frac{13!}{3!\bullet 2!\bullet 3!} =$$

$$\Rightarrow PR_{13}{}^{3,2,3} = \frac{13!}{3!\bullet 2!\bullet 3!} = \frac{13!}{6\bullet 2\bullet 6} = \frac{13!}{72} = 86486400$$

b) En un sorteo de un canastón, hay 10 bolas del mismo tamaño y peso, de los cuales, 6 son rojas y 4 son azules con diferentes números. ¿De cuántas maneras es posible extraer una a una las bolas de la urna?

Número de bolas rojas: 6

Número de bolas azules: 4

Por lo tanto, calculamos una permutación con repetición sobre 10 elementos donde se repite 6 veces y 4 veces.

$$PR_n{}^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\bullet b!\bullet c!\ldots} \quad \Rightarrow \quad PR_{10}{}^{6,4} = \frac{10!}{6!\bullet 4!} =$$

$$\Rightarrow PR_{10}{}^{6,4} = \frac{10!}{6!\bullet 4!} = \frac{10\bullet 9\bullet 8\bullet 7\bullet 6!}{6!\,(\bullet 4\bullet 3\bullet 2\bullet 1)} = \frac{5040}{24} = 210$$

c) Calculamos: $PR_6{}^{2,3,2} =$

$$\Rightarrow PR_6{}^{2,3,2} = \frac{6!}{2!\bullet 3!\bullet 2!} = \frac{6\bullet 5\bullet 4\bullet 3!}{2!\bullet 3!\bullet 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

- ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICA?
- ¿Cuántos números diferentes se puede formar permutando las cifras del número 78799?
- Sebastián está organizando el stand de los refrescos, ¿de cuántas formas diferentes puede ordenar en una fila 8 gaseosas verdes, 6 anaranjadas y 4 negras?
- ¿De cuantas maneras puede ser escrito RRROOLLLLL?

5. Permutación Circular

Son agrupaciones donde no hay primer ni último elemento, por hallarse todos en una línea cerrada. Para hallar el número de permutaciones circulares que se pueden formar con *"n"* objetos distintos de un conjunto, hay que considerar fija la posición de un elemento, los *n-1* restantes podrán cambiar de lugar de *(n-1)!* Formas diferentes tomando todas las posiciones sobre la circunferencia relativa al primer punto.

El número de permutaciones circulares de n elementos está dado por:

$$P_c^n = (n-1)!$$

Ejemplos:

a) La mesa directiva del curso 4to de secundaria decidió reunirse para tratar asuntos de suma importancia, ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse alrededor de una mesa circular el presidente del curso junto a sus 6 miembros de su mesa directiva?

$$P_c^n = (n-1)! \quad \Rightarrow \quad P_c^7 = (7-1)!$$

$$\Rightarrow \quad P_c^7 = 6! = 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 720$$

b) Con 12 perlas de colores diferentes. ¿Cuántas pulseras distintas se podrían confeccionar?

$$P_c^n = (n-1)! \quad \Rightarrow \quad P_c^{12} = (12-1)!$$

$$\Rightarrow \quad P_c^{12} = 11! = 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 39916800$$

c) Calcular: $PR_6{}^{2,3,2} =$

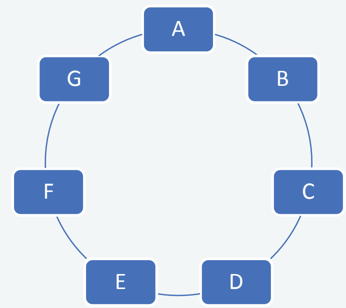
$$\Rightarrow PR_6{}^{2,3,2} = \frac{6!}{2! \bullet 3! \bullet 2!} = \frac{6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!}{2! \bullet 3! \bullet 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

Permutación

Para contar las maneras en que se puede ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1ro Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.

2do Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.



Actividad

Resolvemos los siguientes problemas:

- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en una mesa redonda?
- ¿De cuántas maneras se pueden subir 8 jóvenes a un carrusel con 8 asientos todos idénticos?
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 jóvenes en 9 sillas de una mesa redonda?
- La familia de Jorge tiene 6 integrantes están sentados en una mesa redonda, determinar de cuántas formas se pueden sentar si el Papá y la Mamá se sientan frente a frente.

VALORACIÓN

En el curso 5to de secundaria se pasan clases en 13 asignaturas, Paulina debe realizar 4 tareas en un día de clases, de cuantas formas puede organizar sus tareas o actividades si no interesa el orden de las tareas que realice.

- ¿Como puedes organizar tus horarios o itinerarios con ayuda de las permutaciones?
- ¿Cómo puedes aplicar el concepto de factorial en el área de música?
- En qué circunstancias aplicarías de manera practica tus conocimientos del tema.

PRODUCCIÓN

- Construyamos un diorama con las posibilidades que hay de que tu colegio gane en el concurso de bandas de tu ciudad, si existen 13 bandas inscritas.
- Investiguemos y elaboramos un trabajo sobre las aplicaciones que se dan con las factoriales y las permutaciones, en actividades de tu colegio.

VARIACIONES Y COMBINACIONES

PRÁCTICA

Se está organizando una exposición de gastronomía para lo cual un grupo de estudiantes decidió realizar brochetas, el grupo observa que la presentación del plato debe llamar la atención de los jurados, es así que deciden realizar diferentes combinaciones de los ingredientes, en base a los colores de las carnes e ingredientes que utilizarán.

La combinación en la elaboración de platos de comida se utiliza para crear platos sabrosos y equilibrados, las diferentes texturas y colores pueden ayudar a crear una presentación atractiva; por ejemplo, como combinar 4 colores de los ingredientes en la elaboración y presentación del plato.

Actividad

Elegimos un plato típico de nuestra región:

- ¿Qué operaciones se utilizan para saber las posibles combinaciones con los ingredientes al elaborar un almuerzo saludable?
- ¿En qué otras situaciones se pueden utilizar variaciones y combinaciones?

TEORÍA

Atención

Observa que, en esta definición, es importante el orden en el que se extraen los elementos, pues dos listas con los mismos elementos, pero en posiciones diferentes, se consideran dos variaciones distintas.

1. Variaciones simples

Una variación sin repetición de n elementos tomados de k en k (donde $k \le n$) es un grupo ordenado de k elementos distintos que se pueden formar a partir de los n elementos.

La cantidad de variaciones de n elementos se calcula mediante:

$$V_{n,k} = n(n-1)\bullet(n-2)\bullet\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{donde} \quad n \ge k$$

Ejemplo:

La promoción de un colegio está realizando un campeonato de futsal para lo cual tiene 12 equipos inscritos el asesor de curso les pregunto, ¿de cuántos partidos consta el campeonato que está conformado por 12 equipos?

$k = 12 \qquad n = 2$

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!}$$

$$\Rightarrow \quad V_{12,2} = 132$$

El campeonato constará de 132 partidos.

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir los puestos de presidente, vicepresidente y secretario de hacienda del curso 1ro de secundaria sabiendo que hay 9 candidatos propuestos por el curso?

Las condiciones son que todos participan en la elección, si importa el orden, no es lo mismo que Ian sea presidente y Pedro vicepresidente a que Pedro sea presidente e Ian vicepresidente. Razón por la cual no se repiten los elementos, pues no es posible que un estudiante tenga dos puestos distintos.

$k=9 \qquad V_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

$n=3 \qquad V_{9,3}=\dfrac{9!}{(9-3)!}=\dfrac{9!}{7!}=\dfrac{9\bullet 8\bullet 7!}{7!} \Rightarrow V_{12,2}=72$

Son 72 maneras en las cuales se puede repartir los puestos de presidente, vicepresidente y secretario de hacienda.

2. Variaciones con repetición

Las variaciones con repetición, de n elementos tomados de k en k, son los distintos grupos ordenados de k elementos, repetidos o no, que se pueden formar con los n elementos dados.

La cantidad de variaciones con repetición de n elementos está dada por:

$$VR_{n,k}=n^k$$

Ejemplo: En la evaluación parcial del segundo trimestre, tipo test contiene 12 preguntas y cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta. ¿Cuántas formas distintas posibles existen de resolver la evaluación?

$k=12 \qquad VR_{n,k}=n^k$

$n=4 \qquad VR_{4,12}=4^{12} \Rightarrow VR_{4,12}=16777216$

Existen 16777216 distintas formas de resolver la evaluación.

Aprendiendo

En esta ocasión, al poderse repetir elementos, es posible tomar $k>n$.

Una variación con repetición son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

Es decir, cuando se forman grupos con estas características:

- *Sí importa el orden.*
- *Sí se repiten los elementos.*

Ejemplo:

Leonel decide viajar de Cochabamba a la ciudad de La Paz, el viaje se lo puede realizar por cinco carreteras distintas. ¿De cuántas formas puede realizarse el viaje de ida y vuelta?, recuerda que influye el orden de los elementos y estos se pueden repetir.

$k=5 \qquad VR_{n,k}=n^k$

$n=2 \qquad VR_{2,5}=5^2 \Rightarrow VR_{2,5}=25$

Leonel puede realizar su viaje de 25 maneras.

Actividad

- El maestro de Matemática ha decidido que en el próximo examen va a otorgar un único sobresaliente, un único notable y un único aprobado (el resto, irremediablemente suspenderán), si sus 43 estudiantes NO son capaces de decir de cuántas formas distintas puede calificar siguiendo este innovador método.
- ¿Cuántas señales diferentes de cuatro colores pueden formarse con 7 reflectores de distinto color puestos en una línea?
- De La Paz a Apolo se puede irse en coche, avioneta, helicóptero, moto, o flota. ¿De cuántas formas posibles se puede hacer el viaje de ida y vuelta?
- Rocío lanza dos dados diferentes al aire. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse?
- Una placa de un automóvil está formada por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números escogidos entre los números comprendidos entre 0 y 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en cada país con este sistema?

3. Combinaciones simples

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto determinado, teniendo en cuenta que al formar grupos no interesa el orden de los elementos.

El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k $\left(C_{n,k}\right)$ es igual al cociente del número de variaciones $\left(V_{n,k}\right)$ entre el número de permutaciones $\left(P_k = k!\right)$ Entonces:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \bullet k!} \qquad \text{donde} \qquad n > k$$

Aprendiendo

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \bullet k!}$$

La flota Andina en su recorrido de la ciudad de Santa Cruz a Potosí hay 18 estaciones. Si la flota para en todas las estaciones, ¿cuántos viajes distintos pueden Realizamos entre ellas?

$n = 18$

$k = 2$

$$C_{18,2} = \frac{18!}{(18-2)! \bullet 2!}$$

$$C_{18,2} = \frac{18 \bullet 17 \bullet 16!}{16! \bullet 2!} = 153$$

Ejemplo: En el curso 5to de secundaria deben formar grupos conformado por cinco jóvenes y tres señoritas, para realizar la exposición del fin de trimestre. ¿Cuántas grupos de cuatro estudiantes se pueden formar considerando lo siguiente?

A. No hay restricción alguna.

B. Debe haber al menos dos señoritas.

C. Debe haber al menos dos jóvenes.

Solución A: Como no hay restricción alguna, del grupo conformado por 8 estudiantes vamos a escoger 4.

$$n = 8 \quad k = 4 \qquad C_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)! \bullet 4!} \quad \Rightarrow \quad c_{8,4} = \frac{8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4!}{4! \bullet 4!} = 70$$

Se pueden conformar 70 grupos.

Solución B: Debe haber al menos dos señoritas, se presentarán los siguientes casos:

$$\overbrace{\underbrace{c_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \bullet 2!}}_{3}}^{\text{Se escogen 2 señoritas de un total de 3}} \times \overbrace{\underbrace{c_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \bullet 2!}}_{10}}^{\text{Se escogen 2 varoness de un total de 5}} + \overbrace{\underbrace{c_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)! \bullet 3!}}_{1}}^{\text{Se escogen 3 señoritas de un total de 3}} \times \overbrace{\underbrace{c_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)! \bullet 1!}}_{5}}^{\text{Se escogen 1 varón de un total de 5}} = 35$$

Solución C: Debe haber al menos dos jóvenes, se presentarán los siguientes casos:

$$\overbrace{\underbrace{c_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \bullet 2!}}_{10}}^{\text{Se escogen 2 varones de un total de 5}} \times \overbrace{\underbrace{c_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \bullet 2!}}_{3}}^{\text{Se escogen 2 mujeres de un total de 3}} + \overbrace{\underbrace{c_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \bullet 3!}}_{10}}^{\text{Se escogen 3 varones de un total de 5}} \times \overbrace{\underbrace{c_{3,1} = \frac{3!}{(3-1)! \bullet 1!}}_{3}}^{\text{Se escoge 1 mujer de un total de 3}} + \overbrace{\underbrace{c_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \bullet 4!}}_{5}}^{\text{Se escogen 4 varones de un total de 5}} = 65$$

Actividad

- En el torneo regional de ajedrez participan 22 estudiantes donde clasifican tres y pasan a la final. ¿Cuántas son las posibles clasificaciones?
- ¿Cuántos grupos de tres estudiantes se pueden formarse con los 35 jóvenes y señoritas del curso 5to de secundaria?
- De los 38 estudiantes del curso se presentan 6 como candidatos a ocupar dos puestos de presidente del curso. ¿Cuántas elecciones son posibles?
- En la reunión de organización del curso 5to de secundaria Wara observa que los padres de familia se dan apretones de manos, llegando a contar un total de 91 apretones de manos. Determine cuantos padres de familia participaron de la reunión. Si todos se saludaron.
- Richard en un examen de física tiene que elegir 8 de las 12 preguntas de su evaluación. ¿De cuantas maneras puede elegirlas? ¿y si las 5 primeras son obligatorias?

Ejemplo: Un albañil dispone de 5 latas de colores diferentes ¿Cuántos tonos diferentes adicionales a los que tiene podrá obtener mezclando en cantidades iguales las latas de pintura?

Para obtener distintos tonos de color deberá mezclar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 o de 5 en 5.

$$= \underset{\textit{Mezclando 2 colores}}{c_{5,2}} \times \underset{\textit{Mezclando 3 colores}}{c_{5,3}} + \underset{\textit{Mezclando 4 colores}}{c_{5,4}} \times \underset{\textit{Mezclando 5 colores}}{c_{5,5}}$$

$$= \frac{5!}{(5-2)!\bullet 2!} \times \frac{5!}{(5-3)!\bullet 3!} + \frac{5!}{(5-4)!\bullet 4!} \times \frac{5!}{(5-5)!\bullet 5!}$$

$$=10+10+5+1=26$$

Obtiene 26 tonos diferentes de colores.

4. Números combinatorios

El número de combinaciones (sin repetición) de n elementos tomados de k en k se llama número combinatorio de n sobre k y se denota mediante $\binom{n}{k}$

Es decir: $\binom{n}{k} = C_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\bullet k!}$ donde $n \geq k$

Números combinatorios especiales:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{(0-0)!\bullet 0!} = \frac{1}{1\bullet 1} = 1$$

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{(1-1)!\bullet 1!} = \frac{1}{0!\bullet 1} = 1$$

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{(1-0)!\bullet 0!} = \frac{1}{1!\bullet 1} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\bullet n!} = \frac{n!}{0!\bullet n!} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\bullet (n-1)!} = \frac{n!}{[n-n+1]!\bullet (n-1)!} = \frac{n\bullet (n-1)!}{1!\bullet (n-1)!} = \frac{n}{1} = n$$

Relación de recurrencia o Teorema de Stieffel

La suma de dos números combinatorios no siempre es otro número combinatorio, pero si los numeradores son iguales y los denominadores consecutivos la relación, a continuación, es válida:

$$\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$$

Igualdad de números combinatorios

Si dos números combinatorios que tienen igual numerador y la suma de sus denominadores es igual al numerador, entonces son iguales.

$\binom{m}{k}$ y $\binom{m}{m-k}$ *son iguales*

Se verifica que: $m = k + n - k$

Ejemplo: Calculamos 5 C 0

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!\bullet 0!} = \frac{5!}{5!\bullet 1} = 1$$

Actividad

Calculamos:

$\binom{7}{1} =$

$\binom{5}{5} =$

$\binom{12}{0} =$

Calculamos:

$\binom{12}{12} =$

$\binom{7}{7-1} =$

$\binom{15}{15-1} =$

Triángulo de Tartaglia

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

Los números interiores se obtienen aplicando el teorema de Stieffel.

El exponente de "a" es la diferencia entre el numerador y el denominador del coeficiente del término, y el del "b" es igual al denominador de dicho coeficiente. Es decir, la suma de ambos exponentes es igual a "n" para todos los términos, por lo tanto, los términos del desarrollo son homogéneos de grado "n".

Otra generalización del término $k+1$ es:

$$t_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\bullet b^{k}$$

Ejemplos:

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{(10-4)!\bullet 4!}=\frac{10\bullet 9\bullet 8\bullet 7\bullet 6!}{6!\bullet 4!}=210$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{(7-3)!\bullet 3!}=\frac{7\bullet 6\bullet 5\bullet 4!}{4!\bullet 3!}=35$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\bullet 2!}=\frac{5\bullet 4\bullet 3!}{3!\bullet 2!}=10$$

5. Binomio de Newton

Si a y b reales y n natural, entonces podemos afirmar que:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k} \quad \text{ó} \quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$$

Cada término del desarrollo tiene como coeficiente un número combinatorio de numerador igual al exponente del binomio y el denominador varía de 0 a "n".

Recordamos que los números combinatorios $\binom{n}{k}$ cuentan cuántos subconjuntos de k elementos podemos formar a partir de uno de n elementos.

En particular, vamos a usar en esta clase la definición recursiva de los números combinatorios.

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0$$

$$\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k}+\binom{n}{k-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ 1\le k\le n-1$$

Ejemplo: $(x+y)^1=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0$, advertimos que $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$

Por lo tanto: $(x+y)^1=x+y$

Término k-ésimo

Si se necesita determinar algún término del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ resulta útil aplicar la fórmula a continuación:

$$C_{k-1}^{n}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

Donde k es la posición del término buscado.

Actividad

Desarrollamos cada uno de los siguientes binomios:

$(2a+4b)^2=$

$\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^6=$

$(2x+3y)^5=$

$(7a+3b)^6=$

$(6a+3b)^3=$

$\left(\frac{3}{5}a+\frac{2}{3}b\right)^7=$

Ejemplo: Desarrollamos por el binomio de Newton $\left(a^3+3b^2\right)^4$

$$=\binom{4}{0}\left(a^3\right)^4\left(3b^2\right)^0+\binom{4}{1}\left(a^3\right)^3\left(3b^2\right)^1+\binom{4}{2}\left(a^3\right)^2\left(3b^2\right)^2+\binom{4}{3}\left(a^3\right)^1\left(3b^2\right)^3+\binom{4}{4}\left(a^3\right)^0\left(3b^2\right)^4$$

$$=\binom{4}{0}a^{12}+\binom{4}{1}a^9\bullet 3b^2+\binom{4}{2}a^6\bullet 9b^4+\binom{4}{3}a^3\bullet 27b^6+\binom{4}{4}81b^8$$

$$=\frac{4!}{4!}a^{12}+\frac{4!}{3!1!}a^9\bullet 3b^2+\frac{4!}{2!2!}a^6\bullet 9b^4+\frac{4!}{1!3!}a^3\bullet 27b^6+\frac{4!}{4!}81b^8$$

$$=a^{12}+4\bullet a^9\bullet 3b^2+6\bullet a^6\bullet 9b^4+4\bullet a^3\bullet 27b^6+1\bullet 81b^8$$

$$=a^{12}+12\bullet a^9b^2+54\bullet a^6b^4+108\bullet a^3b^6+81b^8$$

Ejemplo: En el desarrollo de $\left(1+3x^2\right)^{19}$**, obtener el coeficiente de** x^6

n= 19

k= 4

$$C^{n}_{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

$$=C^{19}_{4-1}\left(1\right)^{19-4+1}\left(3x^2\right)^{4-1}=C^{19}_{3}\left(1\right)^{16}\left(3x^2\right)^3$$

$$=\left(\frac{19!}{16!\bullet 3!}\right)1\bullet 3^3x^6$$ Así el coeficiente de x^6 es: 26163

Teorema del binomio de Newton

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

Debido a este teorema, los números combinatorios se llaman también ***coeficientes binomiales.***

El 4to término del binomio.

$$\left(2b^3-a\right)^9$$

$$=C^{9}_{4-1}\left(2b^3\right)^{9-4+1}\left(-a\right)^{4-1}$$

$$=\left(\frac{9!}{6!3!}\right)\left(2b^3\right)^6\left(-a\right)^3$$

Así el 4to término es: $-5376a^3b^{18}$

Actividad

Desarrollamos por el binomio de Newton:

- $\left(a^4-2m^3\right)^6=$
- $\left(\frac{5}{7}a^2x^3+2b^3y^4\right)^9=$
- Obtenemos el 7mo término del binomio $\left(b^3-a^3\right)^{11}$
- En el desarrollo de $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^{12}$, obtenemos el coeficiente de x^7

VALORACIÓN

El análisis combinatorio forma parte de la matemática que estudia las organizaciones y agrupaciones de los elementos. Las aplicaciones de la informática la estadística en el uso de los principios básicos de conteo, el factorial de un número natural, las permutaciones, las variaciones y combinaciones de elementos y actividades que se pueden desarrollar en la vida cotidiana. Tenemos numerosos ejemplos de aplicación.

Si en tu colegio debes realizar un campeonato ya sea de futsal, voleibol, básquet o alguna competencia, siempre es preciso organizar los tiempos y los espacios. Para tal efecto, es importante conocer sobre estas aplicaciones:

- Para organizar un evento que requiere la debida programación, ¿qué tema de análisis combinatorio te permite organizar tu evento?
- Los juegos de azar utilizan principios básicos del análisis combinatorio, menciona cuáles son estos.

PRODUCCIÓN

Actividad

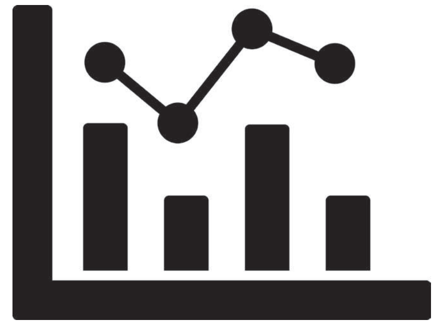
- Construimos un proyecto donde organicemos algún evento deportivo que necesite de una programación y organización para que éste termine en los plazos planificados.
- Modelizamos el proyecto utilizando herramientas tecnológicas que fortalezcan tu trabajo.
- Elaboramos un cuadro donde mostremos las combinaciones que podemos realizar con los colores de nuestro equipo favorito, exponiéndolos en clase para fortalecer y reforzar nuestros conocimientos.
- Elaboramos un menú de alimentos sanos (pueden ser frutas y verduras) utilizando la probabilidad, para consumir durante una semana en los recreos.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

PRÁCTICA

En la feria trimestral de la Unidad Educativa Franz Tamayo asistieron padres y madres de familia, también se observó la presencia de habitantes de la comunidad. Los estudiantes de 5to de secundaria registraron a los asistentes tomando nota de las edades y zonas de las cuales vinieron a apreciar los proyectos expuestos en los diferentes stands que exponen sobre alimentos saludables, recetas de comida nutritiva, ensaladas de frutas y verduras.

Así también, los stands registraron la cantidad de visitantes a su presentación, para poder identificar las tendencias de mercado, evaluar el rendimiento de sus productos y servicios, y tomar decisiones estratégicas para mejorar en la próxima gestión.


Fuente:https://es.vecteezy.com

Actividad

- ¿Cómo organizarías la información obtenida sobre el número de visitantes a la feria educativa?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre la estadística?
- Mencionamos en qué situaciones observamos el uso de la estadística.
- ¿Como utilizarías la estadística para mejorar tu calidad de vida y la de tu familia?

TEORÍA

Estadística descriptiva

Esta área de la matemática trata de:

- *Aplicar conceptos estadísticos como muestra, población y tipos de variables.*
- *Ordenar y organizar la información.*
- *Analizar y construir tablas y gráficos.*
- *Determinamosr medidas de tendencia central: media aritmética, moda y mediana.*
- *Calculamos medidas de dispersión como el rango, desviación estándar y varianza.*
- *Interpretar las medidas de posición: cuartiles, deciles y percentiles.*

Estos conocimientos también pueden ser determinados introduciendo los datos necesarios en una calculadora, e incluso con una computadora.

1. Definiciones fundamentales de Estadística

La Estadística es la ciencia que trata de la recopilación de datos, su organización, el análisis y la interpretación para la toma de decisiones. Se se refiere al conjunto de métodos, normas, reglas y principios para observar, agrupar, describir, cuantificar y analizar el comportamiento del fenómeno que se estudia.

Originalmente se pensó que la función de la estadística era describir las características de un grupo, en la actualidad, no sólo es descriptivo sino también analítico, que, partiendo de un grupo mayor, llamado población, se pueden deducir conclusiones con relación a un tema o variable para un grupo menor llamado muestra.

Estadística descriptiva

Es un conjunto de procedimientos estadísticos que sirven para organizar y resumir conjuntos de datos numéricos, tiene como finalidad poner en evidencia aspectos característicos (promedios, variabilidad de datos, etc.) que sirven para efectuar comparaciones sin pretender sacar conclusiones de tipo más general.

a) Estadística inferencial

Esta área se encarga de deducir o inferir aquello que mencionamos en cuanto a la población y la muestra, seleccionando ésta última por métodos aleatorios. Su propósito es explicar ciertos comportamientos del conjunto observado, estableciendo las causas que la originan.

2. Recolección y organización de datos

Debido a que los datos en forma individual no tienen utilidad práctica, es necesario organizarlos de manera sistemática para facilitar su interpretación y análisis. La manera más sencilla de organizar la información es en una base de datos, la cual posibilita realizar clasificaciones simples o cruzadas, según las variables o series.

Para esta etapa tomaremos los siguientes conceptos básicos:

a. Población o Universo:

Conjunto de todos los elementos que permiten resolver un problema y que presentan una característica común determinada, observable y medible. Por ejemplo, si el elemento es una persona, se pueden estudiar las características edad, peso, nacionalidad, sexo, etc. Los elementos que integran una población pueden corresponder a personas, objetos o grupos (por ejemplo, familias, las manzanas de una cosecha, empleados de una empresa, etc.).

Ejemplos:

1. Todas las tiendas que se dedican a la venta de celulares en el departamento de Tarija.
2. Todos los establos de ganado vacuno en el departamento Santa Cruz.
3. Todos los estudiantes matriculados en el departamento de La Paz, en educación regular.
4. Totos los usuarios del teleférico en la ciudad de La Paz en toda la gestión 2023.

b. Muestra

Se define como un subconjunto de la población, sobre este conjunto se realizan las mediciones al respecto de una variable susceptible a medición.

Ejemplos:

De los ejemplos anteriores de poblaciones se tienen:

1. Tiendas que se dedican a la venta de celulares en el Distrito 7 - Zona Mercado Campesino (Tarija).
2. Establos de ganado vacuno del Norte Integrado (Santa Cruz).
3. Estudiantes matriculados en el distrito La Paz 3.
4. Usuarios del teleférico rojo en el mes de febrero (La Paz).

3. Tipos de variable: cuantitativa (discretas y continuas) y cualitativas

Se llama variable a una característica que se observa en una población o muestra (edad, sexo, peso, talla, tensión arterial sistólica, etcétera), la cual se desea estudiar. La variable puede tomar diferentes valores dependiendo de cada individuo y se puede clasificar en cuantitativa y cualitativa.

Muestreo

El muestreo es una técnica que sirve para obtener una o más muestras de la población, se realiza determinando un grupo representativo de la población, seleccionando así los elementos de la muestra.

Individuo

Un individuo o unidad estadística es cada uno de los elementos que componen la población. Por ejemplo, en los censos económicos se obtienen datos de los negocios. En este caso cada negocio, que está formado por varias personas, es un individuo de la población.

Dato

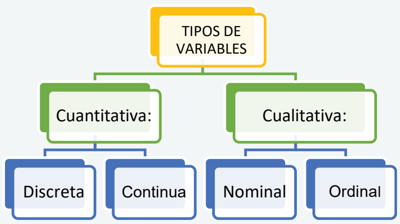
El dato es cada uno de los valores que se han obtenido al realizar un estudio estadístico. Por ejemplo: si se lanza una moneda al aire 5 veces obtenemos 5 datos.

Actividad

- Ejemplificamos población o universo según nuestro contexto:

- De los ejemplos anteriores de población o universo, ejemplificamos las muestras:

Tipos de variables



Tablas de frecuencia

Las tablas de frecuencias se utilizan para representar la información contenida en una muestra de tamaño “ n” extraída de una población.

Observación

n es el total de datos.

Variable	Definición	Tipo	Característica	Valores
Cualitativa	Expresa cualidades o atributos que no se pueden medir	Único	El deporte practicado	Futbol, natación
Cuantitativa	Son características medibles, se puede asignar un valor numérico	Discreta (toma valores enteros)	El número de libros que lee al año	0, 1, 2, 3, …
		Continua (toma un valor de un intervalo)	La estatura	160 cm a 165 cm.

4. Tablas de frecuencia y gráficos estadísticos

La distribución de frecuencias o tabla de frecuencias ordenan los datos estadísticos en una tabla, reuniendo como información importante a las frecuencias correspondientes.

a. Tablas de frecuencia

- **La frecuencia absoluta** f_i

  Es el número de veces que aparece un valor entre los datos de la muestra, se representa por f_i y la suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

- **Frecuencia absoluta acumulada** F_i

  Es la suma de las frecuencias absolutas de manera progresiva, la última suma es igual al total de datos, se representa por F_i.

- **La frecuencia relativa** h_i

  Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos, se representa por $h_i = \frac{f_i}{n}$, la suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

- **Frecuencia relativa acumulada** H_i

  Es la suma de las frecuencias relativas de manera progresiva, la última suma es igual a 1, se puede expresar en tantos por ciento.

Dato x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia relativa acumulada H_i
x_1	f_1	$F_1 = f_1$	$h_1 = \frac{f_1}{n}$	$H_1 = h_1$
x_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$h_2 = \frac{f_2}{n}$	$H_2 = h_1 + h_2$
……	…….	……	……	……
x_{n-1}	f_{n-1}	$F_{n-1} = f_1 + f_2 ... + f_{n-1}$		
x_n	f_n	$F_n = \sum f_i = n$	$h_n = \frac{f_n}{n}$	$H_n = \sum h_i = 1$
Total	$n = \sum_{i=1}^{n} f_i$		1	

Ejemplo: Construye una tabla de distribución de frecuencias con los datos de 50 estudiantes que tienen faltas en área de matemática.

2	3	4	0	3	3	3	1	2	3
2	1	2	3	2	3	3	5	5	4
2	4	1	6	1	6	4	0	5	3
3	3	1	1	6	0	3	3	4	4
3	2	3	2	4	4	2	5	2	1

Datos	f_i	F_i	h_i	H_i
0	3	3	0,06	0,06
1	7	10	0,14	0,2
2	10	20	0,2	0,4
3	15	35	0,3	0,7
4	8	43	0,16	0,86
5	4	47	0,08	0,94
6	3	50	0,06	1
Total	50		1	

- **Distribución de frecuencias para datos agrupados**

Es la tabla datos agrupados que se emplea cuando las variables toman un número grande de valores o la variable es continua. Son agrupados en intervalos con la misma amplitud, denominados clase. A cada clase se le asigna su frecuencia correspondiente.

El rango: R = $R = X_{max} - X_{min}$

El número de intervalos ( ), es común la utilizar la fórmula de Sturges "$k = 1 + 0,33 \bullet \log n$".

La Amplitud de la clase (A): $A = \frac{R}{k}$

Ejemplo: Construye una tabla de distribución de frecuencias agrupadas si el profesor de educación física realiza la medida de estaturas de sus estudiantes que participaran en los juegos plurinacionales obteniendo los siguientes datos de 30 estudiantes.

Hallamos el rango: $R = X_{max} - X_{min} = 1,98 - 1,15 = 0,83$

El número de intervalos (k): $k = 1 + 0,33 \bullet \log n = 1 + 0,33 \bullet \log 30 = 5,91 = 6$

Calculamos la amplitud de clase(A): $A = \frac{R}{k} = \frac{0,83}{6} = 0,138 = 0,14$

1,15	1,53	1,21	1,77	1,2
1,48	1,16	1,59	1,49	1,98
1,57	1,6	1,86	1,2	1,37
1,71	1,81	1,52	1,42	1,16
1,92	1,98	1,48	1,45	1,73
1,39	1,62	1,4	1,17	1,64

Intervalo	f_i	F_i	h_i	H_i
1 - 1,29	7	7	0,23	0,23
1,29 - 1,43	4	11	0,13	0,37
1,43 - 1,57	6	17	0,2	0,57
1,57 - 1,71	5	22	0,17	0,73
1,71 - 1,85	4	26	0,13	0,87
1,85 - 2	4	30	0,13	1
Total	30		1	

Interpretación de datos

- ***Calculando la frecuencia absoluta f_i:***

$f_1 = 3$ significa que 3 estudiantes no se faltaron nunca.

$f_2 = 7$ significa que 7 estudiantes tienen 1 falta.

$f_3 = 10$ significa que 10 estudiantes tienen 2 faltas.

- ***Calculando la Frecuencia absoluta acumulada F_i***

$F_1 = 3$

$F_2 = 3 + 7 = 10$

....

$F_7 = 3 + 7 + ... + 47 = 50$

- ***Calculando la frecuencia relativa h_i***

$h_1 = \frac{3}{50} = 0,06$

$h_2 = \frac{7}{50} = 0,14$

....

$h_7 = \frac{3}{50} = 0,06$

- ***Calculando la frecuencia relativa acumulada H_i***

$H_1 = 0,06$

$H_2 = 0,06 + 0,14 = 0,2$

....

$H_7 = 0,06 + 0,14 + ... + 0,06 = 1$

Actividad

- El puntaje obtenido por los estudiantes del 5to de secundaria en el último examen es el siguiente: 63, 62, 65, 69, 62, 70, 45, 62, 74, 59, 68, 66, 66, 55, 60, 65, 63, 57, 66, 68, 67, 58, 74, 74, 61, 67, 71, 64, 52, 76, 63, 71, 76, 60, 71, 67, 60, 72, 68, 59, 69, 55, 79, 57, 51, 67, 47, 72, 71, 67, 54, 67, 65, 64, 50, 60, 64, 71, 72, 63.
- Construimos una tabla de distribución de frecuencias.
- José pregunta sobre los precios de cierto artículo en 40 tiendas diferentes y encuentra los siguientes datos:

76	85	88	74	65	91	89
76	83	70	86	67	68	73
77	71	75	68	74	72	75
84	75	73	87	68	79	70
72	63	89	60	72	83	88

Construimos una tabla de distribución de frecuencias agrupadas.

b. Gráficos estadísticos

Las distribuciones de frecuencias se presentan en tablas como las anteriores, o bien en gráficas. La representación gráfica se utiliza para facilitar al lector la comprensión de los resultados, pero no añade ninguna información sobre la que contendría una tabla de frecuencias; el objetivo de las gráficas es que la información "impacte" directamente al lector y que se exprese el "perfil" de la distribución, pero no debe olvidarse el rigor en aras de la estética: las gráficas deben reflejar fielmente lo que tratan de representar, fundamentalmente las frecuencias de cada modalidad o valor. Por ello la regla fundamental para la construcción de una gráfica es que las áreas (o longitudes) han de ser proporcionales a las frecuencias, condición inexcusable para que una gráfica sea correcta.

- **Diagrama de barras**

  Es utilizado para de presentar datos cualitativos o cuantitativos de tipo discreto. Son representados en el plano cartesiano con ejes de coordenadas, sobre el eje de horizontal se colocan los valores de la variable, mientras que en el eje vertical las frecuencias absolutas, relativas o acumuladas.

  Los datos son representados por barras con altura proporcional a la frecuencia.

- **Polígonos de frecuencias**

  Se realiza ubicando los puntos formados por el valor de la variable y las frecuencias absolutas, uniéndolos mediante segmentos.

- **Diagrama de sectores**

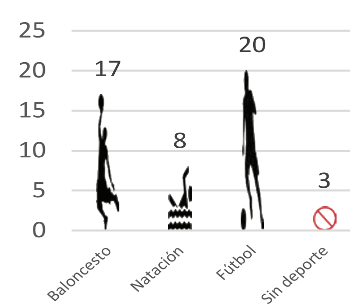
  Se trazan sectores en un círculo, de manera proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente, es mayormente utilizada para variables cualitativas.

- **Histograma**

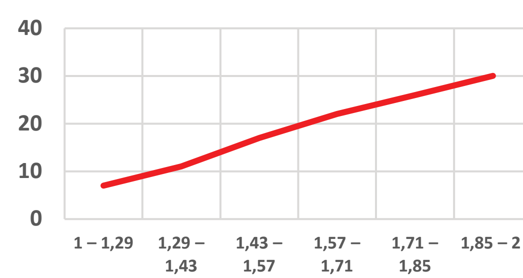
  Es una representación gráfica en forma de barras. Las variables son continuas o discretas, pero agrupadas.

- **Pictogramas**

  Es una forma de representar las cantidades estadísticas por medio de dibujos, utilizando para ello objetos y figuras; las figuras deben explicarse por si mismas. Se acostumbra que el tamaño sea uniforme, indicándose aparte de las figuras el valor de una de ellas. Por otro lado, el tamaño puede variar y la altura de cada objeto estará dada por la frecuencia absoluta o relativa.

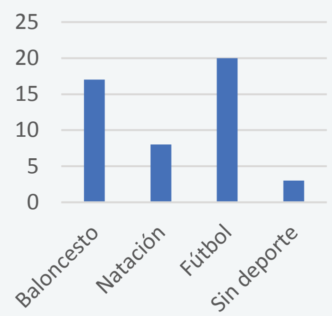


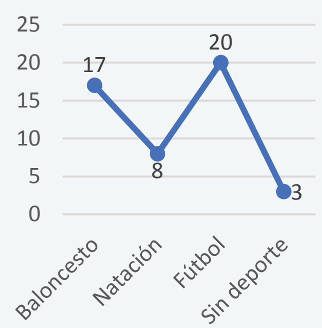
- **Ojivas**

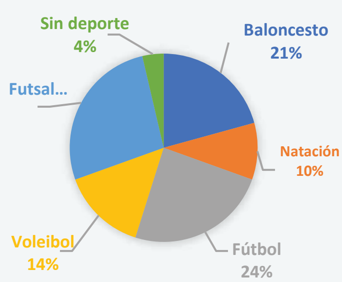


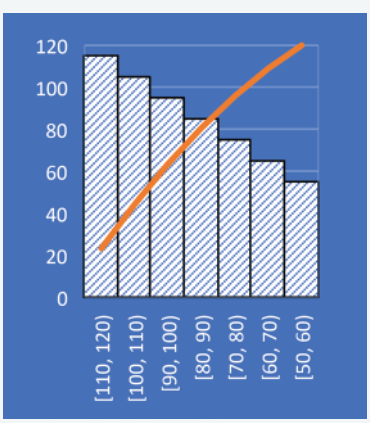
  Para el trazado de esta gráfica, en primer lugar, se ubican los puntos en el plano cartesiano. Dichos puntos se determinan teniendo en cuenta el límite superior de cada intervalo y las respectivas frecuencias absolutas o relativas acumuladas; luego se unen esos puntos, partiendo desde el límite inferior del primer intervalo ubicado en el eje horizontal.

Gráficos estadísticos









Ejemplo:

Construye una tabla de distribución de frecuencias y su gráfica sabiendo que a 20 colegiales se les pregunto sobre el número de miembros de su familia, y sus respuestas fueron: 3, 5, 4, 3, 5, 6, 8, 3, 3, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 4, 7, 4, 5, 3.

Datos	f_i	F_i	h_i	H_i
3	5	5	0,25	0,25
4	4	9	0,2	0,45
5	6	15	0,3	0,75
6	2	17	0,1	0,85
7	2	19	0,1	0,95
8	1	**20**	0,05	**1**
Total	20		1	

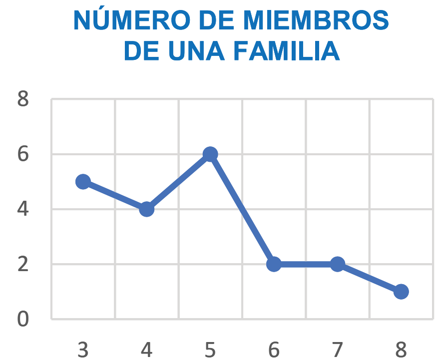
– ***Calculando la frecuencia relativa acumulada*** H_i

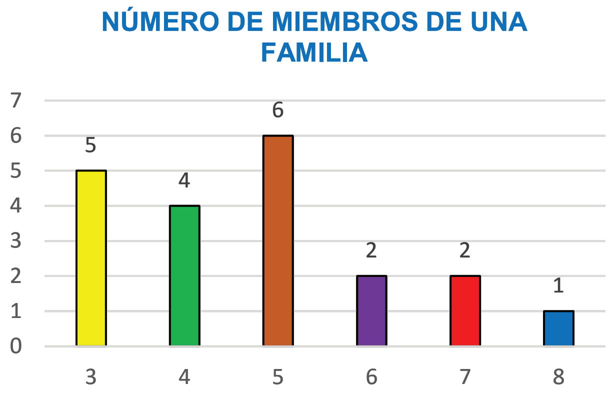
$$H_1 = 0,06$$

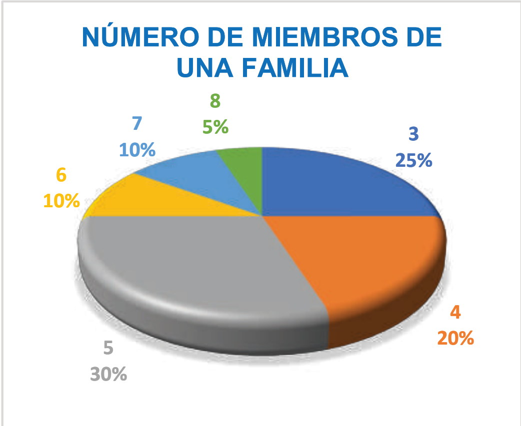
$$H_2 = 0,06 + 0,14 = 0,2$$

....

$$H_7 = 0,06 + 0,14 + ... + 0,06 = 1$$







5. Medidas de tendencia central

Hemos visto cómo se pueden organizar y representar datos de una serie, sin embargo, resulta importante en el trabajo estadístico poder comparar entre sí dos o más series de datos.

Las medidas de tendencia central suelen llamarse promedios, y son el valor típico en el sentido de que se emplea a veces para representar todos los valores individuales de un conjunto de datos. Es decir, las medidas de tendencia central dan un valor típico o representativo de un conjunto de datos.

La tendencia central de un conjunto de datos es la disposición de éstos para agruparse ya sea alrededor del centro o de ciertos valores numéricos. Hay varias medidas de tendencia central, con propiedades particulares que las hacen típicas en alguna forma única. Las más frecuentemente utilizadas son la media aritmética, la mediana y la moda.

a. Media aritmética

Resulta de sumar todos los datos y dividir la suma entre el total de datos recolectados. Es como realizar el promedio de los datos.

Actividad

A continuación, se presenta una muestra de los puntajes obtenidos en la exposición del área de Física: 70, 90, 95, 74, 58, 70, 98, 72, 75, 85, 95, 74, 80, 85, 90, 65, 90, 75, 90 y 69.

- Construye una tabla de distribución de frecuencias.
- Realiza la gráfica que se acomode a los datos empleados.

Rene averiguó los precios de 20 libros en tiendas diferentes:

- Construye una tabla de distribución de frecuencias agrupadas.
- Realiza la gráfica que se acomode a los datos empleados.

76	85	88	74
76	67	68	73
77	74	72	75
84	68	79	70
72	63	89	60

Importante

$\overline{X}$: *Media Aritmética.*

$\sum$: *Sumatoria.*

x_i : *Datos.*

$x_1 + ... + x_n$: *Datos.*

n : *Total de datos.*

$\overline{X}$: *Media Aritmética.*

$\sum$: *Sumatoria.*

f_i : *Frecuencia.*

x : *Marca de Clase, se calcula con* $\dfrac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$

n : *Total de datos.*

Me : *Mediana.*

$X_{\min}$: *Límite inferior*

f_{med} : *Frecuencia del intervalo en que se encuentra la mediana.*

F_i : *Frecuencia absoluta acumulada anterior al intervalo.*

c : *Amplitud de clase media.*

Ejemplo:

intervalos	f_i	F_i
16-20	*5*	*5*
21-25	*17*	*22*
26-30	*16*	*38*
31-35	*7*	*45*
36-40	*4*	*49*
41-45	*4*	*53*
46-50	*1*	*54*
51-55	*1*	*55*
Total	*55*	

$c = 5 \qquad \overline{X} = \dfrac{55+1}{2} = 28$

$$Me = X_{\min} + \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{(i-1)}}{f_{med}}\right] c = 25,5 + \left[\frac{\frac{55}{2} - 22}{16}\right] 5 = 27.21$$

- **Para datos desagrupados**

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} \;; \qquad \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Ejemplo: El profesor de la materia de matemática desea conocer el promedio de las notas finales de los 10 estudiantes de la clase. Las notas son: 3,2; 3,1; 2,4; 4,0; 3,5; 3,0; 3,5; 3,8; 4,2; 4,0;

¿Cuál es el promedio de notas de los estudiantes de la clase?

$$\overline{X} = \frac{3,2+3,1+2,4+4,0+3,5+3,0+3,5+3,8+4,2+4,0}{10} = \frac{34,7}{10} = 3,47$$

El promedio de las notas es de 3,47

- **Para datos agrupados**

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i \bullet xi}{n}$$

Ejemplo: Dada la siguiente tabla de frecuencias, hallar la media aritmética.

R		f_i	xi	$f_i \bullet xi$
$X_{\min}$	$X_{\max}$			
3	5	2	4	8
6	8	10	7	70
9	11	12	10	120
12	14	9	13	117
15	17	7	16	112
		40		427

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i \bullet xi}{n} = \frac{427}{40} = 10,68$$

b) Mediana

Es la observación que, en una serie ordenada, ocupa la posición central, por tanto, divide a la serie en dos partes iguales. Por encima de ella se encuentra el 50% de las observaciones y a su vez su valor supera al 50% restante, se representa el valor de la variable de posición central con:

$\dfrac{n+1}{2}$ cuando la cantidad de datos es impar y $\dfrac{n}{2}$ cuando es par.

- **Para datos desagrupados**

Ejemplo: Peso en kg. de 5 niños es: 5, 6, 7, 9, 11 ¿Cuál es la mediana?

La cantidad de datos es **IMPAR,** por lo que la posición es $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3$ luego la mediana corresponde al niño que peso 7kg. Me=7

Ejemplo: Cuando la cantidad de datos es **PAR** no hay un único valor central, en este caso la, son 6 términos, por lo que la posición inicial es $\dfrac{n}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, la tercera. Con esto, la Mediana será la semisuma de los dos valores centrales. 3, 5, 6 ,7, 9, 11

$$Me = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

La mediana está entre la tercera y la cuarta posición.

- **Para datos agrupados**

$$Me = X_{\min} + \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{(i-1)}}{f_{med}}\right] c$$

c. Moda

La moda es el dato que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto. Cuando se considera la distribución poblacional de una variable continua, decimos que esta es UNIMODAL si presenta un pico y BIMODAL si aparecen dos picos claros.

6. Cuartiles, deciles y percentiles

Si una serie de observaciones se colocan en orden creciente, el valor que divide al conjunto de datos en dos partes iguales es la mediana. Por extensión, si preferimos tener una descripción más detallada de la variabilidad de los valores individuales, se puede dividir los datos en otra cantidad de partes iguales.

- **Cuartiles**

Al dividir los datos en cuatro partes iguales, quedan definidos los cuartiles: Q_1, Q_2 y Q_3. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo cuartil. $°Q_k = \frac{k(n+1)}{4}$

- **Deciles**

Al dividir los datos en diez partes iguales, quedan definidos los deciles: D_1, D_2,..., D_9. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo decil. $°D_k = \frac{k(n+1)}{10}$

- **Percentiles**

Al dividir los datos en cien partes iguales, quedan definidos los percentiles: P_1, P_2,..., P_{99}. La fórmula para obtener el lugar del k-ésimo percentil. $°P_k = \frac{k(n+1)}{100}$

Ejemplo

Edad en años de 10 pacientes con resfrió.

20, 27, 23, 35, 23, 40,32, 23, 19, 17

La moda en este caso es 23 años.

Por ejemplo, en cuatro, en diez o en cien partes iguales, llamando a estas medidas cuartiles, deciles y percentiles, respectivamente.

17, 19, 20, 23, 23, 23, 27, 32, 35, 40

- ***Cuartiles***

$$°Q_k = \frac{k(n+1)}{4} = \frac{1(10+1)}{4} = 2,75$$

- ***Deciles***

$$°D_k = \frac{k(n+1)}{10} = \frac{5(10+1)}{10} = 5,5$$

- ***Percentiles***

$$°P_k = \frac{k(n+1)}{100} = \frac{60(10+1)}{100} = 6,6$$

Actividad

Hallamos la media, mediana y la moda de los siguientes datos:

- 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6
- 51.6, 48.7, 50.3, 49.5, 48.9
- 1.2, 1.5, 1.6, 2.1, 2.4, 2.4, 2.7, 2.8, 3.0, 3.0, 3.0, 3.1, 3.1, 3.1, 3.4.

Hallamos las medidas cuartiles, deciles y percentiles de los siguientes datos:

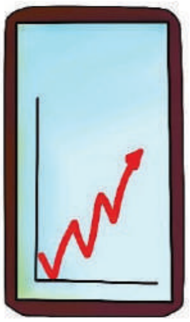
- 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6
- 51.6, 48.7, 50.3, 49.5, 48.9
- 10, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 14, 17
- 0, 1,1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4

VALORACIÓN

La estadística es una herramienta esencial para el aprendizaje y el pensamiento crítico. Los estudiantes que aprenden a utilizar la estadística de manera efectiva estarán mejor preparados para tener éxito en el colegio y en la vida.

Es una herramienta poderosa que puede ayudarte a aprender, pensar críticamente y tomar mejores decisiones.

- ¿Cómo emplearías las tablas de frecuencias para mejorar las actividades de tus padres?
- ¿Qué otras aplicaciones le darías a las gráficas estadísticas?
- ¿Como aplicarías las tablas de frecuencia y gráficos estadísticos, para mejorar tu perfil en redes sociales?



PRODUCCIÓN

Actividad

- Investiguemos datos estadísticos sobre las siguientes temáticas:
  Violencia familiar, contaminación del aire y depresión juvenil
- Recolectemos datos al respecto, planificamos las variables que utilizaremos.
- Modelizamos tu investigación, utilizando Microsoft Excel para fortalecer tu investigación.
- Elaboremos un mapa mental sobre los conceptos de estadística para exponerlo en clases.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y FENÓMENOS SOCIALES

PRÁCTICA

La pre-promoción está realizando una rifa en conmemoración al día de la madre, por lo que todos los estudiantes están vendiendo fichas para dicho sorteo. Las medidas de dispersión de la rifa organizada permiten comparar los datos de diferentes rifas, esto ayuda a los organizadores del sorteo a identificar tendencias y patrones que para mejorar sus estrategias.

Por ejemplo: si una rifa tiene desviación estándar alta, la rifa es popular y tiene más ganadores. También nos permite comprender las tendencias en los números de los boletos vendidos, así, si los números de los boletos vendidos se distribuyen de manera uniforme, significa que los boletos se venden de manera consistente.

Actividad

- ¿Cuál sería el modelo matemático que nos permita comprender cómo se está llevando a cabo el sorteo?
- ¿Si se pusieron a la venta 12000 boletos, cuánto dinero recaudarán si cada unidad la vendieron a 2 Bs.?
- ¿En qué otras actividades se pueden aplicar los conocimientos sobre estadística?

TEORÍA

Estadística

La enciclopedia británica define a la estadística como la ciencia encargada de recolectar, analizar, presentar e interpretar datos.

El diccionario inglés "Word Reference" define a la estadística como un área de la matemática aplicada, orientada a la recolección e interpretación de datos cuantitativos y al uso de la teoría de la probabilidad para calcular *los parámetros de una población.*

Dispersión

Las medidas de dispersión nos permitirán realizar un análisis más correcto.

1. Medidas de dispersión

A diferencia de las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión no son datos de la muestra, más bien, corresponden a parámetros estadísticos que indican que tan cerca o lejos, se encuentran los datos respecto se la media, por lo mismo siempre van a depender de ella. En general, las medidas de dispersión sirven como indicadores de la variabilidad de los datos.

Ejemplo:

El colegio está analizando las notas de dos de los mejores estudiantes de la promoción para enviar la lista de bachiller destacado en el caso de los varones se enviará el nombre del estudiante cuyo buen rendimiento se haya mantenido por mayor tiempo, en los últimos años de secundaría. Para calcular el mejor promedio solo consideraron los promedios de los últimos cinco años.

Si solo uno debe ser elegido, ¿quién ganara la beca? Si las calificaciones son las siguientes:

Estudiante	1ro de sec.	2do de sec.	3ro de sec.	4to de sec.	5to de sec.
Ricardo	82	88	78	84	90
Mario	89	70	90	83	89

Observemos la siguiente representación en línea de las calificaciones de ellos:

Ricardo - - - - - - 78 - - - - - - - - 84 85 86 87 - - - -

Mario- - 70 - - - - - - - - - - - 83 - - - - - 88 - 89 – 90 - - - -

$$\overline{X} = 84$$

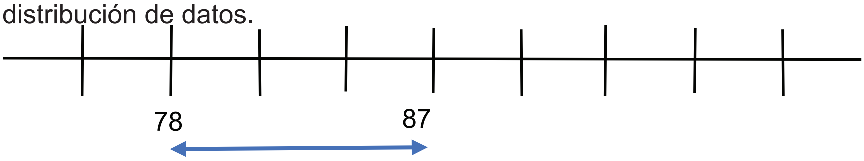
Las calificaciones de Ricardo, se encuentran más cercanas a la media aritmética que las notas de Mario. Es decir, las calificaciones de Mario se encuentran más dispersas.

Es suficiente este argumento para optar por Ricardo para ganar el primer lugar, como un estudiante que ha mantenido su buen rendimiento.

a) Rango

Determinamos el tamaño de cada intervalo en una tabla de frecuencias. Indica cuán dispersos se encuentran los datos entre los valores de los extremos.

Se calcula encontrando la diferencia entre el mayor y el menos valor de la distribución de datos.



$R = 87 - 78 = 9$ Es la diferencia entre los valores extremos

Datos importantes

$R = X_{\max} - X_{\min}$

$X_{\max}$: *Valor máximo de la muestra.*

$X_{\min}$: *Valor mínimo de la muestra.*

b) Desviación media

La Desviación Media es la diferencia que hay entre los valores de la variable estadística con la media aritmética.

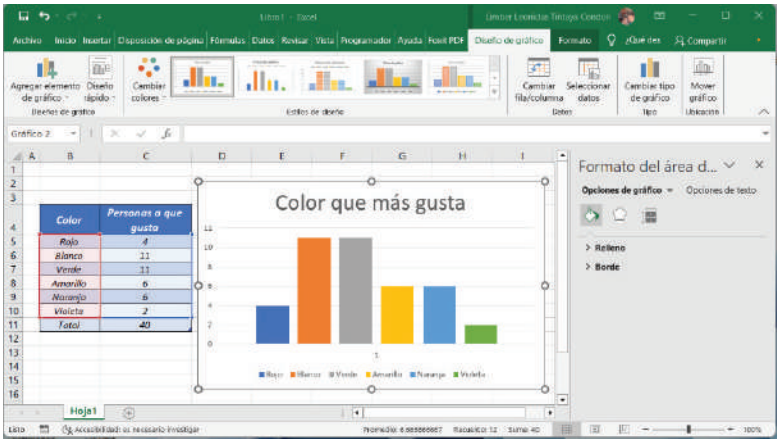
Hay desviación media para los datos sin agrupar y los datos agrupados.

$$D_{\overline{X}} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

$$D_{\overline{X}} = \frac{|x_{mc1} - \overline{x}| \bullet f_1 + \ldots.. + |x_{mcn} - \overline{x}| \bullet f_n}{n}$$

o $$D_{\overline{X}} = \frac{\sum_1^n |x_1 - \overline{x}|}{n}$$

o $$D_{\overline{X}} = \frac{\sum_1^n |x_{mci} - \overline{x}| \bullet f_n}{n}$$



c) Varianza

Es la medida que nos permite identificar la diferencia cuadrada promedio entre cada uno de los valores respecto a un punto central (la media).

Hay una varianza para los datos sin agrupar y los datos agrupados.

$$V_{(x)} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} \qquad V_{(x)} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \bullet f_i}{n}$$

d) Desviación Estándar o Típica

La Desviación Típica es la raíz cuadrada de la varianza; es decir, la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las puntuaciones de desviación. La desviación típica se representa por D_x ó σ.

Hay una desviación para los datos sin agrupar y los datos agrupados:

$$D_x = \sigma = \sqrt{V_{(x)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}} \qquad D_x = \sigma = \sqrt{V_{(x)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \bullet f_i}{n}}$$

e) Coeficiente de variación

Para comparar las dispersiones de dos o mas distribuciones se utiliza el coeficiente de variación de Pearson: $CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|}$

Si $CV \leq 15\%$ *, los datos son homogéneos, es decir tienen una baja variabilidad.*

Si $CV > 15\%$ *, los datos son heterogéneos, es decir tienen una alta variabilidad.*

Datos importantes

Tiempo	*Número de estudiantes*
10 – 20	*7*
20 – 30	*15*
30 – 40	*19*
40 – 50	*9*

Especialmente interesante en el análisis de datos financieros es el modelo autorregresivo.

Ejemplo: Calculamos el rango, la desviación media, varianza y desviación estándar para los siguientes datos. 7, 9, 13, 17, 19

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 19 - 7 = 12$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+9+13+17+19}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$D_{\overline{X}} = \frac{|7-13|+|9-13|+|13-13|+|17-13|+|19-13|}{5} = \frac{6+4+0+4+6}{5} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(7-13)^2+(9-13)^2+(13-13)^2+(17-13)^2+(19-13)^2}{5} = \frac{36+16+0+16+36}{5} = 20,8$$

$$\sigma^2 = 20,8 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{20,8} \approx 4,6$$

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|} = \frac{4,6}{13} = 0,35 \quad \Rightarrow \quad CV = 0,35 \bullet 100 = 35\% > 15\%$$

Ejemplo: De la siguiente tabla, correspondiente a la asignación de horas de trabajo en minutos, calcular las medidas de dispersión.

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 50 - 10 = 40$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+9+13+17+19}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$D_{\overline{X}} = \frac{|10-15|+|12-15|+|15-15|+|18-15|+|20-15|}{5} = \frac{5+3+0+3+5}{5} = 3,2$$

$$\sigma^2 = \frac{(10-15)^2+(12-15)^2+(15-15)^2+(18-15)^2+(20-15)^2}{5} = \frac{25+9+0+9+25}{5} = 13,6$$

$$\sigma^2 = 13,6 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{13,6} \approx 3,7$$

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|} = \frac{3,7}{31} = 0,12 \quad \Rightarrow \quad CV = 0,12 \bullet 100 = 12\% \leq 15\%$$

2. Ajuste de curvas y regresión lineal

El objeto básico de la Econometría consiste en especificar y estimar un modelo de relación entre las variables económicas relativas a una determinada cuestión conceptual. Por ejemplo, para conocer en profundidad el comportamiento del consumo privado agregado de un país, será preciso especificar y estimar un modelo de relación entre observaciones temporales de consumo privado y renta disponible. De modo similar, para analizar si la expansión monetaria en un país ha sido inflacionista, será preciso especificar y estimar un modelo de relación entre las tasas de inflación y las tasas de crecimiento históricas de algún agregado monetario.

Actividad

– El número de horas diarias de televisión que ven los estudiantes del 4to de secundaria es:

Horas	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6]	
Nº de Est.	39	74	92	92	46	17	360

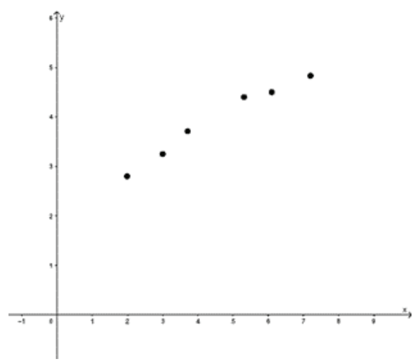
– Calculamos las medidas de dispersión.

Una vez que hemos establecido la existencia de una relación estadística entre dos variables y determinando la intensidad de esta relación el siguiente paso es ver cómo pueden predecirse los valores de una variable en función de los de otra y que grado de precisión tendrá estas predicciones. A estas cuestiones atiende el término regresión, introducido por Sir Francis Galton al estudiar la relación entre la estatura de padres e hijos.

Se llama curva de regresión de una variable estadística *"Y"* sobre otra variable *"X"* a la curva que se obtiene representando las medidas condicionadas $\overline{y_i}$ en función de los valores x_i de la variable X. se tratara de una verdadera curva, si la variable X es continua, o de una sucesión de puntos sin la variable es discreta. Por ejemplo, si tenemos las medidas de tiempo de respuesta para las distintas longitudes de una lista son:

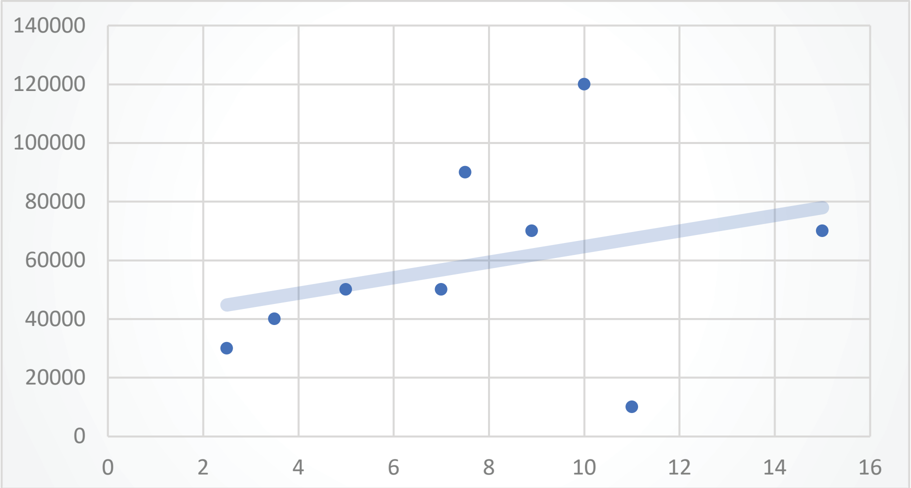
$$\overline{y_2}=2,8 \quad \overline{y_3}=3,25 \quad \overline{y_4}=3,71 \quad \overline{y_5}=4,4 \quad \overline{y_6}=4,5 \quad \overline{y_7}=4,83$$

La representación gráfica es:



De manera análoga se llama curva de regresión de X sobre Y a la curva obtenida presentado las medidas condicionadas $\overline{x_j}$ en función de los valores y_j en este caso la variable dependiente seria X y la independiente Y.

Teniendo la función lineal o ecuación de regresión, se pueden elaborar predicciones sobre ciertos valores de una variable. Recordar que las variables "x" son variables independientes y las variables "y" son las variables dependientes.



Para fines convenientes, el estudio que realicemos en adelante será sobre variables independientes y regresión lineal simple, considerando que el razonamiento para regresiones múltiples es el mismo.

Análisis de regresión

Regresión lineal simple

Es usada para minimizar la distancia vertical entre todos los datos y nuestra línea, por lo tanto, para determinar la mejor línea, debemos minimizar la distancia entre todos los puntos y la distancia de nuestra línea.

Regresión no lineal o curvilínea

Puede estimar modelos con relaciones arbitrarias entre las variables independientes y las dependientes. Esto se lleva a cabo usando algoritmos de estimación iterativos.

$$Y_I=\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_1 x_i^2+\varepsilon_i$$
$$i=1,\dots,n$$

Regresión múltiple

Trata de ajustar modelos lineales o linealizables entre una variable dependiente y en más de una variable independiente. En este tipo de modelos es importante testar la heterocedasticidad, la multicolinealidad y la especificación.

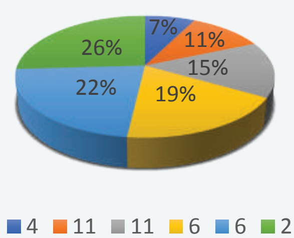
$$Y_I=\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\dots+\beta_p x_{ip}+\varepsilon_i$$
$$i=1,\dots,n$$

Ejemplo

Representar gráficamente los resultados permite, de un único y rápido golpe de vista, hacerse una idea de la realidad a la que uno se enfrenta.

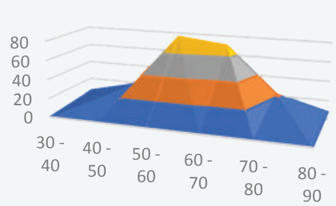
Personas	f_i	F_i
2	4	4
3	11	15
4	11	26
5	6	32
6	6	38
7	2	40
Total	40	

CIRCULAR



Intervalos	f_i
30 - 40	6
40 - 50	18
50 - 60	76
60 - 70	70
70 - 80	22
80 - 90	8

SUPERFICIE



3. Representación gráfica e interpretación de la información

Para representar gráficamente los datos obtenidos, se procede así:

1° Ordenar los datos seleccionados, sea en filas o columnas. Este ordenamiento es conocido como cuadro estadístico.

2° La representación gráfica se realiza con puntos, líneas, figuras que faciliten la comparación de los mismos.

Para elaborar representaciones gráficas se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- El gráfico debe ser sencillo, generalmente son los más efectivos.
- El gráfico debe explicarse solo, es recomendable ser explícitos en los títulos, origen, escalas y cualquier clave explicativa.
- Las escalas y las unidades de medida deben ser claros.

Los gráficos estadísticos para los tipos de variables cualitativas o cuantitativas son:

Variables cualitativas

Diagrama de barras. Se trazan barras sobre el eje horizontal de acuerdo a la marca de clase, estableciendo las alturas como indican las frecuencias absolutas.

Gráfico de sectores. Se trazan divisiones al área de un círculo con sectores circulares, a través de ángulos que son proporcionales a las frecuencias absolutas.

Variables cuantitativas con datos no agrupados en intervalos

- **Diagrama de barras.** Son iguales al gráfico de barras para datos cualitativos, solo que en lugar de barras se utilizan segmentos rectilíneos de altura igual a la frecuencia absoluta.
- **Polígono de frecuencias.** Los valores de las variables y su frecuencia absoluta definen puntos en el plano cartesiano. Estos puntos se unen con segmentos para formar el polígono de frecuencias.
- **Gráfico de frecuencias acumuladas.** Tiene la forma de escalera, es la representación gráfica de las frecuencias acumuladas para todo valor numérico.

Variables cuantitativas con datos agrupados en intervalos

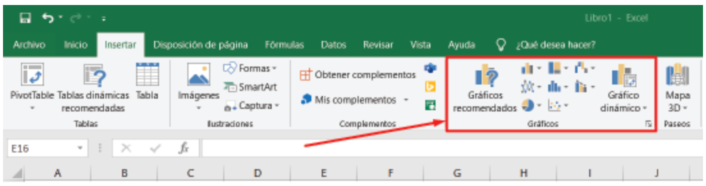
- **Histograma.** Son similares al diagrama de barras, pero como los datos están agrupados en el eje horizontal, se levantan rectángulos sobre cada intervalo, de manera que su altura la define la frecuencia absoluta.
- **Polígono de frecuencias.** Se determina la marca de clase de cada intervalo sobre el eje horizontal, con éstos y las frecuencias absolutas de cada intervalo se establecen puntos en el plano, los que se unen con segmentos para formar el polígono de frecuencias.
- **Gráfico de frecuencias acumuladas.** Tiene la forma de polígono, es la representación gráfica de las frecuencias acumuladas para todo valor numérico, considerando que cada intervalo de clase supone que el número de observaciones se distribuye uniformemente.

4. Manejo de datos estadísticos en Excel

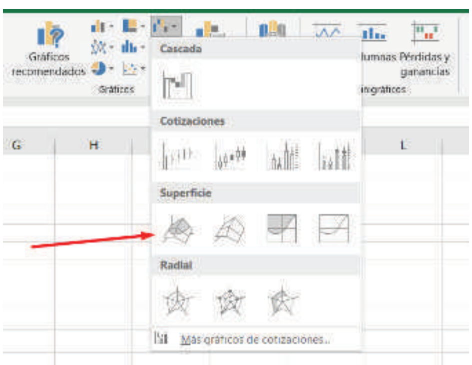
Microsoft Excel ofrece un conjunto de herramientas para el análisis de los datos (denominado herramientas para análisis) con el que se ahorran pasos en el desarrollo de análisis estadístico. Algunas herramientas generan gráficos además de tablas de resultados.

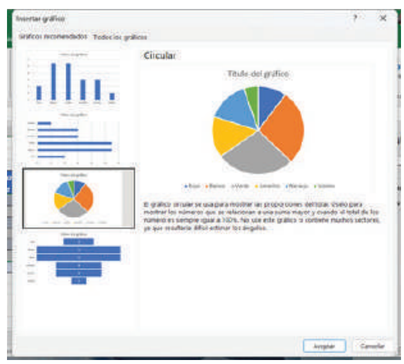
Pasos para crear un gráfico en Excel.

1. Selecciona una celda cualquiera que le pertenezca al rango donde se encuentran los valores numéricos que se deben graficar.



2. Clicar en Insertar → Gráficos, seleccionar el tipo de gráfico que se desea insertar, se mostrará un menú donde permitirá seleccionar el gráfico deseado.





Excel permite seleccionar el tipo de gráfico adecuado al trabajo desarrollado, con las funciones editables del título y otros aspectos.

Microsoft Excel

Es una planilla de cálculo electrónico que permite manejar en la PC toda la información que habitualmente manejamos en una planilla con papel cuadriculado, lápiz y calculadora.

Excel maneja planillas de muchos tipos:

- *Pequeñas listas: una agenda telefónica, la lista de las compras, etc.*
- *Estadísticas.*
- *Gráficos.*
- *Aplicaciones varias.*

VALORACIÓN

Las medidas de dispersión son una herramienta importante para los negocios, ya que pueden ayudar a los propietarios y gerentes a comprender cómo se distribuyen los datos de ventas o de clientes. Las medidas de dispersión pueden ayudar a identificar tendencias y patrones en los datos, lo que ayuda a tomar decisiones.

Si las ventas de un negocio se distribuyen de manera uniforme, significa que las ventas son consistentes de un día a otro. Sin embargo, si las ventas se distribuyen de manera no uniforme, significa que las ventas son más variables.

- ¿Cuál es la importancia de las medidas de dispersión en aplicaciones prácticas de tu diario vivir?

PRODUCCIÓN

Actividad

- Elaboramos un plan de negocios de venta para generar ganancias realizando rifas o kermesse.
- Construímos un papelógrafo para exponerlo en clases mostrando el plan de negocios.
- Para modelizar tu investigación, utilizamos Microsoft Excel o GeoGebra que fortalezcan el plan de negocios.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

Progresiones

Sucesiones

Encuentra los 4 primeros términos de las sucesiones dadas:

a) $a_n = \frac{1}{n}$
b) $a_n = \frac{1}{n^2}$
c) $a_n = \frac{2^{n-1}}{n+3}$
d) $a_n = (-1)^n n^2$
e) $b_n = (n-1)(n-2)$
f) $b_n = (-1)^{2n-1} \frac{n}{n+1}$
g) $b_n = 10 - (0{,}1)^n$
h) $c_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

Sumatorias

Determinamos las sumas:

a) $\sum_{j=1}^{8}(2j-3)$

b) $\sum_{j=0}^{5}\frac{j+1}{j+2}$

c) $\sum_{j=0}^{10}\left(j^2-4j\right)$

d) $\sum_{j=1}^{6}2^j$

e) $\sum_{j=1}^{6}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)$

f) $\sum_{j=1}^{9}2$

g) $\sum_{j=0}^{4}(-2)^{j-1}$

h) $\sum_{j=4}^{10}3$

i) $\sum_{j=1}^{n}n$

j) $\sum_{j=1}^{n}j$

Progresiones aritméticas

Determinar el término que se indica en cada una de las progresiones aritméticas:

a) El 8vo término en: 2, 5, 8, …
b) El 11vo término en: 1, 5/4, 3/2, …
c) El 15vo término en: -3/4, -1/12, 7/12, 5/4, …
d) El 10mo término en: 1, 7, 13, …
e) El 16vo término en: 3, 13/4, 7/2, …
f) El 7mo término en: 120, 108, 96, …
g) El 12vo término en: 0, 5; 0; -0, 5; …
h) El 18vo término en: -5, 22, 49, …
i) El 13vo término en: 15; 11.5; 8; …
j) El 17vo término en: 3/4; 0,875; 1; …

Considerando los elementos de la progresión aritmética, determinar el elemento que se pide:

a) El 1er término si el 13vo término es 67 y la razón es 5
b) La razón si el primer término es 7 y el 10mo término es -11
c) El número de elementos de la progresión: 120, 519, …, 3312
d) La razón si el 1er término es 2/3 y el 8vo término es -13/12
e) El 11vo término si el 3ro es -4 y el 7mo es -16
f) El 1er término si el 20vo es -62,5 y la razón es -2,5
g) El número de términos de la progresión: 1/4, 3/8, …, 11/8
h) El 1er término si el 11vo es -19/2 y la razón es -2/3

Determinar las sumas siguientes:

a) ¿Cuál es la suma de los primeros 8 términos de: 1, 7, 13, …?
b) Determinar la suma de los primeros 9 términos de la progresión: -5, …, 7.
c) ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: 120, 108, 96, …?
d) Determinar la suma de los 13 términos de: 15; 11,5; 8, …
e) Determinar la suma de los 12 primeros términos de la progresión: 21, 24, 27…
f) Determinar la suma de los 11 primeros términos de: -15, -12, -9, …
g) ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: 1 000, 988, ..., -188?
h) Determinar la suma de los términos en la progresión: 1, 2, 3, …, n
i) Encuentra la suma de los términos de la progresión: 2, 4, 6, …, 2n
j) ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: 1, 3, 5, …, 2n - 1?
k) ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es 42, si el último término es 31 y la razón es 5?

Progresiones geométricas

Determinar el término que se indica en cada una de las progresiones geométricas:

a) El 6to término de: 1/3, -1, 3, …

b) El 9no término de: 3/2, 1, 2/3, …

c) El 5to término de: -5, 10, -20, …

d) El 7mo término de: 2,5; 5/4; 5/4; …

e) El 10mo término de: -9, -3, -1, …

f) El 8vo término de: 8, 4, 2, …

g) El 9no término de: $1, -m^3, m^6, \ldots$

h) El 10mo término de: $n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$

Considerando los elementos de la progresión geométrica, determinar el elemento que se pide:

a) El 1er término, si la razón es ½ y el 6to término es 1/16

b) El 2do término, si su razón es -2 y el 7mo término es -128

c) La razón, si el 1er término es 3/5 y el 5to es 1/135

d) La razón, si el 1er término es -8 y el 7mo término es -729/512

e) El número de términos de: -2, -6, …, -162

Determinar las sumas siguientes:

a) Seis términos de -9, -3, -1, …

b) Nueve términos de -5, 10, -20, …

c) Dieciocho términos de 2, 4, 8, …

d) Diez términos de: 1,-√2,2,…

e) n términos de ½, ¼, 1/8, …

Problemas de interpolación:

a) Interpola 6 medios aritméticos entre 2/3 y 3

b) Interpola cinco medios geométricos entre 1/2 y 32

c) Interpola 7 medios aritméticos entre 5 y 17

d) Interpola tres medios geométricos entre 12 y 4/27

c) Interpola tres medios aritméticos entre 1/3 y 7/3

d) Interpola seis medios geométricos entre -128 y -1

Problemas:

- En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
- Determinar el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
- Determinar la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sea 9 y - 1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.
- Determinar el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.

Combinatoria

Principio de la multiplicación

Encuentra el conjunto de permutaciones en cada caso:

a) Con las letras de la palabra PARED

b) Con las letras de la palabra CAFÉ

c) Con las letras de la palabra RETIRO

d) Al ordenar los cinco estudiantes de una columna en el curso.

Resolvamos:

a) Un equipo de fútbol tiene a su arquero y delantero inamovibles en cancha. ¿De qué maneras se pueden acomodar al resto de los jugadores?

b) Cuando la maestra de matemática, en la fila delantera del curso con seis estudiantes, quiere reordenar a los estudiantes y no puede separar a dos que son hermanos, ¿cuántas maneras de ordenar a los seis estudiantes hay?

Factorial de un número

Resolver:

a) $\frac{8!}{7!} \cdot \frac{3!}{4!}$

b) $\frac{7!5!9!}{3!10!8!}$

c) $\frac{10!5!3!}{9!6!}$

d) $\frac{15!12!10!}{5!6!7!8!}$

e) $\frac{9!+8!}{7!} - (5! - 40)$

Determinar el valor de x:

a) $\frac{x!}{(x-1)!} = 0$

b) $\frac{2x!}{(x-1)!} = 4$

c) $\frac{12(x-2)!}{x!} = 1$

d) $\frac{(x-3)!(x-1)!}{(x-4)!(x-2)!} = x^2$

Permutaciones

Permutaciones sin repetición:

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra GEOMETRÍA?

b) ¿Cuántos números de 6 cifras podemos escribir con los dígitos 1,2,3,4,5,6 sin que ninguno se repita?

c) Seis amigos van al cine y compran 6 entradas con asientos consecutivos. ¿De cuantas formas diferentes pueden sentarse sin que ninguna se repita?

Permutaciones con repetición

a) ¿Cuántos números distintos se pueden formar con los dígitos 3 2 2 4 5 3 1?

b) ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con la palabra MATEMÁTICA? ¿Cuántas empezaron por la letra M?

c) Un equipo de fútbol juega 12 partidos en una temporada ¿Cuántas maneras hay de que el equipo, obtenga 7 victorias, 3 empates y 2 derrotas?

Variaciones y combinaciones

Variaciones sin repetición

a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse 12 personas en tres sillas disponibles?

b) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5 sin repetir ninguno de ellos?

c) En un campamento de fútbol han quedado 4 finalistas que se disputarán el oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas distintas se los puede premiar?

d) ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir tres juguetes distintos entre cuatro niños, de manera que ningún niño tenga más de un juguete?

Variaciones con repetición

a) ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 permitiendo repeticiones?

b) En un curso de 30 estudiantes celebran el cumpleaños de todos en sus fechas correspondientes. ¿Cuántas distribuciones de fechas de cumpleaños pueden darse al año?

c) En un polideportivo se puede ingresar o salir por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede ingresar y salir una persona?

d) En una caja hay 8 bolas de distintos colores. Sacamos una bola, anotamos el color y la devolvemos a la caja. Si repetimos 3 veces la misma acción. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

Combinaciones sin repetición

a) Un estudiante tiene la opción de elegir 10 de las 12 preguntas del examen de matemáticas. ¿De cuántas maneras puede elegirlas?

b) En una prueba clasificatoria de atletismo, donde participaron 15 atletas, solo pueden clasificar 3 a la final. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

c) En un curso de 30 estudiantes se quiere elegir a 3 representantes de curso. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar a los representantes de curso?

d) En una reunión de 40 profesores todos se saludaron dándose la mano. ¿Cuántos estrechamientos de manos hubo?

Combinaciones con repetición

a) Si tenemos 50 clips iguales y los queremos guardar en 4 recipientes. ¿De cuántas formas distintas lo podemos hacer?

b) En una pastelería ofrecen 5 ingredientes diferentes para elaborar sus tortas. Si en la pastelería te da la opción de elegir 2 ingredientes para tu torta. ¿Cuántas tortas diferentes te pueden elaborar?

c) Se arrojan 3 monedas simultáneamente, ¿cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener?

Binomio de Newton

Desarrollar el binomio:

a) $(2x+y)^5 =$

b) $(x+1)^6 =$

c) $\left(x-\sqrt{2}\right)^8 =$

d) $(2-x)^7 =$

e) $(2+x)^9 =$

Determinar el término indicado en cada caso:

a) Término central en $(-2t^2+5b^2c)^6$

b) Octavo término en $(4x-y^2)^9$

c) Séptimo término en $(x^2\ y^3-2z^4)^9$

d) Sexto término en Término central en $\left(x-\frac{5}{3}y^4\right)^7$

Estadística descriptiva

Tablas de frecuencia

a) Identifica las variables cualitativas y cuantitativas, según corresponda, de la siguiente tabla:

Característica	Variable (Cualitativa / Cuantitativa)	Valores
Comida favorita		Ensalada, pollo, relleno, pescado, asado, …
Número de goles marcados por tu equipo favorito		25, 30, 100, …
Coeficiente intelectual de los integrantes de tu familia		84 – 113: Normal 114 – 132: Superior a la media 133 – 148: Superior 164 o más: Genio
Color de ojos de tus compañeras y compañeros		Negro, azul, verde, …
Número de acciones vendidas en la bolsa de valores internacional		1, 2, 3, 4, 5, …
Temperatura registrada cada hora en un observatorio del Estado Plurinacional		0°C, 5°C, 12°C, 24°C, 33°C, …
Colores que gustan más en el curso 5to de secundaria		Azul, naranja, verde, gris, …

b) Se lanza un dado de seis caras y Rodrigo anota los siguientes resultados de la forma: 2, 4, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1, 4, 5, 1, 4, 6, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 2, 1, 6, 6, 4, 3, 2, 1, 6, 5, 1. Clasifica el carácter y realiza una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

c) En el aeropuerto uno de los empleados observa que los visitantes hablan los siguientes idiomas y los anota así:

Francés, Inglés, Inglés, Español, Inglés, Español, Inglés, Español, Español, Alemán, Inglés, Francés, Ruso, Alemán, Alemán, Ruso, Alemán, Ruso, Inglés, Alemán, Español, Inglés, Inglés, Alemán, Alemán, Ruso, Español, Ruso, Ruso, Francés, Ruso, Español, Ruso, Inglés, Francés.

Construye la tabla de frecuencias relativas, acumuladas e interpretar porcentajes.

d) Las calificaciones en un examen de Química de un grupo de 38 estudiantes es el siguiente:

74 50 56 99 81 42 75 67 90 60 72 76 91 41 83 53 50 45 55 92 63 89 59 95 55 95 80 70 61 92 90 88 90 75 75 99 89 80. Escribe la distribución de frecuencias apropiada para interpretar los porcentajes. ¿Qué porcentaje de aprobados y reprobados existe sabiendo que la nota de aprobación es 51?

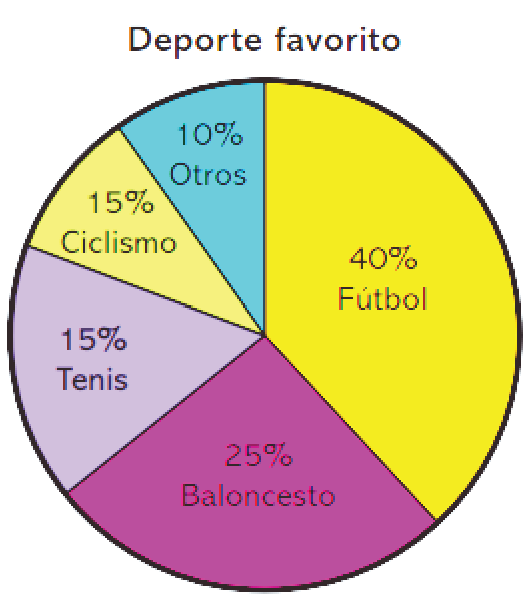
Gráficos estadísticos

a) Representa en un histograma, un gráfico de sectores y construir la tabla de frecuencias, con los pesos extraídos de una muestra de 20 individuos:

65, 68, 59, 49, 58, 51, 57, 53, 59, 66,

54, 56, 59, 66, 58, 61, 65, 62, 55, 68

b) El diagrama de sectores sobre gustos por el deporte, es realizado gracias a una encuesta a 3.500 personas. Realiza una tabla de frecuencias que organice los resultados:



Medidas de tendencia central

a) Un inversor compra 4.000 acciones en 5 sesiones diferentes en la bolsa. El precio de compra en cada sesión se adjunta en la siguiente tabla:

Precio	N° de acciones
9	600
8,7	1200
8,4	400
8	1000
7,8	800

Calcula el precio de compra medio, la mediana y la moda.

b) Calcula la media aritmética en la table:

x_i	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	8	12	14	6

Estadística aplicada

Sea la variable bidimensional dada por la tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5	6	8	11	1	13	14	14	17

a) Elabora la tabla de doble entrada

b) Representa la nube de puntos

c) Establece su dependencia Lineal

A lo largo de un día se han medido la tensión y el pulso cardiaco de una persona, tratando de decidir si ambas variables tienen alguna relación y los datos obtenidos son:

Nivel mínimo de tensión	6	5	9	4	10	8	6	9
N° de pulsaciones por minuto	60	55	80	40	95	75	55	90

a) Elabora la tabla de frecuencias

b) Dibuja la nube de puntos

c) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación

d) Si la correlación es fuerte, estima las pulsaciones que tendrá la persona cuando su nivel mínimo de tensión sea 15.

La siguiente tabla muestra los valores de una variable bidimensional.

x	0.35	1.32	1.24	0.17	– 0.12
y	0.33	0.63	1.55	0.46	0.21

a) Calcula la covarianza

b) Calcula el coeficiente de correlación

(Ejercicios y problemas recopilados)

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

PRÁCTICA

En general en varias poblaciones de nuestro país existen varios tipos de construcciones de casas, ahí se pueda observar la formación de ciertas aberturas que representan a ángulos.

Las construcciones de grandes salones de fiestas o locales en la ciudad de El Alto son llamados *Cholets,* en los que se nota claramente ángulos de distintos tipos, que de seguro es necesario conocer para desarrollar tal construcción.

Un ámbito donde se observa muchos elementos de la trigonometría es en la construcción de casas, pues se utilizan unidades de medición longitudinal y angular. En la figura se observa varias figuras geométricas con elementos matemáticos, por este motivo la importancia del estudio de la trigonometría.

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Dibujar alguna construcción de una casa y describe los ángulos que se generan en distintos lugares.
- Recortar la imagen de alguna construcción de tu comunidad y marca los ángulos que posee.
- En las anteriores imágenes existen ángulos que se repiten, remárcalos e investiga el nombre de esos ángulos.

TEORÍA

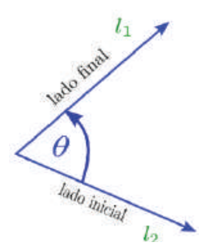
Hiparco de Nicea

Sabías que la trigonometría comienza con los babilonios y egipcios. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. En Grecia, en el siglo II a. C. el astrónomo Hiparco de Nicea, pue quien dio grandes aportes esta área calculando la posición de las estrellas.

1. La trigonometría

La trigonometría estudia la relación que existen entre los ángulos y lados de un triángulo, utilizando razones trigonométricas. La palabra trigonometría significa 'medición de triángulos'. Deriva de palabras griegas: trigōnos = triángulo y metron = medida.

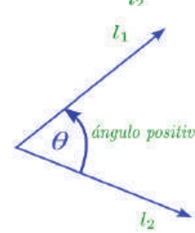
2. Ángulo trigonométrico y medida angular



Ángulo es la abertura generada por dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen.

Medir un ángulo requiere una unidad especial de medida, por tal motivo es necesario establecer estas unidades.

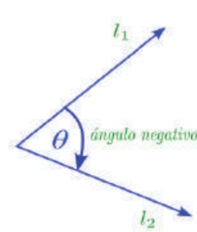
a) Ángulo Trigonométrico



Un ángulo trigonométrico es aquel que se genera por la rotación de un rayo alrededor de su origen: desde una posición inicial hasta una posición final.

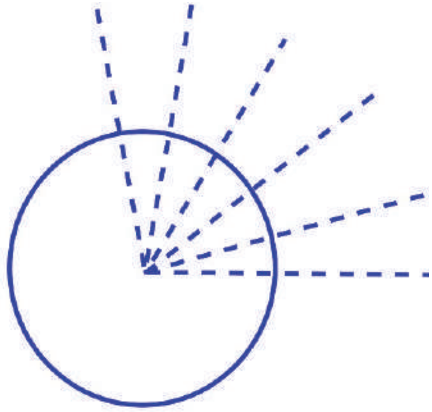
Los ángulos pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido que son medidos.

Un ángulo es ***positivo*** si se mide de forma anti horario, es ***negativo*** si se mide en sentido al movimiento de las agujas del reloj.



b) Medida angular

Una medida angular tiene base en el arco de un circulo. La división de un círculo genera arcos los cuales son base de la medida angular.



3. Sistemas de medición de ángulos.

Existen varios sistemas de medición angular, los más importantes son:

- Sistema sexagesimal
- Sistema circular o radiánico

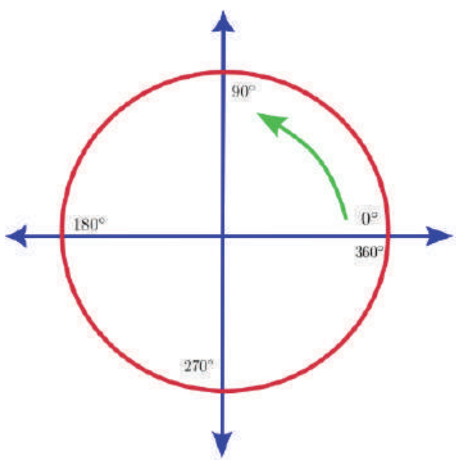
a) Sistema Sexagesimal

Surge de la división de un circulo en 360 partes, cada parte es un grado sexagesimal, cada grado tiene 60 minutos y cada minuto 60 segundos.

◇ $1 \text{vuelta} = 360°$

◇ $1° = 60'$

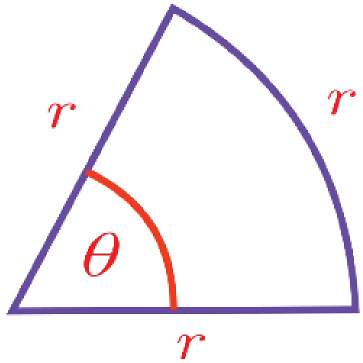
◇ $1' = 60''$



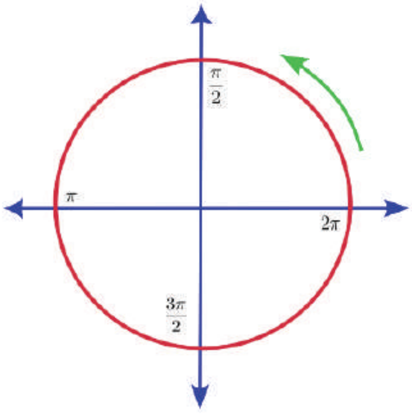
b) Sistema Circular (radiánico)

Cuando el arco y la radio de un circulo son iguales se genera un radián; a diferencia del sistema sexagesimal la única referencia que tenemos es que una vuela se tiene $2\pi\, rad$.

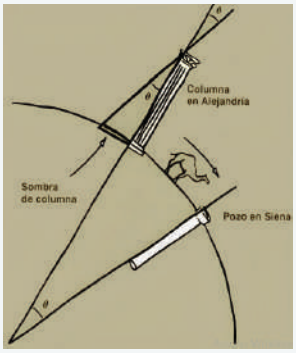
$1 \text{ vuelta} = 2\pi rad$



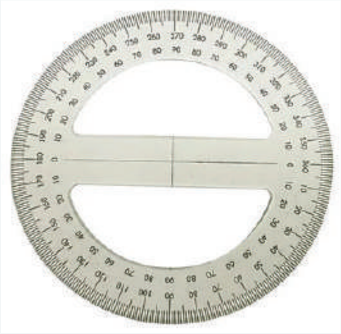
θ es un radián



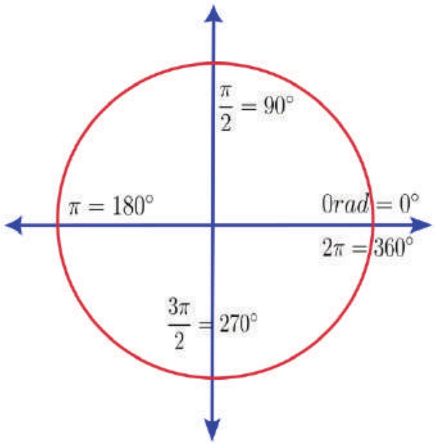
Eratóstenes



Eratóstenes con su conocimiento de trigonometría midió el tamaño de la Tierra a partir de su curvatura El astrónomo calculó por primera vez el radio de nuestro planeta hace 23 siglos.



Uno de los instrumentos que nos ayudan a medir ángulos es el transportador.



4. Conversión entre sistemas angulares

Para la conversión de un sistema a otro, utilizaremos las siguientes equivalencias entre sistemas:

Según la gráfica se observa que $2\pi\, rad=360°$ y también que $\pi\, rad=180°$; para facilitar los cálculos utilizaremos la última equivalencia.

$$\pi rad=180°$$

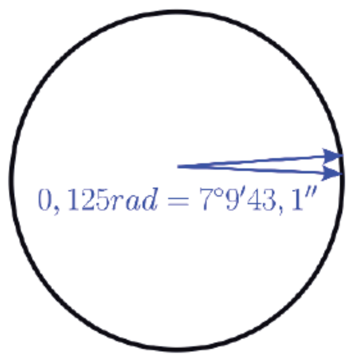
Ejemplo: Para transformar 120° a rad utilizamos la anterior equivalencia:

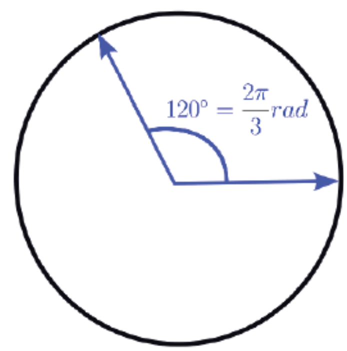
$$120° \rightarrow 120° * \frac{\pi rad}{180°} = \frac{2\pi}{3} rad$$

Ejemplo: Para transformar *0,25 rad* a ° procedemos de la misma forma que el anterior.

$$0,125rad \implies 0,125\cancel{rad} \cdot \frac{180°}{\pi \cancel{rad}}$$
$$\implies 7,1619 \approx 7°9'43,1''$$

Para obtener los minutos y segundos utilizamos la calculadora. Una vez que tengamos los decimales presionamos la tecla $\boxed{°\,'\,''}$





Actividad

– **Transformamos al sistema sexagesimal los siguientes ángulos:**

$a)\ \frac{1}{4}\pi\ rad$ $\quad c)\ \frac{1}{8}\pi\ rad$ $\quad e)\ \frac{5}{6}\pi\ rad$ $\quad g)\ 12\pi\ rad$

$b)\ \frac{3}{2}\pi\ rad$ $\quad d)\ \frac{7}{10}\pi\ rad$ $\quad f)\ 3{,}5\pi\ rad$ $\quad h)\ 0{,}25\ rad$

$$Sol : 45°; 270°; \frac{45°}{2}; 126°; 150°; 630°; 2160°; 14°19'26,02''$$

Actividad

– **Transformamos al sistema radiánico los siguientes ángulos:**

$a)\ 60°$ $\quad d)\ 90°$ $\quad g)\ 160°$ $\quad j)\ 12°12'20''$

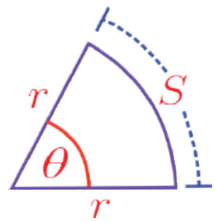
$b)\ 135°$ $\quad e)\ 45°$ $\quad h)\ 1°$

$c)\ 270°$ $\quad f)\ 25°$ $\quad i)\ 112°40'$ $\quad k)\ 75°30'$

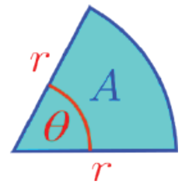
$$Sol : \frac{\pi}{3}rad; \frac{3\pi}{4}rad; \frac{3\pi}{2}rad; \frac{\pi}{2}rad; \frac{\pi}{2}rad; \frac{5\pi}{36}rad; \frac{8\pi}{9}rad; \frac{\pi}{180}rad;$$

5. Longitud de arco y área sector circular

El arco y área de cierto sector circular puede ser calculado utilizando las siguientes ecuaciones. El ángulo siempre estará en rad.



$$S=\theta \cdot r$$



$$A=\frac{\theta \cdot r^2}{2}$$

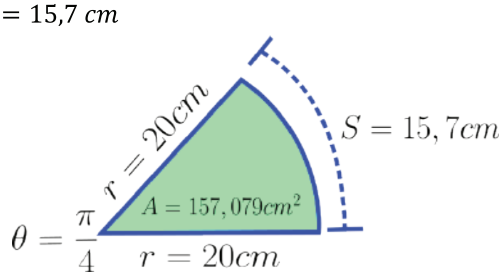
Ejemplo:

Calculamos la longitud de un arco y área que es generando por un ángulo de 45° y tiene una radio de 20 cm.

Notar que 45° debe estar en radianes. Convirtiendo tenemos que $45° = \frac{\pi}{4}rad$ finalmente tenemos:

$$S = \theta \cdot r$$
$$S = \frac{\pi}{4} \cdot 20\ cm$$
$$S = 5\pi\ cm$$
$$S = 15{,}7\ cm$$

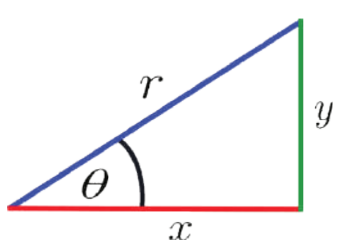
$$A = \frac{\theta \cdot r^2}{2}$$
$$A = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (20\ cm)^2}{2}$$
$$A = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 400\ cm^2}{2}$$
$$A = \frac{100\ \pi\ cm^2}{2}$$
$$A = 50\ \pi\ cm^2$$
$$A = 157{,}079\ cm^2$$



El arco mide $S=15{,}7\ cm$ y su arco $A=157{,}079\ cm^2$

6. Razones trigonométricas

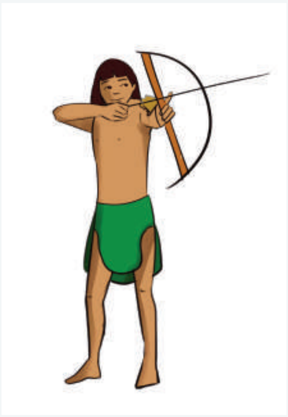
Las razones trigonométricas relacionan los ángulos y lados de un triángulo. Consideremos un triángulo rectángulo con las siguientes características:



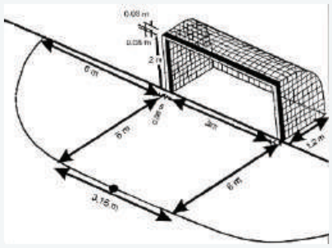
$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad cosec\theta = \frac{r}{y}$$
$$cos\theta = \frac{x}{r} \qquad sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$tg\theta = \frac{y}{x} \qquad ctg\theta = \frac{x}{y}$$

La relación entre los lados de un triángulo rectángulo se calcula con la igualdad $r^2=x^2+y^2$ que es consecuencia del teorema de Pitágoras. Concluyendo, las razones trigonométricas son $sen\theta$, $cos\theta$ y $tg\theta$; y las razones inversas son $cosec\theta$, $sec\theta$ y $ctg\theta$.

Ángulos en la realidad

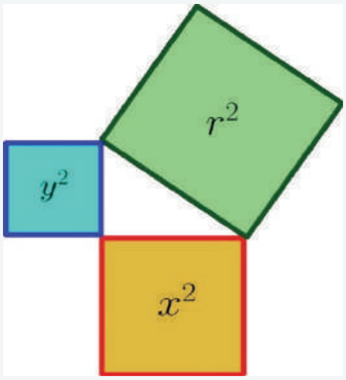


La caza con arco y flecha fue una de las actividades que sirvió como supervivencia para la humanidad hoy todavía son utilizados en las zonas de los llanos de nuestro país, es una herramienta fundamental para la supervivencia de algunas comunidades indígenas.



En el futsal o futbol sala, el arquero tiene un área de gol, que tiene forma circular.

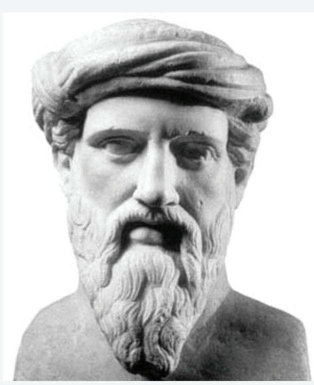
Teorema



$$r^2 = x^2 + y^2$$

El teorema de Pitágoras señala que el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos

Pitágoras

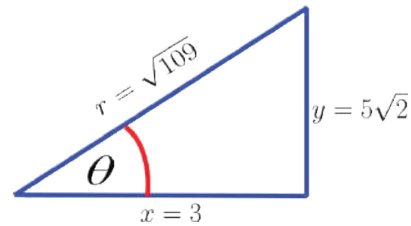


Pitágoras fue un filósofo y matemático griego, se cree que la escuela donde fue maestro descubrió el Teorema de Pitágoras. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría y la aritmética.

Ejemplo:

Hallar las razones trigonométricas conociendo que $x = 3; \quad y = 5\sqrt{2}$

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r^2 = 3^2 + (5\sqrt{2})^2$$
$$r^2 = 9 + 100$$
$$r^2 = 109$$
$$r = \sqrt{109}$$



Finalmente, las razones trigonométricas son:

$$sen\theta = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{109}} \qquad cosec\theta = \frac{\sqrt{109}}{5\sqrt{2}}$$

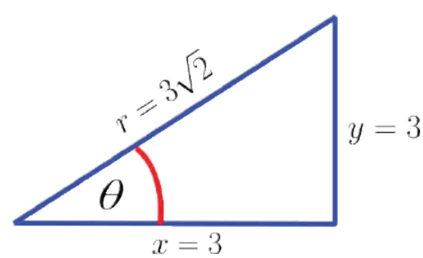
$$cos\theta = \frac{3}{\sqrt{109}} \qquad sec\theta = \frac{\sqrt{109}}{3}$$

$$tg\theta = \frac{5\sqrt{2}}{3} \qquad ctg\theta = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

Ejemplo:

Hallar las razones trigonométricas conociendo que $x = 3; r = 3\sqrt{2}$.

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 + y^2$$
$$18 = 9 + y^2$$
$$18 - 9 = y^2$$
$$9 = y^2$$
$$\sqrt{9} = y$$
$$3 = y$$
$$y = 3$$



Finalmente, las razones trigonométricas son:

$$sen\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \qquad cosec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{3}$$

$$cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \qquad sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\theta = \frac{3}{3} = 1 \qquad ctg\theta = \frac{3}{3} = 1$$

7. Ángulos notables

Son ángulos que constantemente se repiten en el estudio de la trigonometría los más importantes son:

grados	0°	30°	45°	60°	90°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Tabla de ángulos notables

Ejemplo

Simplificar $$M = \frac{cosec\frac{\pi}{6}}{cos\frac{\pi}{3} + sen^2\frac{\pi}{4}}$$

Utilizando la tabla se tiene:

$$M = \frac{cosec\left(\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$M = \frac{\frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$M = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$M = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{4}}$$

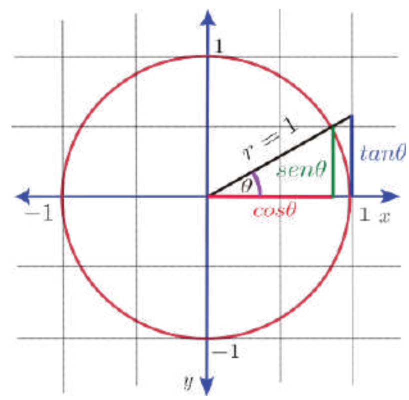
$$M = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$M = \frac{2}{1}$$

$$M = 2$$

7. Círculo trigonométrico y líneas trigonométricas

El circulo trigonométrico es un círculo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano y su radio mide uno. En el círculo trigonométrico se observa las líneas de funciones trigonométricas.



Actividad

Simplificamos utilizando los ángulos notables:

$$M = \frac{sen\ 45° + cos45°}{\tan 45°}$$

$$A = \frac{sec\ 45° + cos30°}{sen\ 60°}$$

$$R = \frac{sen^2 30 + cos^2 30}{cotan^2 60}$$

VALORACIÓN

La aplicación de la trigonometría es diversa en áreas como la física, astronomía, telecomunicaciones, náutica, ingeniería, cartografía, música y entre otros, pues permiten calcular distancias con precisión sin tener que, necesariamente, recorrerlas. Algunas aplicaciones son:

- Estudiar los sonidos a través de funciones trigonométricas generado por sus frecuencias.
- Calculamos la distancia entre dos puntos, de los cuales uno, o incluso ambos, son inaccesibles.

Conversa con tus compañeras y compañeros sobre estas y otras aplicaciones que tiene la trigonometría.

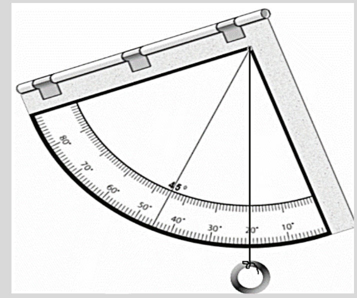
Las frecuencias del sonido son estudiadas con la trigonometría.

PRODUCCIÓN

Actividad

Construcción de medidor de ángulos:

- Con la ayuda de nuestro maestro construimos un teodolito casero o astrolabio. Los materiales necesarios son: Cartón, bombilla o sorbete, hilo, cinta adhesiva, pegamento y objeto pesado.
- Una vez que tengamos el astrolabio medimos los ángulos de distintas alturas de nuestra comunidad, edificios, arboles, montañas entre otros.
- Medimos el ángulo que genera la altura de cierto objeto. ¿Qué pasa con el ángulo si nos alejamos o acercamos?



TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

PRÁCTICA

Un órgano muy importante en el cuerpo humano es el corazón, su tamaño aproximado es un puño. Es un tejido muscular y bombea sangre a todo el cuerpo. A medida que la sangre viaja por el cuerpo, el oxígeno se consume y la sangre se convierte en desoxigenada. La actividad del corazón puede ser observado en electrocardiograma. Los latidos del corazón dentro de los electrocardiogramas y la relación con la trigonométrica nos ayudan a tener un registro gráfico de la actividad eléctrica.

Las funciones trigonométricas en la medicina se evidencian en el análisis y estudio de la frecuencia cardiaca, es decir, el número de latidos del corazón en un intervalo dado de tiempo por medio de un electrocardiograma. En un electrocardiograma se estudian las ondas mecánicas periódicas, en donde aparecen funciones trigonométricas como seno y coseno.

Actividad

Investigamos aplicaciones de las funciones trigonométricas en el cálculo de las frecuencias de los latidos del corazón, el estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, ondas electromagnéticas.

TEORÍA

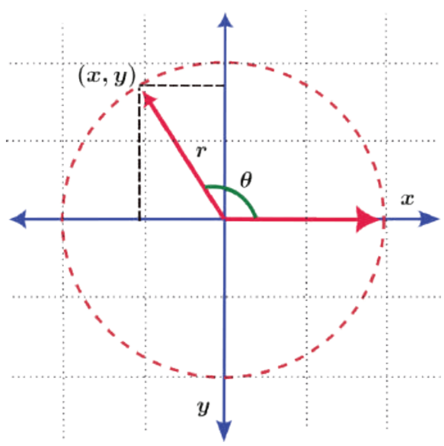
Aria Bhatta

476–550 d. C.

Astrónomo y matemático indio, estudió el concepto de «seno» con el nombre sánscrito de ardhá-jya. El término "seno" proviene del latín "sinus", que significa "curva" o "bahía". Los matemáticos árabes adoptaron esta función y la introdujeron en Europa durante la Edad Media.

1. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Consideremos *P(x,y)* un punto del plano cartesiano y forma un ángulo θ con el eje *"X"*, se tiene las siguientes funciones trigonométricas: *(seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente).*



$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad cosec\theta = \frac{r}{y}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} \qquad sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$tg\theta = \frac{y}{x} \qquad ctg\theta = \frac{x}{y}$$

En la gráfica se debe considerar:

$$r^2=x^2+y^2$$

Ejemplo:

Calcular las seis funciones trigonométricas sabiendo que $sen\theta = -\frac{3}{5}$

Notemos que $sen\theta = \frac{y}{r}$, de ahí tenemos $y=-3$, $r=5$

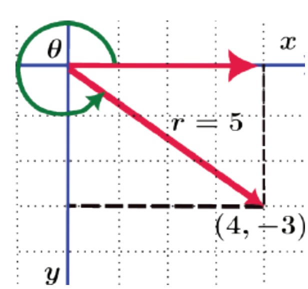
Para hallar "x" aplicamos $r^2=x^2+y^2$:

$$5^2 = x^2 + (-3)^2$$
$$25 = x^2 + 9$$
$$25 - 9 = x^2$$
$$16 = x^2$$
$$\sqrt{16} = x$$
$$x = 4$$

$$sen\theta = -\frac{3}{5} \qquad cosec\theta = -\frac{5}{3}$$

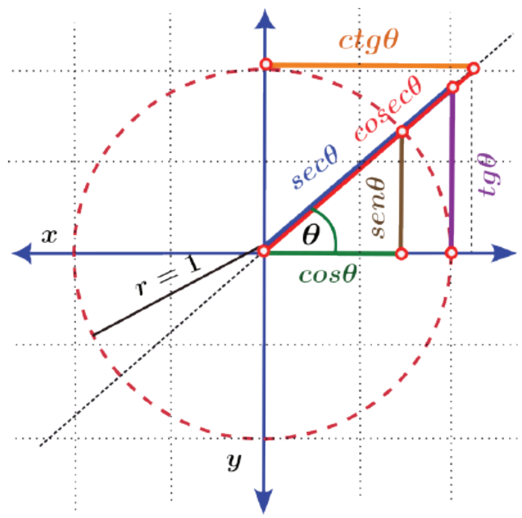
$$cos\theta = \frac{4}{5} \qquad sec\theta = \frac{5}{4}$$

$$tg\theta = -\frac{3}{4} \qquad ctg\theta = -\frac{4}{3}$$



Líneas trigonométricas en el plano cartesiano

Si consideramos una circunferencia con *r=1,* entonces se obtiene la circunferencia goniométrica, que nos da inmediatamente el valor de las razones trigonométricas y su representación gráfica como se explica a continuación para un ángulo del primer cuadrante.



Note que con *r=1:*

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \qquad cos\ \theta = \frac{x}{r}$$

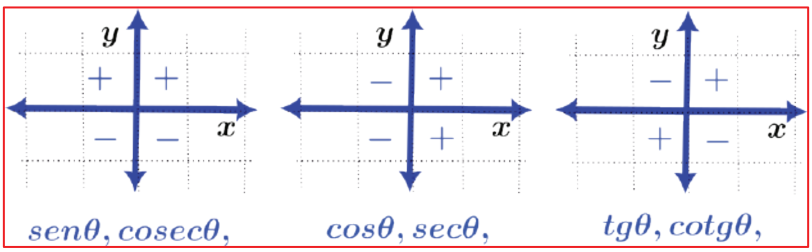
$$\boldsymbol{sen\ \theta = y} \qquad \boldsymbol{cos\ \theta = x}$$

Luego un par ordenado *(x,y)=(cos x,sen y)*

Signos de las funciones trigonométricas

La siguiente tabla enumera los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante.

Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
Sen Cosec	+	+	-	-
Cos Sec	+	-	-	+
Tg Ctg	+	-	+	-

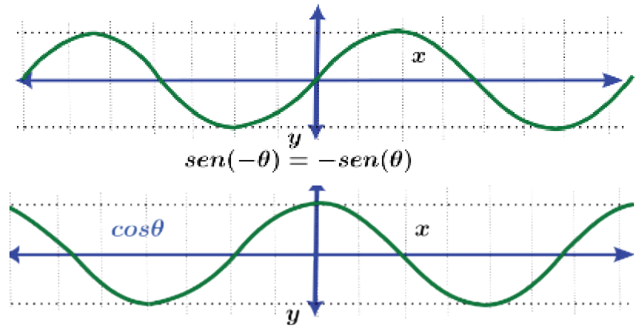


2. Funciones trigonométricas pares e impares

Una función es **par** si: *f(x)=f(-x)*

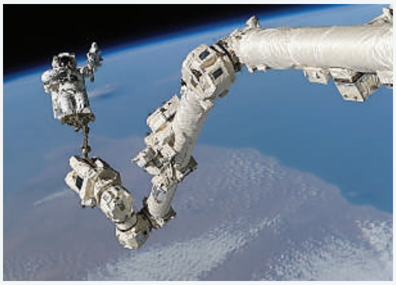
Una función es **impar** si: *f(x)= -f(x)*

Funciones Pares	Funciones Impares
$cos(-\theta) = cos\theta$ $sec(-\theta) = sec\theta$	$sen(-\theta) = -sen\theta$ $cosec(-\theta) = -cosec\theta$ $tan(-\theta) = -tan\theta$ $cot(-\theta) = -cot\theta$



La gráfica de una función par presenta simetría respecto del eje de las ordenadas y una función impar presenta simetría rotacional (rotación de 180 grados). La actividad del corazón puede ser observado en electrocardiograma.

El Canadarm 2



Es un brazo manipulador robótico, ubicado en la Estación Espacial Internacional, está operado a través del control de ángulos en sus articulaciones.

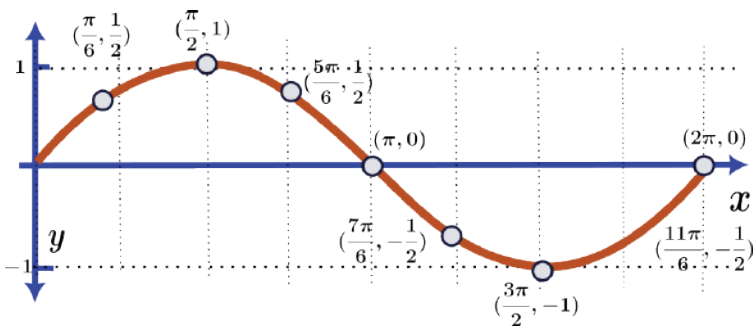
Al calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo se utiliza la trigonometría expresados en los movimientos que se realizan.

3. Gráficas funciones trigonométricas y sus propiedades

a. Gráfica de *sen x*

Iniciemos construyendo la gráfica de *sen x*. Realizamos la tabla de valores para $y = sen\ x$, donde los valores de x están determinados por: $0 \leq x \leq 2\pi$, comenzando en el origen.

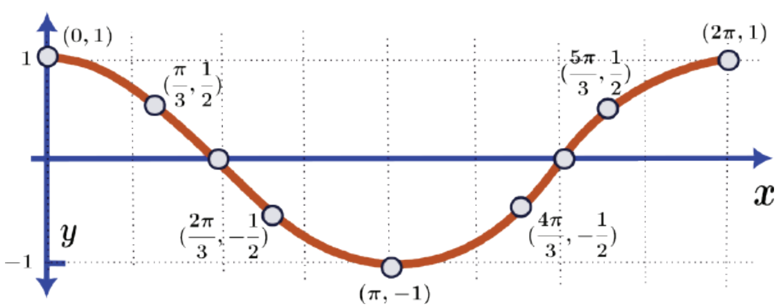
x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = senx$	0	0,5	0,97	1	0,87	0,5	0	−0,5	−0.87	−1	−0,87	−0.5	0



- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consiste en todos los números reales entre 1 y -1, inclusive.
- La función seno es una función impar.
- La función seno es periódica, con periodo 2π.

b. Gráfica de *cos x*

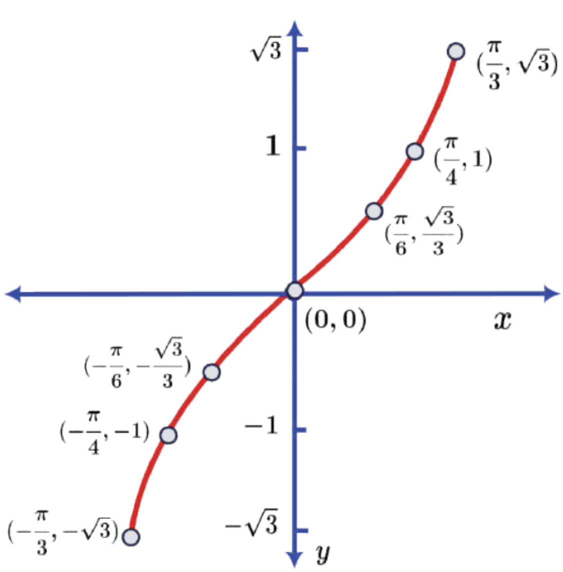
Realizamos la tabla de valores para $y = cos\ x$, donde x están determinados por: $0 \leq x \leq 2\pi$, comenzando en el origen.



- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consiste en todos los números reales entre 1 y -1, inclusive.
- La función coseno es una función par.
- La función coseno es periódica, con periodo 2π.

c. Gráfica de *tg x*

Elaboramos la tabla de valores para $y = tg\ x$, donde x están determinados por: $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$



- El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$
- El rango es el conjunto de todos los números reales.
- La función tangente es una función impar.
- La función tangente es periódica, con periodo π.

Características de estas funciones trigonométricas

Las gráficas trigonométricas pueden ser representadas con distintas variaciones. Veamos algunas de las características.

$$y=A\ sen\ (Bx+C)+D$$

La ***amplitud A.*** Es la altura desde la línea central hasta el pico (o hacia el canal). También podemos medir la altura de los puntos más altos a los más bajos y dividir eso entre 2.

El ***periodo*** $\frac{2\pi}{B}$, va de un pico al siguiente (o de cualquier punto al siguiente punto de coincidencia)

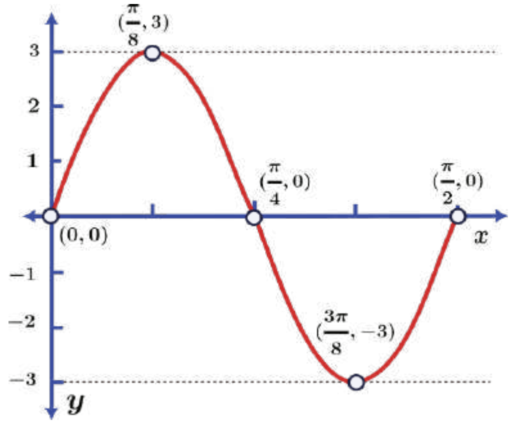
El ***desfase C*** es cuán desplazada está la función horizontalmente de su posición habitual (a la izquierda es positivo)

El ***desplazamiento D*** vertical es cuán desplazada está la función verticalmente de su posición habitual.

Ejemplo:

Graficar $y=3sen(4x)$

Comparando con $y=A\ sen\ (Bx+C)+D$



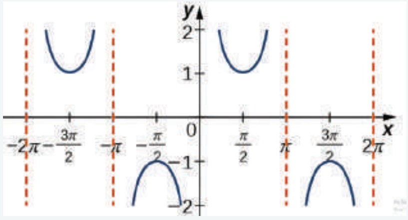
De la gráfica podemos deducir:

- La amplitud $A=3$. La altura desde la línea central hasta el pico es 3.
- El periodo se halla de la distancia entre picos$(0;0)$ y $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, que es $\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.
- No se desfasa, pues $C=0$.
- No se desplaza pues $D=0$.

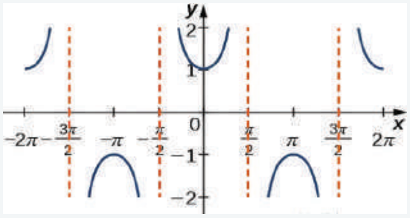
4. Problemas de Trigonometría aplicados al contexto y la tecnología

Los modelos trigonométricos se pueden utilizar para una variedad de aplicaciones, son un instrumento poderoso que puede utilizarse para modelar una variedad de fenómenos. Son precisos, versátiles y fáciles de utilizar. Las áreas donde se utilizan son:

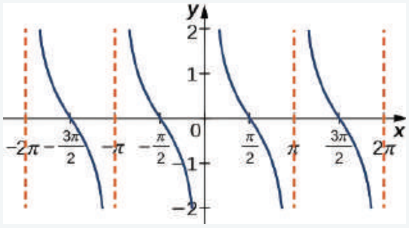
- Predicción de fenómenos naturales.
- Control de sistemas.
- Procesamiento de señales.
- Visualización de datos.



$y=cosec\ x$

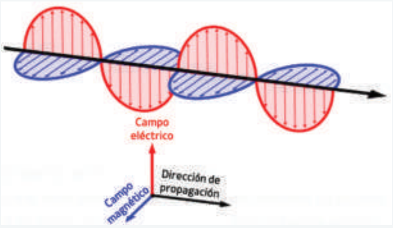


$y=sec\ x$



$y=ctg\ x$

Gráficas de las funciones trigonométricas inversas.



Ondas electromagnéticas.

Ejemplo: (Modelaje del movimiento de un resorte) Se suspende un resorte en el techo, oscilando hacia arriba y abajo. Se elabora una tabla muestra donde se muestra la altura de una partícula, ubicada en el resorte, cada segundo después de que el movimiento haya comenzado.

Estudio de un resorte

De la gráfica podemos deducir:

La amplitud $A=5$. La altura desde la línea central hasta el pico es 5.

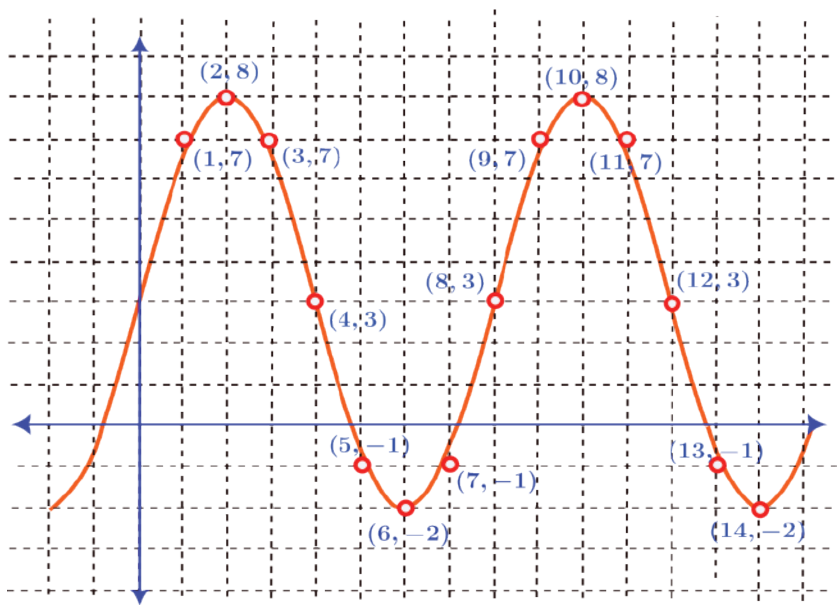
El periodo hallamos de la distancia entre picos (2,8) y (10,8), que es 8.

Para el modelaje notamos que los datos se ajustan a la función coseno $y=cosx$, es decir podemos ajustar como:

$$y=5\cos(Bx)$$

Tiempo en segundos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura del objeto	7	8	7	3	-1	-2	-1	3	7	8	7	3	-1	-2

La tabla puede ser representada gráficamente en un plano cartesiano.



Para hallar B sabemos que el periodo es $\frac{2\pi}{B}$, luego $\frac{2\pi}{B}=8$, de ahí $B=\frac{\pi}{4}$, luego la ecuación que modela el comportamiento del resorte suspendido en el techo será: $y=5\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Actividad

- Grafiquemos en el plano los siguientes puntos y hallemos el valor de r: (3,4);(-3,5);(-3,-3$\sqrt{3}$); (-5,-4)
- Tracemos el gráfico, establecemos el cuadrante en que termina cada ángulo y el signo del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos: 60°,120°,240°,700°,1000°
- Graficamos y establecemos el cuadrante que termina β si:
  - ◊ $sen\beta$ y $cos\beta$ son positivos
  - ◊ $cos\beta$ y $tg\beta$ son positivos
  - ◊ $sen\beta$ y $sec\beta$ son positivos
  - ◊ $cos\beta$ y $ctg\beta$ son positivos
  - ◊ $tg\beta$ es positiva y $sec\beta$ es negativa
  - ◊ $tg\beta$ es negativa y $sec\beta$ es positiva
- Encontramos los valores de las funciones trigonométricas de θ si:

  a) $sen\theta=\frac{7}{25}$

  b) $sen\theta=-\frac{4}{5}$

  c) $sen\theta=-\frac{5}{12}$

  d) $ctg\theta=\frac{24}{7}$

  e) $sen\theta=-\frac{2}{3}$

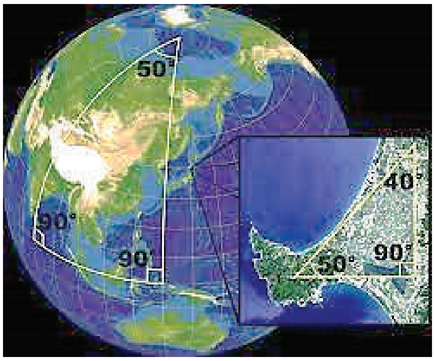
  f) $sen\theta=-\sqrt{5}$

  g) $cosec\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

  h) $sen\theta=\frac{3}{5}$
- Conociendo que $sen\theta=-\frac{3}{4}$ y θ pertenece al IV. Calculamos $M=\sec\theta-tg\,\theta$:
- Si el punto $B(-3,-4)$, pertenece al lado final del ángulo θ. Calculamos $A=\sec\theta+tg\,\theta$

VALORACIÓN

En física, la trigonometría se utiliza para estudiar el movimiento de los objetos, las ondas y las ondas sonoras. En astronomía, la trigonometría se utiliza para estudiar los movimientos de los planetas, las estrellas y las galaxias. En geografía, la trigonometría se utiliza para estudiar la forma de la Tierra y la ubicación de los lugares. En ingeniería, la trigonometría se utiliza para diseñar y construir puentes, edificios y otros objetos. En navegación, la trigonometría se utiliza para determinar la posición de un barco o avión. En construcción, la trigonometría se utiliza para calcular la altura de los edificios y puentes.



Trigonometría en la geografía

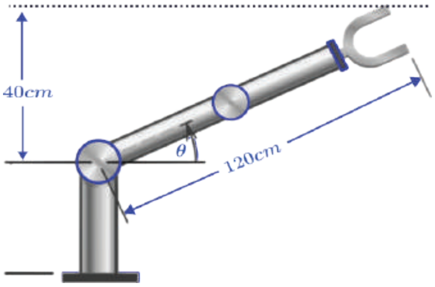
Actividad

La trigonometría es una herramienta esencial en una variedad de campos. Es una rama de las matemáticas que es muy útil para estudiar el mundo que nos rodea, por tanto, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿Cuáles son las aplicaciones de la trigonometría en la tecnología?
- ¿En qué se utilizan las funciones seno, coseno y tangente?

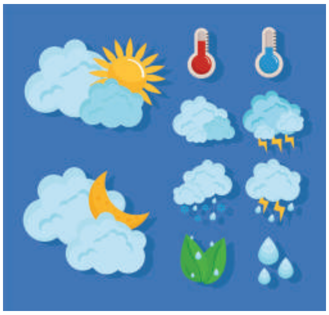
PRODUCCIÓN

Brazo de un robot. Las funciones trigonométricas se usan extensamente en el diseño de robots industriales. Supongamos que la articulación del hombro de un robot está motorizada de modo que el ángulo aumenta a una razón constante de θ radianes por segundo a partir de un ángulo inicial. Suponga que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 120 centímetros, y la altura del codo a la mano del robot es 40 centímetros, como se ve en la figura. Calcular el ángulo del brazo del robot.



Cálculos meteorológicos. Si en latitudes medias a veces es posible estimar la distancia entre regiones consecutivas. Si la latitud está en $\theta=44°$ grados sexagesimales, R es el radio de la Tierra que es 6369 kilómetros, aproximadamente y v la velocidad horizontal del viento en $30\ km/h$, además la distancia d en kilómetros. Calcular la distancia entre dos zonas consecutivas utilizando la siguiente ecuación:

$$d = 2\pi\left(\frac{vR}{0.52\ cos\ \theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$


Fuente:https://es.vecteezy.com

Actividad

- Realizamos la gráfica de $y=3sen\ x;\ y=-2cos\ x$ (Utilicemos hojas milimétricas para la gráfica).
- Construimos una maqueta de un brazo robot, de tal forma que describa un ángulo de 180°.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PRÁCTICA

La escuadra de albañil es una herramienta indispensable en cualquier obra de construcción. Se utiliza en una gran variedad de tareas, como:

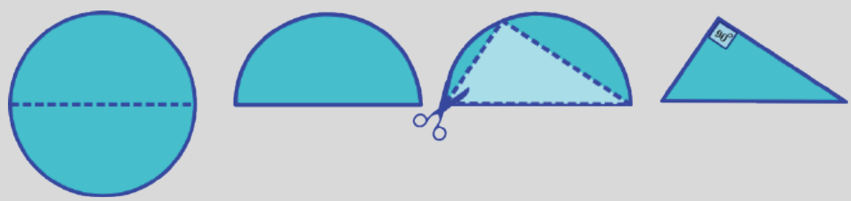
Comprobar la perpendicularidad de paredes, puertas y ventanas, trazar líneas perpendiculares para la colocación de azulejos, baldosas o ladrillos; marcar ángulos para la instalación de tuberías, cables o marcos. La escuadra de albañil es una herramienta sencilla pero muy útil, con ella, los albañiles pueden asegurar la precisión de sus trabajos y garantizar que las estructuras sean seguras y duraderas.

La escuadra de albañil se construye a partir de un triángulo rectángulo, el cual puede ser construido del trazado de un círculo, haciendo que su diámetro sea la hipotenusa y fijando un punto en el círculo podemos construir un triángulo rectángulo o una escuadra.

Actividad

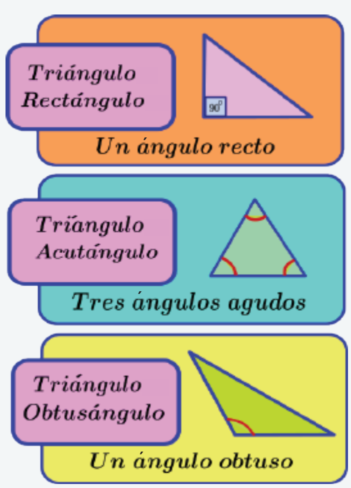
Construyendo escuadra. (Triángulo Rectángulo)

- Trazamos sobre un cartón un círculo de 10 cm de radio.
- Trazamos el diámetro y recortarlo de tal forma de tenga la mitad del círculo.
- Ubicamos un punto del arco de la circunferencia.
- Desde el punto hacia los extremos del diámetro trazamos dos rectas.
- Recortamos el triángulo obtenido.
- Eureka…Tenemos una escuadra.



TEORÍA

Clasificación según sus ángulos

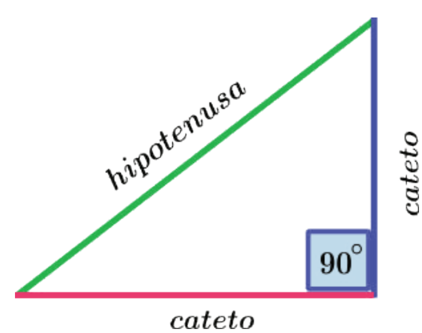


1. Definición de triángulo rectángulo

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, cuya medida es de 90°, y dos ángulos agudos (menores a 90°). Los lados de un triángulo rectángulo se llaman catetos e hipotenusa.

Los catetos son los dos lados que están al lado del ángulo recto.

La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de 90°, es el lado mayor del triangulo



Las herramientas para resolver un triángulo rectángulo son: ***la ley de suma de ángulos, teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.***

Actividad

- Dibujamos triángulos rectángulos con las siguientes características:

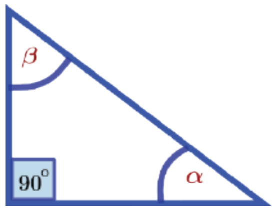
(a) *cateto=3 cm ; cateto=4cm; hipotenusa 5*

(b) *cateto=5 cm ; cateto=5cm; hipotenusa* $\sqrt{50}$

- Mencionamos y dibujamos tres ejemplos de objetos en la cotidianidad donde observemos ángulos de 90° (Por ejemplo, una cruz tiene 4 ángulos rectos)

1.1. Suma de ángulos en un triángulo rectángulo

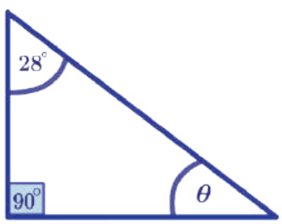
La suma de los ángulos de un triángulo rectángulos es siempre 90°.



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Ejemplo

De los siguientes triángulos, calculamos los ángulos desconocidos:

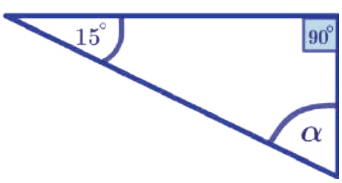


Para la primera gráfica tenemos:

28°+θ=90°

θ=90°-28°

θ=62°

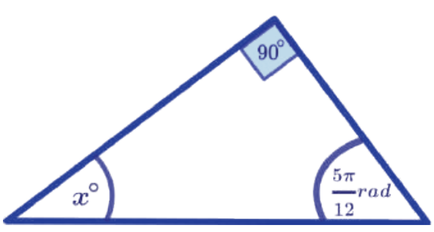


En la segunda gráfica tenemos:

15°+α=90°

θ=90°-15°

θ=75°



Para la tercera gráfica, convirtiendo $\frac{5\pi}{12} rad = 75^\circ$, luego:

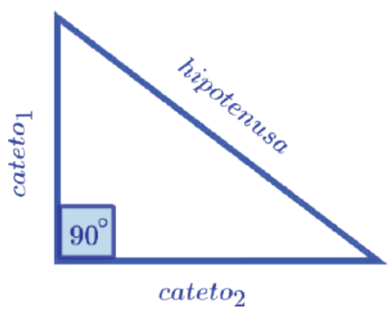
75°+x°=90°

θ=90°-75°

θ=15°

1.2. Teorema de Pitágoras

En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

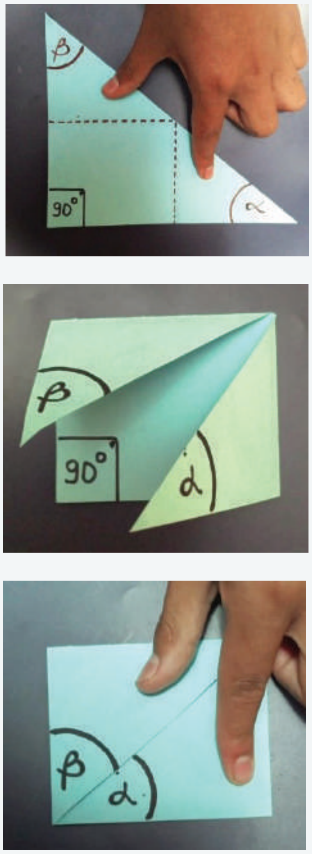


La *hipotenusa* es el lado opuesto al ángulo de 90°, y es el lado más largo del triángulo.

Los *catetos* son los lados que están al lado del ángulo de 90°

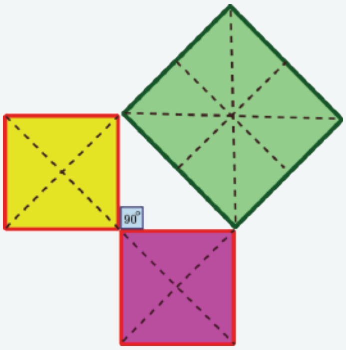
$$(\boldsymbol{hipotenusa})^2 = (\boldsymbol{cateto_1})^2 + (\boldsymbol{cateto_2})^2$$

Demostración



Demostración de la suma de ángulos mediante doces de papel

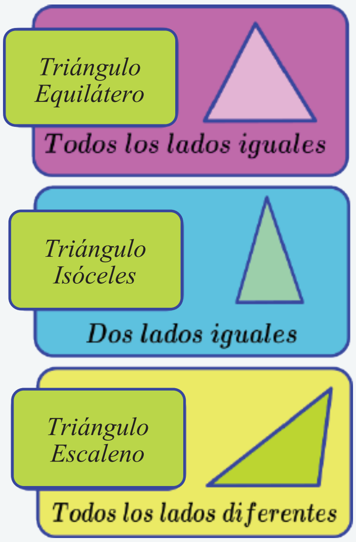
Demostración



Demostración del Teorema de Pitágoras

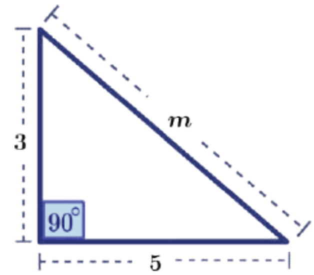
Contando los triángulos en cada uno de los cuadrados, notamos que el número de triángulos verdes es igual al total de los amarillos y rosados.

Clasificación según sus lados

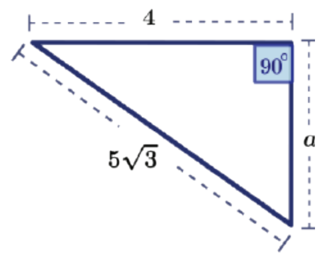


Ejemplo:

De los siguientes triángulos. Calculamos los lados desconocidos:



$$m^2 = 3^2 + 5^2$$
$$m^2 = 9 + 25$$
$$m^2 = 34$$
$$\boldsymbol{m = \sqrt{34}}$$



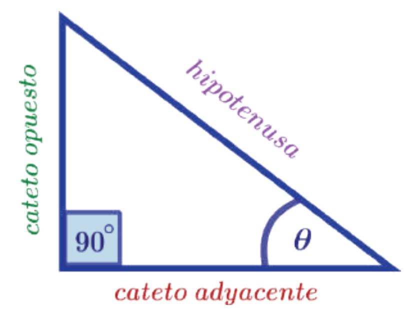
$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 4^2 + a^2$$
$$75 = 16 + a^2$$
$$75 - 16 = a^2$$
$$19 = a^2$$
$$\sqrt{19} = a$$
$$\boldsymbol{a = \sqrt{19}}$$

1.3. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

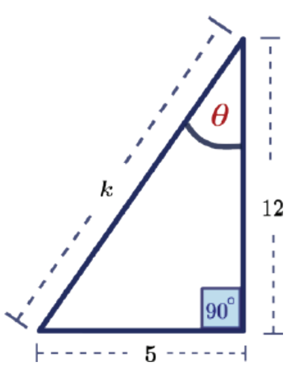
Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo ***θ*** de un triángulo rectángulo son:

$$sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$
$$cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$
$$tg\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$cosec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$
$$sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$
$$ctg\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

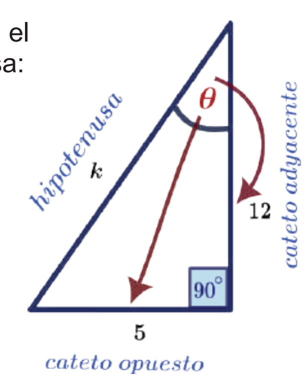


Ejemplo: Dado el triángulo rectángulo, Hallamos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo θ



Primero calculamos el valor de la hipotenusa:

$$k^2 = 12^2 + 5^2$$
$$k^2 = 144 + 25$$
$$k^2 = 169$$
$$k = \sqrt{169}$$
$$\boldsymbol{k = 13}$$

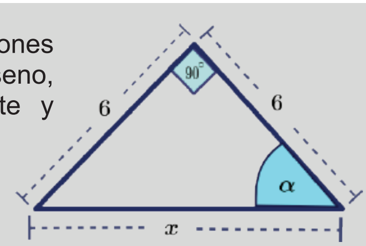


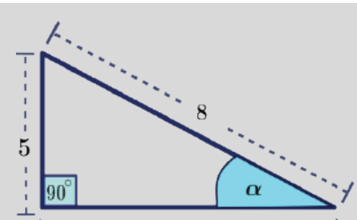
Identificamos los catetos y la hipotenusa y finalmente escribimos las funciones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{c.o.}{h} = \frac{5}{13} \qquad cosec\theta = \frac{h}{c.o} = \frac{5}{13}$$
$$cos\theta = \frac{c.a.}{h} = \frac{12}{13} \qquad sec\theta = \frac{h}{c.a.} = \frac{13}{12}$$
$$tg\theta = \frac{c.o.}{c.a} = \frac{5}{12} \qquad tg\theta = \frac{c.a.}{c.o.} = \frac{12}{5}$$

Actividad

- Hallamos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α.





2. Resolución gráfica y analítica de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo, significa encontrar las longitudes de los lados y ángulos del triángulo. Un triángulo rectángulo puede ser resuelto si al menos se conocen dos de sus lados, o un lado y su ángulo. Las herramientas para resolver un triángulo rectángulo son: la ley de suma de ángulos, teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.

Ejemplo:

Resolvemos los triángulos, conocidos dos lados.

Calculamos x por Pitágoras:

$10^2 = 8^2 + x^2$
$100 = 64 + x^2$
$100 - 64 = x^2$
$36 = x^2$
$x^2 = 36$
$x = \sqrt{36}$
$x = \pm 6$
$x = 6$ solo tomamos el valor positivo

Calculamos α por razones trigonométricas:

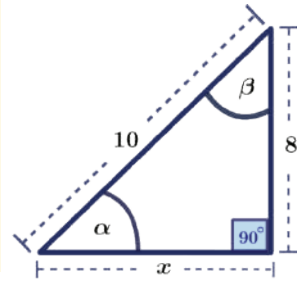
$sen\alpha = \dfrac{8}{10}$

$\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{8}{10}\right)$
$\alpha = 53.13°$

Hallemos β por razones trigonométricas:

$cos\beta = \dfrac{8}{10}$

$\beta = cos^{-1}\left(\dfrac{8}{10}\right)$
$\beta = 36.86°$



Calculamos x por Pitágoras:

$10^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + x^2$
$100 = 20 + x^2$
$100 - 20 = x^2$
$80 = x^2$
$x^2 = 80$
$x = \sqrt{80}$
$x = 8.94$

Para α por razones trigonométricas:

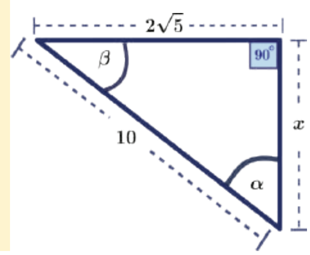
$sen\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{10}$

$\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{10}\right)$
$\alpha = 26{,}57°$

Para β por razones trigonométricas:

$cos\beta = \dfrac{2\sqrt{5}}{10}$

$\beta = cos^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{10}\right)$
$\beta = 63{,}43°$



Ejemplo: Resolvamos los triángulos, conocidos un ángulo agudo y un lado.

Calculamos α por suma de ángulos:

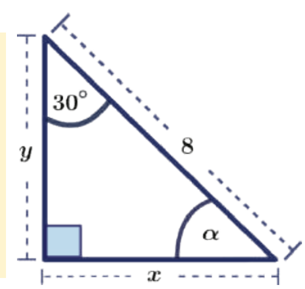
$30° + \alpha = 90°$
$\alpha = 90° - 30°$
$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{60°}$

Para x utilizamos razones trigonométricas:

$sen\ 30° = \dfrac{x}{8}$
$8 \cdot sen\ 30° = x$
$x = 4$

Para y utilizamos razones trigonométricas:

$cos\ 30° = \dfrac{y}{8}$
$8 \cdot cos\ 30° = y$
$y = 4\sqrt{3}$



Calculamos θ por suma de ángulos:

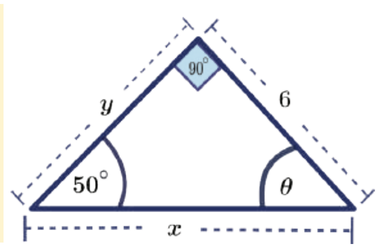
$50° + \theta = 90°$
$\alpha = 90° - 30°$
$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{60°}$

Para x utilizamos funciones trigonométricas:

$sen\ 50° = \dfrac{6}{x}$
$x \cdot sen 50° = 6$
$x = \dfrac{6}{sen\ 50°}$

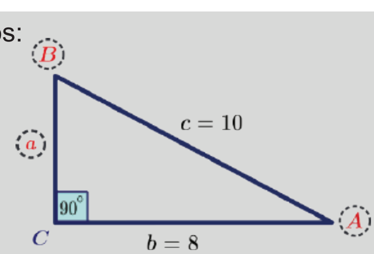
Para y utilizamos funciones trigonométricas:

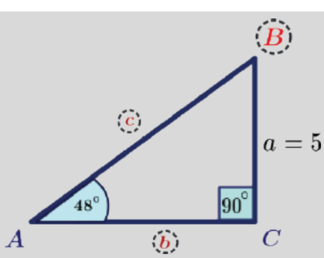
$tg\ 50° = \dfrac{6}{y}$
$y \cdot tg\ 50° = 6$
$y = \dfrac{6}{tg\ 50°}$



Actividad

- Resolvemos los triángulos:





Sugerencias de resolución de problemas (George Pólya)

Paso 1: Entender el problema
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

Paso 2: Configurar un plan

Elaborar una estrategia que le permita encontrar la o las operaciones necesarias para resolver el problema

Paso 3: Ejecutar el plan

En este paso el estudiante debe implementar la o las estrategias que escogió para solucionar completamente el problema.

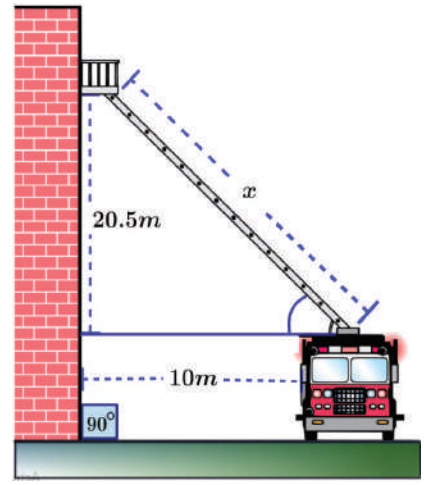
Paso 4: Mirar hacia atrás

Comprobar la solución. ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema? ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?

3. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Un uso común de la trigonometría es medir alturas y distancias cuyas mediciones por medios normales son incómodas o imposibles, veamos ejemplos.

Problema. Se desea calcular la longitud de la escalera de un camión bombero que esta 10 m de la base de un edificio y la altura desde el techo del camión a un balcón es de 20.5 metros.

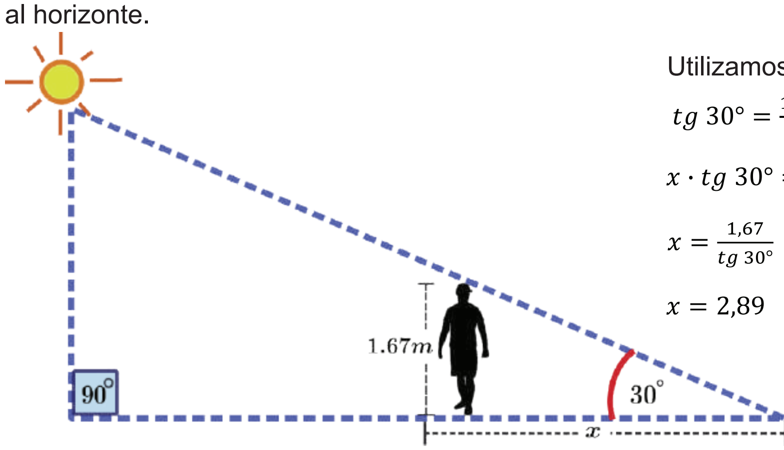


Observando la gráfica, podemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$x^2 = 20.5^2 + 10^2$
$x^2 = 420.25 + 100$
$x^2 = 520.25$
$\boldsymbol{x = \sqrt{520.25}}$
$\boldsymbol{x = 22.8}$

R. La longitud de la escalera es 23 metros, aproximadamente.

Problema. Calcular la longitud de la sombra que genera una persona de 1,67 m, cuando el sol esta a 30° respecto al horizonte.



Utilizamos funciones trigonométricas:

$tg\ 30° = \frac{1{,}67}{x}$

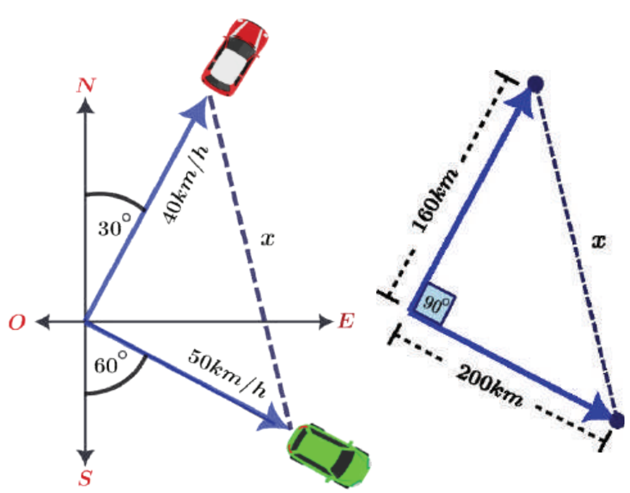
$x \cdot tg\ 30° = 1{,}67$

$x = \frac{1{,}67}{tg\ 30°}$

$x = 2{,}89$

R. La sombra de la persona es *3* metros aproximadamente.

Problema. Dos automóviles con direcciones 30° *NE* y 60° *SE,* parten con velocidades *40km/h* y *50km/h* respectivamente. Calcular la distancia de separación entre ambos después de 4 horas.



Primero calculamos las distancias recorridas por cada móvil en 4 horas:
El móvil de 40 km/h en 4 horas recorre 160 m

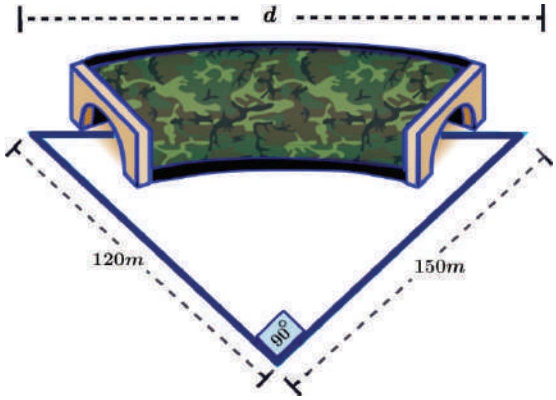
El móvil de 50 km/h en 4 horas recorre 200 m

También notemos de la figura que se forma un triángulo rectángulo, luego podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 160^2 + 200^2$
$x^2 = 25600 + 40000$
$x^2 = 65600$
$\boldsymbol{x = \sqrt{65600}}$
$\boldsymbol{x = 40\sqrt{41}}$
$\boldsymbol{x = 256.12}$

R. Después de 4 horas la distancia de separación entre ambos móviles es de 256 m aproximadamente.

Problema. Se requiere calcular la longitud de un túnel, para tal efecto se realiza mediciones de 120 m y 150 m, los cuales se unen en un punto formando un ángulo de 90°.

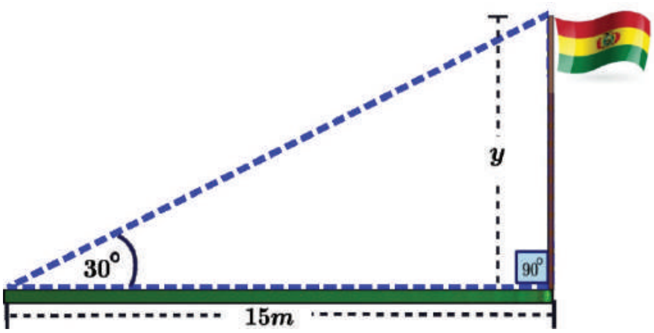


Notemos de la figura forma un triángulo rectángulo, luego podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 120^2 + 150^2$
$d^2 = 14400 + 22500$
$d^2 = 36900$
$d = \sqrt{36900}$
$\boldsymbol{d = 192.09}$

R. El túnel medirá 192 metros de distancia

Problema. Calcular la altura del mástil de una escuela, si su ángulo de elevación respecto al suelo es 30° y la distancia desde la base del mástil hasta el punto de medición es de 15 metros.



Utilizamos la función tangente:

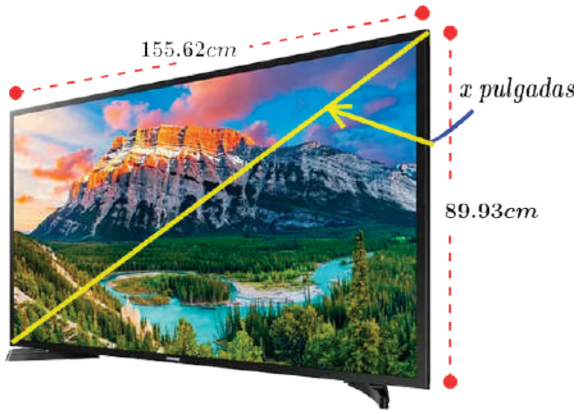
$tg\ 30° = \frac{y}{15}$

$15 \cdot tg\ 30° = y$

$y = 8.66$

R. La altura estimada del mástil es de 8.66 metros.

Problema. Eynar requiere calcular las pulgadas (in) de una pantalla de Smart TV. Se sabe que las longitudes de su base y altura miden 155,62 cm y 89,93 cm.



Utilizando el teorema de Pitágoras para la diagonal, tenemos:

$x^2 = 155{,}62^2 + 89{,}93^2$
$x^2 = 32304{,}98$

$x = \sqrt{32304{,}98}$

$\boldsymbol{x = 179{,}73}$

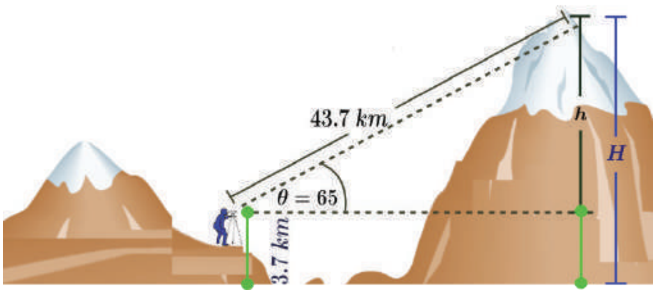
Transformando a pulgadas (in):

$= 179{,}73\ cm \cdot \frac{1\ in}{2.54\ cm}$

$= 70.75$ in

R. Eynar descubrió que su televisión es de 71 pulgadas.

Problema. Un topógrafo desea calcular la altura de un cerro, los datos que obtuvo ubicado a 3,7 km de altura, fue el ángulo de elevación 65° y 43,7 km como la distancia hacia el vértice de la montaña.



Primero calculamos la altura h, utilizando la función tg:

$tg\ 65° = \frac{h}{43{,}7}$

$43{,}7 \cdot tg\ 65° = h$

$h = 93{,}71$

Para la altura total, calculamos H, que será la suma de dos alturas:

$H = 3{,}7 + 93{,}71$
$H = 97{,}41$

R. La montaña mide 97,41 km. Aproximadamente.

Topógrafo

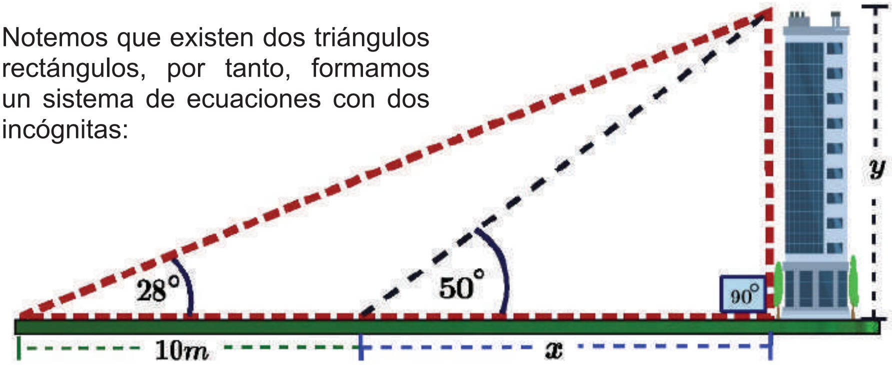
Un topógrafo se encarga de medir y cartografiar el terreno, esto incluye la toma de medidas de elevación, distancia y ángulos y también utilizan sistemas de GPS para cartografiar el terreno. Los topógrafos suelen trabajar en empresas de construcción, ingeniería o topografía.

La trigonometría se ha convertido en una poderosa herramienta que ayuda a la topografía a tomar mediciones, tales como calcular las dimensiones del levantamiento de un terreno.

Problema.

María tiene una maqueta de un edificio en el cual quiere probar sus conocimientos de trigonometría. Desde dos puntos en línea recta mide ángulos de 28° y 50°, los puntos están separados a 10 cm uno del otro. Calcular la altura de la maqueta de edificio.

Notemos que existen dos triángulos rectángulos, por tanto, formamos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:



En cada triangulo relacionamos lados y ángulos con la función tangente:

$$tg\ 50° = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot tg\ 50° = y$$

$$\boldsymbol{y = x \cdot tg\ 50°}\ (1)$$

$$tg\ 28° = \frac{y}{x+10}$$

$$(x+10) \cdot tg\ 28° = y$$

$$\boldsymbol{y = (x+10) \cdot tg\ 28°}\ (2)$$

Resolvemos el sistema por el método de igualación.

Igualamos (1) y (2)

$$y = y$$
$$x \cdot tg\ 50° = (x+10) \cdot tg\ 28°$$
$$x \cdot tg\ 50° = x \cdot tg\ 28° + 10 \cdot tg\ 28°$$
$$x \cdot tg\ 50° - x \cdot tg\ 28° = 10 \cdot tg\ 28°$$
$$x(tg\ 50° - tg\ 28°) = 10 \cdot tg\ 28°$$
$$x = \frac{10 \cdot tg\ 28°}{tg\ 50° - tg\ 28°}$$
$$\boldsymbol{x = 8.055}$$

Finalmente, reemplazamos $x=8.055$ en la ecuación $y=x \cdot tg\ 50°$, luego:

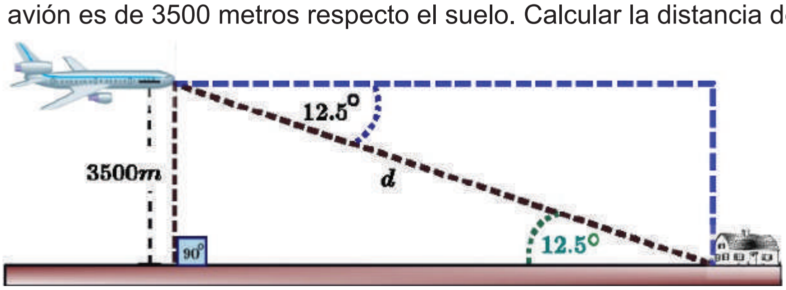
$$y = x \cdot tg\ 50°$$

$$y = 8.055 \cdot tg\ 50°$$

$$y = 9{,}599$$

R. La altura estimada de la maqueta es 10 cm.

Problema. Desde un avión se divisa una casa con un ángulo de depresión de 12.5°, la altura que sobrevuela el avión es de 3500 metros respecto el suelo. Calcular la distancia desde el avión hacia la casa.



Utilizamos la función seno:

$$sen\ 12.5° = \frac{3500}{d}$$

$$d \cdot sen\ 12.5° = 3500$$

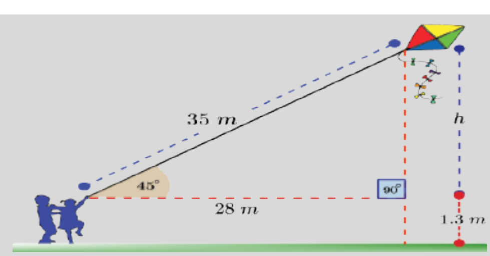
$$d = \frac{3500}{sen\ 12.5°}$$

$$d = 16170{,}79$$

R. La distancia estimada desde el avión hacia la casa es 16170,8 metros.

Actividad

Juan y María juegan con su cometa que tiene una cuerda de 35 m, el cometa esta con un ángulo de elevación de 45°; María sujeta el cometa a 1,3 m del suelo. Calculamos la altura del cometa respecto al suelo.



VALORACIÓN

El uso de la trigonometría se extiende en diferentes áreas:

Ingeniería

Se utilizan en diseño estructural, arquitectura e ingeniería civil para calcular fuerzas, determinar la estabilidad y analizar elementos estructurales.

Física

En física para diversos cálculos que involucran fuerzas, vectores y movimiento. En mecánica, los triángulos rectángulos se utilizan para descomponer fuerzas en componentes y calcular sus magnitudes y direcciones.

Topografía y Navegación

Los métodos de triangulación, que se basan en los principios de los triángulos rectángulos, se utilizan para determinar distancias, ángulos y posiciones de puntos en la superficie de la Tierra.

Arquitectura y Construcción

Los triángulos rectángulos son esenciales en el diseño y la construcción arquitectónicos. Crean estructuras geométricamente equilibradas, Hallamos ángulos de inclinación del techo.

Astronomía

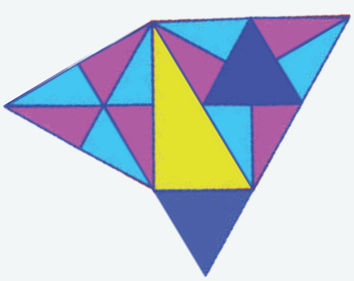
Los triángulos rectángulos se utilizan en la navegación celeste y en los cálculos astronómicos. Los métodos de triangulación que involucran triángulos rectángulos determinan las posiciones de los objetos celestes, medir distancias en el espacio y navegar usando coordenadas celestes.

Actividad

- Investigamos tres ejemplos de aplicaciones de la trigonometría en el cálculo de alturas inalcanzables.
- Identificamos triángulos rectángulos en tu entorno.
- Identificamos los ángulos rectos que existen en el aula de clases.

Trigonometría en la ingeniería y construcción.

La trigonometría en la topografía y Navegación.



Demostración del Teorema de Pitágoras.

PRODUCCIÓN

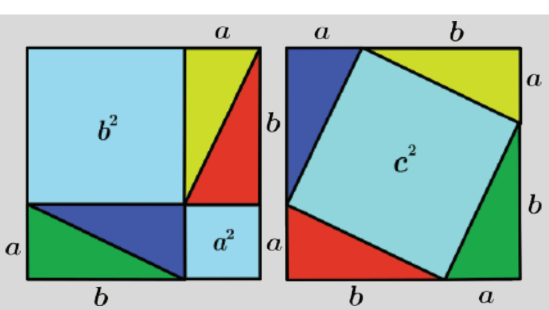
El Teorema de Pitágoras es uno de los más utilizados en los problemas de triángulos rectángulos.

En general el Teorema de Pitágoras señala, que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Y esto es verdad solamente si el triángulo es rectángulo.

Existen varios tipos de demostraciones del Teorema de Pitágoras desde las más complejas y algunas de simple comprensión.

Actividad

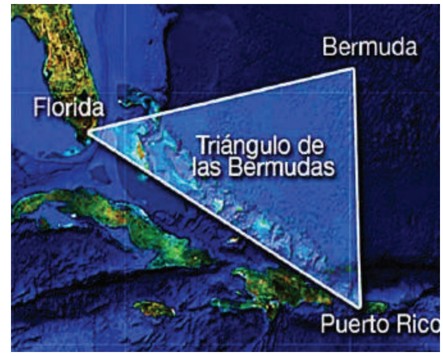
- Construimos un rompecabezas que muestra el teorema de Pitágoras de forma gráfica.



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

PRÁCTICA

El Triángulo de las Bermudas es una región geográfica que tiene forma de triángulo escaleno, se sitúa en el océano Atlántico, entre las islas Bermudas, Puerto Rico y Miami. Si se unen estos puntos se forma un triángulo de entre 1600 y 1800 km de lado, es conocido por sus numerosos naufragios hasta el punto de ser llamado *"El cementerio del Atlántico",* pues allí desaparecieron unas 50 naves y 20 aviones.



Supongamos que se perdió una embarcación en el triángulo de las bermudas. Los grupos de búsqueda deben recorrer un área específica. Sabiendo que las distancias son de 1.693 km desde florida a Bermuda, 1.632 km desde Florida a Puerto Rico y 1.577 km desde Puerto Rico a Bermuda, aproximadamente. ¿Cómo determinamos el área o región que cubre el Triángulo de las Bermudas?

Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Remarcar y señalar la cantidad de triángulos que se encuentra en la figura de la izquierda.
- Identificar y graficar triángulos del entorno de tu comunidad.

TEORÍA

Triángulos oblicuángulos

Son de dos tipos: acutángulos y obtusos.

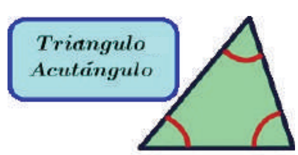
Triángulo acutángulo: *Tiene tres ángulos internos agudos, es decir, la medida de cada uno de sus ángulos es menor a 90°*

Triángulo obtusángulo: *Se caracteriza por tener uno de sus ángulos interiores obtuso, eso quiere decir que el ángulo es mayor a 90°, por lo tanto, los ángulos internos restantes son menores a 90°.*

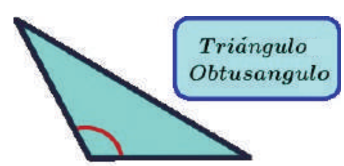
1. Definición de triángulo oblicuángulo

Un triángulo es oblicuángulo, si ninguno de los ángulos del triángulo es un ángulo recto (90°).

Un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos; o dos ángulos agudos y uno obtuso.



Tres ángulos agudos



Un ángulo obtuso y dos ángulos agudos

Las herramientas para resolver un triángulo oblicuángulo son: ***la ley de suma de ángulos, ley de senos y ley de cosenos.***

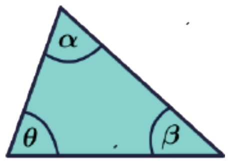
Actividad

Realizamos las siguientes actividades:

- Dibujar dos triángulos que tengan dos ángulos y dos lados iguales. ¿Qué tipo de triángulos obtenemos de la construcción?
- Construir un triángulo equilátero de 10 cm de lado. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? ¿Un triángulo equilátero es oblicuángulo?
- La estrella de cinco puntas era un símbolo que representaba a los pitagóricos. ¿Cuántos triángulos se observa en la estrella pitagórica? ¿Qué tipo de triángulos son los que lo componen?

1.1. Suma de ángulos de un triángulo

La suma de los ángulos de todo triangulo es siempre 180°.

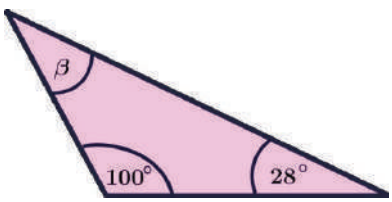


$\alpha + \beta + \theta = 180$

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \theta = 180°}$

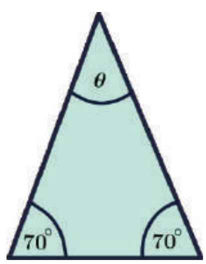
Ejemplo:

De los siguientes triángulos oblicuángulos. Calcular los ángulos desconocidos:



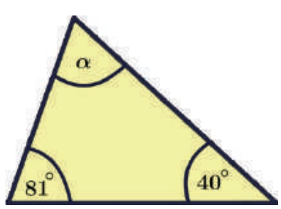
Para la primera gráfica tenemos:

$\beta + 28° + 100° = 180°$
$\beta = 180° - 28° - 100°$
$\boldsymbol{\beta = 52°}$



En la segunda gráfica tenemos un triángulo isósceles:

$\theta + 70° + 70° = 180°$
$\theta = 180° - 70° - 70°$
$\boldsymbol{\theta = 40°}$



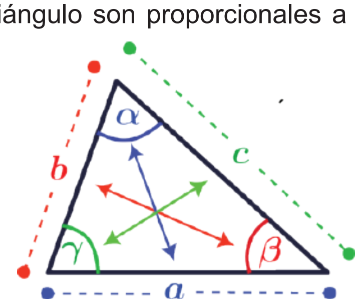
En la tercera gráfica tenemos:

$\alpha + 81° + 40° = 180°$
$\alpha = 180° - 81° - 40°$
$\boldsymbol{\alpha = 59°}$

1.2. Ley de Senos

La ley de senos es la relación entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuo. Establece que los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Las ecuaciones de la ley de senos pueden ser representadas de dos formas:

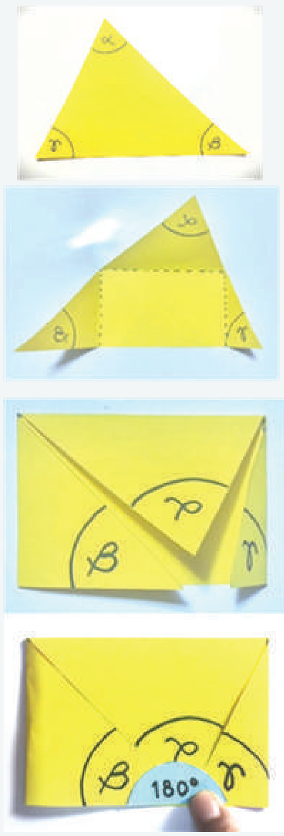


$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Para usar la ley de senos debemos conocer los datos de una diagonal, (es decir un lado y su ángulo opuesto) y además un lado o ángulo del triángulo.

Demostración

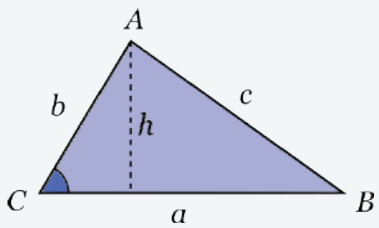


Demostración de la suma de ángulos para todo triangulo mediante dobleces de papel.

Al-Battani

Astrónomo y matemático, generalizó el resultado de Euclides en la geometría esférica a principios del siglo X, lo que permitió efectuar los cálculos de la distancia angular entre el Sol y la Tierra.

Área en función de seno

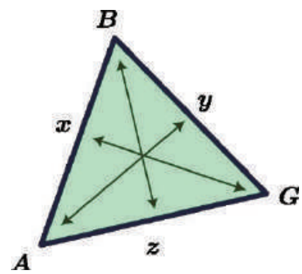


Contando Una forma distinta para Hallamos el área de un triángulo es también utilizando la siguiente igualdad:

$$\text{Área} = \frac{\textbf{base} \cdot \textbf{altura}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot senC}{2}$$

Ejemplo:

De los siguientes triángulos. Aplicar la ley de senos.

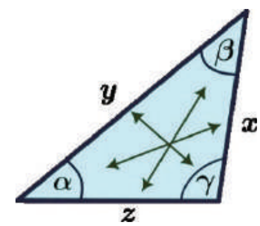


Por la ley de senos tenemos:

$$\frac{x}{sen\ G} = \frac{y}{senA} = \frac{z}{sen\ B}$$

O también:

$$\frac{sen\ G}{x} = \frac{senA}{y} = \frac{sen\ B}{z}$$



Por la ley de senos tenemos:

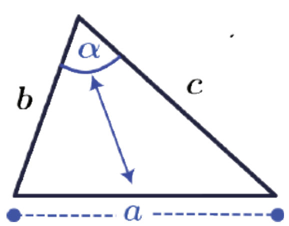
$$\frac{x}{sen\ \alpha} = \frac{y}{sen\gamma} = \frac{z}{sen\ \beta}$$

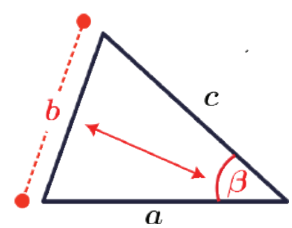
O también:

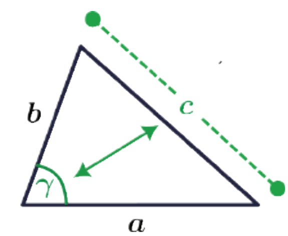
$$\frac{sen\ \alpha}{x} = \frac{sen\gamma}{y} = \frac{sen\ \beta}{z}$$

1.3. Ley de Cosenos

La ley de los cosenos es la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo con respecto al coseno de su ángulo.







$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Algo útil es también el despeje de los ángulos:

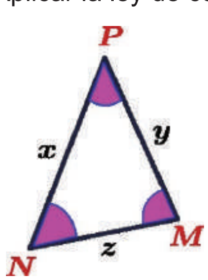
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$

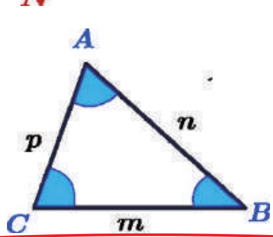
Ejemplo:

Aplicar la ley de cosenos para cada lado del triángulo:



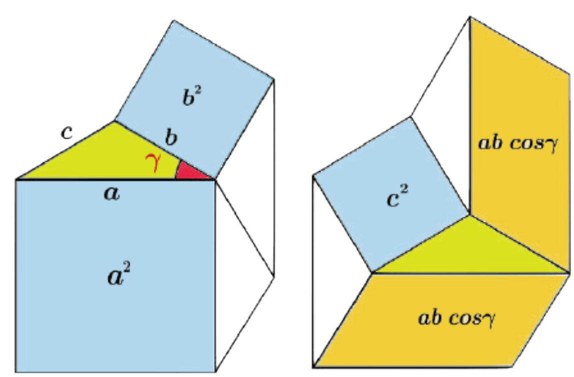
Apliquemos la ley de cosenos:

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos M$$
$$y^2 = x^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos N$$
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos P$$



Apliquemos cosenos, tenemos:

$$m^2 = n + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos A$$
$$n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos C$$
$$p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos B$$



Demostración del teorema del coseno

2. Resolución triángulos Oblicuángulos

Resolver un triángulo oblicuángulo significa encontrar las longitudes de sus lados y sus ángulos. Para hacerlo, es necesario conocer: la longitud de un lado y dos ángulos; la longitud de dos lados y un ángulo; la longitud de tres lados. Para resolver un triángulo oblicuángulo utilizaremos la ley de suma de ángulos, ley de senos y ley de cosenos. Existen cuatro casos a considerar:

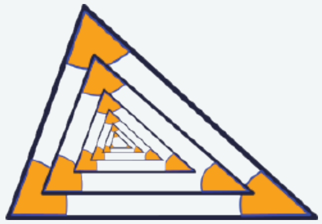
Caso ALA: Conocidos dos lados y un ángulo.

Caso ALL: Conocidos dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos.

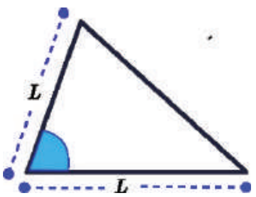
Caso LAL: Conocidos dos lados y un ángulo entre los lados conocidos.

Caso LLL: Conocidos tres lados.

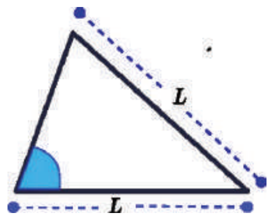
Curiosidad



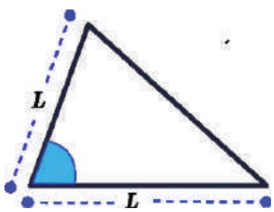
El caso AAA genera un número infinito de triángulos semejantes, por lo cual el triángulo no puede ser resuelto.



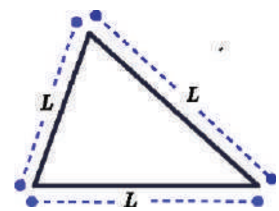
Caso ALA



Caso ALL



Caso LAL

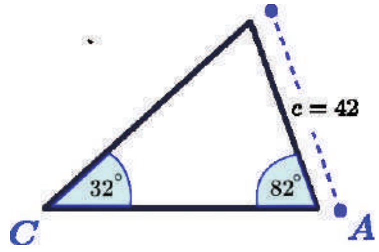


Caso LLL

Los dos primeros casos pueden ser resueltos por la ley de suma de ángulos y ley de senos; los dos últimos casos por la ley de suma de ángulos ley de senos y cosenos.

Ejemplo

(Caso ALA). Resolver el triángulo, sabiendo que ***A=82°;C=32º,c=42.***



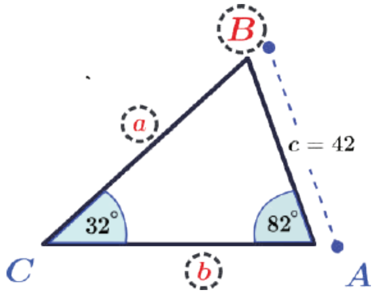
Para resolverlo, notemos los ángulos y lados que desconocemos B, a, b

Para ***a*** aplicamos la ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ 82°} = \frac{42}{sen32°}$$

$$a = sen\ 82° \cdot \frac{42}{sen32°}$$

$$\boldsymbol{a = 78,48}$$



Inicialmente para ***B*** calculamos por la ley de suma de ángulos:

$$B + 32° + 82° = 180°$$

$$B = 180° - 32° - 82°$$

$$\boldsymbol{B = 66°}$$

Para ***b*** por la ley de senos:

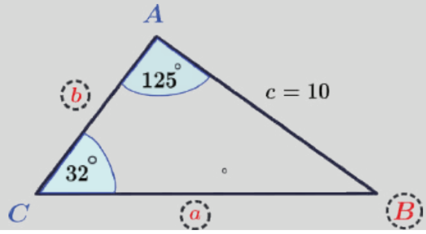
$$\frac{b}{sen\ 66°} = \frac{42}{sen32°}$$

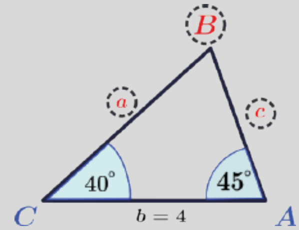
$$b = sen\ 66° \cdot \frac{42}{sen32°}$$

$$\boldsymbol{b = 72,4}$$

Actividad

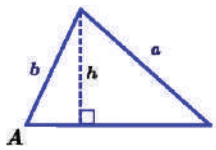
– **Resolvemos los triángulos:**

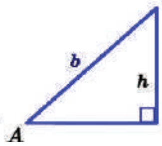




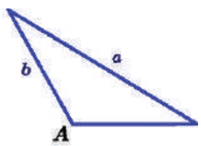
Casos ambiguos en la ley de senos

Solo forma un triángulo



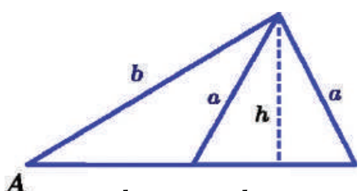


$a > b$ $a = h$



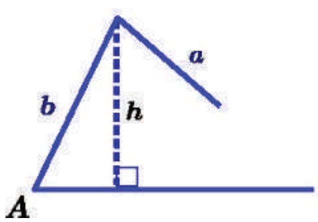
$a > b$

Se forma dos triángulos

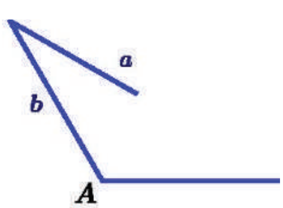


$h < a < b$

No se forma triángulos



$a < h$

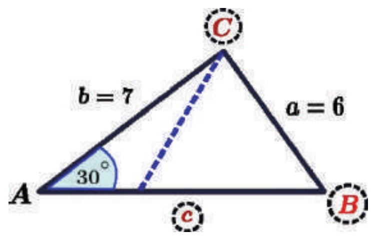


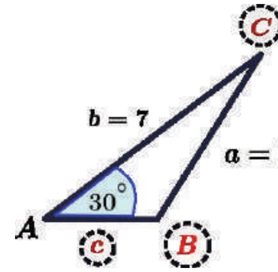
$a \leq b$

Ejemplo:

(Caso ALL). Resolver el triángulo, sabiendo que ***A=30°;a=6,c=7.***

El triángulo tendrá dos soluciones, pues su altura es menor que sus lados.





Notemos que tenemos una diagonal conocida, luego aplicamos la ley de senos para hallar *B*:

$$\frac{sen\ B}{7} = \frac{sen\ 30°}{6}$$

$$sen\ B = 7 \cdot \frac{sen\ 30°}{6}$$

$$B = sen^{-1}\left(7 \cdot \frac{sen\ 30°}{6}\right)$$

$$\boldsymbol{B = 35,68°}\ (\acute{A}ngulo\ agudo)$$

Para hallar el ángulo obtuso *B*, notemos que es un angulo suplementario, luego:

$$B = 180° - 35,68°$$

$$\boldsymbol{B = 144.32°}$$

(Ángulo obtuso)

Para ***c*** por la ley de senos:

$$\frac{c}{sen\ 114,32°} = \frac{6}{sen30°}$$

$$c = sen\ 114,32° \cdot \frac{6}{sen30°}$$

$$\boldsymbol{c = 10,93}$$

Para ***C*** por la ley de suma de ángulos:

$$C + 144.32° + 30° = 180°$$
$$C = 180° - 144.32° - 30°$$
$$C = 5.68°$$

Para ***C*** por la ley de suma de ángulos:

$$C + 35,68° + 30° = 180°$$
$$C = 180° - 35,68° - 30°$$
$$\boldsymbol{C = 114,32°}$$

Para ***c*** por la ley de senos:

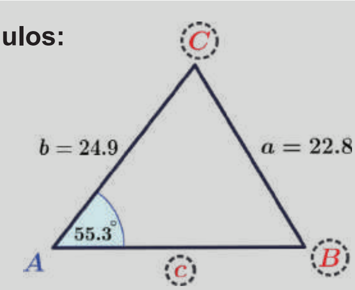
$$\frac{c}{sen\ 5,68°} = \frac{6}{sen30°}$$

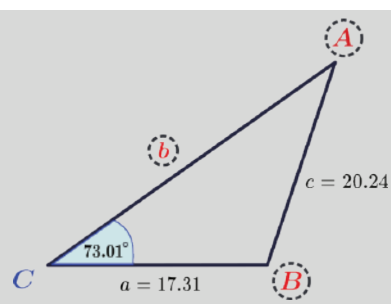
$$c = sen\ 5.68° \cdot \frac{6}{sen30°}$$

$$\boldsymbol{c = 1,18}$$

Actividad

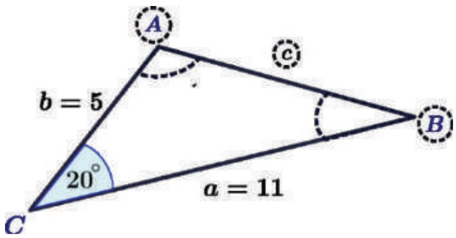
- **Resolvemos los triángulos:**





Ejemplo:

(Caso LAL). Resolver el triángulo, sabiendo que:



Para hallar *A* aplicamos la ley de senos, pues ya conocemos la diagonal:

$$\frac{sen\ A}{11} = \frac{sen\ 20°}{6{,}52}$$

$$sen\ A = 11 \cdot \frac{sen\ 20°}{6{,}52}$$

$$A = sen^{-1}\left(11 \cdot \frac{sen\ 20°}{6{,}52}\right)$$

$A = 35{,}24°$ *(Agudo)*

Como la altura es menor que los lados entonces el ángulo suplementario será:

A=144,75° *(Obtuso)*

Notemos que no existe una diagonal conocida por lo cual no podemos aplicar ley de senos, por tanto, la única opción es la ley de cosenos:

Hallemos ***c***:

$$c^2 = 11^2 + 5^2 - 2 \cdot 11 \cdot 5 \cdot cos\ 20°$$
$$c = \sqrt{121 + 25 - 110 cos\ 20°}$$
$$c = 6.52$$

Para a por la ley de senos:

$$\frac{sen\ B}{5} = \frac{sen\ 20°}{6{,}52}$$

$$sen\ B = 5 \cdot \frac{sen\ 20°}{6{,}52}$$

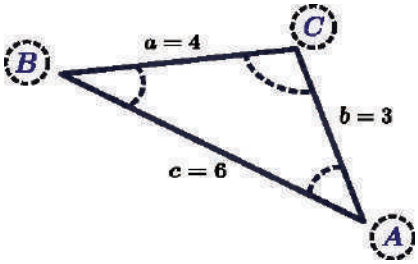
$$B = sen^{-1}\left(5 \cdot \frac{sen\ 20°}{6{,}52}\right)$$

$\boldsymbol{B = 15{,}2°}$

Ejemplo:

(Caso LLL) Resolvemos el triángulo, sabiendo que:

a = 4; b = 3, c = 6.



Para hallar *A* aplicamos la ley de cosenos, con el ángulo despejado:

$$A = cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$
$$A = cos^{-1}\left(\frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 6}\right)$$
$$A = cos^{-1}\left(\frac{9 + 36 - 16}{36}\right)$$
$\boldsymbol{A = 36{,}33°}$

Para hallar *B* :

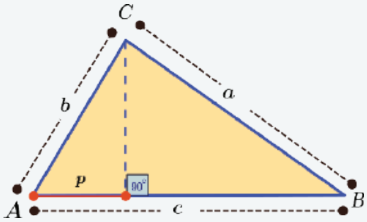
$$B = cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right)$$
$$B = cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)$$
$$B = cos^{-1}\left(\frac{16 + 36 - 9}{48}\right)$$
$\boldsymbol{B = 26{,}38°}$

Para hallar *C* :

$$C = cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$
$$C = cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 3^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 3}\right)$$
$$C = cos^{-1}\left(\frac{16 + 9 - 36}{24}\right)$$
$\boldsymbol{C = 117{,}27°}$ Para hallar *C* también se puede utilizar la suma de ángulos.

Euclides

La ley de los cosenos aparece primero en el libro Elementos (Libro II) de Euclides, pero en una forma disfrazada en la que los cuadrados de los lados de los triángulos se suman y un rectángulo que representa el término del coseno se resta. Así que todos los matemáticos la conocían debido a su familiaridad con el trabajo de Euclides.



$a^2=b^2+c^2-2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ A$

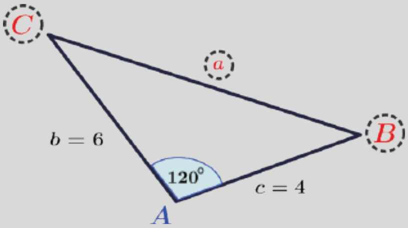
Ley de Cosenos

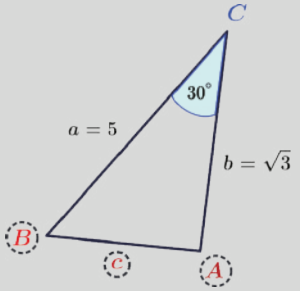
$a^2=b^2+c^2-2 \cdot p \cdot c$

Teorema de Euclides

Actividad

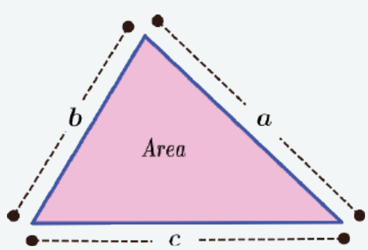
– **Resolvemos los triángulos:**





Herón

Herón fue un ingeniero y matemático helenístico que vivió en Alejandría (provincia romana de Egipto). Fue uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad. Entre sus logros cuenta la invención de la primera máquina de vapor y el primer libro de robótica de la historia. Su logro más destacado en el campo de la geometría es la denominada fórmula de Herón.



Si se conocen las longitudes de los lados de un triángulo podemos calcular el área de dicho triangulo, a través de la fórmula de Heron.

$$\boldsymbol{Area} = \sqrt{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}$$

Donde s es el semiperímetro del triángulo:

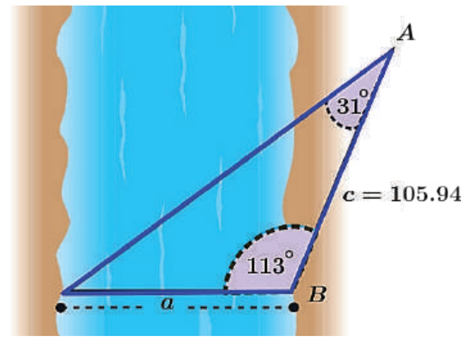
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

3. Resolución de problemas

La ley de senos y de cosenos puede utilizarse para resolver diversos problemas aplicados al entorno, siempre que dichos problemas involucren triángulos. Para su resolución en algunos casos es conveniente utilizar suma de ángulos, ley de senos o ley de cosenos, por tal razón es conveniente que se realice una gráfica o dibujo donde se identifiquen los datos y las incógnitas para decidir cuál de las leyes utilizar.

Problema

Juan desea calcular el ancho de un rio. Desde dos puntos diferentes que están a una distancia de 105.94 metros, mide los ángulos hacia el extremo del lado contrario del rio. Las medidas obtenidas son de 31° y 113°.



Notemos que primero debemos calcular el tercer ángulo *C*:

$$C + 31° + 113° = 180°$$
$$C = 180° - 31° - 113°$$
$$C = 36°$$

Ya teniendo el ángulo *C*, podemos aplicar ley de senos para calcular el ancho del rio:

$$\frac{a}{sen\ 31°} = \frac{105{,}94}{sen 36°}$$

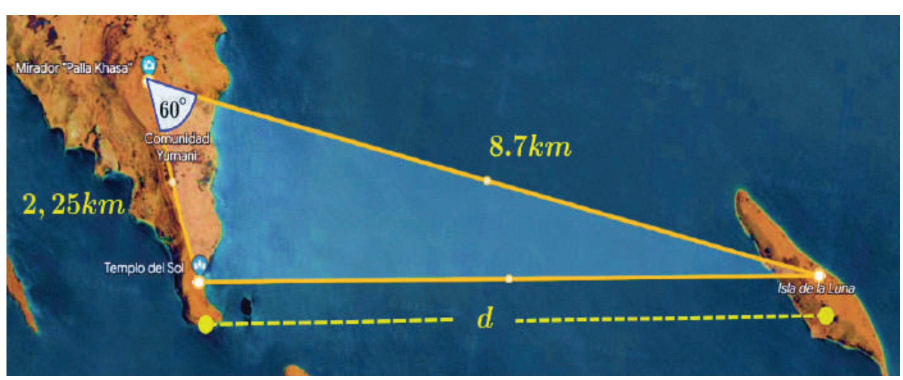
$$a = sen\ 31° \cdot \frac{105{,}94}{sen 36°}$$

$$\boldsymbol{a = 98{,}82}$$

R. Concluimos que el ancho del rio es 10 metros aproximadamente.

Problema

Gabriela hizo un recorrido por la población de Copacabana en el cual visito las islas que lo circunda. Utilizando Google Eart calculó que desde la Isla del Sol hasta el mirador de Palla Khasa son 8,7 Km; y la distancia desde el Templo del Sol hacia el mirador en 2,25Km; además el ángulo que se genera desde el mirador de Khasa es de 60°. Calculamos la distancia entre el Templo del Sol y la Isla de la luna.



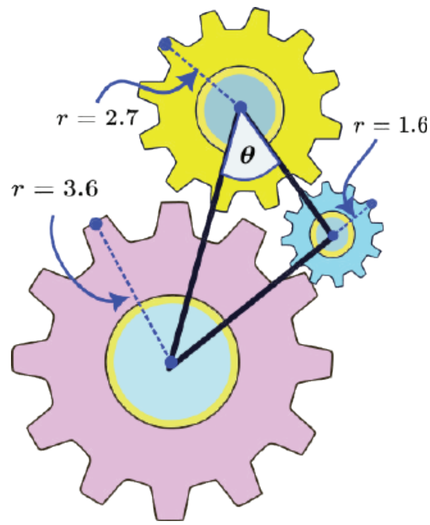
Notemos que podemos aplicar la ley de cosenos para calcular la distancia d:

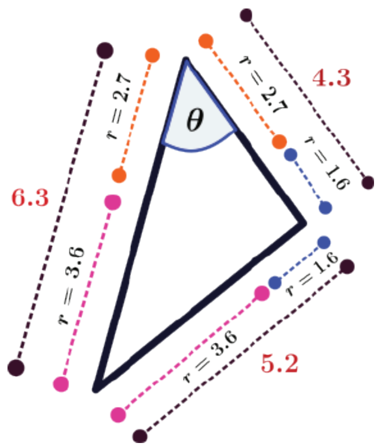
$$d^2 = 2{,}25^2 + 8{,}7^2 - 2 \cdot 2{,}25 \cdot 8{,}7 \cdot cos\ 60$$
$$d = \sqrt{2{,}25^2 + 8{,}7^2 - 2 \cdot 2{,}25 \cdot 8{,}7 \cdot cos\ 60}$$
$$d = \sqrt{7{,}87}$$
$$d = 2{,}79$$

R. La distancia que separa el Templo del Sol y la Isla de la Luna es de 2,79 Km. aproximadamente.

Problema

De cierto sistema de engranajes se midió las radios de cada uno de ellos, se desea calcular el ángulo que genera el centro del engranaje superior respecto a los centros de los engranajes inferiores.





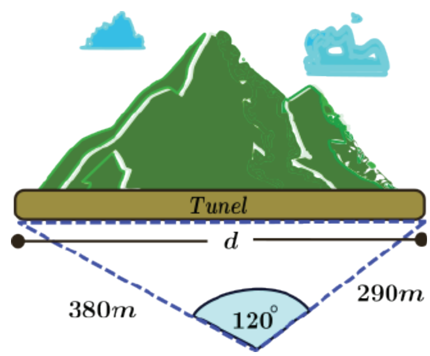
Sumando las radios de los engranajes y luego aplicando la ley de cosenos para el ángulo θ tenemos:

$$\boldsymbol{\theta} = cos^{-1}\left(\frac{4{,}3^2 + 6{,}3^2 - 5{,}2^2}{2 \cdot 4{,}3 \cdot 6{,}3}\right)$$
$$\boldsymbol{\theta} = cos^{-1}\left(\frac{31{,}14}{54{,}18}\right)$$
$$\boldsymbol{\theta} = 54{,}91°$$

R. Luego el ángulo que se genera es 54,91°.

Problema

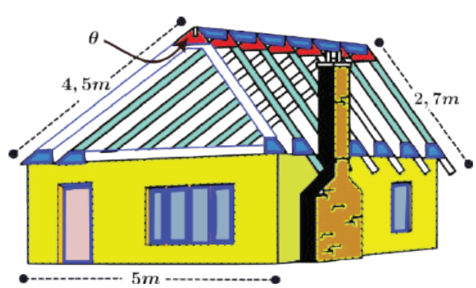
En los Yungas se desea construir un túnel que atraviese una montaña. Un topógrafo desde un punto divisa los extremos del monte los cuales generan 120°, y las distancias hacia los puntos es de 380 metros y 290 metros. Calcular la longitud del túnel que atraviesa el monte.



Aplicando la ley de cosenos para d tenemos:

$$d^2 = 380^2 + 290^2 - 2 \cdot 380 \cdot 290 \cdot cos\ 120$$
$$d = \sqrt{380^2 + 290^2 - 2 \cdot 380 \cdot 290 \cdot cos\ 120}$$
$$d = \sqrt{226700}$$
$$d = 476{,}13$$

VALORACIÓN

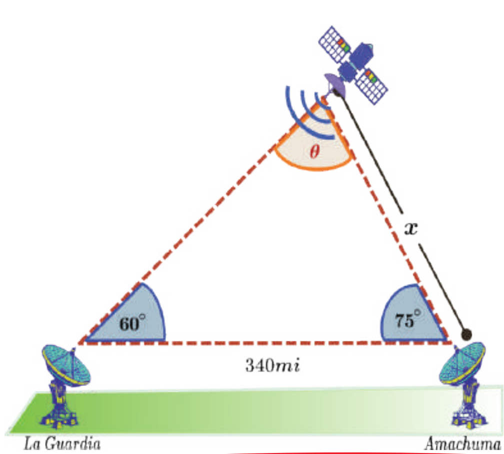


Una de las ramas que mayor aplicación tiene es la trigonometría, por tanto, es de mucha importancia conocer mínimamente sus conceptos básicos.

- Cuando se realizan construcciones de techo triangular generalmente se observan diferentes triángulos.
- Conversemos con la clase sobre cómo determinar el ángulo formado por la caída de los techos oblicuos.

PRODUCCIÓN

El satélite TKSAT-1 (Túpac Katari) es el primer satélite artificial de telecomunicaciones del Estado Plurinacional de Bolivia. Es controlado desde la Estación Terrena de Amachuma de la ciudad de El Alto, ubicada en el departamento de La Paz y desde la Estación Terrena de La Guardia, en el departamento de Santa Cruz. Investigando distancias entre las dos estaciones, podemos calcular algunas distancias utilizando conocimientos de trigonometría.



Actividad

- Elaboramos una maqueta a escala, calculando la distancia entre el satélite Túpac Katari y la estación de Amachuma.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Sistemas de medición de ángulos

1. Representar gráficamente los siguientes ángulos sexagesimales:

a) 30°	a) 45°
b) -30°	b) -120°
c) 60°	c) -390°

2. Representar gráficamente los siguientes ángulos radiánicos:

d) $\frac{\pi}{2}\ rad$	d) $\frac{\pi}{6}\ rad$
e) $-\frac{\pi}{3}\ rad$	e) $\frac{\pi}{4}\ rad$

3. Transformar al sistema sexagesimal:

f) $\frac{3\pi}{2}\ rad$	f) $\frac{5\pi}{6}\ rad$
g) $\frac{2\pi}{3}\ rad$	g) $\frac{5\pi}{4}\ rad$

4. Transformar al sistema radiánico:

h) 60°	h) 22,5°
i) 120°	i) 90°
j) 180°	j) 2024°

Longitud de arco

5. Graficar y hallar la longitud de arco (S) sabiendo que:

a) $r = 4\ cm; \theta = \pi\ rad$	d) $r = 1km; \theta = 90°$
b) $r = 6\ cm; \theta = \frac{\pi}{2}\ rad$	e) $r = 2m; \theta = 30°$
c) $r = 2\ cm; \theta = 120°$	f) $r = 5; \theta = 22{,}5°$

6. Graficar y hallar la longitud de la radio (r) sabiendo que:

a) $S = 24\ cm; \quad \theta = \frac{3\pi}{2}\ rad$
b) $S = 50\ cm; \quad \theta = \frac{\pi}{4}\ rad$
c) $S = 20\ cm; \quad \theta = 45°$
d) $S = 17\ cm; \quad \theta = 60°$

7. Graficar y hallar el ángulo (θ) sabiendo que:

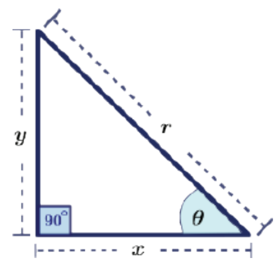
a) $S = 24\ cm; \quad r = 12$ cm
b) $S = \ 2\ km; \quad r = 0{,}8$ km
c) $S = 0{,}20\ m; \quad r = 8\ \ cm$
d) $S = 120\ cm; \quad r = 0{,}8\ m$

Área sector circular

8. Hallar el área del sector circular que tiene las siguientes características:

a) $r = 3\ cm; \theta = \pi\ rad$
b) $r = 6\ cm; \theta = \frac{\pi}{2}\ rad$
c) $r = 2\ cm; \theta = 90°$

9. Hallar las razones trigonométricas de θ si:



a) $r = 5\ ; x = 4$	d) $x = 1; r = \sqrt{2}$
b) $r = 8\ ; y = 3$	e) $y = 2; r = 2\sqrt{3}$
c) $x = 2\ ; y = 5$	f) $x = 4\ m; y = 3$

10. Sabiendo que $sen\ \theta = \dfrac{4}{5}$. Calcular:

a) $C = \dfrac{cos\ \theta + sen\ \theta}{tg\ \theta}$	c) $N = \dfrac{ctg\ \theta - sec\ \theta}{tg\ \theta}$
b) $O = \dfrac{cosec\ \theta + sen\ \theta}{tg\ \theta}$	d) $V = \dfrac{sen^2\ \theta + cos^2\ \theta}{2tg\ \theta}$

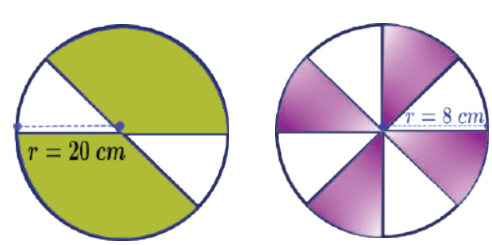
11. Utilizando razones de ángulos notables. Calcular:

a) $S = \dfrac{cos\ 90 + sen\ 30}{tg\ 45}$	c) $E = \dfrac{ctg\ 45 - sec\ 60}{1 + sen^2 30}$
b) $H = \dfrac{sen\ 60 + 1}{cos\ 45}$	d) $P = \dfrac{sen\ 90 + cos\ 0}{4tg\ 45}$

12. Se tiene un círculo de 4 centímetros de radio. Calcular el área del círculo.

13. El diámetro de un semicírculo mide 20 metros. Calcular el área del semicírculo.

14. Calcular el área del sector sombreado:



TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

1. Graficar en el plano cartesiano y establecer el cuadrante en que terminan los siguientes ángulos:

a) 30°	d) 400°
b) 150°	e) 560°
c) 280°	f) 1000°

3. Representar gráficamente los siguientes pares ordenados y hallar r:

a) (2,5)	d) (0,4)
b) (-3, -5)	e) (-3, - 4)
c) (5, -3)	f) (1, -5)

Signos de las funciones trigonométricas

2. Graficar en el plano cartesiano y señalar los signos de sen, cos y tg de los siguientes pares:

a) (3,6)	c) (- 4, - 4)
b) (-3, 5)	d) (3, - 5)

4. Calcular las seis funciones trigonométricas sabiendo que:

a) $cos\ \theta = \frac{3}{5}$	d) $ctg\ \theta = \frac{1}{5}$
b) $sen\ \theta = \frac{4}{5}$	e) $sec\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$
c) $cosec\ \theta = \frac{5}{2}$	f) $cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. Sabiendo que $sen\ \theta = \dfrac{4}{5}$. Calcular:

a) $A = \frac{sen\ \theta + 1}{cos\ \theta}$

b) $M = \frac{tg\ \theta - sec\ \theta}{1 + sen^2\theta}$

c) $O = \frac{cosec\theta}{sen^2\theta + cos^2\theta}$

d) $R = \frac{cosec\ \theta \cdot sec^2\theta}{1 + tg^2\theta}$

6. Sabiendo que $ctg\ \theta = 1$. Calcular:

a) $M = \frac{2sen^2\theta + 1}{2tg\ \theta + 2}$

b) $Y = \frac{ctg\ \theta - sec\ \theta}{sen^2\theta}$

c) $J = \frac{sec\theta}{4sen^2\theta + 4cos^2\theta}$

Gráficas de funciones trigonométricas

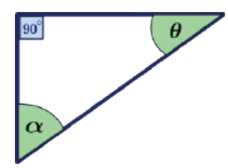
7. Analizando las características de funciones, graficar:

a) $y = 2sen\ x$	d) $y = sen\ (4x)$
b) $y = 2cos\ x$	e) $y = 2sen\ (2x)$
c) $y = cos\ (3x)$	f) $y = 5sen\ (x)$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Suma de Ángulos

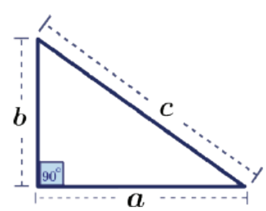
1. Dado el triángulo rectángulo, hallar el ángulo desconocido:



a) $\alpha = 30°; \theta = ?$	a) $\alpha = 22{,}5°; \theta = ?$
b) $\alpha = 45°; \theta = ?$	b) $\alpha = ?; \theta = \frac{\pi}{4} rad$
c) $\alpha = ?; \theta = 68°$	c) $\alpha = \frac{\pi}{3} rad; \theta = ?$

Teorema de Pitágoras

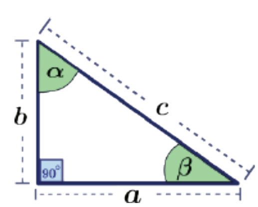
2. Dado el triángulo rectángulo, hallar el lado desconocido:



a) $a = 3; b = 2$	a) $c = 3; b = 1$
b) $a = 3; b = \sqrt{3}$	b) $c = \sqrt{5}; b = \sqrt{2}$
c) $a = 1; b = 1$	c) $a = 5; b = 2\sqrt{3}$

Funciones trigonométricas

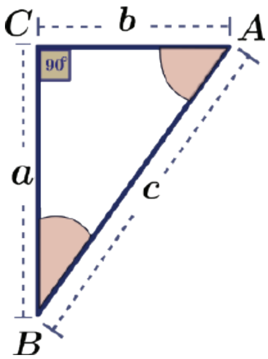
3. Utilizando funciones trigonométricas. Calcular:



a) Hallar α sabiendo que: $a = 4; b = 3$
b) Hallar β sabiendo que: $c = 8; b = 2$
c) Hallar β sabiendo que: $c = 5; b = 2$
d) Hallar a sabiendo que: $\alpha = 30°; b = 3$
e) Hallar c sabiendo que: $\beta = 30°; b = 3$

Resolución de Triángulos

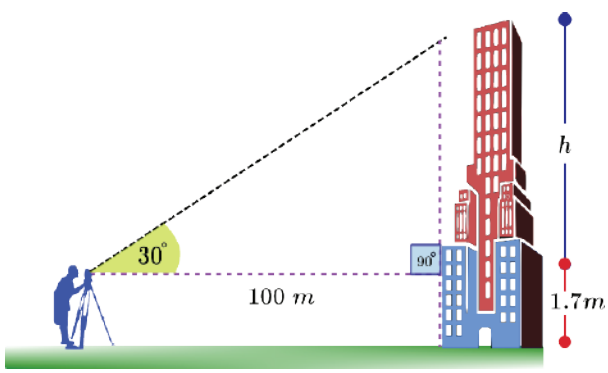
4. Resolver los siguientes triángulos *(C=90°):*



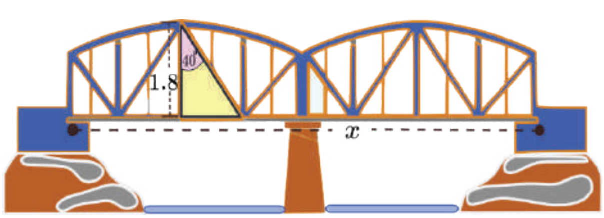
a) $A = 30°; b = 2$
b) $B = 15°; c = \sqrt{3}$
c) $A = 25°; a = 8$
d) $a = 10; c = 20$
e) $b = 2; c = 2\sqrt{3}$
f) $A = 80°; c = 10$
g) $a = 10; c = 20$
h) $b = 2; c = 2\sqrt{3}$
i) $A = 80°; c = 10$
j) $a = 5\sqrt{2}; c = 6\sqrt{17}$

Problemas

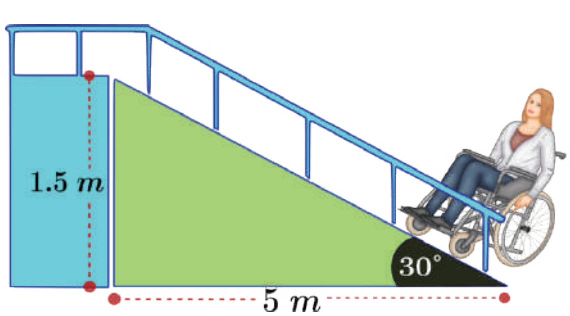
5. La altura de Rómulo es de 1,7 m, con un teodolito calcula el ángulo de elevación de la cima del edificio que es 30°; Rómulo está ubicado 100 metros de la base del edificio. Calcula la altura del edificio.



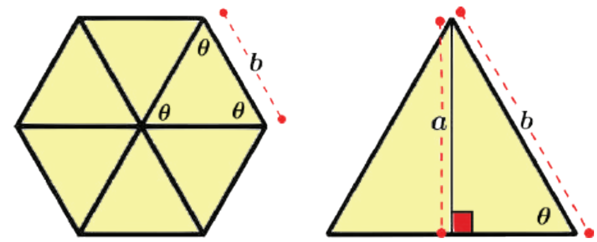
6. La estructura de un puente está formado por triángulos rectángulos de altura 1,8 metros y un ángulo agudo de 40°. Calcular la longitud del puente.



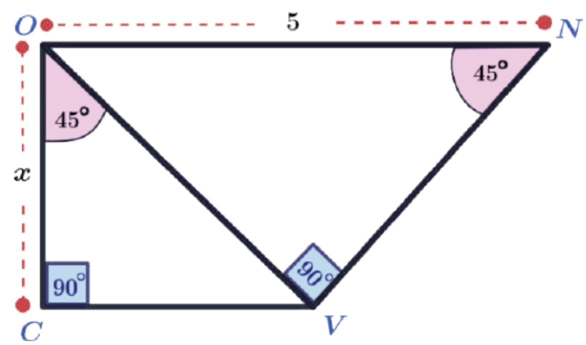
7. Un pendiente tiene un ángulo de inclinación de 30°, la forma triangular tiene lados de 1,5 metros 5 metros. Calcular la longitud de la pendiente.



8. Una celda solar convierte la energía de la luz solar directamente en energía eléctrica. La cantidad de energía que produce una célula depende de su zona de forma hexagonal. Hallar su área hexagonal, sabiendo que su lado mide 10 cm.



9. Dado el triángulo rectángulo, hallar el lado desconocido:

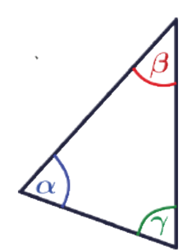


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Suma de Ángulos

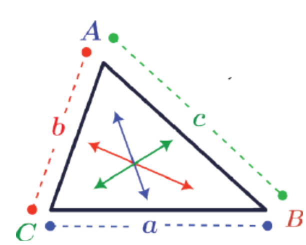
1. Dado el triángulo oblicuángulo, hallar el ángulo desconocido:

a) $\alpha = 30°; \beta = 45; \gamma = ?$
b) $\alpha = 100°; \beta = ?; \gamma = 50°$
c) $\alpha = 55°; \beta = 45; \gamma = ?$
d) $\alpha = ?; \beta = 45; \gamma = 10°$
e) $\alpha = ?; \beta = 20; \gamma = 5°$



Ley de Senos

2. Dado el triángulo oblicuángulo, hallar el dato pedido:



a) $B = 30°; C = 50; c = 10; \; b = ?$

b) $A = 75°; B = 25°; b = 12; a = ?$
c) $a = 12; b = 8;\ B = 40°; A = ?$
d) $a = 11; C = 36°;\ B = 68°; c = ?$
e) $a = 8; c = 6;\ A = 60°; C = ?$
f) $a = 14; A = 58°;\ B = 55°; b = ?$

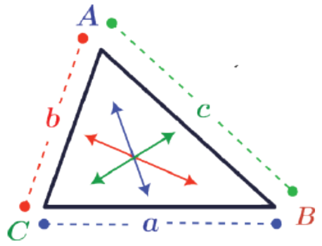
Ley de Cosenos

3. Dado el triángulo oblicuángulo, hallar el dato pedido:

a) $a = 6; b = 7; C = 40°; c = ?$
b) $b = 20; c = 16;\ A = 25°; a = ?$
c) $a = 10; b = 12;\ c = 8; C = ?$
d) $b = 9; c = 11;\ A = 65°; a = ?$
e) $a = 15; b = 12;\ c = 14; A = ?$

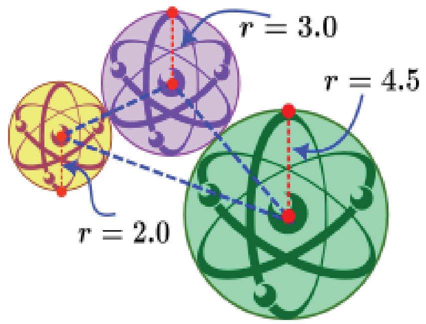
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

4. Resolver los triángulos.

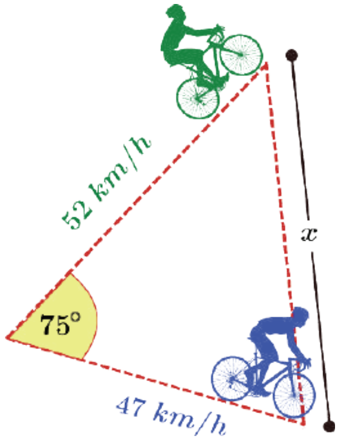


a) $A = 68.41°, B = 54.23°, a = 12.75$
b) $C = 74.08°, B = 69.38°$, c = 45,38
c) $B = 48.2°;\ a = 890$ cm; $b = 697$ cm
d) $B = 74.3°, a = 859, b = 783$
e) $A = 67.3°, b = 37.9$ m, $c = 40.8$ m
f) $C = 28.3°;\ b = 5.71;\ a = 4.21$
g) $a = 22;\ b = 45;\ c = 31$
h) $a = 154$ cm, $b = 179$ cm, $c = 183$ cm
i) $a = 12;\ b = 16;\ c = 25$

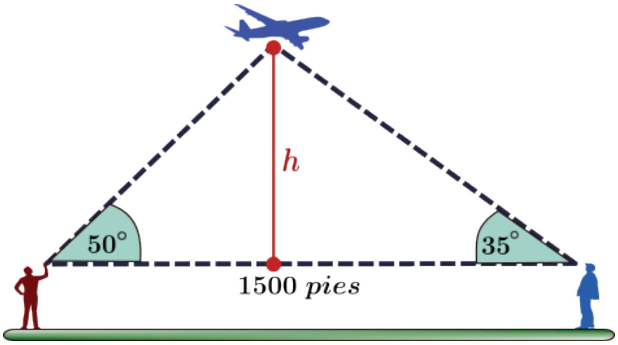
5. Tres átomos con radios atómicos de 2,0, 3,0 y 4,5 están dispuestos como en la figura. Encuentra la distancia entre los centros de los átomos y sus ángulos interiores.



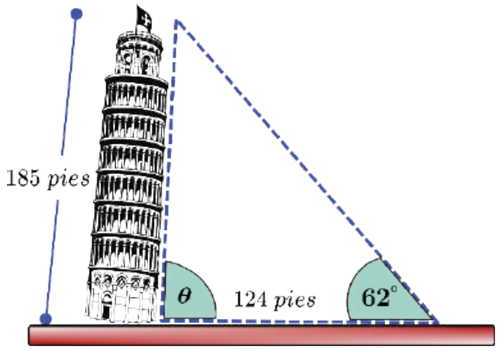
6. Dos ciclistas salen juntos de un punto común y viajan en direcciones distintas y tienen un ángulo de 75° entre ellos. Si cada uno recorre 52 km/h y 47 km/h ¿Cuál es la distancia que los separa?



7. Dos observadores que están separados por 1000 pies detectan un avión. Cuando el avión pasa sobre la línea que los une, cada uno hace una observación del ángulo de elevación al avión, como se indica en la figura. ¿A qué altura va el avión?



8. La famosa torre inclinada de Pisa tiene aproximadamente 185 pies de altura. A una distancia de 124 pies de la base de la torre, el ángulo de elevación a la punta de la torre es de 62°. Encuentre el ángulo θ indicado en la figura.



(Ejercicios y problemas recopilados)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

PRÁCTICA


Fuente:eldeber.com.bo

Cuando se habla de identidad, lo que se nos viene a la mente, podría ser, el documento de identificación, la cedula de identidad en el que están los datos y características de cada persona, el cual nos permite identificarnos como habitantes de nuestro País.

Si hablamos de identidad cultural, encontraremos diferentes usos y costumbres que caracterizan a cada región y comunidad.

Actividad

Respondamos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

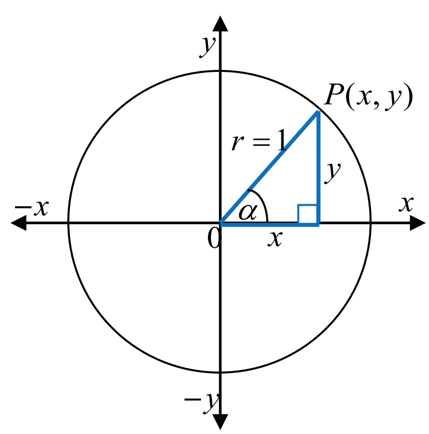
- ¿Qué significa la palabra identidad?
- ¿Cuál es el número de tu cedula de identidad?
- ¿Qué usos y costumbres se practican en tu comunidad o lugar donde vives?

1. Identidades trigonométricas fundamentales

Una identidad trigonométrica es una igualdad establecida entre dos expresiones que involucren funciones trigonométricas de una o más variables (o ángulos), las cuales se verifican para todo valor admisible de dichas variables.

Las identidades o relaciones fundamentales se clasifican: Identidades reciprocas o inversas, identidades de cociente e Identidades Pitagóricas.

A partir de la circunferencia trigonométrica de radio igual a uno



Tendremos las siguientes definiciones de las funciones trigonométricas.

$$sen\alpha = y \qquad cos\alpha = x \qquad tan\alpha = \frac{y}{x}$$

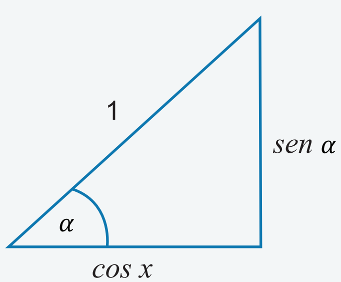
$$csc\alpha = \frac{1}{y} \qquad sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Teorema fundamental de la trigonometría

Se considera como el Teorema fundamental de la trigonometría a la identidad pitagórica.

$$sen^2\alpha + cos^2 x = 1$$

Que se deduce a partir del triángulo trigonométrico de hipotenusa igual a uno.



Relaciones inversas

Para obtener las identidades inversas, emplearemos las definiciones de las funciones trigonométricas anteriormente encontradas.

$$csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}}$$

$$cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{cot\alpha = \frac{1}{tan\alpha}}$$

Relaciones por cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: tangente y cotangente y tiene la propiedad de relacionar por medio de un cociente, las funciones trigonométricas de seno y coseno.

$$tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

$$cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Relaciones pitagóricas

Si aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la circunferencia trigonométrica tendremos:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 = 1$$

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Si dividimos entre coseno a la anterior expresión trigonométrica tendremos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$$

Si dividimos entre coseno a la anterior expresión trigonométrica tendremos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha}$$

En resumen, tendremos:

Recíprocas o inversas	Por cociente	Pitagóricas
$csc\alpha = \frac{1}{Sen\alpha}$	$tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$	$cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$	$sec^2\alpha = 1 + tan^2\alpha$
$tan\alpha = \frac{1}{cot\alpha}$		$csc^2\alpha = 1 + cot^2\alpha$

Curiosidades matemáticas

Los antiguos babilonios, verdaderos genios en matemáticas, desarrollaron sus estudios matemáticos en base 60 en lugar de base 10. Por esta razón, un minuto tiene 60 segundos y un círculo tiene 360°.

Fuente: *http://trigonometriando.blogspot.com/2015/06/curiosidades.html*

Observación

De cada identidad, es siempre posible despejar algún valor necesario, lo que se constituye como consecuencia, sin dejar de ser identidad.

Sea:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

entonces:

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$

Simplificación

En cualquier expresión trigonométrica, al momento de reemplazar las expresiones trigonométricas con identidades trigonométricas, se procede con el efecto de simplificación, así:

Esta es una expresión trigonométrica,

$$\cos x \cdot \tan x$$

Con la identidad $\tan x = \dfrac{sen\,x}{\cos x}$, se tiene:

$$\cos x \cdot \tan x = \cos x \cdot \frac{sen\,x}{\cos x}$$
$$= 1 \cdot sen\,x = sen\,x$$

De este modo:

$$\cos x \cdot \tan x = sen\,x$$

2. Demostración de identidades trigonométricas

Demostrar o verificar una identidad significa transformar un miembro de una identidad en otra igual al miembro opuesto, empleando relaciones fundamentales, mediante diferentes operaciones como factorización, fracciones y otras. Algunas sugerencias para demostrar las identidades trigonométricas son las siguientes:

- Transformar el miembro más complicado.
- Expresamos las funciones en términos de seno y coseno luego simplificar.
- Efectuar operaciones algebraicas y factorizaciones convenientes.

Ejemplo: Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$senx \cdot cotx + cosx \cdot tanx = senx + cosx$$ *Reemplazamos* $cotx = \dfrac{cosx}{senx}$

$$senx \cdot \frac{cosx}{senx} + cosx \cdot \frac{senx}{cosx} = senx + cosx$$ *Simplificamos*

$$cosx + senx = senx + cosx$$ *Ordenamos*

$$senx + cosx = senx + cosx$$

Ejemplo: Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$cosx = \frac{1 + cotx}{secx + cscx}$$

$$cosx = \frac{1 + \dfrac{cosx}{senx}}{\dfrac{1}{cosx} + \dfrac{1}{senx}}$$ Reemplazamos $cotx = \dfrac{cosx}{senx}$ $\quad secx = \dfrac{1}{cosx}$ $\quad cscx = \dfrac{1}{senx}$

$$cosx = \frac{\dfrac{senx + cosx}{senx}}{\dfrac{senx + cosx}{cosx \cdot senx}}$$ Operamos las fracciones

$$cosx = \frac{\cancel{(senx + cosx)}(cosx \cdot \cancel{senx})}{\cancel{senx}\ \cancel{(senx + cosxx)}}$$ Simplificamos

$$cosx = cosx$$

Ejemplo: Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{1+senx} + \frac{1}{1-senx} = 2sec^2x$$ Calculamos el m. c. m. $(1 + senx)(1 - senx)$

$$\frac{1 - \cancel{senx} + 1 + \cancel{senx}}{(1+senx)(1-senx)} = 2sec^2x$$ Realizamos operaciones en la fracción y simplificamos

$$\frac{2}{1 - sen^2x} = 2sec^2x$$ Aplicando identidad trigonométrica

$$sen^2x + cos^2x = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2x = 1 - sen^2x$$

$$2\,\frac{1}{cos^2x} = 2sec^2x$$

$$2sec^2x = 2sec^2x$$

Ejemplo:

Demostramos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}} = cscx + cotx$$

$$\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}\cdot\frac{1+cosx}{1+cosx}} = cscx + cotx$$ Multiplicamos $\frac{1+cosx}{1-cosx}$ por su conjugado $\frac{1+cosx}{1+cosx}$

$$\sqrt{\frac{(1+cosx)^2}{1-cos^2x}} = cscx + cotx$$ Realizamos operaciones dentro de la raíz aplicando diferencia de binomios $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\sqrt{\frac{(1+cosx)^2}{sen^2x}} = cscx + cotx$$ Por identidad $1-cos^2x = sen^2x$

$$\frac{1+cosx}{senx} = cscx + cotx$$ Extrayendo raíces

$$\frac{1}{senx}+\frac{cosx}{senx} = cscx + cotx$$ Distribuyendo el denominador

$$cscx + cotx = cscx + cotx$$

Actividad

Demostramos las siguientes identidades trigonométricas:

a) $senx + cosx = \frac{1+tanx}{secx}$

b) $\frac{tanx}{cscx} = senx \cdot tanx$

c) $\frac{cscx}{senx}+\frac{cosx}{senx} = 2cotx$

d) $\frac{cosx+cotx}{tanx+secx} = cscx - senx$

e) $\frac{cotx}{secx-tanx} = cscx + 1$

f) $\frac{secx}{tanx+cotx} = senx$

g) $\frac{1+cscx}{secx} - cotx = cosx$

h) $\frac{csc^2x}{1+tan^2x} = cot^2x$

i) $\frac{cosx}{1-senx} = secx + tanx$

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función de lo aprendido

- ¿Cuál es la importancia de aprender identidades trigonométricas?
- ¿Dónde se aplican las identidades trigonométricas?
- ¿Qué valores sociocomunitarios se pueden rescatar en identidades trigonométricas?

PRODUCCIÓN

Actividad

- Realizamos un formulario con todas las identidades trigonométricas.
- Realizamos un esquema referido a identidades trigonométricas para compartir en la clase.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

PRÁCTICA

Josué, de camino a su Unidad Educativa, observó muchos techos de casas, algunos tenían la pendiente muy elevada otros la pendiente baja, también observó que el tinglado de su establecimiento educativo tiene el techo inclinado a ambos lados, al realizar la observación se dio cuenta que las inclinaciones de los techos dependían de la altura y el ancho de las construcciones y el ángulo que formaban estos eran diferentes unos a otros.

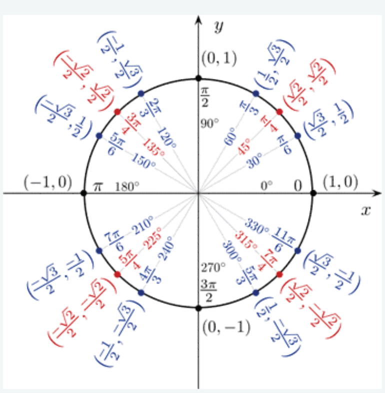
Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

1. ¿Por qué algunos techos de casa tienen la pendiente elevada?
2. ¿De qué depende las inclinaciones de los techos de las casas?
3. ¿Por qué son diferente las pendientes de los techos de las casas?

Círculo unitario

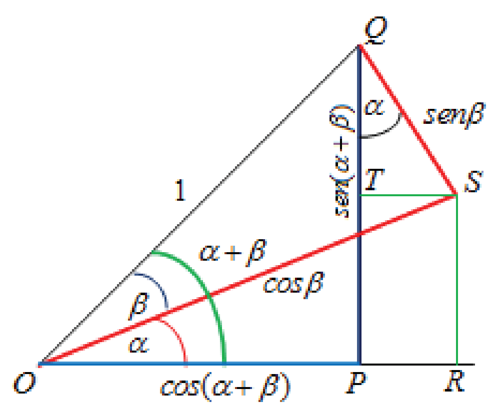
Un círculo de unidad es un círculo con radio 1 centrado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares. Se usa comúnmente en el contexto de trigonometría.



Fuente: https://euclides.org/circulo-unitario/

1. Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos

En trigonometría las identidades de suma y diferencia de dos ángulos son útiles para calcular los valores de las funciones trigonométricas de dos ángulos.



$$sen\beta = \overline{SQ}$$

$$cos\beta = \overline{OS}$$

$$sen(\alpha+\beta) = \overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ}$$

$$sen\alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PT}}{cos\beta};\ luego\ \overline{PT} = sen\alpha \cdot cos\beta$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{TQ}}{sen\beta};\ luego\ \overline{TQ} = cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta}$$

Del mismo modo:

$$sen\beta = \overline{SQ}$$
$$cos\beta = \overline{OS}$$
$$sen(\alpha+\beta) = \overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ}$$
$$sen\alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PT}}{cos\beta};\ luego\ \overline{PT} = sen\alpha \cdot cos\beta$$
$$cos\alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{TQ}}{sen\beta};\ luego\ \overline{TQ} = cos\alpha \cdot sen\beta$$
$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta}$$

De acuerdo a las anteriores deducciones de similar modo se pueden establecer las identidades para la diferencia de ángulos:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$$
$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta}$$

Para la tangente:

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sen\alpha \cdot cos\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} + \dfrac{cos\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha \cdot cos\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} - \dfrac{sen\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta}}$$
$$\boxed{tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}}$$
$$\boxed{tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}}$$

Recuerda

	30º	45º	60º
$sen\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ejemplo:

Calculamos el valor exacto de $sen\ 15^o$

Para calcular el valor exacto de $sen\ 15^o$ de 45^o restaremos 30^o

$$sen15º = sen(45º - 30º)$$
$$sen15º = sen45º \cdot cos30º - cos45º \cdot sen30º$$
$$sen15º = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\boxed{sen15º = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

Ejemplo:

Demostrar:

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx \qquad aplicando \quad \boxed{cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta}$$

$$Tenemos: cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cancel{cos\frac{\pi}{2}}^{0} \cdot cosx + \cancel{sen\frac{\pi}{2}}^{1} \cdot senx \quad \Rightarrow \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = senx$$

Ejemplo:

Calcular el valor exacto de *tan 15º*.

Para calcular el valor exacto de *tan 15º* de *45º* restaremos *30º*

$$tan15^o = tan(45^o - 30^o)$$

$$Aplicando: \boxed{tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1+tan\alpha \cdot tan\beta}}$$

$$tan15^o = tan\left(45^o - 30^o\right)$$

$$tan15^o = \frac{tan45^o - tan30^o}{1+tan45^o \cdot tan30^o} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$$

$$tan15^o = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-\sqrt{3}^2} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}$$

$$tan15^o = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{6}(2-\sqrt{3})}{\cancel{6}}$$

$$\boxed{tan15^o = 2-\sqrt{3}}$$

Actividad

Comprobamos las siguientes identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos:

$$a)\ sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx \qquad b)\ cos\left(90^o - x\right) = senx$$

$$c)\ sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad d)\ tan(270^o + x) = -cotx$$

Calculamos el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

$a)\ sen135^o$ $\quad b)\ cos135^o$ $\quad c)\ cos15^o$

$d)\ tan75^o$ $\quad e)\ sen105^o$ $\quad f)\ cos75^o$

$g)\ tan135^o$ $\quad h)\ sen120^o$ $\quad i)\ cos120^o$

2. Identidades trigonométricas de ángulos dobles

Para hallar las identidades de ángulo doble partiremos de la identidad suma de ángulos.

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$$

Reemplazando $\beta = \alpha$

$$sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha \cdot cos\alpha + cos\alpha \cdot sen\alpha$$

Reduciendo términos semejantes tendremos:

$$\boxed{sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot cos\alpha}$$

Se realiza el mismo procedimiento para coseno y tangente.

$$\boxed{cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

$$\boxed{tan(2\alpha) = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}}$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble.

$$sen^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

$$sen^2x = \frac{1 - (cos^2x - sen^2x)}{2}$$ Aplicando identidad del coseno doble

$$sen^2x = \frac{\overbrace{1 - cos^2x}^{sen^2x} + sen^2x}{2}$$ De la identidad fundamental

$$sen^2x = \frac{sen^2x + sen^2x}{2}$$ $sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow sen^2x = 1 - cos^2x$

Suma de términos semejantes

$$sen^2x = \frac{\cancel{2}sen^2x}{\cancel{2}}$$ Simplificamos

$$sen^2x = sen^2x$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble:

$$\frac{1 + cos2x}{sen2x} = cotx$$

$$\frac{1 + (cos^2x - sen^2x)}{2senx \cdot cosx} = cotx$$ Aplicando la identidad del seno y coseno doble.

$$\frac{1 + cos^2x - sen^2x}{2senx \cdot cosx} = cotx$$ Operando el paréntesis

$$\frac{\overbrace{1 - sen^2x}^{cos^2x} + cos^2x}{2senx \cdot cosx} = cotx$$ De la identidad fundamental $sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow cos^2x = 1 - sen^2x$

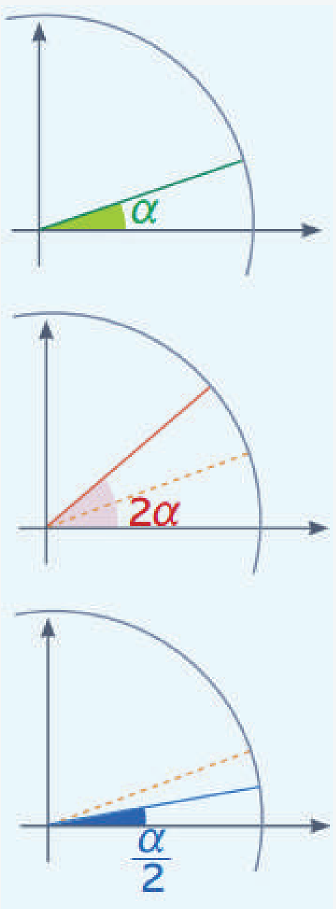
$$\frac{cos^2x + cos^2x}{2senx \cdot cosx} = cotx$$ Suma de términos semejantes

$$\frac{\cancel{2}cos^{\cancel{2}}x}{\cancel{2}senx \cdot cosx} = cotx$$ Simplificamos

$$\frac{cosx}{senx} = cotx$$ Identidades por cociente

$$cotx = cotx$$

En el círculo trigonométrico



Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica con ángulo doble: $sec2x = \dfrac{1+tan^2x}{1-tan^2x}$

$$sec2x = \frac{1+tan^2x}{1-tan^2x}$$

$$sec2x = \frac{1+\dfrac{sen^2x}{cos^2x}}{1-\dfrac{sen^2x}{cos^2x}}$$ Aplicando la identidad por cociente $tan^2x = \dfrac{sen^2x}{cos^2x}$

$$sec2x = \frac{\dfrac{cos^2x+sen^2x}{\cancel{cos^2x}}}{\dfrac{cos^2x-sen^2x}{\cancel{cos^2x}}}$$ Operando las fracciones y simplificando

$$sec2x = \frac{cos^2x+sen^2x}{cos^2x-sen^2x}$$ Identidad fundamental pitagórica $cos^2x+sen^2x=1$

$$sec2x = \frac{1}{cos2x}$$ Coseno del ángulo doble e identidad recíproca

$$sec2x = sec2x$$

Actividad

Calculamos las siguientes identidades de ángulo doble:

$a)\ \dfrac{sen2x}{senx} - \dfrac{cos2x}{cosx} = secx$

$b)\ \dfrac{1+cos2x}{2} = cos^2x$

$c)\ csc2x = \dfrac{1}{2}secx \cdot cscx$

$d)\ \dfrac{1+cos2x}{2} = cos^2x$

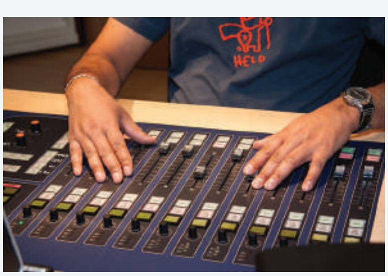
$e)\ \dfrac{sen2x}{senx} \cdot \dfrac{1+cosx}{4cosx} = \dfrac{1+cosx}{4cosx}$

$f)\ \dfrac{cos2x}{cosx-senx} = senx+cosx$

3. Identidades trigonométricas de ángulo mitad

Las identidades trigonométricas del ángulo mitad se deducen a partir de las identidades del coseno del ángulo doble.

Dato



Las identidades trigonométricas son utilizadas para la interpretación de equipos electrónicos.

$$cos2x = cos^2x - sen^2x \quad Pero \quad cos^2x = 1-sen^2x$$

$$cos2x = 1-sen^2x-sen^2x$$

$$cos2x = 1-2sen^2x$$

$$Reemplazando\ x\ por\ \frac{x}{2}$$

$$2sen^2x = 1-cos2x$$

$$2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-cos\,\cancel{2}\left(\frac{x}{\cancel{2}}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-cosx}{2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}}$$

Para hallar el ángulo mitad del coseno deduciremos a partir del coseno doble de un ángulo.

$$cos2x = cos^2x - sen^2x \quad Pero \quad sen^2x = 1 - cos^2x$$

$$cos2x = cos^2x - (1 - cos^2x)$$

$$cos2x = 2cos^2x - 1$$

$$Reemplazando\ x\ por\ \frac{x}{2}$$

$$cos\,\cancel{2}\left(\frac{x}{\cancel{2}}\right) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = cosx + 1$$

$$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cosx + 1}{2}$$

$$\boxed{cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{cosx + 1}{2}}}$$

Para hallar el ángulo mitad de la tangente deduciremos a partir de las identidades por cociente.

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1 - cosx}{2}}}{\sqrt{\frac{cosx + 1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1 - cosx}{\cancel{2}}}{\frac{1 + cosx}{\cancel{2}}}}$$

$$\boxed{tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cosx}{1 + cosx}}}$$

Otras identidades de la tangente del ángulo mitad son:

$$\boxed{tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{senx}{1 + cosx}} \qquad \boxed{tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - cosx}{senx}}$$

Formulario

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha \cdot cos\,\alpha$$

$$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tan(2\alpha) = \frac{2\,tan\,\alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1}}$$

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$$

Ejemplo:

Calcular las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo mitad de 45º

$$sen\ 22^o30` = sen\left(\frac{45^o}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$cos\ 22^o30` = cos\left(\frac{45^o}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

Ejemplo:

Si $cos\alpha = \frac{4}{5}$, calcular $tan\frac{\alpha}{2}$

$$tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{5-4}{5}}{\frac{5+4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \boxed{tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}}$$

Ejemplo:

Demostrar la siguiente identidad trigonométrica de ángulo mitad.

$$tan\frac{x}{2} = \frac{1-cosx}{senx}$$

$$tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}\cdot\frac{1-cosx}{1-cosx}} = \sqrt{\frac{(1-cosx)^2}{1-cos^2x}} = \sqrt{\frac{(1-cosx)^2}{sen^2x}}$$

$$tan\frac{x}{2} = \frac{1-cosx}{senx}$$

Actividad

- **Demostramos las siguientes identidades trigonométricas del ángulo mitad:**

$a)\ tan\frac{x}{2} = \frac{senx}{1+cosx}$ $\qquad b)\ tan\frac{x}{2} = cscx - cotx$

$c)\ cosx = \dfrac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$ $\qquad d)\ senx = \dfrac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$

- **Calculamos las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo mitad de:**

$a)\ 150^{\circ}$ $\qquad b)\ 30^{\circ}$ $\qquad c)\ 90^{\circ}$ $\qquad d)\ 120^{\circ}$

4. Transformación de expresiones trigonométricas

Transformación de suma a producto y de producto a suma.

Transformar una expresión trigonométrica es convertirla en otra equivalente que contiene funciones trigonométricas mucho más simples. Es por ello que podemos indicar varios tipos de transformaciones.

De suma o de diferencia a producto.

Las sumas o las restas de razones trigonométricas pueden transformarse en productos de si mismas.

De las fórmulas del seno de la suma y de la resta tenemos:

$$sen(a+b) = sena\cdot cosb + senb\cdot cosa$$
$$sen(a-b) = sena\cdot cosb - senb\cdot cosa$$

Sumando las igualdades tenemos:

$$sen(a+b) + sen(a-b) = 2sena\cdot cosb$$

Si transformamos:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=\alpha \\ a-b=\beta \end{array}\right\}$$

Sumando y restando igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} 2a=\alpha+\beta \\ 2b=\alpha-\beta \end{array}\right\} \qquad a=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad b=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\boxed{sen\alpha+sen\beta=2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Las otras formulas se obtiene analógicamente.

Transformación de la resta de senos en producto.

$$\boxed{sen\alpha-sen\beta=2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Transformación de la suma de cosenos en producto.

$$\boxed{cos\alpha+cos\beta=2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Transformación de la resta de cosenos en producto.

$$\boxed{cos\alpha-cos\beta=-2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

De producto a suma o diferencia

De las fórmulas del coseno del ángulo suma y el ángulo resta tenemos:

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta-sen\alpha\cdot sen\beta$$
$$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta$$

Restando ambas identidades tenemos:

$$cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)=-2sen\alpha\cdot sen\beta$$

Despejando se tiene:

$$\boxed{sen\alpha\cdot sen\beta=-\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)]}$$

Transformación del producto del seno de α y coseno de β en suma o resta.

$$\boxed{sen\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]}$$

Transformación del producto del coseno de α y seno de β en suma o resta.

$$\boxed{cos\alpha\cdot sen\beta=\frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)]}$$

Formulario

$$sen(2\alpha)=2sen\alpha\bullet cos\alpha$$
$$cos(2\alpha)=cos^2\alpha-sen^2\alpha$$
$$tan(2\alpha)=\frac{2\,tan\,\alpha}{1-tan^2\alpha}$$

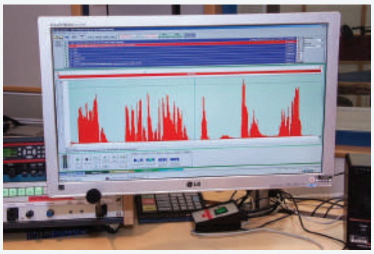
$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1}}$$
$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}$$
$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}$$

También:

$$\cos(2\alpha)=1-2\,\text{sen}^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Dato

Las identidades trigonométricas son utilizadas en el cálculo e interpretación de los movimientos sísmicos que se producen en el planeta.



Transformación del producto del coseno de α y β en suma o resta.

$$\boxed{cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)\right]}$$

Ejemplo:

Expresar las sumas y diferencias como productos.

$$a)\ sen5\alpha - sen3\alpha = 2cos\left(\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\right)$$

$$sen5\alpha - sen3\alpha = 2cos\left(\frac{8\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\alpha}{2}\right)$$

$$sen5\alpha - sen3\alpha = 2cos4\alpha \cdot sen\alpha$$

$$b)\ cos7x - cos3x = -2sen\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$$

$$cos7x - cos3x = -2sen\left(\frac{10x}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{4x}{2}\right)$$

$$cos7x - cos3x = -2sen5x \cdot sen2x$$

Ejemplo:

Reducir la siguiente expresión trigonométrica mediante la transformación de suma a producto.

$$E = \frac{sen7x + sen5x}{sen6x + sen4x}$$

$$E = \frac{2sen\left(\frac{7x+5x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)} = \frac{\cancel{2}sen\left(\frac{12x}{2}\right)\cdot \cancel{cos\left(\frac{2x}{2}\right)}}{\cancel{2}sen\left(\frac{10x}{2}\right)\cdot \cancel{cos\left(\frac{2x}{2}\right)}}$$

$$\boxed{E = \frac{sen6x}{sen5x}}$$

Ejemplo:

Expresar los productos como sumas o diferencias:

$$a)\ sen6x \cdot cos3x = \frac{1}{2}\left[sen(6x+3x)+sen(6x-3x)\right]$$

$$sen6x \cdot cos3x = \frac{1}{2}\left(sen9x + sen3x\right)$$

$$\boxed{sen6x \cdot cos3x = \frac{sen9x}{2} + \frac{sen3x}{2}}$$

$$b)\ cos80^o \cdot sen20^o = \frac{1}{2}\left[sen(80^o+20^o) - sen(80^o-20^o)\right]$$

$$cos80^o \cdot sen20^o = \frac{1}{2}(sen100^o - sen60^o)$$

$$\boxed{cos80^o \cdot sen20^o = \frac{sen100^o}{2} - \frac{sen60^o}{2}}$$

Actividad

- **Expresamos las sumas y diferencias como productos:**

$a)\ sen7\alpha - sen3\alpha$ $\quad b)\ cos4\beta - cos2\beta$ $\quad c)\ sen5x + sen3x$

$d)\ sen9\beta + sen5\beta$ $\quad e)\ cos7x + cos3x$ $\quad f)\ sen6\alpha - sen2\alpha$

- **Demostramos las siguientes identidades:**

$$a)\ \frac{cos8x + cos6x}{sen8x - sen6x} = tanx \qquad b)\ \frac{sen\alpha + sen3\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha} = tan2\alpha$$

- **Reducimos las siguientes expresiones trigonométricas:**

$$a)\ \frac{sen5x + senx}{sen4x + sen2x} \qquad b)\ \frac{sen7\alpha - sen3\alpha}{cos7\alpha + cos3\alpha} \qquad c)\ \frac{sen80^{\circ} + sen20^{\circ}}{cos20^{\circ} - cos80^{\circ}}$$

- **Expresamos los productos como sumas o diferencias:**

$a)\ sen6x \cdot sen2x$ $\quad b)\ sen5x \cdot cos3x$ $\quad c)\ cos6x \cdot sen4x$

$d)\ cos8x \cdot cos6x$ $\quad e)\ sen7x \cdot sen3x$ $\quad f)\ sen10x \cdot sen4x$

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función a lo aprendido:

- ¿Cuál es la importancia de aprender identidades de suma y resta de ángulos?
- ¿Por qué es importante el empleo de las identidades de ángulo doble?
- ¿Cómo las identidades del ángulo mitad nos ayuda a resolver problemas en nuestra comunidad?

PRODUCCIÓN

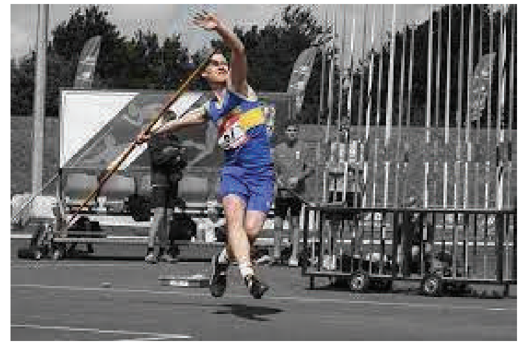
Actividad

- Ampliemos el formulario de identidades trigonométricas con los de suma y resta, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, transformación de suma a producto y de producto a suma.
- Realicemos un esquema referido a identidades trigonométricas de suma y resta, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, transformación de suma a producto y de producto a suma para compartir en la clase.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

PRÁCTICA

Luis es un estudiante que le gusta el deporte, y se destaca en varias disciplinas como el futbol, futbol de salón, baloncesto, voleibol, además practica lanzamiento de jabalina y lanzamiento de bala, durante sus entrenamientos observó que al lanzar la jabalina para que tenga un alcance máximo tenía que lanzar a una determinada inclinación porque si lanzaba hacia arriba la jabalina no llegaba muy lejos.



Fuente: Pixabay

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

- ¿Qué deportes practica Luis?
- ¿Qué relación tiene las ecuaciones trigonométricas con el lanzamiento de jabalina?
- ¿Qué deporte es tu agrado y lo practicas?

TEORÍA

Ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones trigonométricas es necesario conocer y emplear las operaciones básicas del algebra como la factorización, productos notables, operaciones con fracciones, y es primordial conocer las funciones e identidades trigonométricas.

1. Raíces de una ecuación trigonométrica

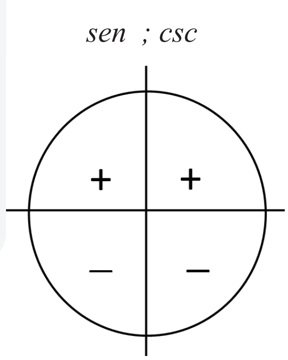
Una ecuación trigonométrica es una igualdad en la que se distinguen razones o funciones trigonométricas de variables angulares y que pueden ser verificadas para determinados valores de dichas variables.

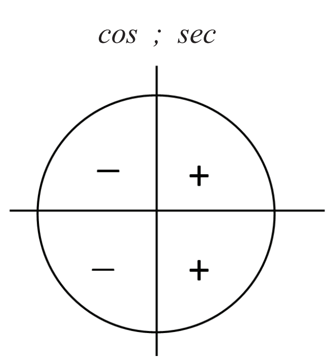
A los valores de la variable que verifiquen la ecuación trigonométrica son llamados raíces o soluciones de la ecuación trigonométrica.

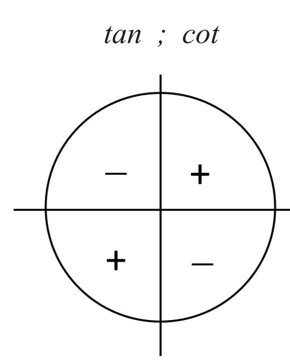
Para resolver las ecuaciones trigonométricas debemos tener en cuenta lo siguiente:

Valores positivos	Valores negativos
$sen\alpha = sen(180^{\circ} - \alpha)$	$-sen\alpha = sen(180^{\circ} + \alpha)$
$cos\alpha = cos(180^{\circ} - \alpha)$	$-cos\alpha = cos(180^{\circ} - \alpha)$
$tan\alpha = tan(180^{\circ} + \alpha)$	$-tan\alpha = tan(360^{\circ} + \alpha)$

Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.







Conocido el valor de la incógnita en el primer cuadrante se puede considerar su equivalente en cualquier otro cuadrante de la siguiente manera.

$$(180^{o} - x) II\ C \qquad (180^{o} + x) III\ C \qquad (360^{o} - x) IV\ C$$

2. Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales (lineales)

Toda ecuación trigonométrica tiene una solución principal y una solución general, la solución principal está en los intervalos del valor principal con menor valor posible y de una función trigonométrica inversa.

La solución general de una ecuación trigonométrica es el conjunto de valores que satisfacen la ecuación y no están en los intervalos de valores principales de una función trigonométrica inversa.

Para resolver una ecuación trigonométrica es necesario despejar la variable, para Hallamos el valor que satisfaga la igualdad, si la ecuación trigonométrica tiene más de una función trigonométrica es preciso convertir a una sola función mediante las identidades trigonométricas ya conocidas, si es necesario aplicar operaciones algebraicas como la factorización.

Recuerda

$$sen^{2}x + cos^{2}x = 1$$

$$sec^{2}x = 1 + tan^{2}x$$

$$csc^{2}x = 1 + cot^{2}x$$

$$tanx = \frac{senx}{cosx} \ ; \ cotx = \frac{cosx}{senx}$$

$$senx = \frac{1}{cscx} \ ; \ cosx = \frac{1}{secx}$$

$$tanx = \frac{1}{cotx}$$

Para calcular las soluciones principales y las soluciones generales nos guiaremos con el siguiente cuadro:

Ecuación trigonométrica	Solución principal	Solución general Sistema sexagesimal	Solución general Sistema radial
$senx = A$	$x = (180^{o} - x_1)$	$x_G = K180^{o} + (-1)^k x_1$	$x_G = K\pi rad + (-1)^k x_1$
$cosx = A$	$x = (360^{o} - x_1)$	$x_G = K360^{o} \pm x_1$	$x_G = K2\pi rad \pm x_1$
$tanx = A$	$x = (180^{o} + x_1)$	$x_G = K180^{o} + x_1$	$x_G = K\pi rad + x_1$

Recordamos los valores notables de las funciones trigonométricas de ángulos más utilizados.

DEG	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}	120^{o}	135^{o}	150^{o}	180^{o}	210^{o}	225^{o}	240^{o}	270^{o}	300^{o}	315^{o}	330^{o}	360^{o}
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2cosx = 1$$

$$cosx = \frac{1}{2}$$

$$x = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{x_1 = 60^o}$$

Recordemos que para convertir 60º a radianes debemos utilizar la fórmula:

$$\boxed{\frac{S}{180^o} = \frac{R}{\pi rad}}$$

$$60^o \cdot \frac{\pi rad}{180^o} = \frac{\pi}{3} rad \ \wedge \ 360^o \cdot \frac{\pi rad}{180^o} = \frac{5\pi}{3} rad$$

Solución principal:

$$x = (360^o - x_1)$$

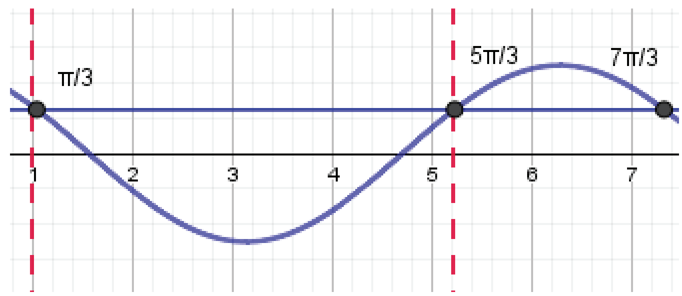
$$x = (360^o - 60^o)$$

$$x = 300^o$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 60^o}$$

$$\boxed{x_G = K2\pi rad \pm \frac{\pi}{3}}$$



Ejemplo:

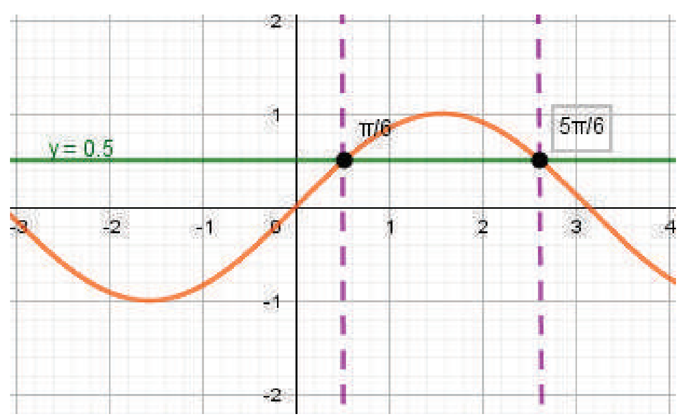
Resolvemos la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2senx = 1$$

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$x = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{x_1 = 30^o}$$



Solución principal:

$$x = (180^o - x_1)$$

$$x = (180^o - 30^o)$$

$$x = 150^o$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K180^o + (-1)^k 30^o}$$

$$\boxed{x_G = K\pi rad + (-1)\frac{\pi}{6}}$$

Actividad

– **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

$a)\ tan\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad b)\ senx = \frac{1}{2}$ $\quad c)\ sen\theta = \frac{3}{4}$

$d)\ tan\beta = \frac{3}{7}$ $\quad e)\ 3cosx - 1 = 0$ $\quad f)\ 4senx - 1 = 0$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$cos2x = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$cos2x = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2x = 30^{o}$$

$$\boxed{x_1 = 15^{o}}$$

Solución principal: $2x = (360^{o} - x_1)$

$$2x = (360^{o} - 30^{o})$$

$$x = \frac{330^{o}}{2}$$

$$x = 165^{o}$$

Solución general:

$$2x_G = K360^{o} \pm 30^{o} \qquad 2x_G = K2\pi rad \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x_G = \frac{K360^{o} \pm 30^{o}}{2} \qquad x_G = \frac{K2\pi rad \pm \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\boxed{x_G = K180^{o} \pm 15^{o}} \qquad \boxed{x_G = K\pi rad \pm \frac{\pi}{12}}$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$4cosx = \sqrt{8}$$

$$4cosx = \sqrt{4 \cdot 2}$$

$$cosx = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{x_1 = 45^{o}}$$

Solución principal: $x = (360^{o} - x_1)$

$$x = (360^{o} - 45^{o})$$

$$x = 315^{o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^{o} \pm 45^{o}} \qquad \boxed{x_G = K2\pi rad \pm \frac{\pi}{4}}$$

Importante

Para resolver este tipo de ejercicios se debe reemplazar 2x =0 en la solución principal y en la solución general luego recién despejar y simplificar.

Actividad

- **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $3tan\alpha = \sqrt{3}$ b) $6cos2x = \sqrt{18}$ c) $3tan\alpha = \sqrt{3} + 2tan\alpha$

d) $8sen2\theta = 4\sqrt{3}$ e) $cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $cos4x - 2 = 0$

Ecuaciones trigonométricas de la forma $m \cdot senx = n \cdot cosx$

Las ecuaciones trigonométricas que tiene la forma $m \cdot senx = n \cdot cosx$, se debe realizar las operaciones adecuadas para expresar en forma de cociente:

$$\boxed{\frac{senx}{cosx} = \frac{n}{m}}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $3 \cdot senx = \sqrt{27} \cdot cosx$

$3 \cdot senx = \sqrt{27} \cdot cosx$

$\frac{senx}{cosx} = \frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$tanx = \sqrt{3}$

$x = tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\boxed{x = 60^o}$

Solución principal:

$x = (180^o + x_1)$

$x = (180^o + 60^o)$

$x = 240^o$

Solución general:

$\boxed{x_G = K180^o \pm 60^o}$ $\boxed{x_G = K\pi rad \pm \frac{\pi}{3}}$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$4 \cdot senx = 4 \cdot cosx$

$\frac{senx}{cosx} = \frac{4}{4} = 1$

$tanx = 1$

$x = tan^{-1}(1)$

$\boxed{x = 45^o}$

Solución principal:

$x = (180^o + x_1)$

$x = (180^o + 45^o)$

$x = 225^o$

Solución general:

$\boxed{x_G = K180^o \pm 45^o}$ $\boxed{x_G = K\pi rad \pm \frac{\pi}{4}}$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$6 \cdot senx = \sqrt{12} \cdot cosx$

$\frac{senx}{cosx} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{6}$

$tanx = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\boxed{x = 30^o}$

Solución principal:

$x = (180^o + x_1)$

$x = (180^o + 30^o)$

$x = 210^o$

Solución general:

$\boxed{x_G = K180^o \pm 30^o}$ $\boxed{x_G = K\pi rad \pm \frac{\pi}{6}}$

Ecuaciones trigonométricas de la forma $a(Ax + B) = N$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$x - \frac{\pi}{3} = tan^{-1}(1)$

$x - \frac{\pi}{3} = 45^o$ $\qquad 45^o = \frac{\pi}{4}$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 4\pi}{12} \therefore \boxed{x = \frac{7\pi}{12}}$

$\frac{7\pi}{12} = 105^o$

Solución principal:

$x = (180^o + x_1)$

$x = (180^o + 105^o)$

$x = 285^o$

Solución general:

$\boxed{x_G = K180^o \pm 105^o}$ $\boxed{x_G = K\pi rad \pm \frac{7\pi}{3}}$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=45^{o} \qquad 45^{o}=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+2\pi}{12}$$

$$x=\frac{5\pi}{12}\cdot 2$$

$$\boxed{x=\frac{5\pi}{6}}$$

$$x=150^{o}$$

Solución principal:

$$x=(180^{o}-x_1)$$

$$x=(180^{o}-150^{o})$$

$$x=30^{o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G=K180^{o}+(-1)^{k}150^{o}}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=K\pi+(-1)^{k}\frac{5\pi}{6}$$

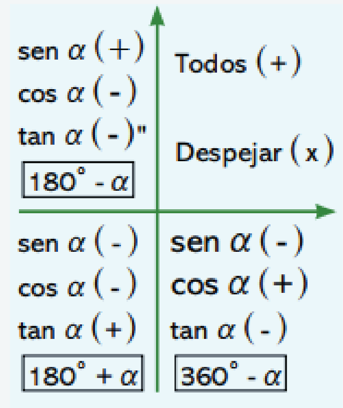
$$\frac{x}{2}=K\pi+(-1)^{k}\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$$

$$x=2K\pi+\frac{2\pi}{6}+(-1)^{k}\frac{10\pi}{6}$$

$$x=2K\pi+\frac{\pi}{3}+(-1)^{k}\frac{5\pi}{3}$$

$$\boxed{x_G=2K\pi+\frac{\pi}{3}+(-1)^{k}\frac{5\pi}{3}}$$

Signos de las funciones en cada cuadrante



Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$tan(3x+15^{o})=1$$

$$3x+15^{o}=tan^{-1}(1)$$

$$3x+15^{o}=45^{o}$$

$$3x=45^{o}-15^{o}$$

$$3x=30^{o}$$

$$x=\frac{30^{o}}{3}$$

$$\boxed{x=10^{o}}$$

Solución principal:

$$x=(180^{o}+x_1)$$

$$x=(180^{o}+10^{o})$$

$$x=190^{o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G=K180^{o}+10^{o}}$$

$$\boxed{x_G=K\pi rad+\frac{\pi}{18}rad}$$

Actividad

- **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $4sen\alpha=3cos\alpha$

b) $10senx-5cosx=0$

c) $9sen^{2}\alpha=3cos\alpha$

d) $2sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=1$

e) $2cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

f) $tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

g) $tan(3x-15^{o})=1$

h) $tan(3x-15^{o})=\sqrt{3}$

i) $sen(3x-60^{o})=\frac{1}{2}$

Ecuaciones trigonométricas resueltas por factorización

Este método consiste en que uno de los miembros sea cero y al otro miembro se lo puede factorizar, convirtiéndolo en dos factores a los que se iguala a cero por separado para después proceder al despeje.

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2senx \cdot cosx - cosx = 0$$
$$cosx(2senx - 1) = 0$$
$$cosx = 0$$
$$x = cos^{-1}(0)$$
$$\boxed{x_1 = 90^o}$$
$$2senx - 1 = 0 \rightarrow senx = \frac{1}{2}$$
$$x = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\boxed{x_2 = 30^o}$$

Solución principal:

$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 90^o)$$
$$\boxed{x_3 = 450^o} \quad \boxed{x_4 = 270^o}$$
$$x = (180^o - x_1)$$
$$x = (180^o - 30^o)$$
$$\boxed{x_5 = 150^o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 90^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi rad \pm \frac{\pi}{2}}$$
$$\boxed{x_G = K180^o + (-1)^k 30^o}$$
$$\boxed{x_G = K\pi rad + (-1)^k \frac{\pi}{6}}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2cos^2x - cosx = 0$$
$$cosx(2cosx - 1) = 0$$
$$cosx = 0 \quad ; \quad 2cosx - 1 = 0$$
$$x = cos^{-1}(0) \quad ; \quad 2cosx = 1$$
$$\boxed{x_1 = 90^o} \qquad cosx = \frac{1}{2}$$
$$x = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\boxed{x_2 = 60^o}$$

Solución principal:

$$x = (360^o - x_1)$$
$$x_3 = (360^o - 90^o)$$
$$\boxed{x_3 = 270^o}$$
$$x = (360^o - x_1)$$
$$x_4 = (360^o - 60^o)$$
$$\boxed{x_4 = 300^o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 90^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{2} rad}$$
$$\boxed{x_G = K360^o \pm 60^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{3}}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$tanx \cdot cosx - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot cosx = 0$$
$$cosx\left(tanx - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$
$$cosx = 0 \quad ; \quad tanx - \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$x = cos^{-1}(0) \quad ; x = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$\boxed{x_1 = 90^o} \qquad \boxed{x_2 = 30^o}$$

Solución principal:

$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x_3 = (360^o \pm 90^o)$$
$$\boxed{x_3 = 270^o}$$
$$x = (180^o + x_1)$$
$$x_4 = (180^o + 30^o)$$
$$\boxed{x_4 = 210^o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 90^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{2} rad}$$
$$\boxed{x_G = K180^o + 30^o}$$
$$\boxed{x_G = K\pi + \frac{\pi}{6}}$$

Actividad

– **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

$a)\ 2senx \cdot cosx - senx = 0$ $\quad b)\ 2sen^2x - senx = 0$ $\quad c)\ tanx \cdot senx - \sqrt{3} \cdot senx = 0$

$d)\ 2cosx \cdot tanx = 1$ $\quad e)\ 3senx \cdot cosx - 2senx = 0$ $\quad f)\ 2cosx - 4senx \cdot cosx = 0$

3. Resolución de ecuaciones trigonométricas no elementales (Cuadráticas)

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$sen^2x = \frac{3(1-cosx)}{2}$$
$$2(1-cos^2x) = 3-3cosx$$
$$2-2cos^2x = 3-3cosx$$
$$2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$$
$$(2cosx-1)(cosx-1) = 0$$
$$2cosx - 1 = 0 \quad ; \quad cosx - 1 = 0$$
$$cosx = \frac{1}{2} \quad ; \quad cosx = 1$$
$$x_1 = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \ ; \ x = cosx^{-1}(1)$$
$$\boxed{x_1 = 60^o} \qquad \boxed{x_2 = 0^o}$$

Solución principal:

$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 60^o)$$
$$\boxed{x_3 = 420^o} \quad \boxed{x_4 = 300^o}$$
$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 0^o)$$
$$\boxed{x_5 = 360^o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 60^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{3} rad}$$
$$\boxed{x_G = K360^o \pm 0^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm 0}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$8cos^3x - 6cosx + 3 - 4cos^2x = 0$$
$$8cos^3x - 4cos^2x - 6cosx + 3 = 0$$
$$4cos^2x(2cosx-1) - 3(2cosx-1) = 0$$
$$(2cosx-1)(4cos^2x-3) = 0$$
$$2cosx - 1 = 0 \ ; \ 4cos^2x - 3 = 0$$
$$2cosx = 1 \quad ; \ 4cos^2x = 3$$
$$cosx = \frac{1}{2} \quad ; \ cos^2x = \frac{3}{4}$$
$$x = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \ ; \ cosx = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\boxed{x_1 = 60^o} \qquad x = cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad x = cos^{-1} - \sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\boxed{x_2 = 30^o} \qquad \boxed{x_3 = 150^o}$$

Solución principal:

$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 60^o)$$
$$\boxed{x_3 = 420^o} \quad \boxed{x_4 = 300^o}$$
$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 30^o)$$
$$\boxed{x_5 = 390^o} \quad \boxed{x_6 = 330^o}$$
$$x = (360^o \pm x_1)$$
$$x = (360^o \pm 150^o)$$
$$\boxed{x_7 = 510^o} \quad \boxed{x_8 = 210^o}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K360^o \pm 60^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{3} rad}$$
$$\boxed{x_G = K360^o \pm 30^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{\pi}{6} rad}$$
$$\boxed{x_G = K360^o \pm 150^o}$$
$$\boxed{x_G = K2\pi \pm \frac{5\pi}{6} rad}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$3senx - 2cos^2x + 3 = 0$$
$$3senx - 2(1 - sen^2x) + 3 = 0$$
$$3senx - 2 + 2sen^2x + 3 = 0$$
$$3senx + 2sen^2x + 1 = 0$$
$$2sen^2x + 3sen^2x + 1 = 0$$
$$(2senx + 1)(senx + 1) = 0$$
$$2senx + 1 = 0 \quad ; \quad senx + 1 = 0$$
$$senx = -\frac{1}{2} \qquad senx = -1$$
$$x = sen^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad x = sen^{-1}(-1)$$
$$\boxed{x_1 = -30°} \qquad \boxed{x_2 = -90°}$$

Solución principal:

$$x = (180° - x_1)$$
$$x = [180° - (-30°)]$$
$$\boxed{x_3 = 210°}$$
$$x = (180° - x_1)$$
$$x = [180° - (-90°)]$$
$$\boxed{x_4 = 270°}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K180° + (-1)^k(-30°)}$$
$$\boxed{x_G = K\pi rad + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)rad}$$
$$\boxed{x_G = K180° + (-1)^k(-90°)}$$
$$\boxed{x_G = K\pi rad + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{2}\right)rad}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$3tanx - 2cotx + 1 = 0$$
$$3tanx - 2 \cdot \frac{1}{tanx} + 1 = 0$$
$$3tan^2x - 2 + tanx = 0$$
$$3tan^2x + tanx - 2 = 0$$
$$(3tanx - 2)(tanx + 1) = 0$$
$$3tanx - 2 = 0 \quad ; \quad tanx + 1 = 0$$
$$x = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad ; \quad x = tan^{-1}(-1)$$
$$\boxed{x = 33°41`} \qquad \boxed{x_2 = -45°}$$

Solución principal:

$$x = (180° + x_1)$$
$$x = [180° + 33°41`]$$
$$\boxed{x_3 = 213°41`}$$
$$x = (180° + x_1)$$
$$x = [180° - (-45°)]$$
$$\boxed{x_4 = 135°}$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = K180° + 33°41`}$$
$$\boxed{x_G = K180° + 135°}$$
$$\boxed{x_G = K\pi rad + \left(\frac{3\pi}{4}\right)rad}$$

Actividad

- **Resolvemos las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $sen^2x+senx=6$

b) $3cos^2x - cosx - 2=0$

c) $4tan^2x+12tanx-27=0$

d) $8sen^2x - 11senx+3=0$

e) $2cosx=1 - senx$

f) $8+senx=10cos^2x$

4. Resolución de problemas con ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas tienen su aplicabilidad en la vida cotidiana en la realización de cálculos en ingeniería, telecomunicaciones situaciones de física y otros.

Movimiento parabólico

Ejemplo:

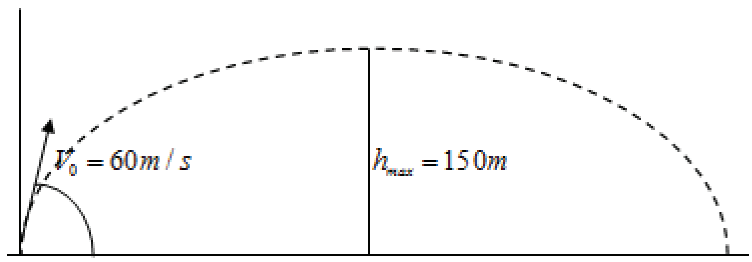
Un proyectil es disparado al aire con una velocidad de 60 m/s y alcanza una altura máxima de 150 metros. Calcular el ángulo de lanzamiento.

$$h_{max} = \frac{V_0^2 \cdot sen^2 x}{2g}$$

$$sen^2 x = \frac{h_{max} \cdot 2g}{V_0^2}$$

$$x = sen^{-1}\left(\sqrt{\frac{150m \cdot 2 \cdot 9{,}8ms^2}{(60m/s)^2}}\right)$$

$$\boxed{x = 64^{\circ}38`}$$



Aeronáutica

Cuando un avión se mueve más rápido que el sonido, sus ondas sonoras forman un cono. La fórmula que relaciona la velocidad del avión en unidades Mach (1 Mach = 1368km/h), con el ángulo α del vértice del cono de ondas es. $\frac{1}{M} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Si la velocidad de un avión es Mach 2, determinar el valor de α.

$$Datos: \qquad \frac{1}{M} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$M = 2 \qquad \frac{1}{2} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\alpha = ? \qquad \frac{\alpha}{2} = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 30^{\circ} \cdot 2 \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = 60^{\circ}}$$

VALORACIÓN

Es importante realizar una reflexión en función a lo aprendido

- ¿Cuál es la importancia de aprender ecuaciones trigonométricas?
- ¿Dónde se aplican las ecuaciones trigonométricas?
- ¿Cómo las ecuaciones trigonométricas, nos ayudan a resolver problemas en nuestra comunidad?
- ¿Qué utilidad tienen las ecuaciones trigonométricas en otras áreas de saberes y conocimientos?

PRODUCCIÓN

- Realizamos un esquema y mapa conceptual del tema de ecuaciones trigonométricas.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

PRÁCTICA

Juan se dedica a la agricultura en la región de los yungas y para cultivar sus plantaciones de mandarina realiza el cavado de hoyos con una separación de un metro aproximadamente entre plantines, por lo cual requiere ayuda para realizar el trabajo de plantación en una superficie de la cuarta de una hectárea. Para acelerar el trabajo contrató 4 trabajadores que trabajaron con celeridad para realizar el trabajo asignado.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

- ¿Cuántos metros cuadrados tiene una hectárea?
- ¿Cuántos plantines se puede plantar en un cuarto de hectárea?
- ¿Cuántos plantines plantó cada trabajador?

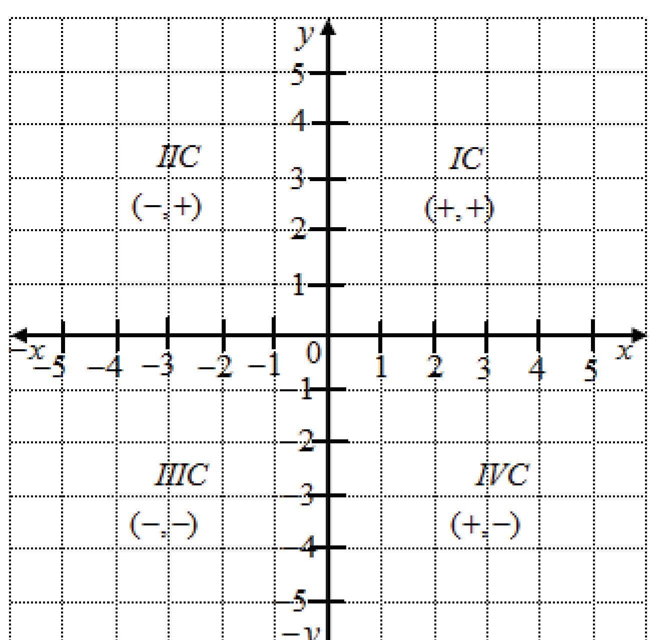
TEORÍA

Historia

El nacimiento de la geometría aanalítica se le atribuye a Descartes, por el apéndice La Geometría incluido en su discurso del método, publicado en 1637, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes.

1. Sistema de coordenadas rectangulares y su relación con los saberes ancestrales

El sistema de coordenadas rectangulares es denominado plano cartesiano en honor a René Descartes, se conforma por dos rectas llamadas ejes que se cortan perpendicularmente en el origen de coordenadas formando cuatro cuadrantes. La recta horizontal es llamada eje de abscisas o eje de las “x”, y la recta vertical es llamada eje de las ordenadas o ejes de las “y”.



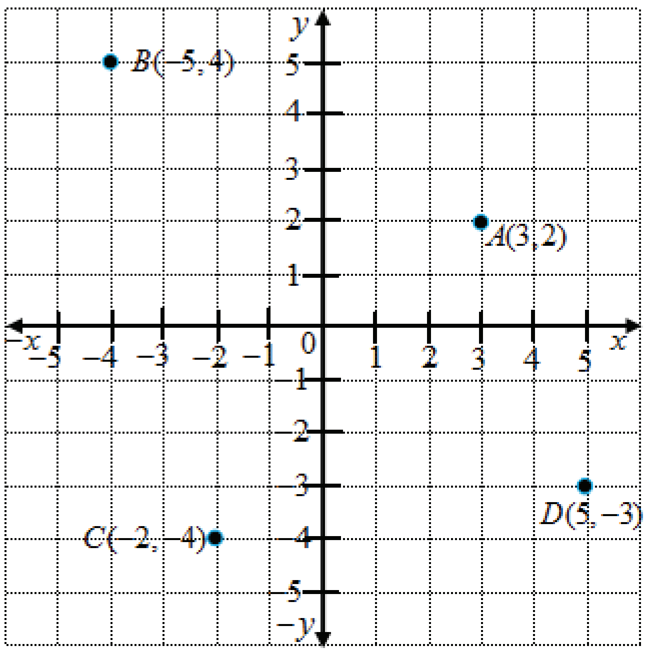
Par ordenado

En matemática, un par ordenado es una pareja de elementos, dónde se distingue un elemento de otro. El par ordenado cuyo primer elemento es *"x"* y el segundo elemento es *"y"* se denota por *(x, y).*

El primer valor "x" pertenece al eje horizontal x o eje de las abscisas; y el segundo elemento "y" pertenece al eje vertical y o eje de las ordenadas; *(x, y).*

Ejemplo:

Graficar los puntos en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados $A(3,2)\ B(-4,5)\ C(-2,-4)\ y\ D(5,-3)$.



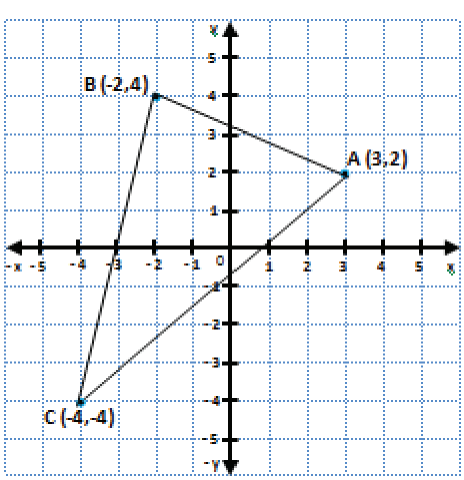
Geometría analítica

La geometría analítica relaciona la geometría con el algebra mediante el sistema de coordenadas rectangulares más conocido como el plano cartesiano en el cual se puede representar infinidad puntos (pares ordenados) y figuras geométricas. La geometría analítica es muy útil para la navegación para la ubicación de coordenadas en aviación y la navegación marítima.

Ejemplo:

Graficar el triángulo cuyos vértices son los puntos:

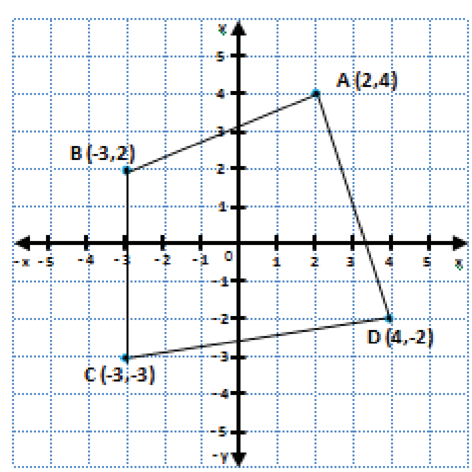
$$A(3,2)\ B(-2,4)\ y\ C(-4,-4)$$



Ejemplo:

Graficar el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos:

$$A(2,4)\ B(-3,2)\ \ C(-3-3)\ y\ D(4,-2)$$



Actividad

- **Ubicamos los siguientes pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:**

$a)\ A(4,5)\ B(-3,7)\ C(-5,-8)\ y\ D(6,-4)$

$b)\ M(6,3)\ N(-2,5)\ O(-7,-5)\ y\ P(5,-1)$

$c)\ R(7,4)\ S(-8,4)\ T(-4,-2)\ y\ U(9,-5)$

- **Graficamos las siguientes figuras geométricas mediante pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:**

$a)\ A(3,7)\ B(-6,2)\ y\ C(-4,-5)$

$b)\ A(4,6)\ B(-2,5)\ C(-3,-4)\ y\ D(4,-3)$

$c)\ R(3,9)\ S(-3,5)\ T(-2,-7)\ \ U(6,-2)\ y\ V(8,2)$

$d)\ A(6,4)\ B(2,6)\ C(-2,4)\ D(-2,0)\ E(2,-2)\ y\ F(6,0)$

Geometría analítica, problemas fundamentales

La geometría analítica se caracteriza por dar respuesta a dos problemas: Si se conoce el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, se debe determinar la ecuación que los represente y si se conoce la ecuación de un lugar geométrico, se debe determinar el lugar geométrico en el plano cartesiano del conjunto de puntos que la verifican.

2. Distancia entre dos puntos

Para los puntos que se encuentran sobre el eje horizontal, o en una paralela, la distancia entre los puntos es el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

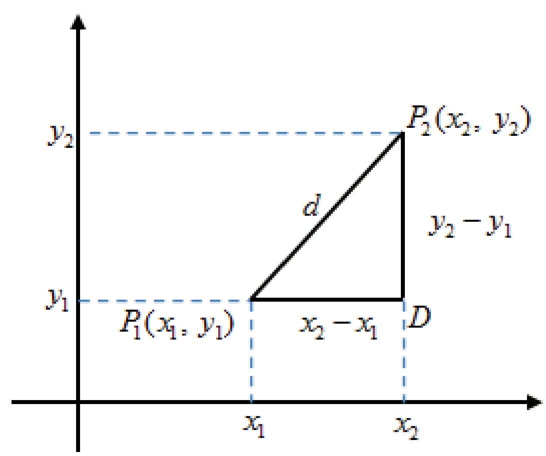
$$\boxed{|x_2 - x_1| = d}$$

Para los puntos que se encuentran sobre el eje vertical, o en una paralela, la distancia entre los puntos es el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

$$\boxed{|y_2 - y_1| = d}$$

Si los puntos están en cualquier lugar del plano, la distancia entre los dos puntos es:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



Dados los puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2)$, definimos la distancia entre ellos, $d(P_1, P_2)$ como la longitud del segmento de recta que los separa.

Teniendo los puntos: $P_1\ (x_1, y_1)\ \wedge\ P_2\ (x_2, y_2)$

Trazamos por $P_1\ y\ P_2$ paralelas a ambos ejes se forma el triángulo rectángulo. Donde la hipotenusa es la distancia y los catetos las rectas $P_1D\ y\ P_2D$.

Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo:

Calculamos la distancia entre los puntos: $A(3,2)\ y\ B(7,5)$

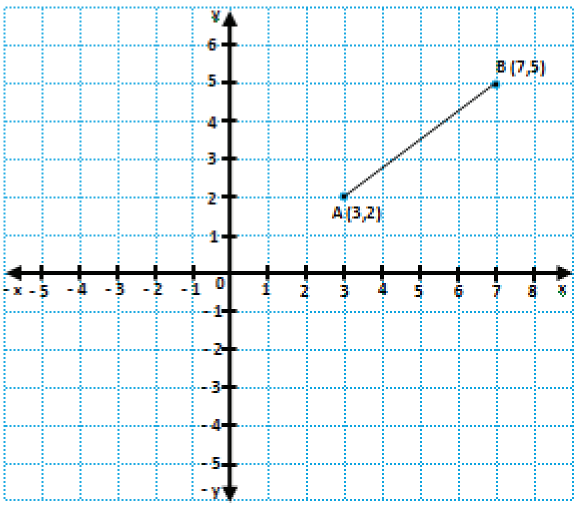
$$\underset{x_1\ y_1}{A(3,2)}\ y\ \underset{x_2\ y_2}{B(7,5)}$$

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}$$

$$d=\sqrt{4^2+3^2}=$$

$$d=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

$$\boxed{d=5}$$



Ejemplo:

Calculamos la distancia entre los puntos:

$A(-4,-3)\ y\ B(4,3)$

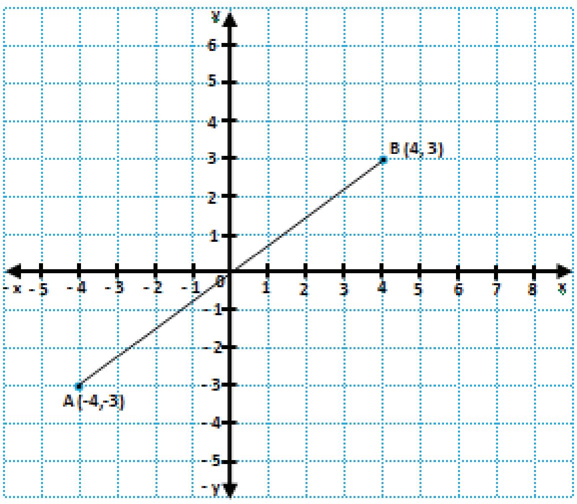
$$\underset{x_1\ \ y_1}{A(-4,-3)}\ y\ \underset{x_2\ y_2}{B(4,3)}$$

$$d=\sqrt{[4-(-4)]^2+[3-(-3)]^2}$$

$$d=\sqrt{(4+4)^2+(3+3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}$$

$$d=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}$$

$$\boxed{d=10}$$



Ejemplo:

Determinar el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(3,1)\ B(-2,5)\ y\ C(-3,-4)$

Cálculo de la distancia AB.

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}=6,4$$

Cálculo de la distancia ($\overline{BC}$).

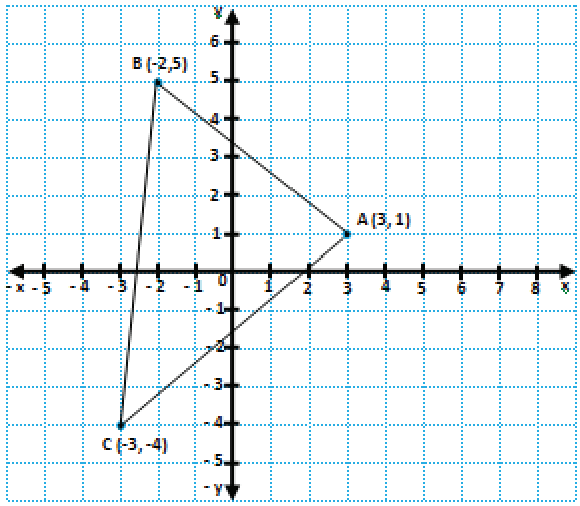
$$\overline{BC}=\sqrt{[-3-(-2)]^2+(-4-5)^2}=\sqrt{1+81}=\sqrt{82}=9,05$$

Cálculo de la distancia AC.

$$\overline{AC}=\sqrt{(-3-3)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}=7,81$$

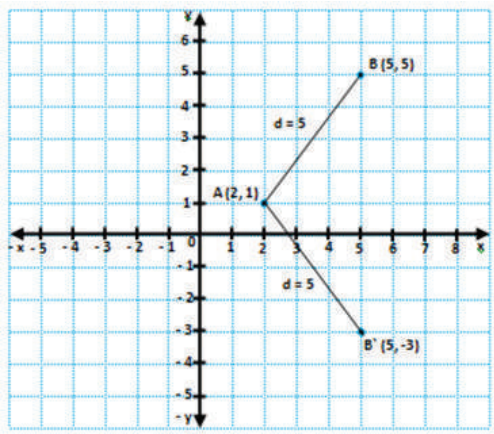
Para calcular el perímetro del triángulo se suman los tres lados

$$P=6,4+9,05+7,81=23,26$$



Ejemplo:

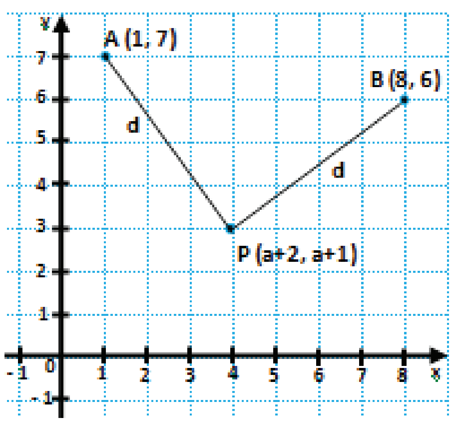
Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto A (2, 1). Si la abscisa del otro extremo es 5, Hallar su ordenada.



$$A(2,1)\ B(5,y)\ \ d=5$$
$$5=\sqrt{(5-2)^2+(y-1)^2}$$
$$25=9+(y-1)^2$$
$$16=(y-1)^2$$
$$y-1=\pm 4$$
$$y=\pm 4+1$$
$$\boxed{y_1=5} \qquad \boxed{y_2=-3}$$
$$(5,5)\quad (5,-3)$$

Ejemplo:

Si $P(a+2,a+1)$ es un punto que equidista de $A(1,7)\ y\ B(8,6)$. Calcular el valor de “a”



$$d=d$$
$$\overline{PA}=\overline{PB}$$

Aplicando distancia entre dos puntos

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Calculando distancia $\overline{PA}$

$$P(a+2,a+1)\ A(1,7)$$
$$d=\sqrt{[1-(a+2)]^2+[7-(a+1)]^2}$$
$$d=\sqrt{(1-a-2)^2+(7-a-1)^2}$$
$$d=\sqrt{(-1-a)^2+(6-a)^2}$$
$$d^2=1+2a+a^2+36-12a+a^2$$
$$\boxed{d^2=2a^2-10a+37}\ (1)$$

Calculando distancia $\overline{PB}$

$$P(a+2,a+1)\ B(8,6)$$
$$d=\sqrt{[8-(a+2)]^2+[6-(a+1)]^2}$$
$$d=\sqrt{(8-a-2)^2+(6-a-1)^2}$$
$$d=\sqrt{(6-a)^2+(5-a)^2}$$
$$d^2=36-12a+a^2+25-10a+a^2$$
$$\boxed{d^2=2a^2-22a+61}\ (2)$$

Igualando $(1)\ y\ (2)$

$$d^2=d^2$$
$$\cancel{2a^2}-10a+37=\cancel{2a^2}-22a+61$$
$$-10a+22a=61-37$$
$$12a=24$$
$$a=\frac{24}{12}$$
$$\boxed{a=2}$$

Calcundo el valor de "a"

$$P(a+2,a+1)$$
$$P(2+2,2+1)$$
$$P(4,3)$$

Actividad

- **Calculamos la distancia entre los siguientes puntos:**

$a)\ A(5,-3)\ y\ B(4,7)$ $\qquad b)\ M(-3,-6)\ y\ N(-2,9)$ $\qquad c)\ T(5,-7)\ y\ U(8,3)$

- **Calculamos el perímetro de las siguientes figuras geométricas:**

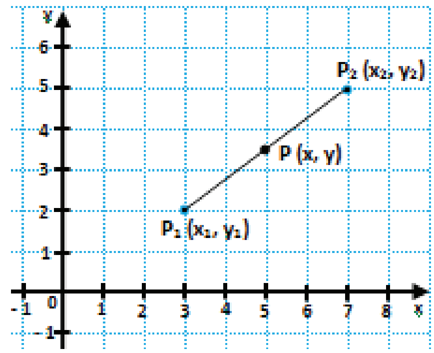
$a) A(5,6)\ B(-4,8)\ y\ C(2,-3)$ $\qquad b) P(3,5)\ Q(-2,4)\ R(-3,-1)\ y\ S(7,-6)$

Punto medio

Las coordenadas del punto medio de un segmento están dadas por las semisumas de las coordenadas de sus extremos.

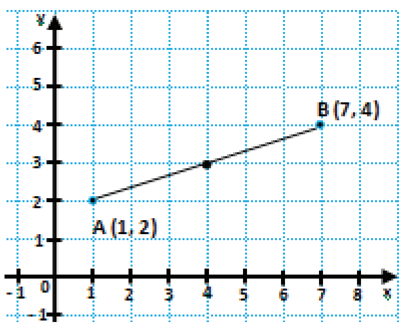
Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)\ y\ P_2(x_2, y_2)$, las coordenadas del punto medio están dadas por las siguientes expresiones:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$



Ejemplo:

Determinar el punto medio del segmento AB delimitado por los puntos: $A(1,2)\ y\ B(7,4)$



$$A(1,2)\ y\ B(7,4)$$
$$x = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$y = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$P(4,3)$$

Actividad

– **Calculamos el punto medio de los siguientes segmentos:**

$a)\ A(-3,2)\ y\ B(5,4)$ $\qquad b)\ A(-2,-6)\ y\ B(4,-2)$

$c) A(4,-3)\ y\ B(1,4)$ $\qquad d)\ A(-3,-3)\ y\ B(3,1)$

$e) A(4,-2)\ y\ B(0,0)$ $\qquad f) A(-3,-4)\ y\ B(3,-2)$

VALORACIÓN

Es importante Realizamos una reflexión en función a lo aprendido:

- ¿Cuál es la importancia de la geometría analítica?
- ¿Cómo podemos aplicar las coordenadas rectangulares para la ubicación de puntos determinados?
- ¿Cómo aplicamos la distancia entre dos puntos para realizar cálculos de distancias inaccesibles?
- ¿Cómo la geometría analítica nos ayuda a resolver problemas en nuestra comunidad?

Fuente: Pixabay

PRODUCCIÓN

Actividad

- Con objetos del contexto construyamos un sistema de coordenadas rectangulares (plano cartesiano).
- Elaboremos un geoplano calcular perímetros de figuras geométricas conocidas.
- Elaboremos un formulario con las fórmulas que se emplean en geometría analítica.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO CON UNA RAZÓN DADA

PRÁCTICA

Marcelo vive con su familia en un cuarto en alquiler; trabajando honestamente adquirió un terreno de 300 metros cuadrados aproximadamente. Desea construir una casa en una tercera parte del terreno, por lo cual divide el terreno en tres partes iguales, el resto del terreno desea dejarlo como patio de recreación y esparcimiento, para tal efecto contrata albañiles para que puedan edificar su casa y poder vivir modestamente sin pagar alquiler.

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas con respecto a la lectura anterior.

¿En cuántos metros cuadrados construirá la casa Marcelo?

¿Qué cantidad de superficie queda para recreación?

¿Por qué desea construir una casa Marcelo?

TEORÍA

Razón

Una razón es una comparación entre dos o más cantidades. Esta comparación se puede hacer mediante una diferencia, en tal caso se llama "razón aritmética", o mediante una división en tal caso se llama "razón geométrica".

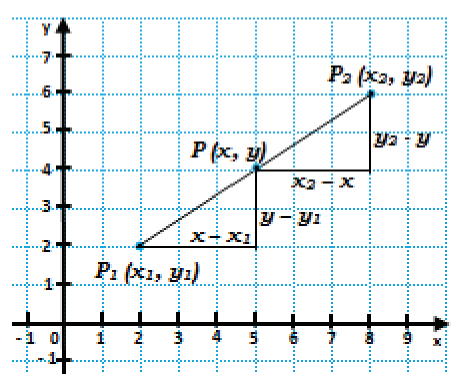
Razón Aritmética
$a - b = d$
Razón Geométrica
$a \div b \qquad a/b \qquad \frac{a}{b}$

1. División de un segmento con una razón dada

Dividir un segmento P_1P_2 en una relación dada *"r"* es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento P_1P_2, de modo que las dos partes P_1 y P_2 están en relación r.

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

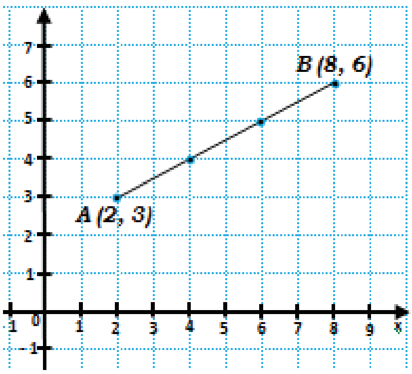
Donde $P\ (x,y)$ es el punto P.



$$\boxed{x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}}$$

Ejemplo:

Determinar los puntos de trisección de un segmento cuyos extremos son los puntos: $A(2,3)\ y\ B(8,6)$



$$x_1=\frac{2+8\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2+\frac{8}{2}}{\frac{2+1}{2}}=\frac{\frac{4+8}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{12}{3}=4$$

$$y_1=\frac{3+6\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3+\frac{6}{2}}{\frac{2+1}{2}}=\frac{\frac{3+3}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}=4$$

$$x_2=\frac{2+8(2)}{1+2}=\frac{2+16}{3}=\frac{18}{3}=6$$

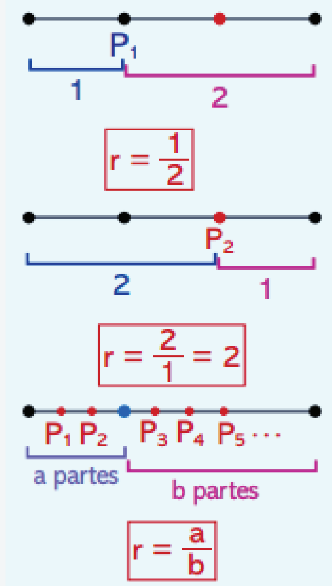
$$y_2=\frac{3+6(2)}{1+2}=\frac{3+12}{3}=\frac{15}{3}=5$$

$P_1\ \boxed{r=\frac{1}{2}}\quad P_2\ \boxed{r=2}$

Los puntos de trisección son: $P_1(4,4)\ y\ P_2(6,5)$

OBSERVACIÓN

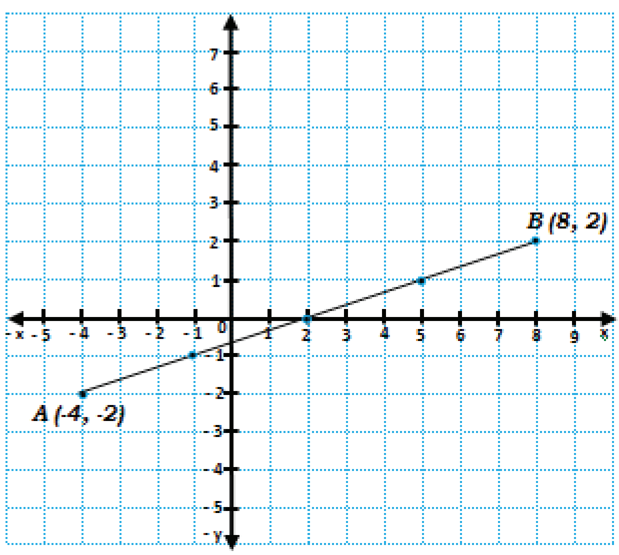
Si se divide un segmento en 3 partes iguales, se tienen dos puntos intermedios:



Con a+b, las partes en que se divide ($\overline{AB}$).

Ejemplo:

Dividir en 4 partes iguales el segmento que une los puntos:
$A(-4,2)\ y\ B(8,2)$



$$x_1=\frac{-4+8\left(\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-4+\frac{8}{3}}{\frac{3+1}{3}}=\frac{\frac{-12+8}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y_1=\frac{-2+2\left(\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-2+\frac{2}{3}}{\frac{3+1}{3}}=\frac{\frac{-6+2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-4+8(1)}{1+1}=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$y_2=\frac{-2+2(1)}{1+1}=\frac{-2+2}{2}=\frac{0}{2}=0$$

$$x_3=\frac{-4+8(3)}{1+3}=\frac{-4+24}{4}=\frac{20}{4}=5$$

$$y_3=\frac{-2+2(3)}{1+3}=\frac{-2+6}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$P_1\ \boxed{r=\frac{1}{3}}\quad P_2\ \boxed{r=1}\quad P_3\ \boxed{r=3}$

Los puntos buscados son: $P_1(-1,-1)\ P_2(2,0)\ y\ P_3(5,1)$

Actividad

Resolvemos los siguientes ejercicios de punto de división de un segmento con una razón dada:

a) Calculamos los puntos de trisección del segmento que une los puntos *A(-4, -6) y B(2,3)*

b) Dividir en cuatro partes iguales el segmento que une los puntos *A(-7, -3) y B(9,1)*

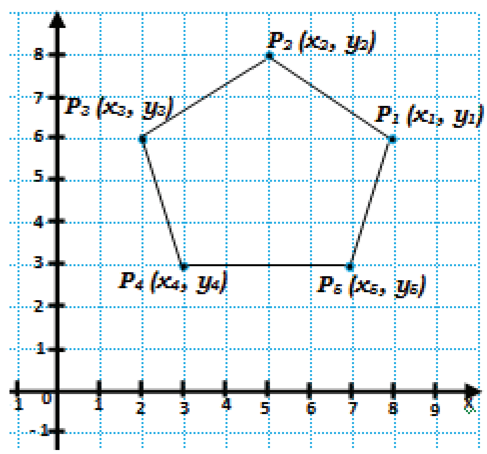
c) Hallamos el punto de división del segmento que une los puntos *A(-5, -4) y B(9,3)* y la razón es $r = \frac{4}{3}$

d) Dividir en cinco partes iguales el segmento que une los puntos *A(4, -5) y B(-1,5)*

2. Área de un polígono

El área de un polígono de vértices $A(x_1, y_1);\ B(x_2, y_2);\ \ldots;\ N(x_n, y_n)$ esta dado por:

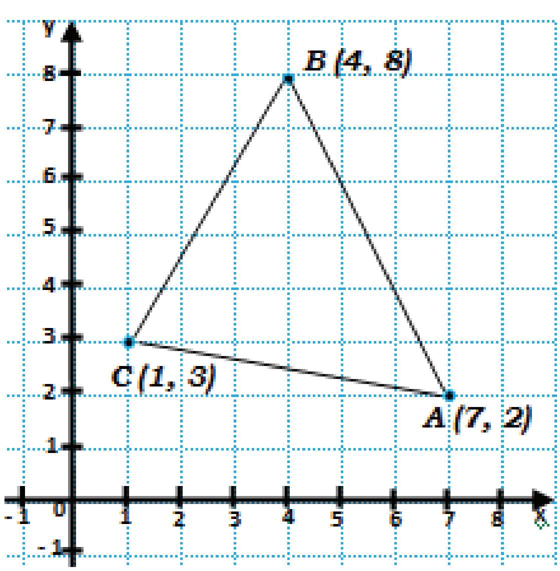
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} u^2$$



Para calcular el área de un polígono emplearemos determinantes con los datos de los vértices. La diagonal primaria lleva el signo positivo y la diagonal secundaria llevan el signo negativo.

Ejemplo:

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(7,2)\ B(4,8)\ y\ C(1,3)$

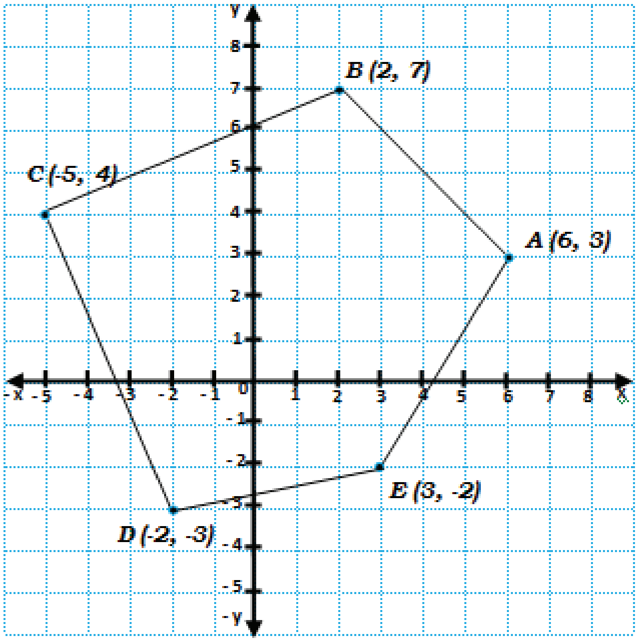


$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 8 \\ 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(56+12+2-8-8-21) = \frac{1}{2}\cdot 33$$

$$\boxed{A = 16{,}5u^2}$$

Ejemplo:

Calcular el área del polígono delimitado por los puntos: $A(6,3)\ B(2,7)\ C(-5,4)\ D(-2,-3)\ y\ E(3,-2)$



$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ -5 & 4 \\ -2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} u^2$$

$$A=\frac{1}{2}(42+8+15+4+9-6+35+8+9+12)$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 136$$

$$\boxed{A=68u^2}$$

Actividad

Calculamos el área de los siguientes polígonos:

$a)A(1,5)\ B(-3,7)\ y\ C(-2,-3)$

$b)P(5,3)\ Q(-3,2)\ R(-4,-1)\ y\ S(5,-7)$

$c)A(2,3)\ B(-4,5)\ C(-3,-9)\ D(1,-8)\ y\ E(7,-3)$

$d)A(6,4)\ B(-2,8)\ y\ C(-3,-4)$

$e)A(7,3)\ B(4,6)\ C(1,3)\ D(1,-3)\ \ E(4,-6)\ y\ F(7,-3)$

3. Pendiente de una recta

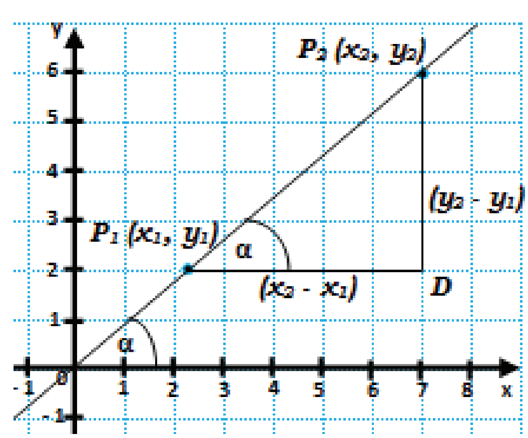
La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la recta con relación al eje horizontal.

Se denota con la letra m.

Si $m > 0,$ la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo.

Si $m < 0$ la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.

Teniendo $P_1(x_1,y_1)\ y\ P_2(x_2,y_2)$, en la misma recta y el ángulo α de inclinación. Se trazan paralelas desde ambos puntos hacia los ejes y queda expreso el triángulo P_1DP_2 posteriormente deducimos:

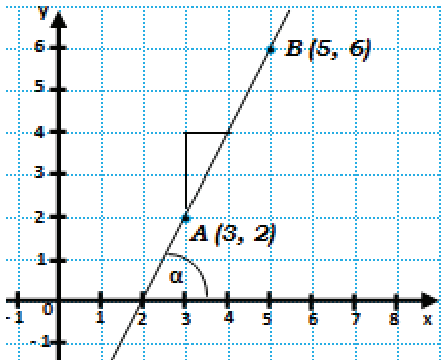


$$m=tan\alpha=\frac{DP_2}{P_1D}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\boxed{m=tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Ejemplo:

Calcular la pendiente que pasa por los puntos: $A(3,2)\ y\ B(5,6)$



$A(3,2)\ y\ B(5,6)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{6-2}{5-3}=\frac{4}{2}=2$$

$$tan\alpha=m$$

$$tan\alpha=2$$

$$\alpha=tan^{-1}(2)$$

$$\boxed{\alpha=63^{o}\,26`}$$

Actividad

Calculamos la pendiente y el angulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos:

$a)\ A(1,3)\ y\ B(4,5)$

$b)\ A(-3,-4)\ y\ B(5,-3)$

$c) A(3,-1)\ y\ B(4,3)$

$d)\ A(-2,-2)\ y\ B(6,2)$

$e) A(8,-3)\ y\ B(-2,3)$

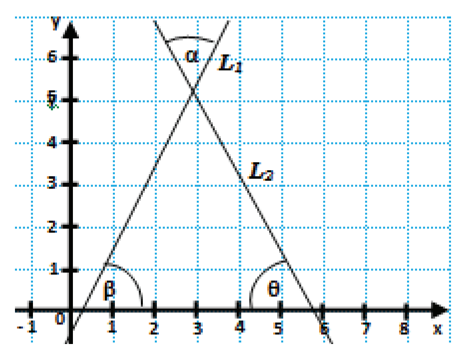
$f) A(3,-4)\ y\ B(5,-2)$

4. Angulo entre dos rectas

El ángulo α entre las rectas L_1 y L_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la recta L_1 con pendiente m_1 hacia la recta L_2 con pendiente m_2 es:

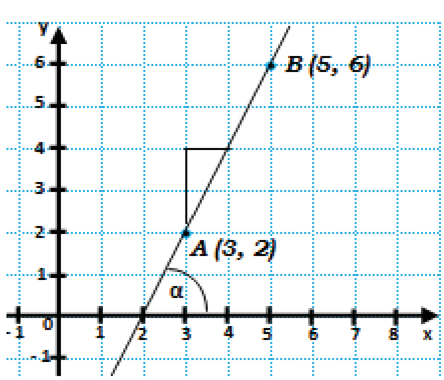
$$\boxed{tan\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}}$$

$$\boxed{\alpha=tan^{-1}\left(\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}\right)}$$



Ejemplo:

Calcular en ángulo comprendido entre las rectas L_1 y L_2 de pendientes $m_1=\frac{1}{3}\ y\ m_2=\frac{3}{4}$



$$tan\alpha=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{1+\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}}=\frac{\frac{9-4}{12}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{\alpha=18^{o}\,26`}$$

Actividad

Calculamos los ángulos comprendidos entre las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son:

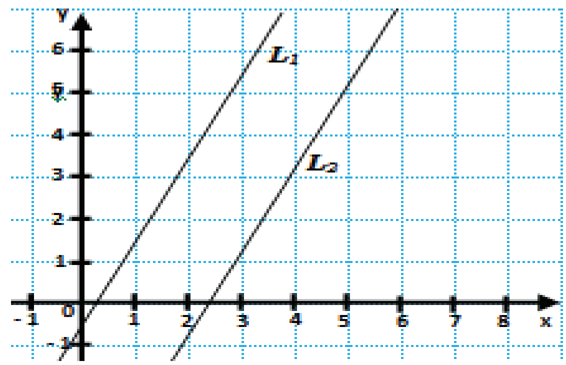
$a)\ m_1=1\ y\ m_2=3$ $\qquad b)\ m_1=-\frac{2}{3}\ y\ m_2=5$ $\qquad c)\ m_1=\frac{3}{2}\ y\ m_2=\frac{7}{2}$

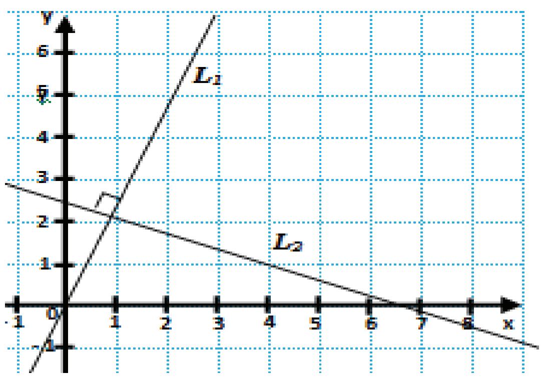
5. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Paralelismo

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$\boxed{m_1 = m_2}$$





Perpendicularidad

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a 1.

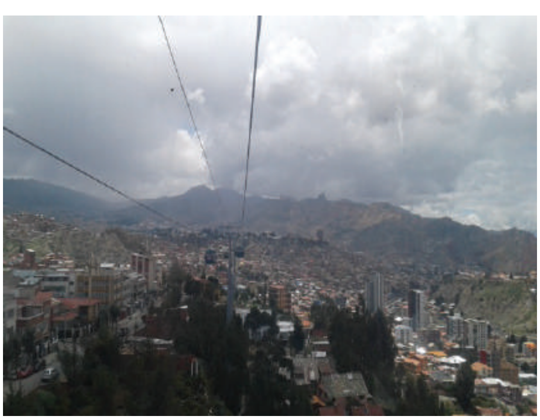
$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1} \quad \vee \quad \boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

VALORACIÓN

La utilidad de la geometría analítica se presenta en actividades como la distribución de parcelas, cálculo de áreas de terrenos e inclinación de la pendiente de un techo.

En función de lo aprendido respondamos las siguientes preguntas:

- Además de ello, ¿en qué situaciones de la vida real se puede aplicar la división de un segmento con una razón dada?
- ¿Cómo calculamos áreas de polígonos irregulares?
- ¿Cómo calculamos la pendiente de los techos de las casas?
- Menciona ejemplos de rectas paralelas.
- Menciona ejemplos de rectas perpendiculares.



PRODUCCIÓN

Actividad

- Con materiales del contexto, construyamos una maqueta donde se pueda observar pendientes y ángulos de inclinación.
- Elaboramos un formulario con las fórmulas abarcados en el tema.
- Empleando el geoplano, realizamos cálculos de áreas de polígonos.

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Demostración de identidades trigonométricas

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

$a)\ \dfrac{cotx+tanx}{cscx}=secx$

$b)\ \dfrac{1+secx}{secx}=\dfrac{sen^2x}{1-cosx}$

$c)\ \dfrac{cosx\cdot tanx}{senx}-cos^2x=sen^2x$

$d)\ \dfrac{1+cotx}{1+tanx}=cotx$

$e)\ \dfrac{senx}{1+cosx}=\dfrac{1-cosx}{senx}$

$f)\ \dfrac{tanx+secx-1}{tanx-secx+1}=secx+tanx$

$g)\ \dfrac{1+tan^2x}{tan^2x}=csc^2x$

$h)\ \dfrac{cot^2x}{cscx}=\dfrac{1-sen^2x}{senx}$

$i)\ \dfrac{cotx}{secx}=cscx-senx$

$j)\ \dfrac{secx-1}{1-cosx}=secx$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos.

Comprobar las siguientes identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos:

$a)\ cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\dfrac{1}{2}\left(cosx-\sqrt{3}senx\right)$

$b)\ cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{2}\left(cosx+\sqrt{3}senx\right)$

$c)\ sen\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-cosx$

$d)\ cosx(x-\pi)=-cosx$

Calcular el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas

$a)\ sen75^{\circ}$ $\qquad b)\ cos15^{\circ}$

$c)\ tan120^{\circ}$ $\qquad d)\ tan105^{\circ}$

$e)\ cos105^{\circ}$

Identidades trigonométricas de ángulos dobles

Calcular las siguientes identidades de ángulo doble:

$a)\ \dfrac{2senx}{tan2x}+\dfrac{sen^2x}{cosx}=cosx$

$b)\ \dfrac{1+cos2x}{cotx}=sen2x$

$c)\ \dfrac{cos2x}{1-sen2x}=\dfrac{1+tanx}{1-tanx}$

$d)\ \dfrac{sen2x}{1+cos2x}=tanx$

$e)\ \dfrac{sen2x}{1+cos2x}+\dfrac{1}{tan2x}=\dfrac{1}{sen2x}$

$f)\ \dfrac{senx+sen2x}{1+cosx+cos2x}=tanx$

$g)\ \dfrac{1-cos2x}{1+cos2x}=tan^2x$

$h)\ \dfrac{sen2x+cos2x+1}{sen2x-cos2x+1}=\dfrac{1}{tanx}$

Identidades trigonométricas de ángulo mitad

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas del ángulo mitad:

$a)\ tan\dfrac{x}{2}+cot\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{senx}$

$b)\ tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{senx}{1+cosx}$

$c)\ tan\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{2senx-sen2x}{2senx+sen2x}}$

$d)\ sen\dfrac{x}{2}+cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{1+senx}$

$e)\ cot\dfrac{x}{2}=\dfrac{sen2x\cdot cosx}{(1+cos2x)(1-cosx)}$

Transformación de expresiones trigonométricas

Transformación de suma a producto y de producto a suma

Expresar las sumas y diferencias como productos:

$a)\ sen9\alpha + sen3\alpha$ $\qquad b)\ cos5\beta - cos3\beta$

$c)\ sen7x + sen5x$ $\qquad d)\ sen10\beta + sen4\beta$

$e)\ cos5x + cos3x$ $\qquad f)\ sen8\alpha - sen6\alpha$

Demostrar las siguientes identidades:

$$a)\ \frac{sen3x + senx}{cos^2 x} = 4senx$$

$$b)\ \frac{sen5\alpha + sen3\alpha}{cos5\alpha + cos3\alpha} = tan4\alpha$$

Reducir las siguientes expresiones trigonométricas:

$$a)\ \frac{sen4x + sen2x}{sen6x + sen2x} \qquad b)\ \frac{sen9\alpha - sen5\alpha}{cos9\alpha + cos5\alpha}$$

$$c)\ \frac{sen35^{\circ} + sen25^{\circ}}{cos50^{\circ} - cos40^{\circ}} \qquad d)\ \frac{cos4\alpha + cos8\alpha}{sen9\alpha - sen3\alpha}$$

De producto a suma o diferencia

Expresar los productos como sumas o diferencias:

$a)\ sen4x \cdot sen7x$ $\qquad b)\ sen7x \cdot cos3x$

$c)\ cos4x \cdot sen3x$ $\qquad d)\ cos4x \cdot cos3x$

$e)\ sen8x \cdot sen3x$ $\qquad f)\ sen8x \cdot sen6x$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Raíces de una ecuación trigonométrica

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ tan\alpha = \sqrt{3} \qquad b)\ senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c)\ sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad d)\ tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$e)\ 2cosx - \sqrt{2} = 0 \qquad f)\ 4senx - 2 = 0$$

$$g)\ cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad h)\ tan\beta = 1$$

$$i)\ 2senx - \sqrt{3} = 0 \qquad j)\ 4senx + 2 = 0$$

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ 5sen\alpha = 5cos\alpha \qquad b)\ 5senx - 15cosx = 0$$

$$c)\ tanx - \frac{1}{cosx} = 0 \qquad d)\ 2sen\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{12}\right) = 1$$

$$e)\ 2cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \qquad f)\ 3tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$g)\ tan(3x - 15^{\circ}) = \sqrt{3} \qquad h)\ 3tan(3x - 15^{\circ}) = \sqrt{3}$$

$$i)\ sen(2x - 60^{\circ}) = \frac{1}{2} \qquad j)\ cos(2x - 20^{\circ}) = \frac{1}{2}$$

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ 2senx \cdot cosx - \frac{\sqrt{2}}{2} senx = 0$$

$$b)\ 2cos^2 x - cosx = 0$$

$$c)\ tanx \cdot senx - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot senx = 0$$

$$d)\ 2senx \cdot cotx = 1$$

$$e)\ 2senx \cdot cosx - \sqrt{3} \cdot cosx = 0$$

$$f)\ sen^2 x - senx \cdot cosx = 0$$

$$g)\ sen^2 x - cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$h)\ sen2x = senx$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas no elementales (Cuadráticas)

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a)\ 2tan^2 x + sec^2 x - 2 = 0$$

$$b)\ 1 - cosx = \sqrt{3} \cdot senx$$

$$c)\ 1 + sen^2 x - 7cos^2 x = 0$$

$$d)\ 2cos^2 x + sen^2 x = 3$$

$$e)\ cotx + \frac{senx}{1 + cosx} = 2$$

$$f)\ (2cosx + 1)(senx - 1) = 0$$

$$g)\ sen^2 x - 4senx - 3 = 0$$

$$h)\ 2cotx - 4tanx = 2$$

$$i)\ 4sen^2 x \cdot tanx - 4sen^2 x = 3tanx - 3$$

$$j)\ \frac{2}{senx} = \frac{3}{cos^2 x}$$

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALITÍCA

Sistema de coordenadas rectangulares y su relación con los saberes ancestrales

Ubicar los siguientes pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:

$a)\ A(5,6)\ B(-2,4)\ y\ C(-6,-1)$

$b)\ M(5,2)\ N(-1,6)\ O(-3,-7)\ y\ P(9,-2)$

$c)\ R(6,5)\ S(-5,3)\ T(-7,-9)\ y\ U(8,-4)$

$d)A(3,6)\ B(1,7)\ C(-5,8)\ y\ D(-5,-3)$

$e)\ D(-3,1)\ E(-7,-4)\ F(6,-4)\ y\ G(4,7)$

Graficar las siguientes figuras geométricas mediante pares ordenados en el sistema de coordenadas rectangulares:

$a)\ A(7,3)\ B(-2,7)\ y\ C(-1,-3)$

$b)\ A(5,7)\ B(-1,9)\ C(-4,-7)\ y\ D(6,-3)$

$c)\ R(4,8)\ S(-4,6)\ T(-3,-8)\ \ U(7,-3)\ y\ V(9,3)$

$d)\ A(5,6)\ B(3,7)\ C(-3,5)\ D(-3,0)\ y\ E(3,-3)$

$e)\ R(5,7)\ S(-5,5)\ T(-2,-7)\ \ U(9,-2)\ y\ V(8,2)$

Distancia entre dos puntos

Calcular la distancia entre los siguientes puntos:

$a)\ A(4,-6)\ \ B(3,5)$

$b)\ M(-2,-7)\ N(-3,8)$

$c)\ T(8,-5)\ \ U(7,1)$

$d)\ P(-6,-5)\ O(-1,3)$

$e)\ A(3,4)\ B(-4,-3)$

Calcular el perímetro de las siguientes figuras geométricas:

$a)\ A(4,7)\ B(-3,5)\ y\ C(1,-1)$

$b)\ P(4,6)\ Q(-1,3)\ R(-4,-2)\ y\ S(5,-5)$

$c)\ A(5,3)\ B(-3,7)\ y\ C(5,-2)$

$d)\ D(1,5)\ E(-2,5)\ F(-5,-5)\ y\ G(4,-3)$

$e)\ M(8,3)\ N(3,7)\ O(-3,6)\ P(-4,-6)\ yQ(5,-3)$

Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos resolver los siguientes ejercicios:

1. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto A (3,-2). Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada.

2. Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto B(-3,6)

3. Si: $P(1,3)\ y\ Q(4,k)$. Hallar el valor de para que la distancia entre P y Q sea d = 5.

4. Hallar "x", si la distancia entre (4,1) y (x,3) es de 5 unidades.

5. El punto (x,x+1) equidista de (2,1) y de (-6,5) Hallar "x".

6. Demostrar que los puntos:
$A(-2,-1)B(2,2)\ C(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

7. Demostrar que los puntos:
$L(-8,4)\ M(2,-2)\ N(5,3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Demostrar que los tres puntos:
$A(12,1)\ B(2,-1)\ C(-3,-2)$ son colineales.

9. Tres vértices de un rectángulo son los puntos, $A(2,-1)\ B(7,1)\ C(7,3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

10. Tres vértices de un rectángulo son A (-1,4), B (1,-1) y C (6,-1). Si la ordenada del cuarto vértice D es 6. Halle su abscisa.

Punto medio

Calcular el punto medio de los siguientes segmentos:

$a)\ A(-4,3)\ y\ B(6,5)$

$b)\ A(-3,-7)\ y\ B(5,-3)$

$c)A(5,-2)\ y\ B(2,5)$

$d)\ A(-2,-2)\ y\ B(3,3)$

$e)A(6,-4)\ y\ B(5,0)$

$f)A(-2,-5)\ y\ B(4,-3)$

$g)\ A(4,6)\ y\ B(-6,4)$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO CON UNA RAZÓN DADA

Resolver los siguientes ejercicios de punto de división de un segmento con una razón dada:

e) Calcular los puntos de trisección del segmento que une los puntos $A(-5,-3)\ y\ B(4,0)$

f) Dividir en cuatro partes iguales el segmento que une los puntos $A(4,-5)\ y\ B(0,3)$

g) Hallar el punto de división del segmento que une los puntos $A(-5,-5)\ y\ B(10,5)$ y la razón es $r=\frac{3}{2}$

Área de un polígono

Calcular el área de los siguientes polígonos:

$a) A(3,4)\ B(-2,6)\ y\ C(-4,-1)$
$b) P(6,2)\ Q(-6,1)\ R(-5,-2)\ y\ S(6,-3)$
$c) A(5,4)\ B(-1,3)\ C(-2,-8)\ D(4,-5)\ y\ E(8,-1)$
$d) A(3,2)\ B(-2,6)\ y\ C(-5,-3)$
$e) A(6,5)\ B(2,7)\ C(1,4)\ D(1,-4)\ y\ E(6,-6)$

Pendiente de una recta

11. Hallar la pendiente del segmento que une los puntos $A(-2,3)\ y\ B(-3,4)$

12. Hallar la pendiente del segmento que une los puntos $Q(-5,2)\ y\ R(3,-2)$

13. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

$-A(2,4)\ y\ B(-2,4)$
$-C(5,-3)\ y\ D(2,-3)$
$-E(6,0)\ y\ F(6,\sqrt{3})$

14. Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:

$-A(\sqrt{3},2)\ y\ B(0,1)$
$-E(4,6)\ y\ F(1,3)$

15. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2,-2)\ B(-1,4)\ y\ C(4,5)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

16. Aplicando el concepto de pendiente demostrar que los puntos $A(2,4)\ B(4,8)\ y\ C(6,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

17. Aplicando el concepto de pendiente demostrar que los puntos $A(6,5)\ B(1,3)\ y\ C(5,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

18. Un punto dista 7 unidades del origen de coordenadas y la pendiente de la recta que lo une al punto *A (3,4)* es ½, hallar sus coordenadas.

19. Por los puntos *(x, x+1) y (1,-2)* pasa una recta de pendiente 3. Hallar el valor de *"x"*

20. Una recta de pendiente 3 pasa por los puntos *(4,5) y (3,y)* Hallar *"y"*

Ángulo entre dos rectas

Calcular los ángulos comprendidos entre las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son:

$$a)\ m_1=\frac{2}{3}\ y\ m_2=\frac{3}{4}$$

$$b)\ m_1=-\frac{1}{3}\ y\ m_2=3$$

$$c)\ m_1=\frac{3}{5}\ y\ m_2=\frac{1}{2}$$

Resolver los siguientes ejercicios de ángulo entre dos rectas.

1. Hallar el ángulo entre las rectas $L_1\ y\ L_2$ cuyas pendientes son: $m_1=3/5\ y\ m_2=-2$

2. Hallar el ángulo entre las rectas que pasa por los puntos $A(-1,-3)\ y\ B(2,5)$ y L_2 que pasa por los puntos $C(1,3)\ y\ D(-2,4)$

3. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos:
$A(-3,-2)\ B(2,5)\ y\ C(4,2)$

4. Dos rectas que se cortan forman un ángulo de 135º, si se sabe que una recta tiene pendiente -3, Determinar la pendiente de la otra recta.

5. Dos rectas que se cortan forman un ángulo de 45º, la recta inicial pasa por $A(-2,1)\ y\ B(9,7)$ y la recta final pasa por $C(3,9)$ y por el punto cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de *R*.

6. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos:
$A(-2,1)\ B(3,4)\ y\ C(5,-2)$

7. Hallar el ángulo entre los segmentos $L_1\ y\ L_2$ que unen los puntos $A(-1,2)\ B(1,-1)$ y $C(-5,-3)\ D(1,2)$

8. Hallar el ángulo α entre las rectas $L_1\ y\ L_2$ cuyas pendientes son $m_1=3/2\ y\ m_2=3$

9. Hallar el ángulo α entre las rectas $L_1\ y\ L_2$ cuyas pendientes son $m_1=3/4\ y\ m_2=2/5$

(Ejercicios y problemas recopilados)

BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Ministerio de Educación (2022). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje" 5to. Año (3er. trimestre)*. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva "*Texto de aprendizaje" 5to. Año.* La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación, (2023). Currículum Base: Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz – Bolivia.

Tintaya Condori, L. (2015). *Matemáticas 5,* Editorial Bruño – Bolivia.

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas.* Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México.

Londoño, N. & Bedoya, H. (2003), *Matemática Progresiva 5*, Grupo Editorial Norma S.A. – Colombia.

Olmos Millán, A. & Martínez C, L. C. (2003), *Matemática Práctica 5*, Editorial Voluntad S.A. – Colombia.

Diccionario de Matemáticas (2000), Editorial Cultural S. A. *Polígono Industrial Arroyomolinos* – España.

Laura Valencia, R. 2023. *Compilado de Matemática 5,* texto inédito.

Allen R. A. (2007). *Álgebra Elemental.* Pearson. México.

Dennis G. Z. (2012). *Álgebra y trigonometría.* McGRAW-HILL. México.

Earl W. S. (2009). *Álgebra y trigonometría.* Cengage Learning Editores. México.

Murray R. (2007). *Algebra Superior* Ed. McGRAW-HILL. México.

Frank Ayres. (1990). *Trigonometría plana y esférica*. McGRAW-HILL. Colombia.

Allen R. A. (2008). *Algebra Intermedia*. Ed. Pearson. México.

Arya L. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.* Ed. Pearson. México.

Peña Romay, Efraín (2017) *Matemáticas 5*. Ediciones GES. Bolivia.

Quisbert Callisaya, Abraham (2019) *Matemáticas 5.* Editorial "ABYA YALA PATUJU". Bolivia.

Huanquiri Quispe, Ismael (2013) *Matemática 5*. Editorial "CONSTRUYAMOS". Bolivia.

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **5TO. AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Jazmine Coral Ontiveros Terán

Física
Alison Fabiola Poma Ovaillos

Química
Keila Karina Cartagena Tamo

Ciencias Sociales
Norma Silvestre Huanca

Matemática
Rolando Vicente Laura Valencia

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía
Giovana Velarde Vargas

Física
Miguel Angel Cayo Mendoza

Química
Daniela Alejandra Bernal Dorado

Lengua Castellana
Teddy Orlando Valeriano Condori

Ciencias Sociales
Amilcar Raul Zenteno Barrientos

Matemática
Juan Gutierrez Suntura

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía
Ricardo Quisbert Pope

Física
Jonathan Vino Varias

Química
Miriam Virginia Barcaya Rosales

Lengua Castellana
Yeny Aruquipa Saucedo

Ciencias Sociales
Ingrid Jhasilma Chacon Peredo

Matemática
Albino Falcon Mamani

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD

rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN