



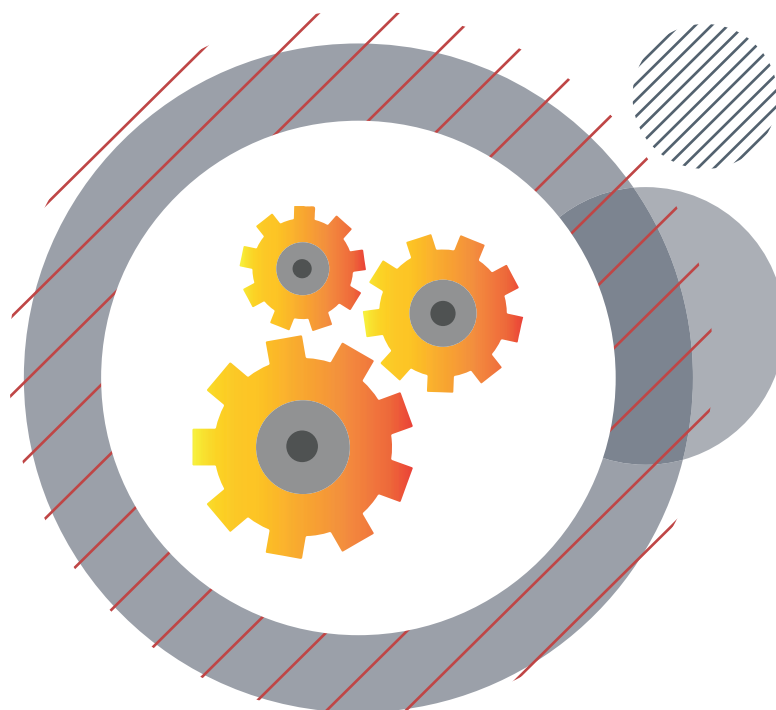
ESTADO PLURINACIONAL DE  
**BOLIVIA**

MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN

**5**

**SECUNDARIA**

**TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024**



**SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA**  
**ÁREA**

**MATEMÁTICA**

**SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR**



Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024  
Educación secundaria comunitaria productiva  
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi  
**MINISTRO DE EDUCACIÓN**

Bartolomé Puma Velásquez  
**VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR**

María Salomé Mamani Quispe  
**DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

**Equipo de redacción**  
Dirección General de Educación Secundaria

**Coordinación general**  
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

# Índice

|                       |   |
|-----------------------|---|
| PRESENTACIÓN .....    | 1 |
| CONOCE TU TEXTO ..... | 2 |

## CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN



### Matemática

#### Quinto año de secundaria

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Aplicación de las progresiones en la cotidianidad .....                             | 121 |
| Análisis combinatorio en situaciones concretas .....                                | 127 |
| Estadística descriptiva en procesos productivos y fenómenos sociales.....           | 130 |
| Trigonometría y la aplicación en la tecnología .....                                | 136 |
| Triángulos rectángulos en el desarrollo de la ciencia y la tecnología .....         | 145 |
| Triángulos oblicuángulos en el desarrollo de la ciencia y la tecnología.....        | 151 |
| Identidades y ecuaciones trigonométricas y su valor en la productividad .....       | 155 |
| Introducción a la geometría analítica aplicada al contexto y/o a la tecnología..... | 163 |
| Laboratorio matemático .....                                                        | 170 |





# PRESENTACIÓN

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi  
**MINISTRO DE EDUCACIÓN**

# CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:



## Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

## Glosario

## Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.



## Investiga



## ¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

## ¿Sabías que...?

## Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.



## Noticiencia



## Escanea el QR



## Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

## Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.



## Aprende haciendo



## Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

## Desafío

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.



## ¡Taller de Ortografía!



## ¡Taller de Caligrafía!



## ¡Razonamiento Verbal!

**5**

**SECUNDARIA**

**ÁREA**  
**MATEMÁTICA**





# CIENCIA TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN MATEMÁTICA

## APLICACIÓN DE LAS PROGRESIONES EN LA COTIDIANIDAD



### ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

#### Depreciación

Dejando a un lado los casos en que un objeto adquiere valor precisamente a causa de su antigüedad y rareza, todo bien (vehículos, casas, maquinarias, equipos de computación, etc.) va disminuyendo de valor año a año debido al desgaste, la desactualización y el envejecimiento. A este proceso se denomina “depreciación”. Al final de su vida útil (el tiempo en que puede ser utilizado y aprovechado) un bien tiene un valor que se conoce como “valor en libros”.



#### Actividad 1

**1** Un bus de transporte interdepartamental es adquirido en \$us 130 000. El ritmo de depreciación es de 7% el primer año, 6,5% el segundo, 6% el tercero y así sucesivamente, porcentajes calculados sobre el costo original del vehículo. ¿Cuál será su valor en libros al cabo de sus 12 años de vida útil?

**2** Construyamos la tabla en el cuaderno de ejercicios y completemos los datos faltantes:

| Año                   | 0       | 1       | 2       | 3       | 4 | ... |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---|-----|
| % de depreciación     | -       | 7%      | 6,5%    | 6%      |   |     |
| Depreciación          | -       | 9 100   | 8 450   | 7 800   |   |     |
| Valor al final de año | 130 000 | 120 900 | 112 450 | 104 650 |   |     |

**3** Respondemos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

- ¿Qué porcentaje va depreciándose cada año?
- ¿Qué precio tendrá el autobús al cabo de 10 años?
- ¿Qué entiendes por la palabra sucesión?



### ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

#### 1. Progresiones y sucesiones

Una sucesión  $\{a_n\}$  es un conjunto ordenado de números:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  donde a cada uno de ellos se los denomina como término de la sucesión. En una sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , el subíndice indica la posición del término. Así, por ejemplo,  $a_5$  es el quinto término y  $a_n$  es el término  $n$ -ésimo de la sucesión.

Formas de determinar una sucesión.

La fórmula directa (llamada también fórmula del término general) indica cómo hallar un término cualquiera de una sucesión conociendo el lugar que el término ocupa.

La fórmula recursiva indica cómo hallar un término a partir del término anterior.

**Actividad 2:** Nos familiaricemos con algunas sucesiones. Descubre el patrón de cada sucesión y escribe al menos tres términos siguientes:

3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 30

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23

5, 1, -3, -7, -11, -15, -19

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21



### Actividad 3

Calculamos los primeros 5 términos de cada sucesión, dada la fórmula directa.

- 1)  $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- 2)  $h_n = 3^{n-3}$
- 3)  $a_n = 3n - 1$
- 4)  $u_n = \frac{n^2}{n+1}$

**Ejemplo 1:** Calculamos los 5 primeros términos de cada sucesión a partir de la fórmula directa.

a)  $a_n = 2n - 1$

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

La sucesión formada es:

1, 3, 5, 7, 9, ...

b)  $b_n = 3^{n-3}$

$$b_1 = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$b_2 = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$b_3 = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

$$b_4 = 3^{4-3} = 3^1 = 3$$

$$b_5 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

La sucesión formada es:

$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$

**Ejemplo 2.** Encontramos la fórmula directa de las siguientes sucesiones:

A)

5, 10, 15, 20, 25, ...

La secuencia está comprendida por los múltiplos de 5, es decir 5\*la posición que ocupa el término en la sucesión.

Por tanto, la fórmula directa será:  $a_n = 5n$

B)

14, 21, 28, 35, 42, ...

La secuencia está comprendida por los múltiplos de 7, sin embargo, la sucesión no inicia desde 7, de tal manera que no se puede determinar únicamente con la expresión  $7 \cdot n$ , es necesario sumarle 7 para que el primer término sea 14.

Por tanto, la fórmula directa será:  $b_n = 7n + 7$

**Ejemplo 3.** Encontramos la fórmula recursiva de las siguientes sucesiones:

2, 5, 8, 11, ...

Hay que sumarle 3 al término anterior. Denotamos como  $b_{n-1}$  como el término anterior a  $b_n$ .

Por tanto, la fórmula recursiva será:  $b_n = b_{n-1} + 3, b_1 = 2$

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Conocida como la Sucesión de Fibonacci, hay que sumar los dos términos anteriores.

Por tanto, la fórmula directa será:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , con  $f_1 = 1, f_2 = 1$



### Actividad 4

Calculamos los primeros 5 términos de cada sucesión, dada la fórmula recurrente.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{a_{n-1}}, a_1 = 3$$

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{n}, b_1 = 1$$

$$d_n = \frac{1}{d_{n-1} + 1}, d_1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$a_i$ : son los elementos del conjunto.

La expresión  $i = 1$  indica dónde empieza la suma.

$n$ : el número de elementos a tomar en cuenta, donde termina la sumatoria.

### Sumatorias y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria o sumatorio se emplea para representar la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) " $\Sigma$ " la cual iremos detallando a continuación:

**Ejemplos:**

$$\sum_{k=0}^5 (-2)^k = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 = -21$$

$$\sum_{i=0}^4 \frac{2i+1}{2i-1} = \frac{2(0)+1}{2(0)-1} + \frac{2(1)+1}{2(1)-1} + \frac{2(2)+1}{2(2)-1} + \frac{2(3)+1}{2(3)-1} + \frac{2(4)+1}{2(4)-1} = -1 + 3 + \frac{5}{3} + \frac{7}{5} + \frac{9}{7} = \frac{667}{105}$$

**Tu turno:**

a)  $\sum_{k=2}^5 3 \cdot 2^k =$

b)  $\sum_{k=1}^7 k =$

c)  $\sum_{i=1}^5 \frac{i}{i+1} =$

d)  $\sum_{i=1}^5 i^2 =$

## Propiedades de la sumatoria

| Sumatoria de una constante     | Sumatoria de una constante de una sucesión        | Sumatoria de una suma o de una diferencia                        |
|--------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\sum_{i=1}^n c_i = n \cdot c$ | $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^n c_i a$ | $\sum_{i=1}^n (a \pm b) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$ |

## Progresiones aritméticas P.A.

Una progresión aritmética (P. A.) es aquella en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada diferencia.

$$\begin{array}{lcl}
 a_1 = a_1 & \longrightarrow & a_1: 1er\ término \\
 a_2 = a_1 + d & \longrightarrow & a_2 = a_1 + d \\
 a_3 = a_1 + d + d & \longrightarrow & a_3 = a_1 + 2d \\
 a_4 = a_1 + d + d + d & \longrightarrow & a_4 = a_1 + 3d \\
 a_5 = a_1 + d + d + d + d & \longrightarrow & a_5 = a_1 + 4d
 \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

**Fórmula directa**

$a_n$ : Término general  
 $a_1$ : 1er término  
 $n$ : Número de término  
 $d$ : Diferencia

Fórmula del 1er término:

$$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d$$

Fórmula de la diferencia:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

Fórmula del número de términos:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

### Ejemplo 1:

Determinamos los elementos de la P. A.:

2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23

$$a_1 = 2,$$

$$a_n = 23, n = 8, d = 3$$

La diferencia es posible calcular restando algún término de la P.A. con su término anterior.

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = \boxed{3}$$



### Para pensar un poco

El General Irahola decide formar su tropa en forma de triángulo de tal manera que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, y así sucesivamente. Si hay 1 225 soldados, ¿cuántas filas puede formar?

### Ejemplo 2:

Calculamos el trigésimo quinto

término de la P.A.: **1, 7, 13, 19**

$$a_1 = 1$$

$$n = 35$$

$$d = 7 - 1 = 6 \quad a_n = ?$$

Utilizamos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{35} = 1 + (35 - 1) \cdot 6$$

$$a_{35} = 1 + 34 \cdot 6$$

$$a_{35} = 1 + 204$$

$$\boxed{a_{35} = 205}$$

### Ejemplo 3:

Una P.A. tiene 85 términos. Si los tres

últimos términos son  $-\frac{11}{2}, -\frac{25}{4}, -7$ .

Calculamos el 1er término.

$$a_1 = ? \quad n = 85 \quad a_n = -7$$

$$d = -7 - \left(-\frac{25}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Utilizamos:

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

$$a_1 = -7 - (85 - 1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$a_1 = -7 - 84 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$a_1 = -7 + 63 = \boxed{56}$$

### Ejemplo 4:

Encontramos los cinco primeros SI:

$$a_1 = 2 \text{ y } d = 7$$

$$a_n = 2 + (n - 1)7$$

$$a_n = 2 + 7n - 7$$

$$a_n = 7n - 5$$

Calculamos los cinco primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 7 \cdot 2 - 5 = 9$$

$$a_3 = 7 \cdot 3 - 5 = 16$$

$$a_4 = 7 \cdot 4 - 5 = 23$$

$$a_5 = 7 \cdot 5 - 5 = 30$$

### Ejemplo 5:

Hallamos  $a_{30}$  si  $a_1 = \frac{1}{2}$  y  $a_{12} = 6$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{6 - \frac{1}{2}}{12 - 1} = \frac{\frac{11}{2}}{11} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

Calculamos el término pedido:

$$a_{30} = \frac{1}{2} + (30 - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_{30} = \frac{1}{2} + \frac{29}{2} = \frac{30}{2} = \boxed{15}$$

### Ejemplo 6:

¿Cuántos términos tiene la

sucesión?: **4, 8, 12, 16, ..., 512**

$$a_1 = 4 \quad a_n = 512$$

$$d = 8 - 4 = 4$$

Encontramos el número de términos:

$$n = \frac{512 - 4}{4} + 1$$

$$n = \frac{508}{4} + 1 = \frac{512}{4}$$

$$\boxed{n = 128}$$

## Interpolación Aritmética

En una progresión aritmética, los términos que se encuentran entre los dos términos extremos dados,  $a_1$  y  $a_n$ , se llaman medios aritméticos entre  $a_1$  y  $a_n$ ; los términos  $a_1$  y  $a_n$  se denominan extremos.



**Actividad 5.** Resolvemos los siguientes ejercicios:

- Determinar los elementos de la P. A.:  
**23; 20; 17; 14; 11; 8; 5**
- Calcular el décimo sexto término de la P.A.: **2, 7, 12, 17**
- Una P.A. tiene 35 términos. Si los tres últimos términos son  $-\frac{11}{2}, -\frac{25}{4}, -7$ . Calcular el 1er término.
- En la P.A. entre -10 y 5, ubicar 4 términos centrales.
- En una P.A. el 3er término es 5 y el 7mo término es 3. Calcular el 10mo término.
- En una P.A.  $t_n = 2(n-1) + 7$ . Calcular:  $t_{10}$ , para  $n = 10$ .

Realizar una interpolación aritmética de  $p$  términos entre dos números dados significa hallar  $p$  medios aritméticos entre  $a$  y  $b$ :

$$a_1, \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_p}_{p \text{ términos}}, a_n$$

**Ejemplo 1:**  
Interpolamos tres medios aritméticos entre 2 y 14.

$$a_1 = 2; a_n = 14, \quad n = 5$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{14 - 2}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

Interpolamos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2 + 3 = 5 \\ a_3 &= 2 + 2 \cdot 3 = 8 \\ a_4 &= 2 + 3 \cdot 3 = 11 \\ a_5 &= 14 \end{aligned}$$

$$\mathbf{2, 5, 8, 11, 14}$$

**Ejemplo 2:**

Interpolamos seis medios aritméticos entre 3 y 38.

$$a_1 = 3; a_n = 38, \quad n = 8$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{38 - 3}{8 - 1} = \frac{35}{7} = 5$$

Interpolamos:

$$\mathbf{3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38}$$

### Suma de términos equidistantes

En toda sucesión aritmética finita  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$  se verifica que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos  $a_1 + a_n$ .

Es decir, en la sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$  se verifica:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

### Suma de $n$ términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{ó} \quad S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

**Ejemplo 1:**

En una P.A. de 7 términos, el término central es 18 y el segundo 22. Calcular el 6to y 7mo términos y la suma para 10 términos.

$$a_4 = 18; a_2 = 22, \quad n = 7$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{18 - 22}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Calculamos el 6to y 7mo término.  $a_1 = 24$

$$a_6 = 24 + (6-1) \cdot (-2)$$

$$a_6 = 24 - 10 = \mathbf{14}$$

$$a_7 = 24 + (7-1) \cdot (-2)$$

$$a_7 = 24 - 12 = \mathbf{12}$$

Calculamos la suma para  $n = 10$ . Calculamos  $a_{10}$

$$a_{10} = 24 + (10-1) \cdot (-2) = 6$$

$$S_{10} = \frac{10(24 + 6)}{2} = \frac{10 \cdot 30}{2} = \mathbf{150}$$

**Ejemplo 2: LUCEMOS CONTRA LA VIOLENCIA**

Desde que Victoria decidió rehacer su vida después de haberse separado de su pareja por violencia intrafamiliar, abrió una cuenta de ahorros en un banco con 120\$us, el 2do mes depositó 145\$us y el 3er mes 170\$us. ¿Cuánto ha ahorrado en un año y medio y cuánto el último mes?

$$P. A.: 120, 145, 170, \dots$$

$$a_1 = 120\$ , n = 18 \text{ meses}, d = 25\$ , S_{18} = ?, a_n = ?$$

Calculamos el último término:

$$a_{18} = 120 + (18-1) \cdot 25$$

$$a_{18} = 120 + 425 = \mathbf{545\$us}$$

Para saber el monto ahorrado, calculamos la suma hasta  $a_{18}$ :

$$S_{18} = \frac{18(545 + 120)}{2}$$

$$S_{18} = \frac{18 \cdot 665}{2} = \mathbf{5985\$us}$$

**Respuesta.** Victoria ahorró 545 dólares el último mes y 5985 dólares durante el año y medio, demostrando que se puede salir adelante.

### Actividad 6.

Resolvemos los siguientes ejercicios

- Encontramos la suma indicada en la siguiente progresión aritmética:  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}, \dots; S_{20}$
- Hallamos el número de términos para que  $2+8+14+20+\dots=3640$
- Sobre una recta en el suelo hay una canasta y 30 manzanas distribuidas en la misma recta. La canasta está a 3m de la primera manzana y las manzanas están a 1,5m una de la otra. Una persona parte de la canasta, recoge la primera manzana y regresa a ponerla en la canasta; hace la misma operación con la segunda manzana y así sucesivamente.
  - ¿Qué distancia ha recorrido al recoger y colocar la vigésima manzana?
  - ¿Qué distancia ha recorrido en total al recoger las 30 manzanas?
- Un dentista arregla todas las piezas de un cliente, por el primer diente cobra Bs 80 y por cada diente después del primero cobra Bs 7 más que el anterior. Si el cliente tiene la dentadura completa ¿Cuál será el honorario del profesional y cuánto cobró por el último diente?

## Progresiones geométricas P.G.

En una sucesión geométrica cada término (exceptuando el primero) se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija  $r$  llamada razón geométrica. La fórmula directa (o término general) es:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_1 \cdot r \cdot r \\ a_4 &= a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \\ a_5 &= a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \end{aligned}$$

$a_1$ : 1er término

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

### Fórmula directa

$a_n$ : Término general

$a_1$ : 1er término

$n$ : Número de término

$r$ : Razón

Fórmula del 1er término:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

Fórmula de la razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Fórmula del número de términos:

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

### Ejemplo 1:

Determinamos los elementos de la P.G.:

5; 10; 20; 40; 80; 160; 320

$$a_1 = 5,$$

$$a_n = 320, n = 7, r = 2$$

La razón es posible calcular dividiendo algún término de la P.G. con su término anterior.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{10}{5} = 2$$

### Ejemplo 2:

Hallamos el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término es 432 y su razón es 6.

$$a_1 = ?$$

$$n = 5$$

$$r = 6$$

$$a_5 = 432$$

Utilizamos:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{432}{6^{5-1}} = \frac{432}{6^4} = \frac{432}{1296}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

### Ejemplo 3:

Hallamos el número de término de la P.G.

donde  $a_1 = 2$ ,  $a_n = 486$  y  $r = 3$ .

$$n = ?$$

Utilizamos:

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{486}{2}\right)}{\log 3} + 1$$

$$n = 6$$

## Actividad 7. Resolvemos los siguientes ejercicios

- Determinamos los elementos de la P. G.: **2; 6; 18; 54; 162**
- Hallamos  $a_8$  de la progresión:  $\therefore \frac{1}{3} : 1 : 3 : \dots$
- El 6º término de una progresión geométrica es 50 y la razón 2. Hallamos el primer término.
- En una progresión geométrica,  $a_1 = 8$  y  $a_7 = \frac{1}{512}$ . Hallamos la razón
- Un hombre trabajó durante 8 días y cada día ganó  $\frac{1}{3}$  de lo que ganó el día anterior. Si el 8º día ganó Bs. 1. ¿Cuánto ganó el primer día?

### Ejemplo 4:

En una progresión geométrica el término  $a_3 = 18$  y el término  $a_5 = 162$ , hallar  $a_{12}$ .

Para calcular la razón: Podemos trabajar con  $a_3$  que puede ocupar el espacio de  $a_1$  y  $a_5$  que funge como  $a_3$ .

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

Hallamos  $r$  con  $a_1 = 18$  y  $a_3 = 162, n = 3$ .

$$r = \sqrt[3-1]{\frac{162}{18}} = \sqrt{9} = 3$$

Hallamos  $a_{12}$ :

$$a_{12} = \frac{18}{3^{3-1}} = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2$$

Hallamos  $a_{12}$ :

$$a_{12} = 2 \cdot 3^{12-1} = 2 \cdot 3^{11}$$

$$a_{12} = 354\,294$$

### Ejemplo 5: Calculemos el término pedido en cada P.G.

$$1, \sqrt{2}, 2, \dots$$

$$a_1 = 1 \quad r = \sqrt{2}$$

Calculamos el décimo término:

$$a_{10} = 1 \cdot (\sqrt{2})^9$$

$$a_{10} = \sqrt{2^9}$$

$$a_{10} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = 2^4 \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

Halla la razón  $r$  de una sucesión geométrica si:  $a_8 = 4374$  y  $a_2 = 6$

$$a_8 = a_2 \cdot r^6$$

$$4374 = 6 \cdot r^6$$

$$r^6 = \frac{4374}{6} = 729$$

$$r = \sqrt[6]{729} = 3$$

## Interpolación geométrica

Realizar una interpolación geométrica de  $p$  términos entre dos términos extremos  $a$  y  $b$  significa hallar  $p$  términos,  $x_1, x_2, \dots, x_p$  tales que estos y los extremos formen una sucesión geométrica. Los términos interpolados se llaman medios geométricos.

$$\underbrace{a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, b}_{\text{sucesión geométrica}}$$

### Ejemplo 1:

Interpolamos 3 medios geométricos entre 2 y 162.

$$a_1 = 2; a_n = 162, \quad n = 5$$

Calculamos la razón:

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Interpolamos:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$a_4 = 2 \cdot 3^3 = 54$$

$$a_5 = 162$$

$$\therefore 2, 6, 18, 54, 162$$

### Ejemplo 2:

Interpolamos 4 medios geométricos entre  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{128}{1215}$ .

$$a_1 = \frac{4}{5}; a_n = \frac{128}{1215}, \quad n = 6$$

Calculamos la razón:

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{\frac{128}{1215}}{\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$$

Interpolamos:

$$a_1 = \frac{4}{5}$$

$$a_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$a_3 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45}$$

$$\therefore \frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{16}{45}, \frac{32}{135}, \frac{64}{405}, \frac{128}{1215}$$



## Suma de términos de una progresión geométrica

Dada la progresión geométrica:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n$

O bien:  $a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2, a_1 \cdot r^3, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}$

Vamos a obtener la expresión matemática que nos permita determinar la suma de los términos de una progresión geométrica.  $S_n$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} \quad (1)$$

$$\text{Es decir: } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (2)$$

Multiplicación (1) por  $r$

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \dots + a_1 \cdot r^n$$

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot r^n \quad (3)$$

Restando miembro a miembro (1) y (3)

$$r \cdot S_n = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_1 \cdot r^n$$

$$-S_n = -\cancel{a_1} - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} - \dots - \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}$$

$$r \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot r^n - a_1$$

$$S_n(r - 1) = a_1(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

### Ejemplo 1:

Una persona ahorró bs 128 en el mes de enero, y de ahí en adelante solo ha podido ahorrar la mitad de lo que ahorró el mes anterior. ¿Cuánto ha ahorrado en el mes de octubre y cuánto es su ahorro total?

$$a_1 = 128; r = 1/2, n = 10$$

Calculamos el último término:

$$a_{10} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Calculamos la suma total:

$$S_{10} = \frac{128 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{128 \cdot \left(\frac{1-1024}{2}\right)}{\frac{1-2}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{1023}{4} = 255.75$$

**Rpta. En octubre ahorró apenas 25 centavos y en total ahorró 255.75 bs.**

## 2. Resolución de problemas del contexto y la tecnología

### Actividad 8. Resolvemos los siguientes ejercicios

- Hallamos la suma de los 5 primeros términos de la progresión:  $:: 6 : 3 : 1\frac{1}{2} : \dots$
- Hallamos la suma de los 10 primeros términos de la progresión:  $:: \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : \dots$
- El día lunes gané Bs 2 y cada día después gané el doble de lo que gané el día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?
- Si  $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$ ; calculamos  $S_{11}$

### La leyenda del ajedrez

Una leyenda acerca del origen del ajedrez en la India cuenta que Lhaur Sessa, el inventor del juego, ante el ofrecimiento del rey Ladava pidió que se le recompensara entregándole un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente. El rey se sorprendió ante la aparentemente mísera petición y ordenó calcular la cantidad de trigo. Los matemáticos, después de mucho trabajo, le comunicaron que no estaba en condiciones de cumplir el pedido de Sessa debido a la exorbitante cantidad de trigo que se necesitaba. La historia cuenta que Sessa liberó al rey de su promesa y se convirtió en su consejero. ¿Cuántos granos de trigo pidió Sessa?

Con los datos brindados en la lectura tenemos que:  $a_1 = 1, r = 2, n = 64$

Calculamos la suma  $S_{64}$ .

$$S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} = 2^{64} - 1$$

$$= \boxed{1\ 833\ 581\ 560\ 671\ 830\ 015} \text{ granos de trigo}$$

¡Toda la producción de trigo de un siglo no sería suficiente!



### Actividad 9. Analizamos y resolvemos el siguiente problema

Te ofrezco un trabajo por el que ganarías Bs 1 el primer día, Bs 2 el segundo día, Bs 4 el tercero; es decir, cada día ganarías el doble de lo que ganaste el día anterior, ¿Cuánto ganarías en 30 días de trabajo?, ¿te conviene?, ¿aceptarías el trabajo?



### Actividad 10. Resolvamos el siguiente problema



#### Historia familiar

¿Cuántos antepasados tienes en 10 generaciones anteriores?  
 $a_1=2$  (padres),  $a_2=4$  (abuelos),  $a_3=8$  (bisabuelos)



## ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 11.** Respondamos las siguientes preguntas:

Formamos grupos sociocomunitarios de tres o cuatro personas para reflexionar y debatir los contenidos desarrollados, en función a las siguientes preguntas:

- ¿En la leyenda del ajedrez, qué opinión te merece la decisión del rey al aceptar la forma de pago a Sessa?
- ¿En qué aspectos de la naturaleza se observan sucesiones numéricas? Mencionamos al menos tres.
- En el campo de la economía, ¿en qué circunstancias se aplican las sucesiones?
- Valoremos lo maravillosos que pueden ser los números y anotemos dos sucesiones que nos llamaron más la atención.

Formemos un círculo de reflexión para debatir en función al análisis efectuado en cada grupo sociocomunitario.



## ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 12.** Elaboremos materiales:

- Elaboremos un cuadro didáctico de la sucesión de Fibonacci, analizando matemáticamente su conformación.
- Construimos un calendario de ahorro (30 días) y proponemos una progresión para llevar adelante el ahorro. (Según nuestras posibilidades). Calculemos el total de dinero a recaudar al finalizar el mes.
- Socialicemos el calendario de ahorro en nuestras familias incentivandoles a cumplir el reto.

## ANÁLISIS COMBINATORIO EN SITUACIONES CONCRETAS

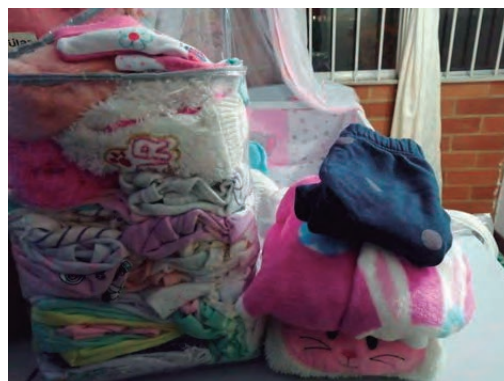


### ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

**Actividad 13.** Respondamos a las preguntas de acuerdo al caso

Isabel es una niña que nació en pleno confinamiento por la pandemia, como las restricciones iniciales eran muy rígidas al inicio, su madre no podía acudir a las tiendas cercanas para adquirir nueva ropa para su hija. Sólo disponía de 5 poleras, 4 pantalones, 3 pares de calzados. En equipos de trabajo, determinamos todas las posibles formas diferentes de vestir a Isabel y respondemos las siguientes preguntas.

- ¿Cuántas son las posibles formas de vestir a Isabel?
- Asumiendo que, a Isabel la deben cambiar 2 veces al día. ¿Para cuantos días abastece su ropa?
- ¿Cómo se llama el cálculo realizado para determinar todas las posibles formas de vestir a Isabel?
- ¿En qué otras situaciones es necesario saber todas las posibles formas de hacer algo?



### ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

#### 1. Principios básicos de conteo

El principio fundamental de conteo establece que si hay  $p$  formas de hacer una cosa, y  $q$  formas de hacer otra cosa, entonces hay  $p \times q$  formas de hacer ambas cosas. También se le conoce como el principio multiplicativo.

Expresado algebraicamente tenemos:  $p \cdot q \cdot r \dots$

Ejemplo:

¿Cuántos números divisibles por 5 formados por 4 dígitos distintos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, y 5?

|                          |   |   |   |                 |   |   |   |  |
|--------------------------|---|---|---|-----------------|---|---|---|--|
| □                        | □ | □ | 0 | □               | □ | □ | 5 |  |
|                          |   |   |   | 3 posibilidades |   |   |   |  |
|                          |   |   |   | 4 posibilidades |   |   |   |  |
|                          |   |   |   | 5 posibilidades |   |   |   |  |
| $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ |   |   |   |                 |   |   |   |  |

|                          |   |   |   |                 |   |   |   |  |
|--------------------------|---|---|---|-----------------|---|---|---|--|
| □                        | □ | □ | 5 | □               | □ | □ | 5 |  |
|                          |   |   |   | 3 posibilidades |   |   |   |  |
|                          |   |   |   | 4 posibilidades |   |   |   |  |
|                          |   |   |   | 4 posibilidades |   |   |   |  |
| $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ |   |   |   |                 |   |   |   |  |

Por consiguientes es posible formar  $60 + 48 = 108$  números.

**Actividad 14.** Resolvamos el siguiente problema

Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay cuatro caminos; para ir de B a C hay 5 caminos; y para ir de la ciudad C a la ciudad D hay tres caminos. ¿Cuántas rutas diferentes se pueden tomar para ir de la ciudad A a la ciudad D, pasando por las ciudades B y C?

## 2. Factorial de un número natural y sus propiedades

El producto de  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  se suele simbolizar  $5!$  que se lee “cinco factorial”.

El factorial de un número natural  $n$  se representa por “ $n$  factorial” o “factorial de  $n$ ” y se define como:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

## 3. Permutaciones simples

Dado un conjunto  $n$  de elementos, se llama permutación simple de  $n$  elementos a cualquier agrupamiento ordenado de esos  $n$  elementos, de modo que dos agrupaciones se diferencien solo en el orden de aquellos.

**Ejemplos:** Calculemos:

$$1) \quad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$2) \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$3) \quad \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{720}{2 \cdot 1} = 360$$

Calcula cada una de las siguientes expresiones.

$$1) \quad 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

$$2) \quad \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{40320}{720} = 56$$

**Actividad 15.** Resolvamos los siguientes problemas

- 1.- ¿Cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 4, 5, 6, 7 y 8?
- 2.- ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las letras de Beatriz? ¿Cuántos comienzan con la letra Z?
- 3.- Orlando tiene un CD de música de 8 pistas. ¿De cuántas maneras distintas podría escuchar su CD en el modo de “Secuencia aleatoria” (Random)?

El número de permutaciones simples de  $n$  elementos está dado por:

$$P_n = n! = n (n - 1) (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas en una banca?

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneras}$$

2. Un equipo de fútbol de salón tiene 6 jugadores, de los cuales el arquero y un delantero son inamovibles. ¿De cuántas maneras se puede disponer de los jugadores del equipo?

**A B C E F D**

$$P_{n,k} = (n - k)! \rightarrow P_{6,2} = (6 - 2)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ maneras}$$

## 4. Permutaciones con repetición

Si en un conjunto de  $n$  elementos uno de ellos se repite  $n_1$  veces, otro se repite  $n_2$  veces y así sucesivamente, entonces el total de permutaciones está dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}$$

Ejemplo:

Calculamos el número de anagramas que pueden formarse con las letras de la palabra MARA. El número de elementos es 4:  $n = 4$

La letra A se repite dos veces:  $n_1 = 2$

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ permutaciones}$$

**Actividad 16.** Resolvamos los siguientes problemas

- 1.- Con los dígitos 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, y 3, ¿Cuántos números distintos podemos escribir en el sistema de numeración decimal?
- 2.- ¿Cuántas señales formadas por 6 banderines pueden formarse con un banderín rojo, uno amarillo, uno verde y tres azules?

## 5. Variaciones simples

Si con las letras de la palabra AMOR construimos secuencias de 3 letras (sin repetirlas), ¿Cuántas secuencias podríamos formar?

- Comenzando por A: AMO, AMR, AOM, AOR, ARO y ARM
- Comenzando por M: MAO, MAR, MOA, MOR, MRA y MRO
- Comenzando por O: .....
- Comenzando por R: .....

Una variación sin repetición de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  (donde  $k \leq n$ ) es un grupo ordenado de  $k$  elementos distintos que se pueden formar a partir de los  $n$  elementos.

La cantidad de variaciones de  $n$  elementos se calcula mediante:

$$V_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} \text{ donde } n \geq k$$

## 6. Variaciones con repetición

Si con las letras de la palabra AMOR formamos secuencias de 2 letras, pero de tal manera que pueden repetirse las letras hasta dos veces, ¿Cuántas secuencias podríamos formar?

- Comenzando por A: AA, AM, AO, AR
- Comenzando por M: MA, MM, MO, MR, etc.

Las variaciones con repetición de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  son los distintos grupos ordenados de  $k$  elementos, repetidos o no, que se pueden formar con los  $n$  elementos dados.

La cantidad de variaciones con repetición de  $n$  elementos está dada por:

$$VR_{n,k} = n^k$$

**Ejemplos:**

1.- ¿Cuántas variaciones se pueden obtener con las letras a, b y c tomadas de 2 en 2?

$$n = 3 \quad k = 2$$

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!} \rightarrow V_{3,2} = \frac{3!}{(3 - 2)!}$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

2.- Diez personas esperan para subir a un funicular que sólo tiene capacidad para 6. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 6 de esas personas en el funicular?

$$n = 10 \quad k = 6$$

$$V_{10,6} = \frac{10!}{(10 - 6)!} = \frac{10!}{4!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$$

$$= 151200 \text{ maneras}$$

Ejemplo:

¿Cuántos números formados por dos cifras podemos obtener con las cifras 1, 2, 3, 4, 5?

$n=5$

$k=2$

$$VR_{n,k} = n^k \rightarrow VR_{5,2} = 5^2 = 25 \text{ números}$$

## 7. Combinaciones simples

Se llama combinación de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  a cada uno de los grupos de  $k$  elementos que se pueden formar, sin tener en cuenta el orden en que se pongan los elementos.

El número de combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  ( $C_{n,k}$ ) es igual al cociente del número de variaciones ( $V_{n,k}$ ) entre el número de permutaciones ( $P_k = k!$ ). Entonces:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \text{ donde } n > k$$

Ejemplo:

De siete profesores y diez estudiantes se debe formar una comisión integrada por dos profesores y 4 estudiantes. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

Combinaciones de los profesores tomados de 2 en 2:

$$C_{n,k} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Combinaciones de los estudiantes tomados de 4 en 4:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Por el principio multiplicativo:

$$21 \cdot 210 = 4410 \text{ comisiones posibles}$$

## 8. Números combinatorios

El número de combinaciones (sin repetición) de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  se llama número combinatorio de  $n$  sobre  $k$  y se denota mediante  $\binom{n}{k}$

$$\text{Es decir } \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \text{ donde } n \geq k$$

Ejemplos:

1. Calculamos el número combinatorio de "7 Sobre 4".

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \boxed{35}$$

2. Calculamos el número combinatorio de "11 sobre 2"

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{55}$$

## 9. Binomio de Newton

Analizando el desarrollo de  $(a+b)^n$  podemos hacer la siguiente generalización:

$$\text{El término } k+1 \text{ es: } t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

**Ejemplo 1:** desarrollamos por el binomio de Newton.  $(a^2+2b)^5$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{0} (a^2)^5 (2b)^0 + \binom{5}{1} (a^2)^4 (2b)^1 + \binom{5}{2} (a^2)^3 (2b)^2 + \binom{5}{3} (a^2)^2 (2b)^3 + \binom{5}{4} (a^2)^1 (2b)^4 + \binom{5}{5} (a^2)^0 (2b)^5 \\ &= \binom{5}{0} a^{10} + \binom{5}{1} a^8 \cdot 2b + \binom{5}{2} a^6 \cdot 4b^2 + \binom{5}{3} a^4 \cdot 8b^3 + \binom{5}{4} a^2 \cdot 16b^4 + \binom{5}{5} 32b^5 \\ &= \frac{5!}{5!} a^{10} + \frac{5!}{4! \cdot 1!} 2a^8b + \frac{5!}{3! \cdot 2!} 4a^6b^2 + \frac{5!}{2! \cdot 3!} 8a^4b^3 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} 16a^2b^4 + \frac{5!}{5!} 32b^5 \\ &= a^{10} + 5 \cdot 2a^8b + 10 \cdot 4a^6b^2 + 10 \cdot 8a^4b^3 + 5 \cdot 16a^2b^4 + 1 \cdot 32b^5 \\ &= a^{10} + 10a^8b + 40a^6b^2 + 80a^4b^3 + 80a^2b^4 + 32b^5 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2:** determinamos el 6º término del desarrollo de  $(3x-x^3)^9$  y determina el grado del término resultante.

$$\begin{aligned} t_{k+1} = t_6 &\rightarrow k+1 = 6 \rightarrow k = 5t_4 \\ &= \binom{9}{5} (3x)^{9-5} \cdot (-x^3)^5 \\ &= \frac{9!}{4! \cdot 5!} (3x)^4 (-x^{15}) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} (-81x^{19}) \\ &= -10206x^{19}; \text{grado } 19 \end{aligned}$$

**Actividad 17.** Resolvemos los siguientes problemas

- 1.- ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 si los mismos pueden repetirse?
- 2.- Si se lanzó una moneda 3 veces consecutivas, ¿cuántos son los resultados posibles?
- 3.- ¿Cuántos números de 4 cifras que además son múltiplos de 5 existen?
- 4.- ¿Cuántas placas de automóvil pueden fabricarse utilizando sólo cifras pares?
- 5.- Sobre una circunferencia se marcan 9 puntos distintos. ¿Cuántos triángulos se pueden construir haciendo que sus vértices estén situados sobre esos 9 puntos?

**Actividad 18.** Resolvamos el siguiente problema:

- 1.- Calculamos el valor de los siguientes números combinatorios:  
a)  $\binom{5}{2}$  b)  $\binom{11}{5}$  c)  $\binom{14}{4}$
- 2.- Desarrollamos las siguientes expresiones por el Binomio de Newton con números combinatorios:  
a)  $(2a+3b)^5$   
b)  $(3x+5y)^6$   
c)  $\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}\right)^7$
- 3.- Determinamos el 6º término del desarrollo de  $(3x+2y)^8$  y determina el grado del término resultante.





## ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 19.** Realicemos el siguiente ejercicio:

1. En nuestro cuaderno de apuntes anotamos en qué se aplican las permutaciones, variaciones y combinaciones.
2. Anotemos en qué situaciones utilizamos consiente o inconscientemente el cálculo combinatorio.



## ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 20.** Realicemos la siguiente dinamica en aula:

- Formamos equipos de trabajo para plantear desafíos con ejercicios de permutaciones, variaciones y combinaciones.
- Intercambiamos desafíos con entre equipos de trabajo.
- Cada equipo resuelve los desafíos asignados y los socializamos en plenaria.

# ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN PROCESOS PRODUCTIVOS Y FENÓMENOS SOCIALES



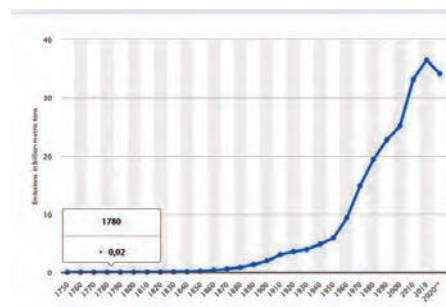
## ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

**Actividad 21.** Analicemos los siguientes datos e interpretemos la información

Estadísticas del cambio climático muestran que en 2020, la temperatura de la superficie de la tierra era alrededor de 0,98 grados Celsius más cálida que el promedio del siglo XX. En los últimos años, las temperaturas globales han estado constantemente entre las más calientes registradas.

La anomalía global en la temperatura de la superficie podría ser la causa de un aumento en el nivel del mar, una disminución del hielo ártico y el creciente número de catástrofes relacionadas con el clima, incluidas tormentas, inundaciones y sequías.

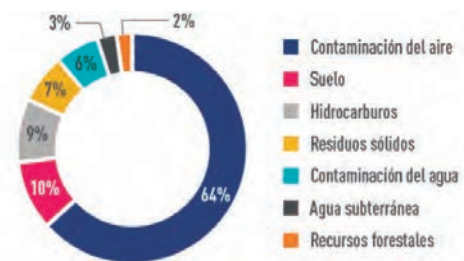
Emisiones globales de CO<sub>2</sub> relacionadas con la energía, se situaron en alrededor de 36,44 mil millones de toneladas métricas en 2019, un aumento significativo desde la era preindustrial. Sin embargo, las proyecciones para 2020 y 2021 muestran una notable reducción de emisiones debido a los impactos del COVID-19.



La actual tendencia de calentamiento es de particular importancia porque la mayor parte de ella (se estima que más de un 95%) es el resultado de la actividad humana desde mediados del siglo XX y procediendo a un ritmo sin precedentes a través de milenios.

La primera gráfica muestra las emisiones globales históricas de CO<sub>2</sub> de 1758 – 2020.

- ¿Qué información nos puedes brindar a partir de la 1ra gráfica?
- ¿Qué información nos puedes brindar a partir de la 2da gráfica?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre la estadística?
- Menciona en qué situaciones o lugares observas el uso de la estadística.



## ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

### 1. Definiciones fundamentales de Estadística

La estadística es una rama de las matemáticas que te permite recopilar, organizar y analizar datos según la necesidad que tengas, por ejemplo: obtener un resultado, comparar información, tomar mejores decisiones, entre muchas cosas más. Recolección y organización de datos:

- La población de un estudio estadístico es el conjunto de objetos que tienen por lo menos una característica común.
- La muestra de un estudio estadístico es el subconjunto de la población sobre la que se realiza el estudio. Los resultados de la muestra se trasladan a la población.

### 2. Tipos de variable: cuantitativa (discretas y continuas) y cualitativas

Las características que se estudian en una población se llaman variables. Las variables pueden tomar distintos valores.

**Variable cualitativas**, sus variables se expresan mediante atributos o cualidades.

**Variable cuantitativas**, los valores se expresan por números.

- Variable cuantitativa discreta: proviene del conteo, mediante números enteros.
- Variable cuantitativa continua: proviene de la medición, mediante números reales.

### 3. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos

La **frecuencia absoluta** ( $f_i$ ) de un valor  $x_i$  es la cantidad de veces que ese valor es observado. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

La **frecuencia relativa** ( $h_i$ ) de un valor es el cociente entre la frecuencia absoluta ( $f_i$ ) y el número total de datos ( $n$ ):  $h_i = \frac{f_i}{n}$ . La suma de frecuencias relativas es igual a la unidad.

La frecuencia relativa puede también expresarse en porcentaje y así se llama frecuencia relativa porcentual. La suma de frecuencias relativas porcentuales es igual a 100%.

**Ejemplo 1:** En un curso de Administración de Empresas, los estudiantes son evaluados cualitativamente con los conceptos A (el más alto), B, C, D y E (el más bajo). Las evaluaciones obtenidas son las siguientes:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | B | C | A | B | C | A | D | E | C | A | C | E | B | B | D | E |
| C | D | B | C | E | C | B | D | E | C | C | B | B | C | A | C | A | A |

#### a) Construye una tabla con las frecuencias relativa y absoluta

| EVALUACION | $f_i$ | $h_i$ | $h_i(\%)$ |
|------------|-------|-------|-----------|
| A          | 7     | 0,19  | 19%       |
| B          | 8     | 0,22  | 22%       |
| C          | 12    | 0,33  | 33%       |
| D          | 4     | 0,11  | 11%       |
| E          | 5     | 0,14  | 14%       |
| TOTAL      | 36    | 1     | 100%      |

#### b) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron la calificación A?

R.-  $f_A=7$ , la obtuvieron 7 estudiantes.

c) Sabiendo que la calificación mínima de aprobación es la calificación C, ¿Cuántos estudiantes están reprobados?

R.- sumamos las frecuencias absolutas de D y E:

$f_D + f_E = 4 + 5 = 9$   
9 estudiantes están reprobados.

- Frecuencia absoluta acumulada ( $F_i$ ) de un valor  $x_i$  es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que  $x_i$ .
- Frecuencia relativa acumulada ( $H_i$ ) de un valor  $x_i$  es la suma de las frecuencias porcentuales de los valores menores o iguales que  $x_i$ .

**Ejemplo 2:** De la actividad anterior construyamos la tabla de frecuencias:

Tabla 2

| EVALUACION | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $h_i(\%)$ | $H_i(\%)$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|
| A          | 7     | 7     | 0,19  | 0,19  | 19%       | 19%       |
| B          | 8     | 15    | 0,22  | 0,41  | 22%       | 41%       |
| C          | 12    | 27    | 0,33  | 0,75  | 33%       | 75%       |
| D          | 4     | 31    | 0,11  | 0,86  | 11%       | 86%       |
| E          | 5     | 36    | 0,14  | 1     | 14%       | 100%      |

### Distribución de frecuencias para datos agrupados

Cuando la variable es continua o cuando se recogen muchos datos distintos, es conveniente agrupar los distintos valores que toma la variable en conjuntos de valores que se llaman intervalos o clases, usualmente de la misma amplitud.

**Ejemplo 3:** la tabla muestra los salarios semanales (en Bs.) de 40 estudiantes de un lugar de comida rápida. Elabora una tabla de frecuencias con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Tabla 3

| Salario   | Nro de Empleados |
|-----------|------------------|
| [300,320] | 10               |
| [320,340] | 4                |
| [340,360] | 5                |
| [360,380] | 18               |
| [380,400] | 3                |

Tabla 4

| Salarios  | $f_i$ | $h_i$ | $h_i\%$ | $F_i$ | $H_i$ | $H_i\%$ |
|-----------|-------|-------|---------|-------|-------|---------|
| [300,320] | 10    | 0,25  | 25%     | 10    | 0,25  | 25%     |
| [320,340] | 4     | 0,1   | 10%     | 14    | 0,35  | 35%     |
| [340,360] | 5     | 0,125 | 12,50%  | 19    | 0,48  | 48%     |
| [360,380] | 18    | 0,45  | 45%     | 37    | 0,93  | 93%     |
| [380,400] | 3     | 0,075 | 7,5%    | 40    | 1,00  | 100%    |
| [300,320] | 40    | 1     | 100%    |       |       |         |

|     |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|
| 200 | 150  | 780  | 2132 | 1976 |
| 208 | 624  | 2236 | 4404 | 5232 |
| 832 | 676  | 3172 | 3208 | 2132 |
| 988 | 3926 | 1196 | 2132 | 3728 |
| 728 | 2948 | 1248 | 2704 | 5928 |
| 988 | 1710 | 1716 | 1404 | 4108 |
| 468 | 2392 | 2028 | 4472 | 3174 |
| 624 | 3959 | 4040 | 1092 | 1040 |

**Actividad 22.** Los datos corresponden a los impuestos de vivienda (en Bs.) que 40 personas, elegidas al azar pagan anualmente.

- Organiza los datos en orden decreciente:
- Determina una amplitud de intervalo conveniente y agrupa los datos en una distribución de frecuencias con intervalos.
- ¿Cuál es el intervalo que contiene los montos más comunes de contribuciones fiscales? ¿Cuál es su frecuencia relativa porcentual? ¿Y cuál frecuencia relativa porcentual acumulada hasta ese intervalo?

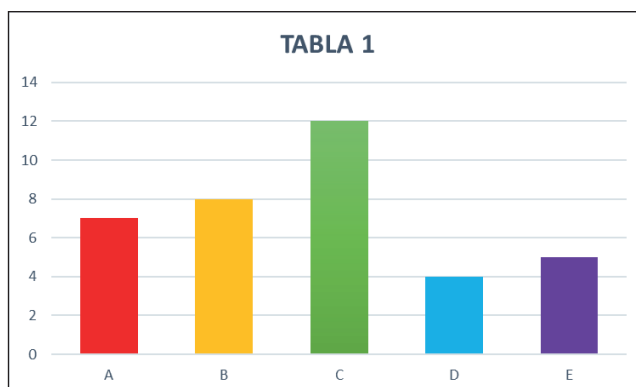
### Diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias

El diagrama de barras se utiliza para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

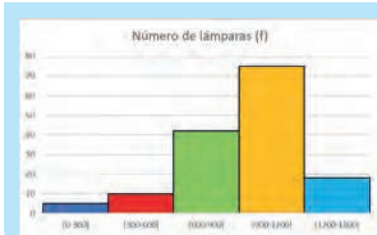
En el eje horizontal se indican los valores de la variable y, esos puntos, se levantan barras verticales de altura igual a las frecuencias que vamos a representar. Cada valor de la variable  $x_i$  y su frecuencia absoluta  $f_i$  determinan un punto  $(x_i, f_i)$ .

Si los puntos  $(x_i, f_i)$  se unen mediante segmentos resulta una línea poligonal que se llama polígono de frecuencias.

El histograma se utiliza para representar variables cuantitativas continuas cuyos valores se agrupan en intervalos.



Sobre el eje horizontal se indican los intervalos y se levantan rectángulos de base la amplitud del intervalo y la altura la frecuencia. La línea poligonal que une los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo es el polígono de frecuencias. Completando la curva poligonal aumentando un punto de frecuencia cero ubicado de manera equidistante en cada extremo de la escala horizontal.



Para elaborar un histograma, trazamos los rangos en el eje horizontal y graduamos hasta el valor máximo el eje vertical.

Trazamos las barras que indican el valor sin dejar espacios entre barras.

Para trazar el Polígono de frecuencias se debe unir con línea poligonal los puntos medios del borde superior de cada barra del histograma.

**1.- Música.** Los datos corresponden a las preferencias musicales que los jóvenes de una muestra manifestación en una encuesta telefónica. Elabora un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

- Elaboramos una tabla de frecuencias.
- Elabora un diagrama de barras de los datos mostrados.

| Género musical | $f_i$ |
|----------------|-------|
| Reggaetón      | 12    |
| Salsa          | 8     |
| Tecno          | 5     |
| Cumbia         | 10    |
| Rock           | 15    |

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 60 | 52 | 51 | 40 | 36 | 28 |
| 17 | 16 | 18 | 40 | 42 | 60 |
| 23 | 34 | 31 | 45 | 38 | 53 |
| 47 | 58 | 10 | 5  | 3  | 12 |
| 16 | 43 | 44 | 56 | 57 | 6  |

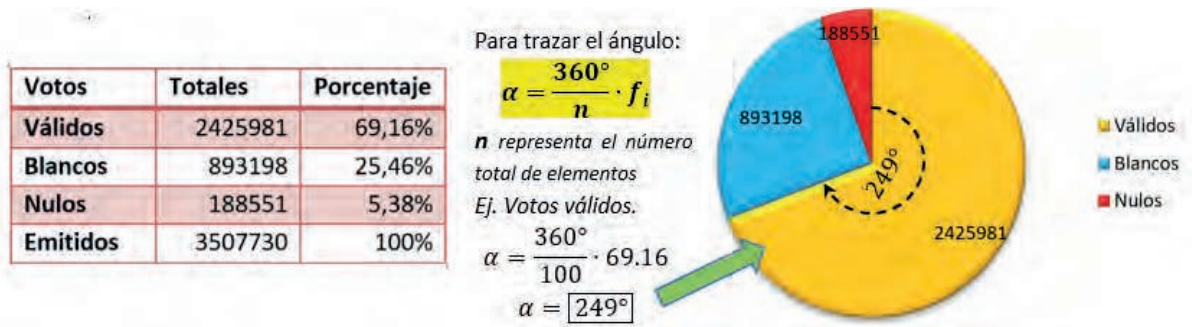
**2. - Educación.** La siguiente tabla muestra las notas de 30 estudiantes que obtuvieron en una evaluación sobre 60 puntos. La nota mínima de aprobación es 30.

- Elabora una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Usa una amplitud conveniente.
- ¿Cuál es el porcentaje de aprobados? ¿Cuál el de reprobados?
- Elabora un histograma y polígono de frecuencias.

### Gráfico de sectores o gráfico circular

En estos gráficos se representa un conjunto de cantidades que sumadas correspondientes al 100% de una población o una muestra.

Ejemplo: Representa mediante un gráfico circular o de sectores las frecuencias correspondientes a los votos válidos, blancos y nulos del referéndum sobre la extensión máxima de la propiedad agraria, realizado en enero de 2009.



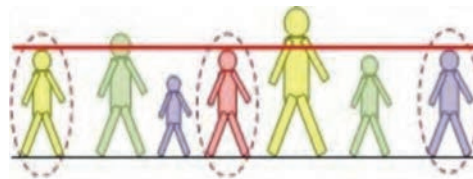
#### 4. Medidas de tendencia central

En la mayoría de los casos, el conjunto de datos obtenidos, ya sea de una muestra o de una población, tienden a reunirse alrededor de un valor central. De esta manera, es posible obtener un valor típico o representativo de todo el conjunto de datos, el cual se denomina medida de tendencia central

**Media aritmética:** La media aritmética es la medida de tendencia central más utilizada y la de mayor representatividad en los análisis estadísticos. Representa el promedio del conjunto de datos de la muestra. Su cálculo se realiza con la suma de todos los valores de los datos, dividida entre el número de datos que componen la muestra.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} \quad \text{ó} \quad \bar{x} = \frac{\text{suma de valores}}{\text{cantidad de valores}}$$

**Mediana:** La mediana  $Me$  en un conjunto de datos es el valor que ocupa el lugar central, de tal forma que aquel valor deja el 50% de las observaciones por debajo de él y el otro 50% por encima de él



**Moda:** En la vida cotidiana se escucha la expresión “está de moda” cuando algo se observa o se presenta repetidamente. En estadística, el concepto de la moda no se aleja de esta apreciación y, efectivamente, se denomina moda de un conjunto de datos al valor que más se presenta, es decir, el atributo o el valor de mayor frecuencia. La moda se representa por  $Mo$  y puede ser aplicada a las variables cualitativas y cuantitativas discretas o continuas.

#### Actividad 23:

1.- Calculamos la media aritmética, mediana y moda de la siguiente serie de datos:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2.- La tabla muestra las temperaturas registradas en Trinidad durante las horas de sol de un cierto día.

| Temperatura °C | 21 | 22 | 24 | 27 | 28 | 29 | 31 | 32 | 32 | 31 | 26 | 29 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Hora           | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Calcula la temperatura promedio del día durante las horas de sol, la mediana y moda.

3.- Las edades en cm, de 25 estudiantes son: 158, 160, 168, 156, 166, 158, 160, 168, 160, 168, 158, 156, 164, 162, 166, 164, 168, 160, 162, 162, 162, 158, 156, 166, 160.

Realiza un recuento de datos y construye una tabla de frecuencias. Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.

#### 5. Cuartiles, deciles y percentiles

##### Cuartiles:

Los cuartiles ( $Q_k$ ) son valores que fraccionan la distribución de los datos en cuatro partes iguales. Existen tres cuartiles y cada una de las partes representa un 25% de los datos.

El cálculo de los cuartiles se realiza mediante el siguiente procedimiento:

- Ordenar los datos de forma ascendente.
- Calcular la posición con la ecuación:  $i = \left(\frac{k}{4}\right) \cdot n$  Donde  $K$  es el número del cuartil ( $k = 1, 2, 3$ ) y  $n$  el número total de datos.

3. Si  $i$  no es un número entero, se debe redondear al entero siguiente y el valor que ocupa esta posición será el cuartil requerido. Si  $i$  es un número entero, el cuartil es el promedio de los valores  $i, i+1$ .

**Ejemplo:** La talla de los neonatos prematuros nacidos en los partos durante una noche en un hospital fueron: 40, 37, 29, 31, 32, 38, 38, 38 cm.; para el cálculo de los cuartiles se empleará el procedimiento del ejemplo anterior, teniendo en cuenta el resultado obtenido al calcular la posición.





- **Primer paso:** ordenamos los datos de forma ascendente: 29, 31, 32, 37, 38, 38, 38, 40.

$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6 \quad i_7 \quad i_8$

- **Segundo paso:** para el cuartil  $Q_1$  la posición sería:  $i = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 2$

- **Tercer paso:** dado que es un entero, el cuartil  $Q_1$  corresponde al promedio entre los valores ubicados en las posiciones 2 y 3.  $Q_1 = \frac{31+32}{2} = 31,5 \text{ cm}$ . Su interpretación significa que el 25% de los neonatos prematuros presentaron una talla máxima de 31,5cm.

- El cuartil  $Q_2$ , la posición sería:  $i = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot 8 = 4$  y sería el promedio entre los valores ubicados en las posiciones 4 y 5.  $Q_2 = \frac{37+38}{2} = 37,5 \text{ cm}$ . Su interpretación significa que el 50% de los neonatos prematuros presentaron la talla máxima de 37,5 cm, igual a la mediana.

- Para el  $Q_3$ , la posición será:  $i = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6$  y sería el promedio entre los valores ubicados en las posiciones 6 y 7. Esto es,  $Q_3 = \frac{37+38}{2} = 37,5 \text{ cm}$ . Su interpretación significa que el 75% de los neonatos prematuros presentaron una talla máxima de 37,5 cm.

#### Deciles:

Los deciles ( $D_k$ ) son valores que fraccionan la distribución de los datos en diez partes iguales). En la distribución se presentan nueve deciles: el  $D_1$  acumula el 10% del conjunto de datos, el  $D_2$  deja el 20%, y así sucesivamente hasta el  $D_9$ , que acumula el 90% de los datos. Para el cálculo de los deciles se usa un procedimiento similar al de los cuartiles:

#### Percentiles:

Los percentiles  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$  son los valores que dividen en 100 partes iguales (o aproximadamente iguales) un conjunto de datos  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  ordenado de manera ascendente.

Para calcular el valor percentil  $P_m$ , calculamos el valor de  $j = \left(\frac{m}{100}\right) n$ .

- Si  $j$  es un número entero, entonces:  $P_m = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$

- Si  $j$  no es un número, su valor es redondeado hacia la mitad superior más cercana:  $P_m = x_j$ .

|    |    |    |    |    |    |     |    |
|----|----|----|----|----|----|-----|----|
| 65 | 45 | 51 | 87 | 98 | 67 | 98  | 45 |
| 89 | 94 | 67 | 48 | 68 | 98 | 100 | 51 |
| 65 | 68 | 69 | 75 | 86 | 86 | 87  | 93 |

**Actividad 24:** Las calificaciones (sobre 100) de 20 estudiantes en el área de Comunicación y Lenguajes fueron las siguientes:

- Calcula la media aritmética, la moda y mediana.
- Determina los cuartiles y percentiles. Interpreta los resultados.

**Actividad 25:** Se le consultó a un grupo de siete estudiantes sobre el número de horas semanal que dedican para el repaso de los temas vistos en clase, obteniendo los siguientes resultados: 3, 5, 2, 7, 6, 4, 9 horas. Calcula sus cuartiles.

## 6. Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión indican cuán dispersos están los datos respecto de la media aritmética. Cuando un conjunto de valores es muy disperso, la media aritmética no es representativa.

Rango: El rango o recorrido es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor.

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

Ejemplo: En una habitación hay tres hombres adultos, de 170cm, 180cm y 184cm de estatura, y tres bebés, de 61cm, 65cm y 72cm de estatura.

¿Cuál es el rango o recorrido de la información?

$$\text{Rango} = 184 - 61 = 123 \text{ cm}$$

Este rango es alto e indica que los datos tienen alta dispersión. La dispersión alta explica que la media no es muy representativa.

#### Actividad 26:

1.- Las calificaciones, sobre 100 puntos, de cuatro amigas en algunas áreas durante en el primer trimestre fueron:

Juana: 70, 65, 80, 65, 57

Abi: 90, 85, 75, 60, 80

Luisa: 45, 72, 60, 65, 70

Olga: 65, 70, 75, 67, 70

¿las notas de qué estudiante tienen mayor dispersión?



## Desviación media

El rango es simple de calcular, pero es severamente afectado por un valor atípico. Una manera de disminuir el efecto de valores atípicos consiste en calcular la desviación media.

La desviación media DM es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato respecto del promedio.

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

**Ejemplo:** Calculemos la desviación media y el rango de la siguiente tabla de datos.

Cantidad de viviendas en Chuquisaca por provincia: Fuente Censo 2012.

| Provincia               | Oropeza | Azurdoy | Zudañez | Tomina | H. Siles | Yamparaez | Nor Cinti | Belisario Bueno | Sud Cinti | Luis Calvo |
|-------------------------|---------|---------|---------|--------|----------|-----------|-----------|-----------------|-----------|------------|
| Nº de viviendas (Miles) | 86.7    | 7.7     | 11.6    | 11.6   | 9.6      | 9.2       | 23.6      | 4.6             | 8.1       | 5.6        |

- La media de los datos es  $\bar{x} \approx 17,8$ ; por tanto, la desviación media está dada por:

$$DM = \frac{|86.7 - 17.8| + |7.7 - 17.8| + \dots + |8.1 - 17.8| + |5.6 - 17.8|}{10} \approx 14.9 \text{ mil viviendas.}$$

- El rango está dado por:  $R = 86.7 - 4.6 = 82.1$  mil viviendas.

• **Promedio:** Esta función nos devuelve la media aritmética de los números o del rango que está entre paréntesis o Ejemplo: =promedio(4,5,6) nos devuelve el valor 5.

• **Max:** esta función nos devuelve el valor máximo de una lista de números o de celdas. Por ejemplo: o Ejemplo: =max(1,12,125) nos devuelve el valor 125.

• **Min:** esta función nos devuelve el valor mínimo de una lista de números o de celdas. Por ejemplo: o Ejemplo: =min(1,12,125) nos devuelve el valor 1.

• **Moda:** esta función nos devuelve el valor más repetido de una lista de números o de celdas. o Ejemplo: =moda(1,2,2,3,4) nos devuelve el valor 2 (el más repe).



¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

## Actividad 27.

- Investigamos datos estadísticos sobre las siguientes temáticas.
  - Violencia familiar
  - Contaminación del aire
  - Depresión juvenil
- Analizamos reflexivamente para responder las siguientes preguntas:
  - ¿Cuáles son los aspectos más relevantes que te llaman la atención de los datos encontrados?
  - ¿En qué ámbitos de nuestro contexto puedes evidenciar el uso de la estadística?
  - ¿Como aplicamos la estadística en procesos productivos de la comunidad?



¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

## Actividad 28.

Con la información anterior, elegimos una de las temáticas de violencia familiar, contaminación del aire o depresión juvenil y elaboramos solo siguiente:

- Tabla de frecuencias con los datos encontrados.
- Gráficos estadísticos que representen la información encontrada.

Socializamos en una plenaria, interpretando la imagen gráfica.

# TRIGONOMETRÍA Y LA APLICACIÓN EN LA TECNOLOGÍA

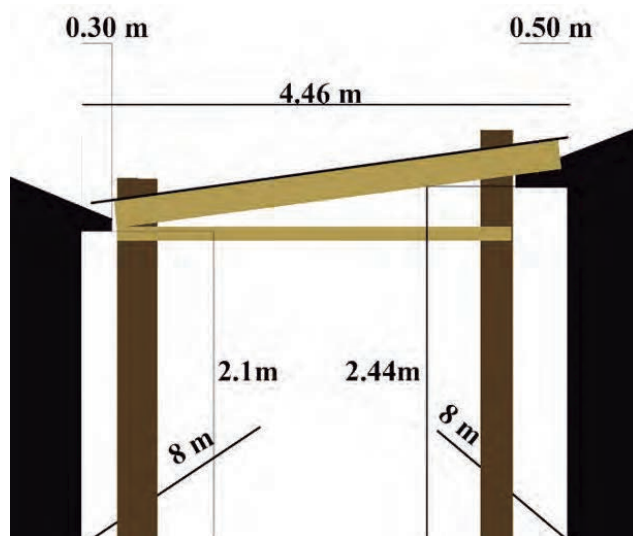


## ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

### Analicemos la siguiente historia

En temporada de lluvia la familia Angulo, decidió construir un techo para cubrirse de la lluvia y que la ropa ya no se moje, entre ambos cuartos hay una distancia de 4.46 metros, el cuarto que está ubicado a la derecha tiene una altura de 2.44 metros y el cuarto de la izquierda tiene una altura de 2.1 metros, así también el cuarto de la derecha tiene una visera de 0.50 metros y el de la izquierda 0.30 metros.

Calculemos de manera creativa todas las medidas de las vigas y calaminas que se requerirá ya que de fondo tiene una distancia de 8 metros, así también como las inclinaciones que exista, tipos de madera y precios.



**Actividad 29.** A partir de la presente experiencia responde las siguientes interrogantes:

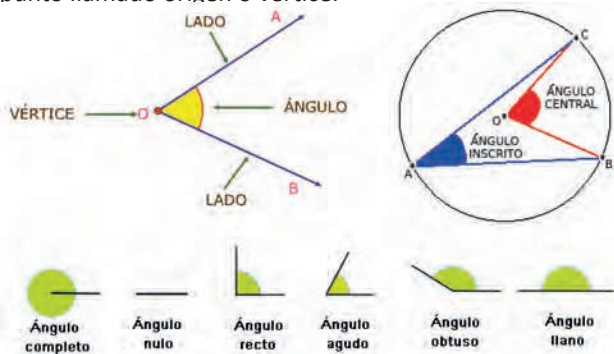
1. ¿En otro proyecto es posible aplicar los conocimientos de la trigonometría?
2. ¿De qué manera nos ayuda la trigonometría a dar soluciones a un problema de tu contexto o comunidad?



## ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

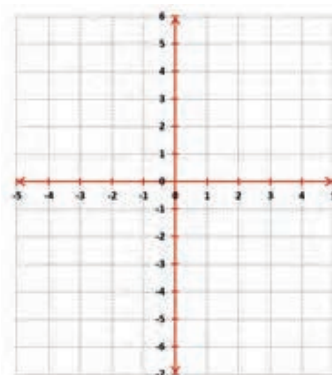
Para abordar la unidad, tomemos en cuenta la siguiente información:

**Ángulo.** Es el espacio comprendido entre dos semirrectas (lado inicial y lado terminal) que se cortan en un mismo punto llamado origen o vértice.



**Actividad 30.** En el cuaderno de ejercicios graficamos los siguientes puntos:

- a)  $A(2, 5)$
- b)  $B(-3, 4)$
- c)  $C(-1, -6)$
- d)  $D\left(\frac{7}{2}, -3\right)$
- e)  $E(0, -4)$
- f)  $F(1, \sqrt{7})$
- g)  $G(-\pi, -e)$



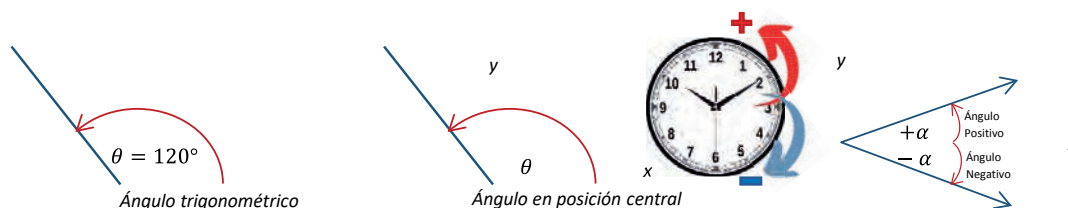
—• **1. Definición de trigonometría.** Es una parte de la matemática que estudia las relaciones de los lados y ángulos de un triángulo

—• **2. Ángulo trigonométrico y medida angular**

Ángulo trigonométrico y ángulos en posición central o normal

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice u origen desde una posición inicial hasta otra posición final, debiendo considerar que esta rotación se efectúa en un mismo plano. Por lo tanto, debemos considerar dos tipos de rotación:

Un ángulo está en posición central o normal si su vértice está en el origen del plano de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje positivo "x".

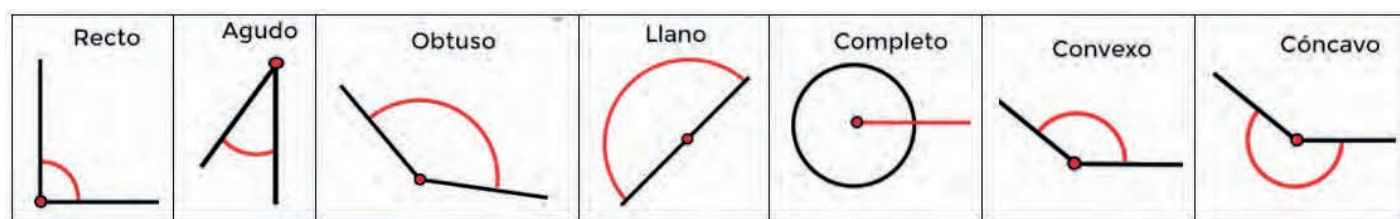


- Un ángulo es positivo si la rotación se realiza en sentido antihorario (levógiro).

- Un ángulo es negativo si la rotación se realiza en sentido horario (dextrógiro).

Si el lado terminal de un ángulo en posición central o normal  $\theta$  se localiza en un determinado cuadrante, se dice entonces que  $\theta$  está en, o que pertenece a dicho cuadrante.

**Clasificación de los ángulos:**



**Ángulos coterminales:** Dos o más ángulos son coterminales cuando tienen el mismo lado inicial y el mismo lado Terminal.

$$\beta = 1 \text{ vuelta} + \alpha$$

**Ejemplo.** - Un ángulo mide,  $\theta = 60^\circ$  y es un ángulo normal. Hallar dos ángulos positivos y negativos que sean coterminales con .

1er. ángulo coterminal positivo:

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$$

2do. ángulo coterminal positivo:

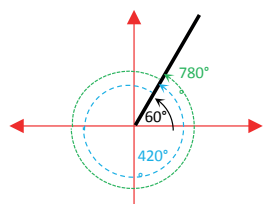
$$60^\circ + 720^\circ = 780^\circ$$

1er. ángulo coterminal negativo:

$$60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$$

2do. ángulo coterminal negativo:

$$60^\circ - 720^\circ = -660^\circ$$



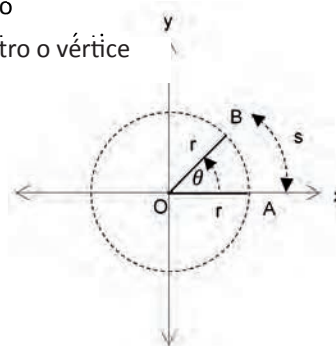
**Ángulo central:** El vértice se encuentra en el centro de una circunferencia; los lados vienen a ser el radio de dicha circunferencia.

$s$  = longitud del arco A a B

$\theta$  = ángulo central

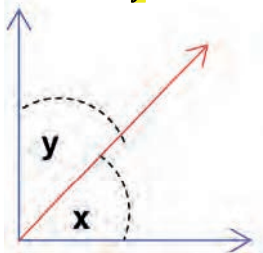
$r$  = radio

$O$  = Centro o vértice



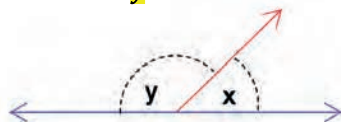
**Ángulos complementarios:** Dos ángulos son complementarios cuando sumados dan  $90^\circ$ . Los ángulos de la figura son complementarios porque:

$$x + y = 90^\circ$$



**Ángulos suplementarios:** Dos ángulos son suplementarios cuando sumados dan  $180^\circ$ . Los ángulos de la figura son suplementarios porque:

$$x + y = 180^\circ$$



**Actividad 31.** Realicemos los siguientes cálculos y gráficos.

Graficamos los ángulos positivos y negativos

- 1)  $46^\circ$
- 2)  $200^\circ$
- 3)  $-160^\circ$
- 4)  $-314^\circ$

Calculamos y graficamos el ángulo complementario

- 1)  $17^\circ + \beta = 90^\circ$
- 2)  $\alpha + 38^\circ = 90^\circ$
- 3)  $45^\circ + \beta = 90^\circ$
- 4)  $\alpha + 33^\circ = 90^\circ$

Calculamos y graficamos el ángulo cotermino

- 1)  $45^\circ + 360^\circ =$
- 2)  $100^\circ + 720^\circ =$
- 3)  $95^\circ - 360^\circ =$
- 4)  $350^\circ - 720^\circ =$

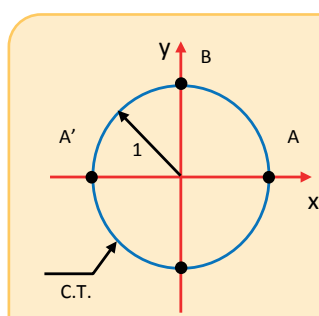
Calculamos y graficamos el ángulo suplementario

- 1)  $19^\circ + \beta = 180^\circ$
- 2)  $\alpha + 48^\circ = 180^\circ$
- 1)  $117^\circ + \beta = 180^\circ$
- 2)  $\alpha + 98^\circ = 180^\circ$

### Medida angular y determinación de un punto en el círculo unitario

#### Círculo trigonométrico

Si logramos que el centro de una circunferencia coincida con el origen de coordenadas rectangulares y que esta circunferencia tenga un radio cuya medida sea la unidad del sistema, entonces estamos hablando del llamado Círculo Trigonométrico o Circunferencia Trigonométrica.



Donde:

- A : Origen de Arcos.
- B : Origen de Complementos.
- A' : Origen de Suplementos.
- C.T. : Circunferencia Trigonométrica.



#### Ángulo en Posición Normal

En el plano cartesiano el origen del ángulo en el centro y el lado inicial coincide con el eje x y el lado final con el punto  $P(x,y)$ .

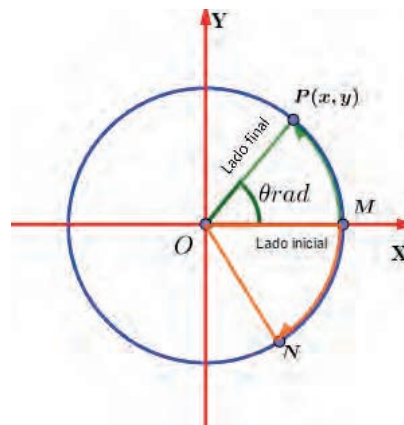
Dónde:  $\widehat{MP}$  y  $\widehat{MN}$  son arcos en posición normal.

(Numéricamente)

¡¡¡Recordar!!!

$$q = \widehat{MP}$$

Es muy frecuente que debido a esta igualdad la medida del ángulo central se coloque en el extremo final del arco en posición normal.



### 3. Sistemas de medición de ángulos

Existen varios sistemas de medición de ángulos, pero los más utilizados son tres:

- Sistema Sexagesimal
- Sistema Centesimal
- Sistema Radial



### Sistema Sexagesimal (S)

Llamado Sistema Inglés, es aquel que tiene como unidad a: Un Grado Sexagesimal  $\rightarrow 1^\circ$

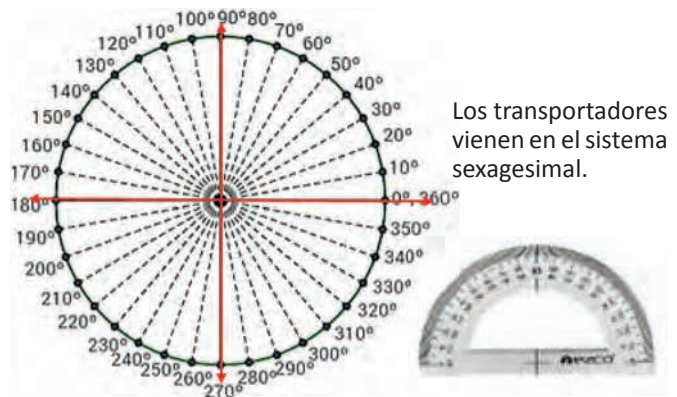
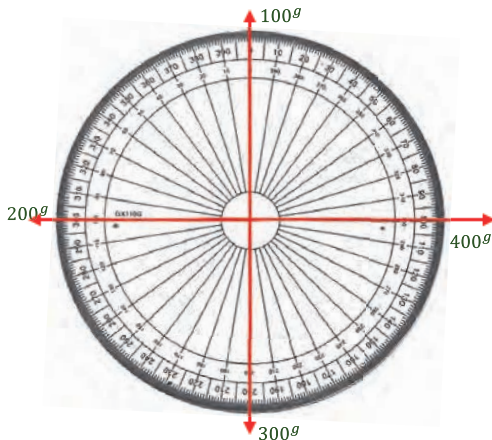
Dicho sistema divide al ángulo de una vuelta (1 v) en 360 partes iguales y a cada parte se le denomina  $1^\circ$  por lo tanto: 1 vuelta =  $360^\circ$

Sus unidades:

1 minuto sexagesimal  $\rightarrow 1'$

1 segundo sexagesimal  $\rightarrow 1''$

Equivalencia:  $1^\circ = 60' \Rightarrow 1' = 60'' \Rightarrow 1^\circ = 3600''$



Los transportadores vienen en el sistema sexagesimal.

### Sistema Centesimal (C)

Llamado también francés, es aquel que tiene como unidad a: Un Grado Centesimal  $\rightarrow 1^g$

Dicho sistema divide al ángulo de una vuelta (1 v) en 400 partes iguales y a cada parte se le denomina  $1^g$  por lo tanto:

**1 vuelta = 400<sup>g</sup>**

Sus unidades:

1 minuto centesimal  $\rightarrow 1^m$

1 segundo centesimal  $\rightarrow 1^s$

Equivalencia:

$1^g = 100^m \Rightarrow 1^m = 100^s$

$\Rightarrow 1^g = 10000^s$

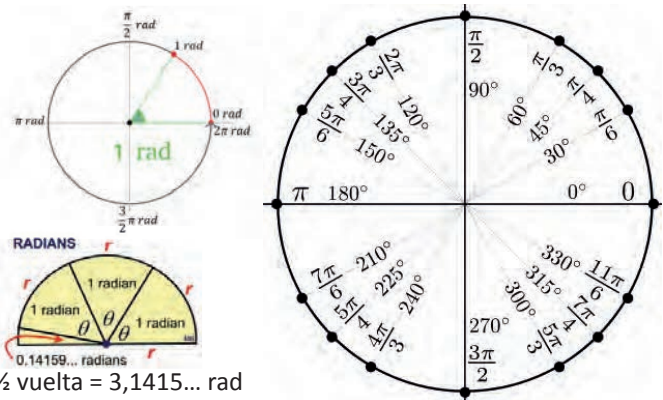
### Sistema Radial

En este sistema la medida del ángulo central, es el arco correspondiente a la longitud igual al radio de la circunferencia, esta unidad de medida corresponde a un radián.

**1 vuelta =  $2\pi$  rad**

Sus unidades:

Radián: El ángulo descrito por la proyección de un radio en una circunferencia.



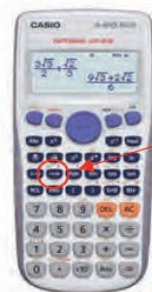
## 4. Conversión de un ángulo de un sistema a otro

Para convertir los ángulos de un sistema a otro, consideramos la siguiente relación:

| Vuelta               | Cuadrante | S. Sexagesimal | S. Circular  |
|----------------------|-----------|----------------|--------------|
| $\frac{1}{4}$ vuelta | I C       | $90^\circ$     | $\pi/2$ rad  |
| $\frac{1}{2}$ vuelta | II C      | $180^\circ$    | $\pi$ rad    |
| $\frac{3}{2}$ vuelta | III C     | $270^\circ$    | $3\pi/2$ rad |
| 1 vuelta             | IV C      | $360^\circ$    | $2\pi$ rad   |

Relación Fundamental de conversión de ángulos trigonométricos: Es la relación que existe entre los números de grados sexagesimales (S), grados centesimales (C), y el número de radianes (R) que contiene un ángulo trigonométrico. En el gráfico tenemos:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi \text{ rad}}$$



Vamos a expresar  $58^\circ 37' 23''$  en grados:

La calculadora te arrojará el siguiente resultado

**$58^\circ 37' 23''$**

Ahora sólo presiona la tecla  $\rightarrow$

**$58.623055556$**



Escanea el QR



Mira el siguiente video



**Ejemplo 1: convertimos 15° a radianes****Datos:**

S = 15° (ángulo en grados sexagesimales)

R = ? (convertir a ángulo en Radianes)

Recordemos:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi \text{ rad}} \quad (\text{Relación Fundamental})$$

Entonces:

$$\frac{R}{\pi \text{ rad}} = \frac{S}{180^\circ} \quad (\text{Relación a utilizar según datos o par de la fórmula general})$$

$$R = \frac{S \cdot \pi \cdot \text{rad}}{180^\circ} \quad (\text{Despejando R y sustituimos } S = 15^\circ)$$

$$R = \frac{15^\circ \cdot \pi \cdot \text{rad}}{180^\circ} \quad (\text{Simplificamos})$$

$$R = \frac{\pi}{12} \text{ rad} = \boxed{0,26\text{rad}}$$

**Ejemplo 2: Convertimos  $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$  o grados sexa****Datos:**R =  $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$  (ángulo en Radianes)

S = ? (ángulo en Sexagesimales)

Recordemos:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi \text{ rad}} \quad (\text{Relación Fundamental})$$

Entonces:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ rad}} \quad (\text{Relación a utilizar según datos})$$

$$S = \frac{R \cdot 180^\circ}{\pi \cdot \text{rad}} \quad (\text{Despejando S})$$

$$(\text{Sustituimos } R = \frac{\pi}{5} \text{ rad})$$

$$S = \frac{\frac{\pi}{5} \text{ rad} \cdot 180^\circ}{\pi \cdot \text{rad}} \quad (\text{Simplificación})$$

$$R = \boxed{36^\circ}$$

**Actividad 32.**

Completemos los datos en el cuaderno de ejercicios

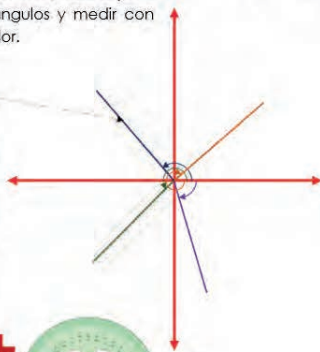
**1. Completar la siguiente tabla:**

| N.º | Grados   | Radianes                | Grados  |
|-----|----------|-------------------------|---------|
| 1   |          | 1 rad                   |         |
| 2   |          | $\sqrt{31} \text{ rad}$ |         |
| 3   |          |                         | 57.7°   |
| 4   | -456°    |                         |         |
| 5   |          | $3/4 \text{ rad}$       |         |
| 6   |          |                         | $\pi^g$ |
| 7   | 15°2'30" |                         |         |
| 8   |          | 0,2964 rad              |         |
| 9   | -45°30"  |                         |         |
| 10  |          |                         | -345.5° |

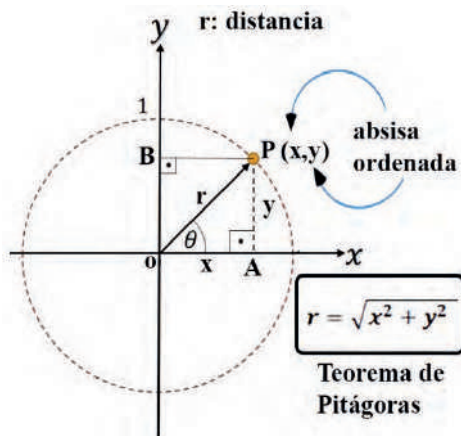
**2. Une con una flecha el ángulo a su gráfica.**

Debes utilizar tu calculadora para convertir los ángulos y medir con un transportador.

- a) 2,3 rad
- b) -1,3 rad
- c)  $\frac{5}{4} \pi \text{ rad}$
- d)  $-\sqrt{31} \text{ rad}$

**Funciones trigonométricas**

Si P(x,y) es un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen, forma un ángulo  $\theta$  con el eje "x", teniendo las principales funciones trigonométricas, representadas como razón de segmentos, de la siguiente manera:



$$\text{Seno } \theta \Rightarrow \text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{Coseno } \theta \Rightarrow \text{Cos } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{r}$$

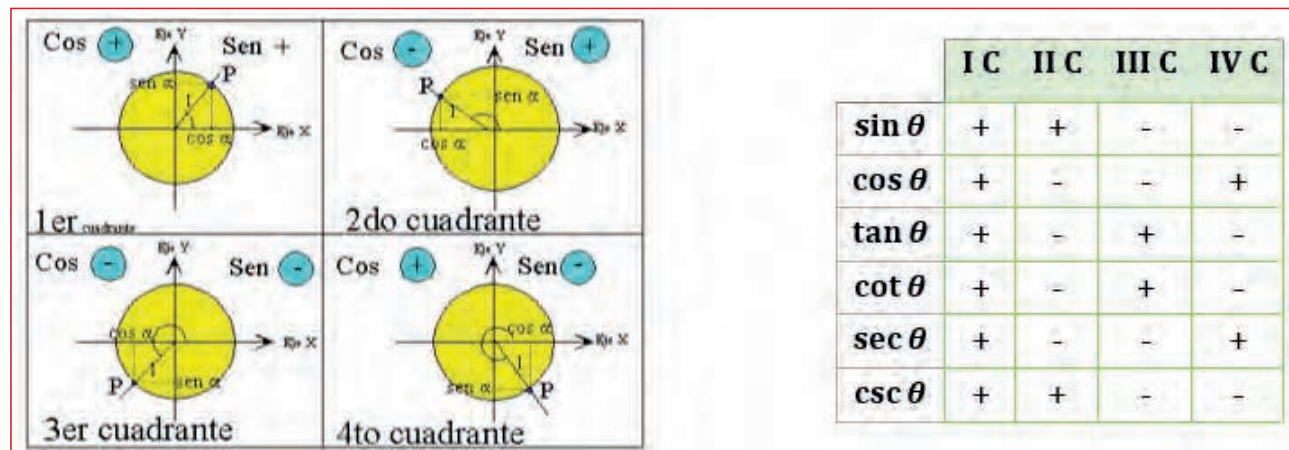
$$\text{Tangente } \theta \Rightarrow \text{Tan } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{Cotangente } \theta \Rightarrow \text{Cot } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

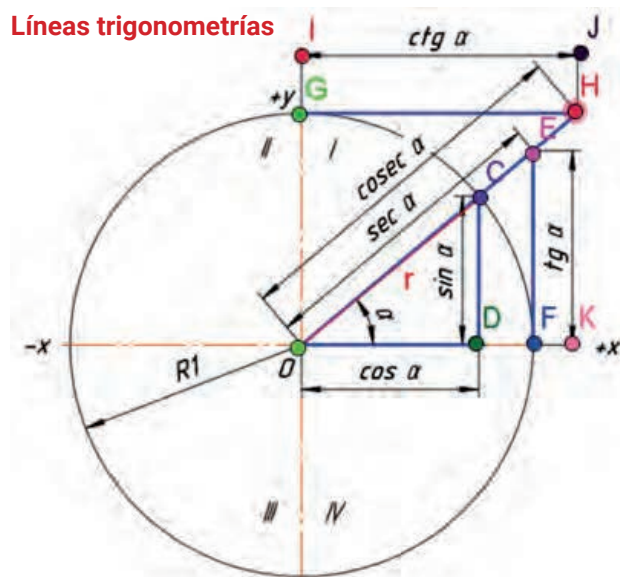
$$\text{Secante } \theta \Rightarrow \text{Sec } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Cosecante } \theta \Rightarrow \text{Csc } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

## Signos de las Funciones Trigonómicas en los cuadrantes



## Líneas trigonométricas



$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{CD}{OC} = CD$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{OD}{OC} = OD$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{CD}{OD} = EF$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{OD}{CD} = GH$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{OC}{OD} = OF$$

$$\text{Csc } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{OC}{CD} = OH$$

**Actividad 33.** Completamos la tabla con las funciones faltantes en el cuaderno de ejercicios:

| Funciones Trigonómicas | Razones                                                                      |                                        |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Función Seno           | $\text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}}$              | $\text{Sen } \theta = \frac{y}{1} = y$ |
| Función Coseno         | $\text{Cos } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}}$               |                                        |
| Función Tangente       | $\text{Tan } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$                |                                        |
| Función Cotangente     | $\text{Cot } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$                | $\text{Cot } \theta = \frac{x}{y}$     |
| Función Secante        | $\text{Sec } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$ |                                        |
| Función Cosecante      | $\text{Csc } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}}$              |                                        |

**Actividad 34.** Graficamos los ángulos en el cuaderno de ejercicios:

1. En el plano Cartesiano grafica los siguientes ángulos e indica el cuadrante en que pertenecen:

a)  $75^\circ$

b)  $\frac{10\pi}{9}\text{rad}$

c)  $-85^\circ$

d)  $-\frac{5\pi}{3}$

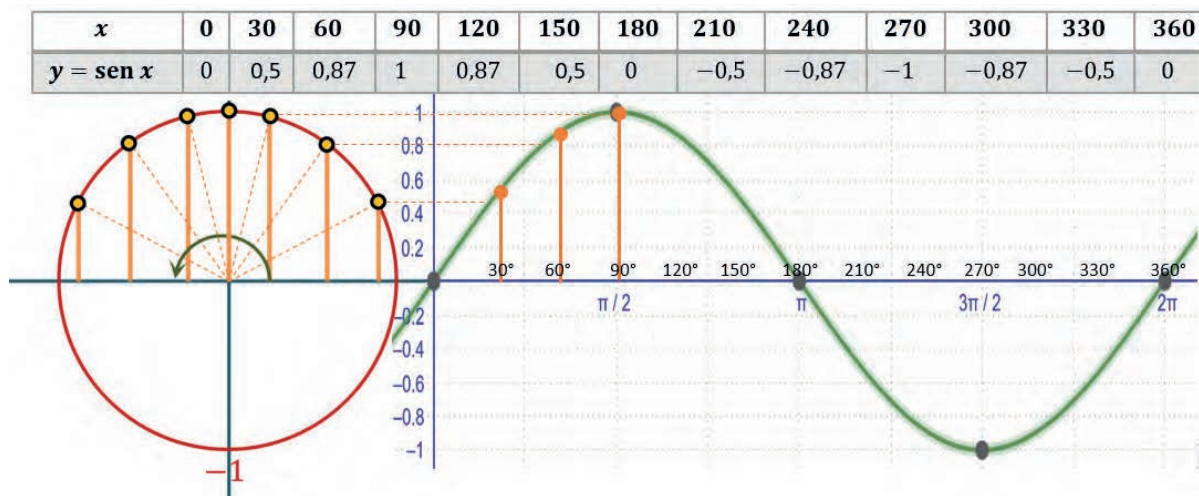
## 6. Gráfica de funciones trigonométricas y sus propiedades periódicas

Los fenómenos ondulatorios como la luz, el sonido entre otros, se representan por medio de las funciones trigonométricas.

**Gráfica de la función Seno:**  $y = \text{sen } x$ , donde  $-\infty < x < \infty$

Comenzamos por construir la tabla que se encuentra a la izquierda, para  $y = \text{sen } x$ , donde los valores de  $x$  están determinados por:  $0 \leq x \leq 2\pi$ , comenzando en el origen.

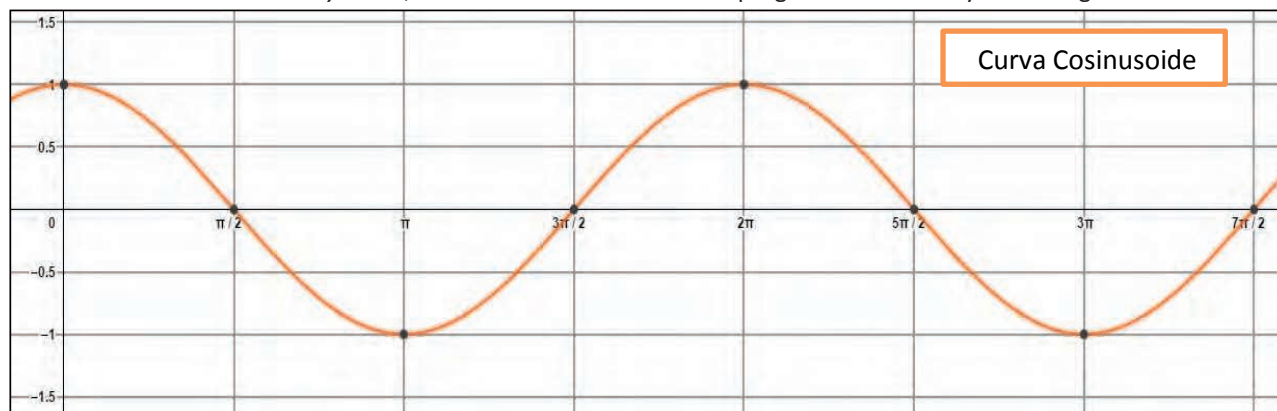
Conforme crece  $x$  desde 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , el valor crece de 0 a 1. Así se va realizando un análisis de la gráfica, viendo si crece o decrece. Si trazamos los puntos obtenidos en la tabla y lo unimos por medio de una curva suave, se obtiene el siguiente gráfico, que se muestra a continuación:



**Periodo.** - Por sentido común ya se tiene una idea del concepto del periodo de una función. Por ejemplo, si un jueves se le pregunta ¿Qué día de la semana será dentro de 15 días? Su respuesta será “viernes” porque se comprende que los días de la semana se repiten cada 7 días y 15 días es 2 semanas más un día. Es decir, se repite el periodo de 7 días 2 veces.

Definición de función periódica: Una función  $f$  es periódica si existe un número real positivo  $k$  tal que:  $f(t + k) = f(t)$  Para toda  $f$  en el dominio def. Este número real positivo  $k$  mínimo si existe, es el periodo de  $f$ .

Gráfica de la función coseno:  $y = \cos x$ , introducimos la función en el programa GeoGebra y saldrá la gráfica.

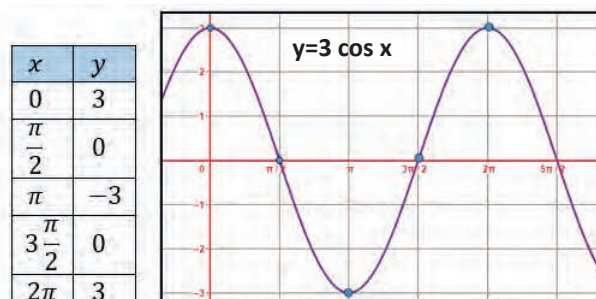
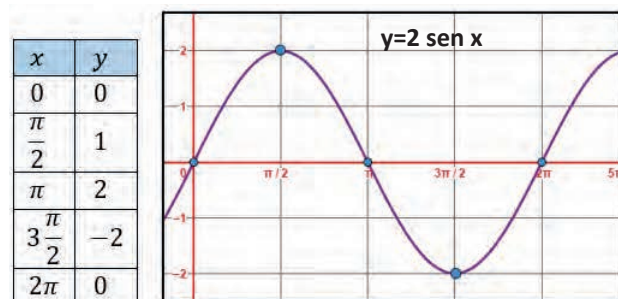


- 1.- Su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- 2.- Rango de intervalo  $[-1, 1]$ .
- 3.- La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
- 4.- La grafica corta al eje Y en  $[0, 1]$ .
- 5.- La función es periódica  $T = 2\pi$ .
- 6.- La función es par.

Las funciones seno y coseno son funciones periódicas de periodo  $2\pi$  y se comportan en forma uniforme en cada cuadrante asumiendo valores entre -1 y +1.

(Introducimos la función en el programa GeoGebra y saldrá la gráfica)

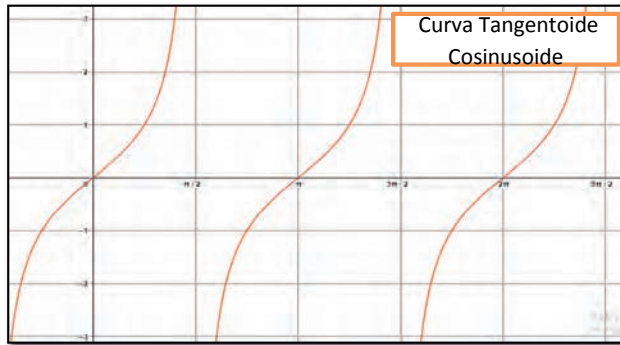
Ejemplo: Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:





Gráfica de la Función tangente:  $y = \tan x$ 

| $x$          | 0    | 30    | 60   | 90 | 120  | 150   | 180  | 210   | 240  | 270 | 300   | 330  | 360   |
|--------------|------|-------|------|----|------|-------|------|-------|------|-----|-------|------|-------|
| $y = \tan x$ | 0,00 | -6,41 | 0,32 | ∅  | 0,71 | -1,02 | 1,34 | -0,53 | 2,90 | ∅   | 45,24 | 0,13 | -3,38 |

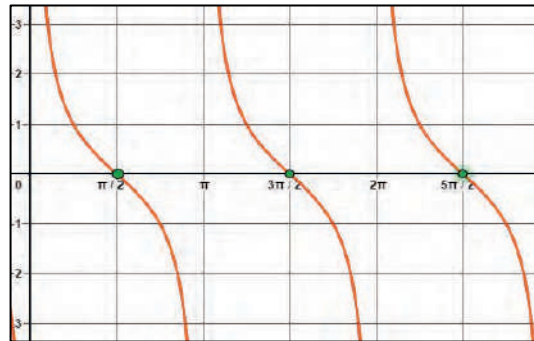


- 1) A diferencia de las gráficas anteriores esta función no es continua, esto se debe a las interrupciones que presenta en los valores excluidos de su dominio.
- 2) El dominio es  $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$ .
- 3) La gráfica corta al eje Y en (0,0).
- 4) Es una función periódica con periodo  $T = \pi$ .
- 5) La función es impar, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

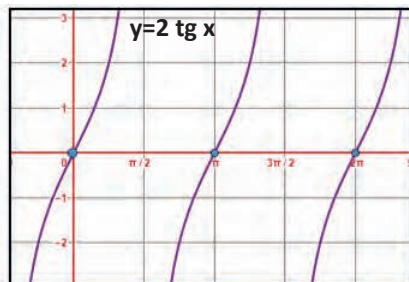
Función Cotangente:  $y = \cotg(x)$ 

| $x$            | 0 | 30    | 60   | 90 | 120  | 150   | 180 | 210   | 240  | 270 | 300  | 330  | 360 |
|----------------|---|-------|------|----|------|-------|-----|-------|------|-----|------|------|-----|
| $y = \cotg(x)$ | ∅ | -0,16 | 3,12 | 0  | 1,40 | -0,98 | ∅   | -1,89 | 0,34 | 0   | 0,02 | 7,49 | ∅   |

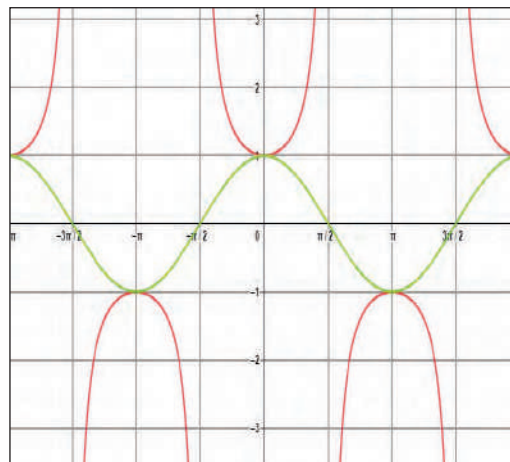
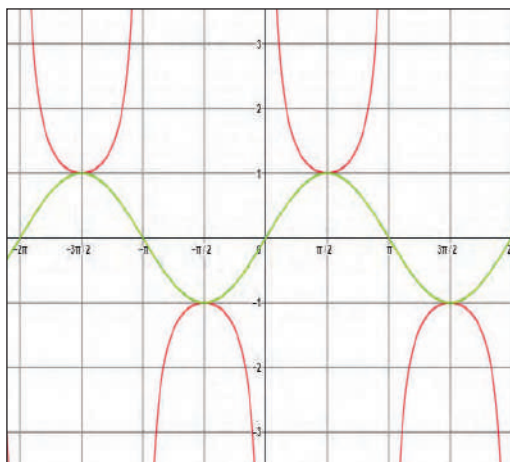
- 1.- No es continua.
- 2.- Dominio =  $\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots\}$ .
- 3.- Es una función periódica  $T = \pi$ .  
 $\cotg x = \cotg(x + \pi)$ .
- 4.- No corta al eje Y.
- 5.- Es una función impar.

**Ejemplo:** Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:

| $x$              | $y$         |
|------------------|-------------|
| 0                | 0           |
| $\frac{\pi}{2}$  | $\pm\infty$ |
| $\pi$            | 0           |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $\pm\infty$ |
| $2\pi$           | 0           |



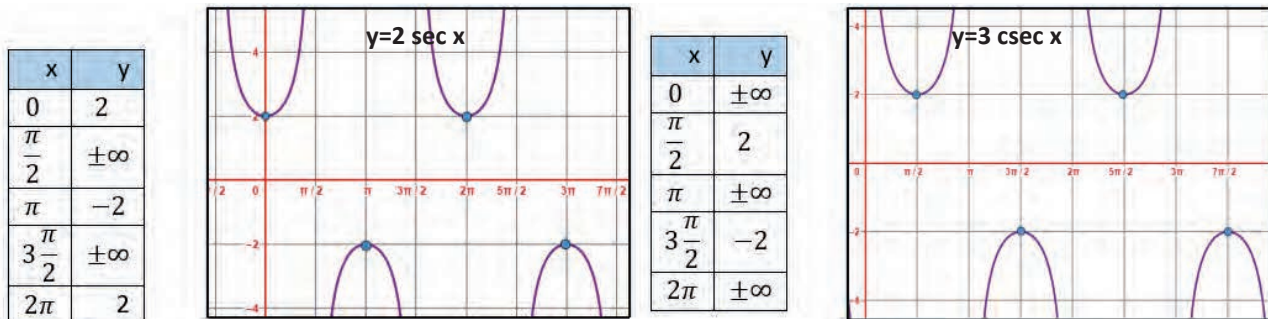
| $x$              | $y$         |
|------------------|-------------|
| 0                | $\pm\infty$ |
| $\frac{\pi}{2}$  | 0           |
| $\pi$            | $\pm\infty$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 0           |
| $2\pi$           | $\pm\infty$ |

**Función Secante y función Cosecante**

1. No es continua.
2. Dominio =  $\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$ .
3. Rango =  $[-\infty, -1] \cup [1, \infty]$ .
4. Es periódica  $T = 2\pi$ .

1. No es continua.
2. Dominio =  $\mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$ .
3. Rango =  $[-\infty, -1] \cup [1, \infty]$ .
4. Es periódica  $T = 2\pi$ .

**Ejemplo:** Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:



## 7. Problemas de Trigonometría aplicados al contexto y la tecnología

**1. MODELACIÓN.** Los cartógrafos usan una cuadrícula que contiene círculos que van de polo a polo, llamados meridianos o líneas de longitud.

Existen otros, paralelos al círculo ecuatorial, que reciben el nombre de paralelos o líneas de latitud. Ambas líneas, meridianos y paralelos, determinan la posición geográfica de una región.

Bolivia está situada en la zona central de América del Sur, entre los meridianos  $57^\circ 26'$  y  $69^\circ 38'$  de longitud oeste del meridiano de Greenwich y los paralelos  $9^\circ 38'$  y  $22^\circ 53'$  de latitud sud, expresar cada dato en términos de grados, minutos y segundos.



**RELÁMPAGOS.** La mayoría de los destellos producidos por los rayos va de nube a nube y sólo algunos van de nube a tierra. La causa de esta diferencia parece estar relacionada con la latitud. Algunos estudios empíricos de tormentas han mostrado que la razón de los destellos nube a nube  $N_c$  y los destellos nube a tierra  $N_t$  está dada aproximadamente por:

$$\frac{N_c}{N_t} = 4,16 + 12,16 \cdot \cos 3\phi$$

Donde  $\phi$  es la (limitada a regiones no polares  $0^\circ \leq \phi \leq 60^\circ$ ).

Grafica esta función para el rango de las latitudes mencionadas.



### ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 35.** Realicemos la siguiente investigación:

En nuestro cuaderno o carpeta de apuntes, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿En qué se aplican los ángulos en nuestro contexto?
- ¿En qué se utilizan las funciones seno, coseno y tangente?
- Escribimos nuestro punto de vista frente a esta información.

Formamos un círculo de reflexión para debatir en función al análisis efectuado en cada grupo sociocomunitario.



### ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 36.** Ahora apliquemos nuestros conocimientos:

- En una hoja de papel milimétrico, trazamos las siguientes gráficas de funciones:

$$y = \sin x + \cos x \quad \text{para } x \in [0, 2\pi]$$

- Elaboramos un papelógrafo con la representación gráfica del sonido de: la voz humana, los latidos del corazón y el sonido de un violín.



# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA



¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

## Actividad 37. Analicemos el siguiente caso

Muchos han sido los matemáticos que han ideado técnicas para medir alturas todas ellas ingeniosas y muy prácticas. Tales de Mileto fue un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VII a. C. se cuenta que en uno de sus viajes a Egipto fue requerido para determinar la altura de la famosa pirámide de Keops. El problema no era sencillo, ya que el punto de corte de la altura de la pirámide con el suelo era inaccesible. Existen varias versiones sobre cómo Tales resolvió el problema. En ambas, este matemático utilizó los triángulos.

Una versión afirma que Tales consideró el hecho de que, en dos días del año, al mediodía, la altura de una vara y su sombra tienen la misma longitud.

Tales esperó uno de esos días y, cuando llegó, midió la longitud de la sombra de la pirámide. A esa longitud le sumó la mitad del lado de la pirámide y así obtuvo el valor de la altura.

- ¿Cuál crees que fue el razonamiento hecho por Tales para determinar la altura de la pirámide de Keops?
- ¿Escribamos una lista de objetos o lugares donde se observan los triángulos rectángulos?
- Busquemos un árbol cercano en nuestro contexto y determinemos una forma de calcular su altura, realicemos los cálculos para dicho árbol y escribamos nuestro razonamiento.



¡CONTINUAMOS CON LA TEORÍA!

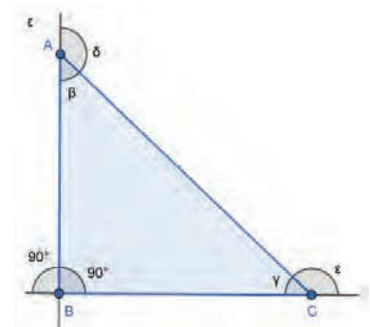
## 1. Definición

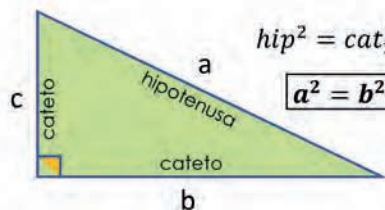
El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo interior que es recto, es decir, mide  $90^\circ$ . La principal característica del triángulo es que, como ampliaremos más adelante, tiene un lado de mayor longitud (llamado hipotenusa) y otros dos denominados catetos cuya unión forma el ángulo recto.

- Vértices: A, B, C.
- Lados: AB, BC, AC, donde AC es la hipotenusa y AB y BC son los catetos.
- Ángulos interiores:  $90^\circ, \beta, \gamma$ . Los tres deben sumar  $180^\circ$ .
- Ángulos exteriores:  $90^\circ, \delta, \epsilon$ .

## 2. Teorema de Pitágoras

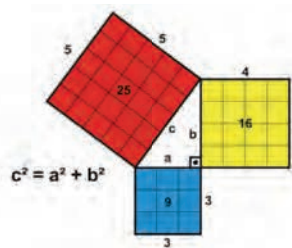
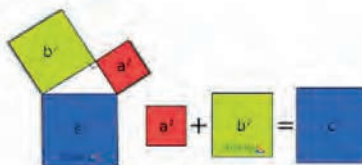
El teorema de Pitágoras indica que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



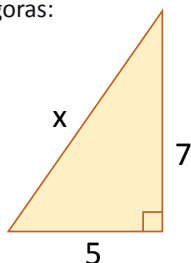


$$hip^2 = cat_1^2 + cat_2^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

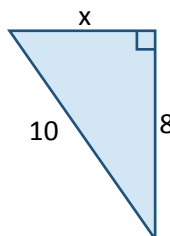


1. Calculamos el lado faltante: Establecemos el Teorema de Pitágoras:



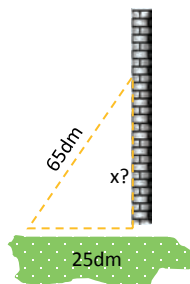
$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 5^2 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{49 + 25} \\ x &= \sqrt{74} \\ \boxed{x = 8,602} \end{aligned}$$

2. Calculamos el lado faltante: Establecemos el Teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned} 10^2 &= x^2 + 8^2 \\ 10^2 - 8^2 &= x^2 \\ \sqrt{100 - 64} &= \sqrt{x^2} \\ \sqrt{36} &= x \\ \boxed{x = 6} \end{aligned}$$

3. Una escalera de 65 decímetros se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 25 decímetros de la pared. ¿Qué altura, en decímetros alcanza la escalera?



Calculamos el cateto faltante:

$$\begin{aligned} cat_1^2 &= hip^2 - cat_2^2 \\ x^2 &= 65^2 - 25^2 \quad || \uparrow 2 \\ x &= \sqrt{3600} \\ \boxed{x = 60 \text{ dm}} \end{aligned}$$

R. La altura que alcanza es de 60dm.

4. Una letra "N" se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separado 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?

Calculamos la diagonal:

$$\begin{aligned} a^2 &= \\ a &= \\ a &= \end{aligned}$$

R. El listón diagonal mide .....



### 3. Funciones trigonométricas (seno coseno y tangente)

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se definen en relación a los catetos y la hipotenusa de la siguiente manera.



| R. Directas                                | R. Inversas                                |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\text{sen } \alpha = \frac{C. O.}{Hip}$   | $\text{csc } \alpha = \frac{Hip}{C. O.}$   |
| $\text{cos } \alpha = \frac{C. A.}{Hip}$   | $\text{sec } \alpha = \frac{Hip}{C. A.}$   |
| $\text{tan } \alpha = \frac{C. O.}{C. A.}$ | $\text{cot } \alpha = \frac{C. A.}{C. O.}$ |

**Ejemplo 1:** Dados el triángulo rectángulo, escribamos las razones trigonométricas de: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo  $\alpha$ .



Calculamos el lado faltante:

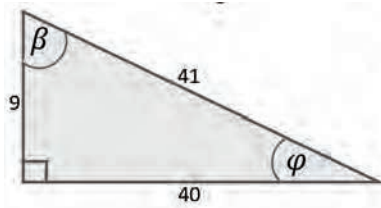
$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + 5^2 \\ x &= \sqrt{144 + 25} \\ x &= \sqrt{169} \\ \boxed{x = 13} \end{aligned}$$

Escribamos las razones trigonométricas en el cuaderno de ejercicios:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{C. O.}{Hip} = \frac{12}{13} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{C. A.}{Hip} = \frac{5}{13} \\ \text{tan } \alpha &= \frac{C. O.}{C. A.} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{csc } \alpha &= \frac{C. O.}{Hip} = \frac{13}{12} \\ \text{sec } \alpha &= \frac{C. A.}{Hip} = \frac{13}{5} \\ \text{ctg } \alpha &= \frac{C. O.}{C. A.} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2:** Dados el triángulo:



b) Escribamos el valor de las siguientes razones trigonométricas en el cuaderno de ejercicios:

$$\operatorname{sen} \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sec \varphi = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \varphi = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{csc} \varphi = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

a) Hallar el valor de E:

$$E = \sec \varphi - \cot \beta$$

$$E =$$

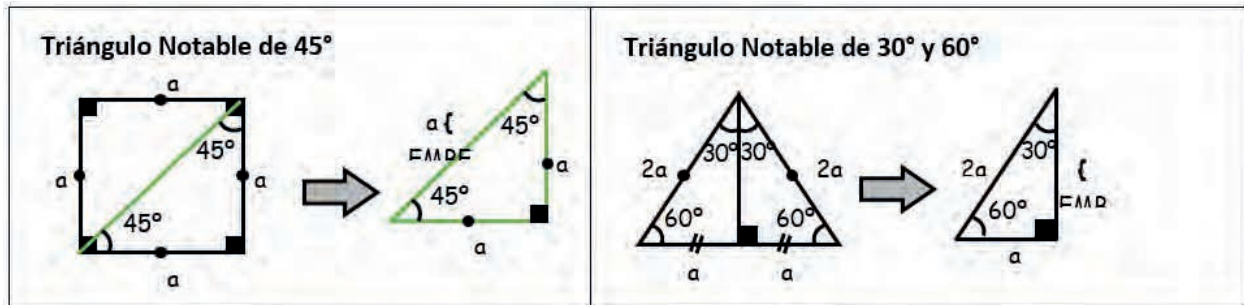
$$E =$$

**Actividad 38** Si  $\tan \alpha = \frac{3}{5}$ , determinar el valor de:  $A = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  (Te recomiendo hacer un dibujo guía)

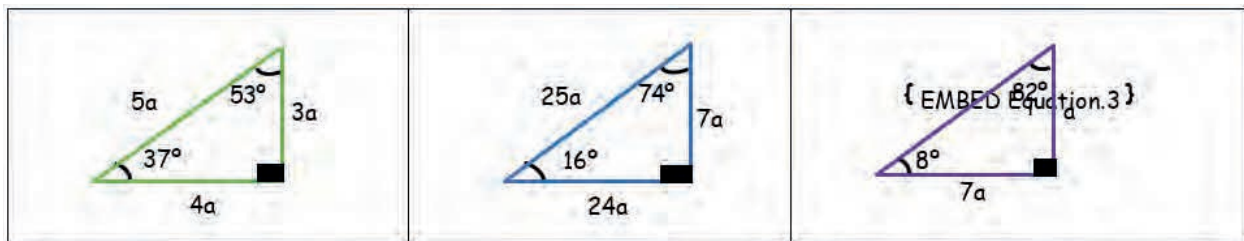
### Relaciones de las funciones trigonométricas para ángulos notables de un triángulo rectángulo

Los ángulos notables son aquellos que guardan una relación directa con los triángulos rectángulos, cuyas funciones trigonométricas se pueden obtener de forma inmediata, es decir, sin tener que realizar ningún cálculo previo.

Partiendo de un cuadrado obtenemos los siguiente:



Triángulos aproximados

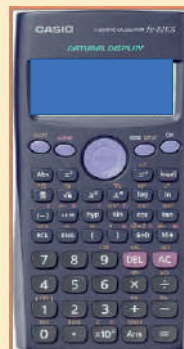


Hallamos las razones trigonométricas del ángulo de 60° y comprendemos como se forma la tabla de valores.

|  |                                                            |                                                                                                                        |  |                                                     |                                                                                                         |
|--|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <b>Datos:</b><br>Ángulo 60°<br>Co = $a\sqrt{3}$<br>H = $a$ | <b>Reemplazar los datos y simplificar</b><br>$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |  | <b>Datos:</b><br>Ángulo 30°<br>Co = $a$<br>H = $2a$ | <b>Reemplazar los datos y simplificar</b><br>$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ |
|--|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Tabla de Las Razones Trigonómicas de Ángulos Notables

|     | 16°   | 30°          | 37° | 45°          | 53° | 60°          | 74°   |
|-----|-------|--------------|-----|--------------|-----|--------------|-------|
| Sen | 7/25  | 1/2          | 3/5 | $1/\sqrt{2}$ | 1/5 | $\sqrt{3}/2$ | 24/25 |
| Cos | 24/25 | $\sqrt{3}/2$ | 4/5 | $1/\sqrt{2}$ | 3/5 | 1/2          | 7/25  |
| Tg  | 7/24  | $1/\sqrt{3}$ | 3/4 | 1            | 4/3 | $\sqrt{3}/1$ | 24/7  |
| Ctg | 24/7  | $\sqrt{3}/1$ | 4/3 | 1            | 3/4 | $1/\sqrt{3}$ | 7/24  |
| Sec | 25/24 | $2/\sqrt{3}$ | 5/4 | $\sqrt{2}/1$ | 5/3 | 2/1          | 25/7  |
| Csc | 25/7  | 2/1          | 5/3 | $\sqrt{2}/1$ | 5/4 | $2/\sqrt{3}$ | 25/24 |



Ahora se puede comprender los valores que se observan en la tabla de ángulos notables. Para encontrar el valor en la tabla, se busca la función, en las filas y el ángulo en grados en las columnas y obtienes sus valores que también puedes encontrar con tu calculadora.

Resolvemos los siguientes ejercicios con ángulos notables, dónde reemplazaremos los valores de la tabla trigonométrica de ángulos notables:

|                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1) Calculamos: <math>E = \sin^2 30^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ</math></p> <p><b>Resolución</b><br/>Reemplazando valores:</p> $E = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow E = 1$ | <p>2) Evaluamos: <math>E = \frac{\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ}{\csc 30^\circ}</math></p> <p><b>Resolución</b><br/>Reemplazando:</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Actividad 39:** Resolvemos los ejercicios en el cuaderno de ejercicios:

I. Hallamos las razones trigonométricas de los ángulos de  $45^\circ$  y  $30^\circ$ , luego verifica las respuestas en la tabla de valores.

II. Calculamos los siguientes ejercicios utilizando la tabla de valores de ángulos notables.

**1. Calculamos:**

$$E = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ}{10 \cdot \cos 37^\circ + \sqrt{2} \cdot \sec 45^\circ}$$

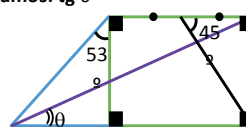
**Resolución:** .....

**2. Hallamos el valor de E:**

$$E = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \csc \left(\frac{90^\circ}{2}\right)}{\tan 30^\circ \cdot \sec 60^\circ \cdot \cot \left(\frac{90^\circ}{2}\right)}$$

**Resolución:** .....

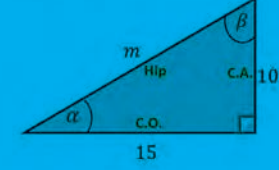
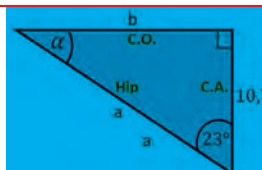
III. Calculamos los siguientes ejercicios y marca la opción correcta.

|                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1. Calculamos:</b></p> $E = (\sec^2 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) \operatorname{ctg} 37^\circ - 2 \cos 60^\circ$ <p>a) 0      b) 1      c) 2<br/>d) 3      e) 4      f) ninguno.</p>                                                                   | <p><b>4. Calculamos: "x"</b></p> $3x \sec 53^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \sec 60^\circ (\sec 45^\circ + \sin 45^\circ)^{\csc 30^\circ}$ <p>a) 1      b) 2      c) 3<br/>d) 4      e) 5      f) ninguno.</p>                                                                                                            |
| <p><b>5. Calculamos: E = <math>(\operatorname{tg} 60^\circ + \sec 30^\circ - \sin 60^\circ)^{\sec 60^\circ}</math></b></p> <p>a) 25/12      b) 25/24      c) 49/12<br/>d) 49/24      e) 7/18      f) ninguno</p>                                                      | <p><b>6) Calculamos: E = <math>\frac{\operatorname{tg} \theta^\circ \sec \theta^\circ - \sin 3^\circ \cos \theta^\circ}{\sin^2 5^\circ}</math></b></p> <p><math>\frac{5\sqrt{3}}{3}</math>      <math>\frac{2\sqrt{3}}{5}</math>      <math>\frac{\sqrt{3}}{5}</math>      <math>\frac{3\sqrt{3}}{5}</math>      f) ninguno</p> |
| <p><b>7. Calculamos: <math>\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}</math></b></p> <p>a) <math>\sqrt{2}</math>      b) <math>\sqrt{2} + 1</math>      c) <math>\sqrt{2} - 1</math><br/>d) <math>1 - \sqrt{2}</math>      e) <math>\sqrt{2} + 2</math>      f) ninguno</p> | <p><b>8) Del gráfico hallamos: <math>\operatorname{tg} \theta</math></b></p> <p>a) 0,1      b) 0,3      c) 0,4      d) 0,6      e) 0,8      f) ninguno</p>                                                                                  |

#### 4. Resolución gráfica y analítica de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo significa la longitud de cada lado y la medida de los tres ángulos: Para esto se requiere al menos:

Ejemplo 1:

|                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>La longitud de dos lados</b></p>                                         | <p>Calculamos el lado faltante por el Teorema de Pitágoras:</p> $m^2 = 10^2 + 15^2$ $x = \sqrt{100 + 225}$ $x = \sqrt{325}$ $x = 5\sqrt{13}$ $x \approx 18,03$                                                   | <p>Calculamos <math>\alpha</math> con la tangente ya que contiene los datos que tenemos:</p> $\tan \alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$ $\tan \alpha = \frac{10}{15}$ <p>Despejamos <math>\alpha</math>:</p> $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{10}{15} \right)$ $\alpha = 33,69^\circ$ | <p>Calculamos <math>\beta</math> con la propiedad de ángulos complementarios:</p> $\alpha + \beta = 90^\circ$ <p>Por tanto:</p> $\beta = 90^\circ - \alpha$ $\beta = 90^\circ - 33,69^\circ$ $\beta = 56,31^\circ$ |
| <p><b>La longitud de un lado y la medida de uno de sus ángulos agudos</b></p>  | <p>Calculamos el lado <math>a</math> con la función coseno:</p> $\cos \alpha = \frac{C.A.}{Hip}$ $\cos 23^\circ = \frac{10,7}{a}$ <p>Despejamos <math>a</math>:</p> $a = \frac{10,7}{\cos 23^\circ}$ $a = 11,62$ | <p>Calculamos el lado <math>b</math> con la función tangente:</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$ $\operatorname{tg} 23^\circ = \frac{b}{10,7}$ <p>Despejamos <math>b</math>:</p> $b = 10,7 \cdot \operatorname{tg} 23^\circ$ $b = 4,54$                      | <p>Calculamos <math>\alpha</math> con la propiedad de ángulos complementarios:</p> $\alpha + \beta = 90^\circ$ <p>Por tanto:</p> $\alpha = 90^\circ - 23^\circ$ $\alpha = 67^\circ$                                |



**Ejemplo 3:** En un triángulo rectángulo ABC se conocen el lado  $b=102,4$  metros y el ángulo

$B=55^\circ$ . Resuelve el triángulo.

Por suma de ángulos interiores:

$$A = C - B$$

$$A = 90^\circ - 55^\circ$$

$$A = 35^\circ$$

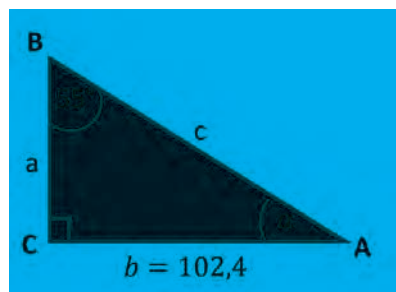
Por relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \quad \text{Despejando el lado } c \quad \text{tenemos:}$$

$$c = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{102,4}{\operatorname{sen} 55^\circ} = \boxed{125,007 \text{ m}}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Despejando el lado } a \text{ tenemos: } a = \frac{b}{\tan \hat{B}} = \frac{102,4}{\tan 55^\circ} = \boxed{71,701 \text{ m}}$$



**Ejemplo 4:** Una torre de 50 m de altura proyecta una sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

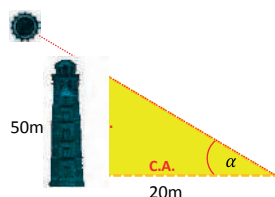
Calculamos el ángulo  $\alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{\text{C.O.}}{\text{C.A.}}$$

$$\tan \alpha = \frac{50}{20}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{50}{20}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 68,20^\circ}$$



R.- El ángulo de elevación es de  $68,20^\circ$

**Ejemplo 5:** Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y ésta forma con el suelo un ángulo de  $65^\circ$ . Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?

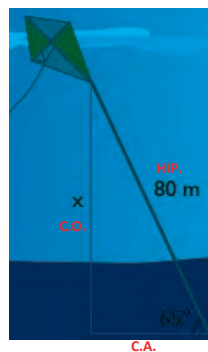
Calculamos la altura  $x$ :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{C.O.}}{\text{C.A.}}$$

$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{x}{80}$$

$$x = 80 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ$$

$$\boxed{x = 72,5 \text{ m}}$$



R.- Está a 72,5m de altura.

**Ejemplo 6:** Un topógrafo observa con un teodolito la cúspide de un edificio con un ángulo de elevación de  $32^\circ$ . Si el teodolito mide 1,40 m de altura y la distancia desde el punto de observación hasta el pie del edificio es de 50 m, ¿Cuál es la altura del edificio?

Primero hacemos un esquema para entender el problema:

Calculamos la distancia BC:

$$\tan 32^\circ = \frac{BC}{50}$$

$$50 \cdot \tan 32^\circ = BC$$

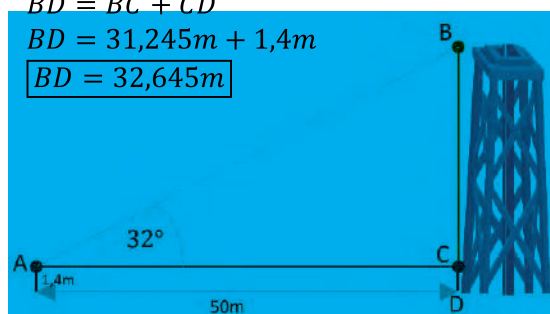
$$BC$$

Ahora la altura del edificio será:

$$BD = BC + CD$$

$$BD = 31,245 \text{ m} + 1,4 \text{ m}$$

$$\boxed{BD = 32,645 \text{ m}}$$



**Ejemplo 7:** Calcula el valor de "x" de la siguiente figura.

Vamos a calcular por separado los valores de  $a$  y  $b$  respectivamente:

Calculamos  $a$ :

$$\tan 60^\circ = \frac{a}{5}$$

$$a = 5 \cdot \tan 60^\circ$$

$$a = 8,66$$

Calculamos  $b$ :

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{20}$$

$$b = 20 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\cos 45^\circ$$

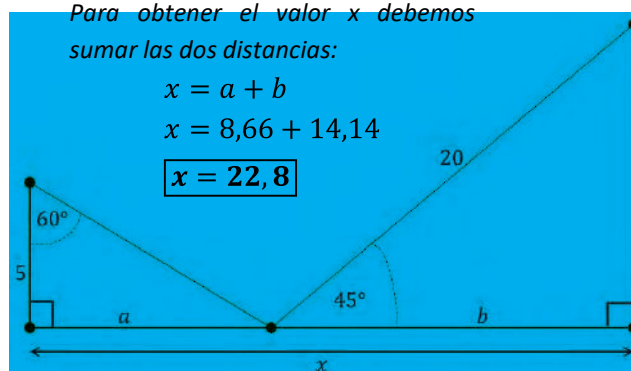
$$b = 14,14$$

Para obtener el valor  $x$  debemos sumar las dos distancias:

$$x = a + b$$

$$x = 8,66 + 14,14$$

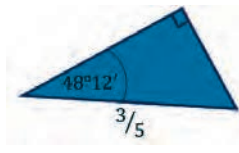
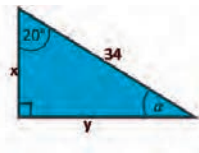
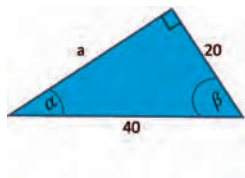
$$\boxed{x = 22,8}$$





**Actividad 40.** Calculamos los lados y ángulos de los siguientes triángulos rectángulos

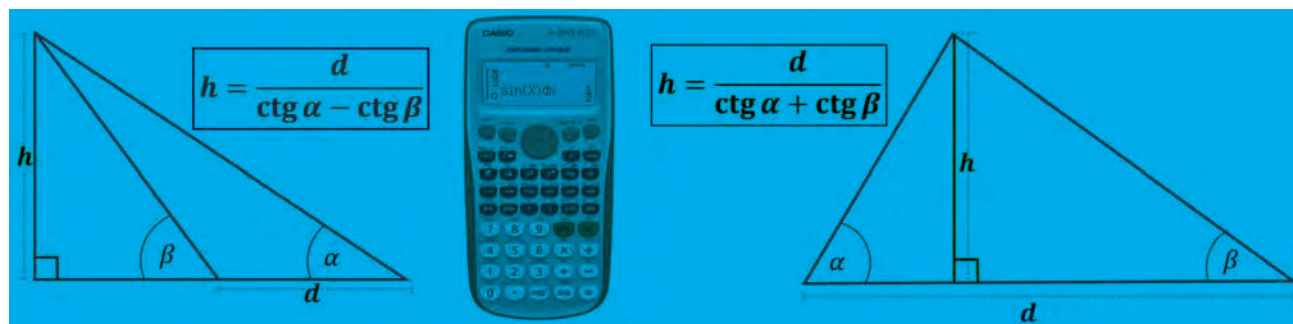
1.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



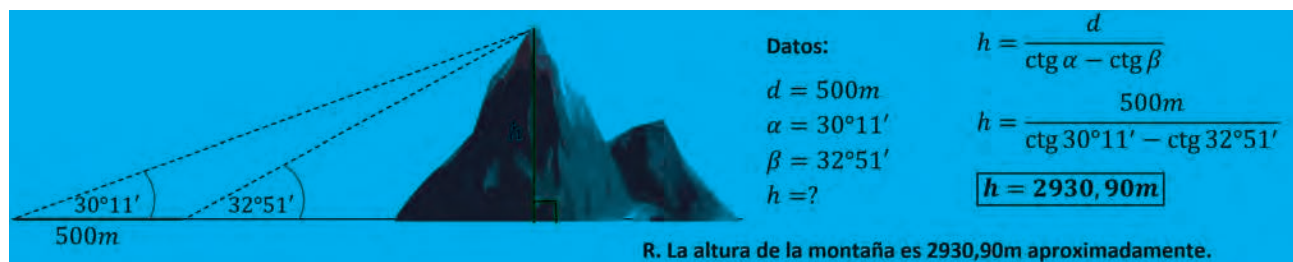
- 2.- Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?
- 3.- Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?
- 4.- Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿cuál era la altura del árbol si la parte que ha caído hacia el suelo forma con este ángulo de 50 grados si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 metros?
- 5.- El Monolito "Pachamama", descubierto por Wendell Benett en 1932, proyecta una sombra de 15,44m cuando el sol se encuentra a 25° sobre el horizonte. Halla la altura del monolito.
- 6.- Desde el punto más alto de una torre de electricidad de 25 m de altura se observa un camión en la llanura cuyo ángulo de depresión es de 3°. ¿A qué distancia está el camión?
- 7.- En un círculo de radio 13cm se traza una cuerda cuyo ángulo central mide 20°. Halla la longitud de la cuerda.

— **5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología**

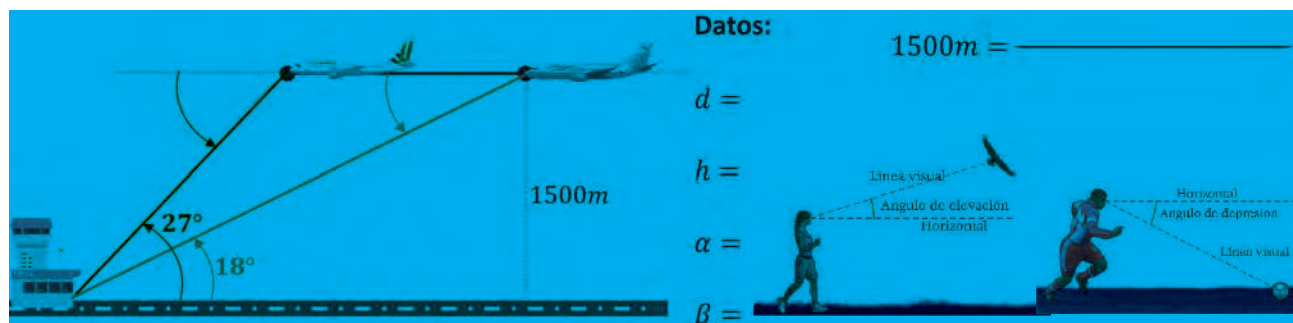
Muchas veces es imposible ir a la base de un árbol, de una edificación o de una montaña; en estos casos se usa otra técnica para calcular la altura del objeto.



**Ejemplo 1:** Jhazmín y Rafael son dos topógrafos que deben medir la altura de una montaña. Desde un primer punto observan la cima con un ángulo de elevación de 30°11'. Avanzan 500m en línea recta hacia la base de la montaña y desde este otro punto vuelven a medir el ángulo de elevación que es de 32°51'. ¿Qué altura tiene la montaña?



**Ejemplo 2:** Dos aviones vuelan alineados; desde la torre de control del aeropuerto se toman los ángulos de elevación de cada avión: 18° y 27°. Si los aviones están volando a una altura de 1500m, calcula la distancia entre ellos.



**Actividad 41.** Resolvamos los siguientes problemas:

- 1.- Juan y Marta están separados por una distancia de 32m entre sí en el mismo plano horizontal y ambos observan la cima del “Cristo de la Concordia” de la ciudad de Cochabamba con un ángulo de elevación de  $26^\circ$  y  $39^\circ$  respectivamente. Calcula la altura del 2do monumento de Cristo más grande del mundo.
- 2.- Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas un majestuoso cóndor, bajo ángulos de  $45^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente. La distancia entre sus casas es de 126 m y el cóndor vuela situado entre sus casas. Halla la altura que vuela este hermoso animal en peligro de extinción.
- 3.- Carla y René están separados por 30m y ambos observan, desde un mismo lado, la cima de un árbol con ángulos de elevación de  $25^\circ$  y  $36^\circ$ , respectivamente. ¿Cuál es la altura del árbol?
- 4.- Antonio y Simón están separados por 170m. cada uno divisa un volador situado entre ellos. Luis lo ve con un ángulo de elevación de  $45^\circ$  y Juan con uno de  $30^\circ$ . ¿A qué distancia está el volador?

**¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!**

**Actividad 42.** En nuestro cuaderno o carpeta de apuntes, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿Cuáles son los aportes más importantes hechos por el estudio de los triángulos rectángulos?
- ¿En qué situaciones concretas de tu propio contexto, se verifica el uso de los triángulos rectángulos?
- Escribimos nuestro punto de vista frente a esta información.

**¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!**

**Actividad 43.** Realizamos las siguientes actividades:

Construye un teodolito casero. Sobre una base de madera de 30cm x 30cm, dibuja una circunferencia graduada cada  $5^\circ$ . Al centro coloca un soporte de madera que pueda girar sobre la base. En la parte superior de soporte acomoda un transportador que pueda girar alrededor de su origen. Sobre el transportador coloca como mira un tubo de bolígrafo. Este instrumento te permitirá medir ángulos verticales y horizontales.

- a) Forma equipo de 3 compañeros y, utilizando la fórmula deducida, calcula las alturas de los edificios más importantes de tu comunidad.
- b) Necesitarás una cinta métrica; si no tienes una, te servirá un cordel que tenga un nudo cada metro.
- c) Socializamos nuestras mediciones y cálculos con la clase.

## TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

**¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!**

**Actividad 44.** Analicemos el siguiente problema:

Los problemas con triángulos no siempre se refieren a triángulos rectángulos, ni pueden reducirse a un problema sobre triángulos rectángulos. Es necesario entonces desarrollar técnicas y buscar formas de resolver triángulos en general. Un topógrafo desea medir la longitud de una laguna, el técnico mide el ángulo A respecto a un punto C de la otra orilla y camina de A hacia B, también determina el ángulo B respecto de C. Conoce la longitud entre los puntos AB ¿cómo calcula la longitud entre los puntos CB? ¿Qué fórmulas o razones trigonométricas aplica al triángulo que construye, si éste es diferente a un triángulo rectángulo?

Dibujamos la escena descrita, descubriendo el triángulo que describe la situación.

- ¿Qué tipos de triángulos conoces, además de los triángulos rectángulos?
- ¿El Teorema de Pitágoras es únicamente para triángulos rectángulos? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué tipo de triángulo se formó en la situación descrita?
- ¿De qué manera crees que serán útil el estudio de este tipo de triángulos en esta situación?

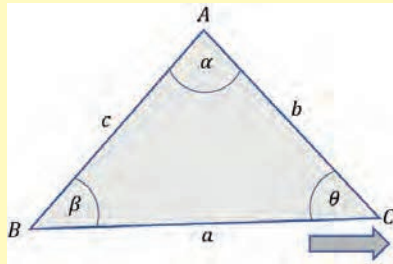


## ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

En la resolución de triángulos oblicuángulos debemos recordar que la suma de los ángulos interiores en cualquier triángulo es  $180^\circ$ .

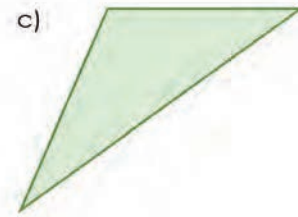
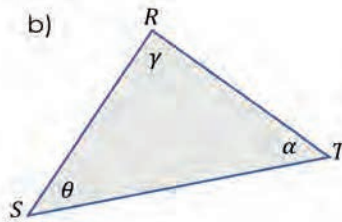
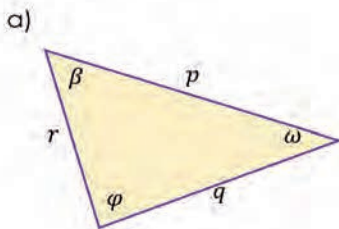
## 1. Teorema de Seno

"En todo triángulo, las longitudes de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados"

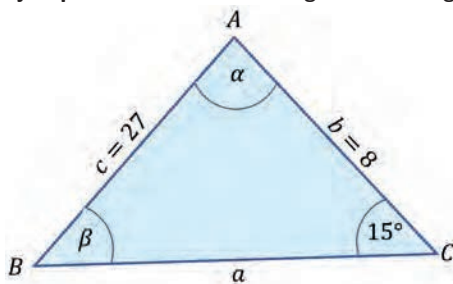


$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \theta}$$

**Actividad 45.** En el cuaderno de ejercicios establecemos la ley de senos en los siguientes triángulos:



**Ejemplo 1:** Resolvamos el siguiente triángulo por la Ley de Senos.



Establecemos la Ley de Senos:

$$\frac{8}{\text{sen } \beta} = \frac{27}{\text{sen } 15^\circ} = \frac{a}{\text{sen } \alpha}$$

[1]      [2]      [3]

Con [1] y [2] calculamos  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{8}{\text{sen } \beta} &= \frac{27}{\text{sen } 15^\circ} \\ \frac{\text{sen } \beta}{8} &= \frac{\text{sen } 15^\circ}{27} \\ \text{sen } \beta &= \frac{8 \times \text{sen } 15^\circ}{27} \\ \beta &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{8 \times \text{sen } 15^\circ}{27} \right) \\ \beta &= 4,40^\circ \end{aligned}$$

**$\beta = 4,40^\circ$**

Calculamos  $\alpha$  con la propiedad de los ángulos interiores del triángulo:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 15^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 15^\circ - 4,40^\circ \\ \alpha &= 160,60^\circ \end{aligned}$$

**$\alpha = 160,60^\circ$**

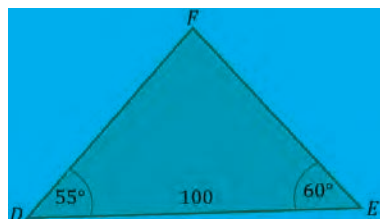
Con [2] y [3] calculamos  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\text{sen } 160,60^\circ} &= \frac{27}{\text{sen } 15^\circ} \\ a &= \frac{27 \times \text{sen } 160,60^\circ}{\text{sen } 15^\circ} \\ a &= 34,65 \end{aligned}$$

**$a = 34,65$**



**Ejemplo 2:** “Aura estito” -dijo el chapaco-: Sea el  $\triangle DEF$  con  $(DE)=100, (\angle DEF)=60^\circ, (\angle EDF)=55^\circ$ . Resolvamos el triángulo.



Establezcamos la Ley de Senos:

$$\frac{100}{\sin \widehat{DFE}} = \frac{\overline{EF}}{\sin 55^\circ} = \frac{\overline{DF}}{\sin 60^\circ}$$

[1]
[2]
[3]

Calculamos  $\alpha$  con la propiedad de los ángulos interiores del triángulo:

$$\widehat{DFE} + 55^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{DFE} = 180^\circ - 55^\circ - 60^\circ$$

$$\boxed{\widehat{DFE} = 75^\circ}$$

Con [2] y [1] calculamos  $\overline{EF}$ :

$$\frac{\overline{EF}}{\sin 55^\circ} = \frac{100}{\sin 75^\circ}$$

$$\overline{EF} = \frac{100 \times \sin 55^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$\boxed{\overline{EF} = 84,80}$$

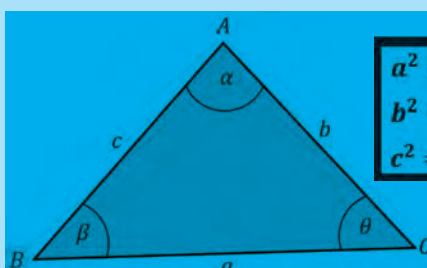
Con [3] y [1] calculamos  $\overline{DF}$ :

$$\frac{\overline{DF}}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 75^\circ}$$

$$\overline{DF} = \frac{100 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \boxed{\overline{DF} = 89,66}$$

## 2. Teorema de Cosenos

“En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de estas longitudes, por el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados”

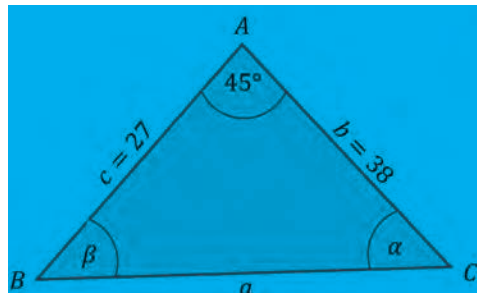


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta$$

**Ejemplo 3:** Resolvamos el siguiente triángulo por la Ley de Cosenos.



Calculamos el lado  $a$ :

$$a^2 = 27^2 + 38^2 - 2 \cdot 27 \cdot 38 \cdot \cos 45^\circ$$

$$a = \sqrt{27^2 + 38^2 - 2 \cdot 27 \cdot 38 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$\boxed{a = 26,87}$$

Calculamos el ángulo  $\beta$ :

$$\beta = \cos^{-1} \left( \frac{27^2 + 26,87^2 - 38^2}{2 \cdot 27 \cdot 26,87} \right)$$

$$\boxed{\beta = 89,72^\circ}$$

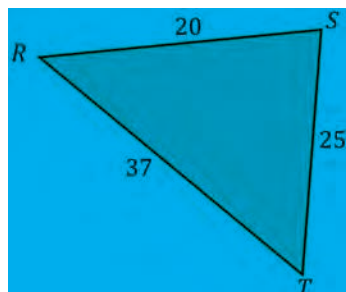
Calculamos el ángulo  $\alpha$ :

$$\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 89,72^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 45,28^\circ}$$

## 3. Resolución de triángulos oblicuángulos

**Ejemplo 4:** Sea el triángulo  $\triangle RST$  con  $(RS)=20, (ST)=25$  y  $(RT)=37$ . Resolver el triángulo.



Calculamos el ángulo  $\widehat{RST}$ :

$$\widehat{RST} = \cos^{-1} \left( \frac{25^2 + 20^2 - 37^2}{2 \cdot 25 \cdot 20} \right)$$

$$\boxed{\widehat{RST} = 110,12^\circ}$$

Calculamos el ángulo  $\widehat{SRT}$ :

$$\widehat{SRT} = \cos^{-1} \left( \frac{37^2 + 20^2 - 25^2}{2 \cdot 37 \cdot 20} \right)$$

$$\boxed{\widehat{SRT} = 39,38^\circ}$$

Calculamos el ángulo  $\widehat{RTS}$ :

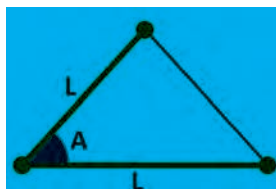
$$\widehat{RTS} = \cos^{-1} \left( \frac{25^2 + 37^2 - 20^2}{2 \cdot 25 \cdot 37} \right)$$

$$\boxed{\widehat{RTS} = 30,50^\circ}$$

Si quieres, puedes verificar si la suma de los ángulos encontrados cumple con la propiedad de los ángulos interiores:

$$110,12^\circ + 39,38^\circ + 30,5^\circ = \boxed{180^\circ}$$

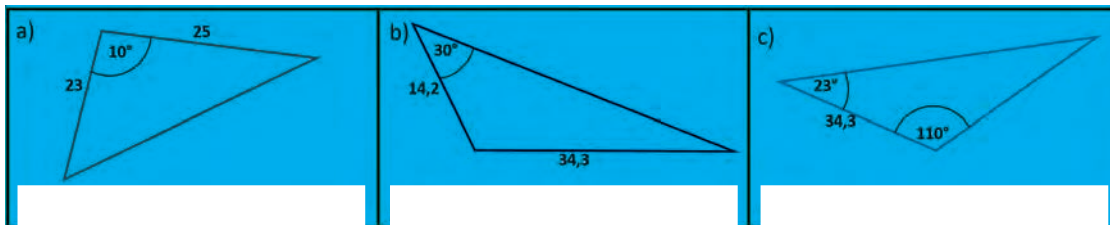
¿Cómo saber cuándo utilizar la Ley de Senos y cuándo la Ley de Cosenos?



En estos casos se aplica la Ley de Cosenos para resolver los triángulos. En todos los demás casos se aplica la Ley de Senos.

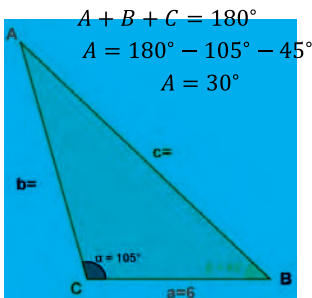


**Actividad 46.** Indicamos en el cuaderno de ejercicios por cuál de las leyes estudiadas se deben resolver los siguientes triángulos:



**Ejemplo 5:** En el triángulo ABC si  $C=105^\circ$ ;  $B=45^\circ$ ;  $a=6$  encontramos los datos faltantes

**Cálculo del ángulo "A"**



**Cálculo del ángulo "B"**

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$$

$$b = \frac{6 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$b = 8,5$$

**Cálculo del ángulo "C"**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 6^2 + (8,5)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8,5 \cos 105^\circ$$

$$c^2 = 36 + 42,25 - (-26)$$

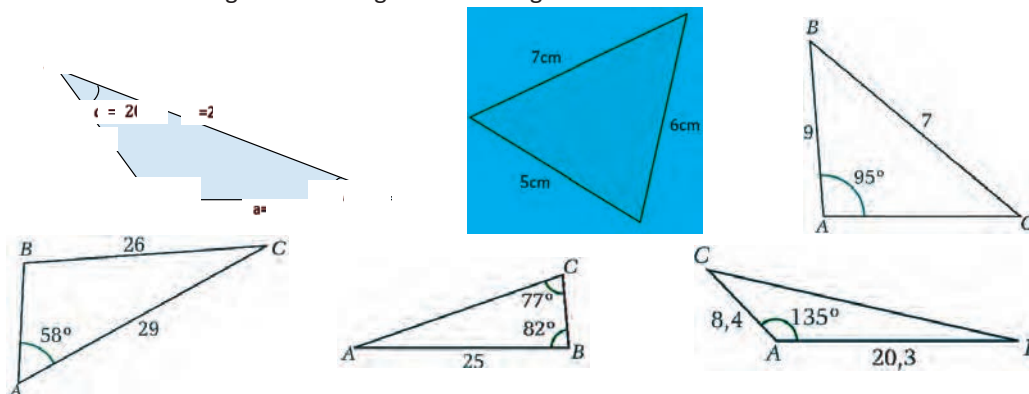
$$c^2 = 108,25 + 26$$

$$c^2 = 134,25$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{134,25}$$

$$c = 11,6$$

**Actividad 47:** Resolvemos los siguientes triángulos oblicuángulos:



#### 4. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

**Ejemplo 6:** Se ha medido dos lados de un terreno triangular y el ángulo entre ellos. Calcula la longitud del tercer lado.

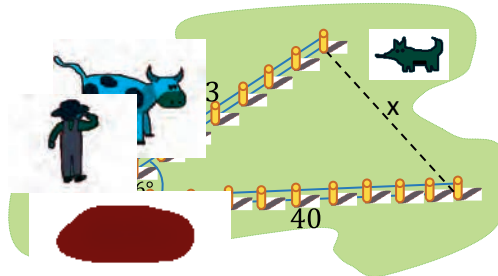
$$x^2 = 33^2 + 40^2 - 2 \cdot 33 \cdot 40 \cdot \cos 26^\circ$$

$$x^2 = 1089 + 1600 - 2372,82$$

$$x^2 = 316,18$$

$$x = \sqrt{316,18}$$

$$x \approx 17,78m$$

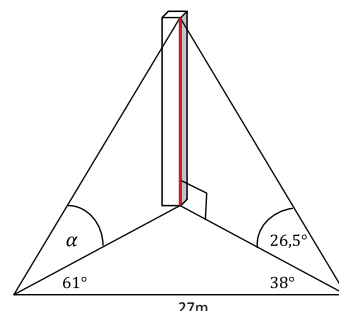
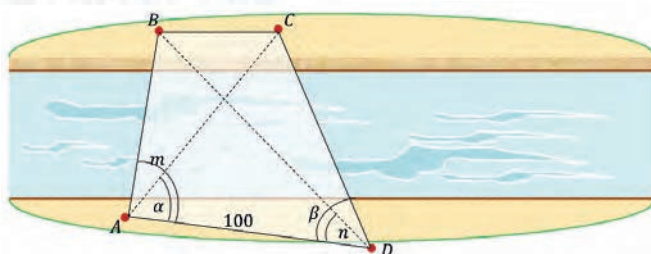


#### Actividad 48

- Los lados de un triángulo miden 6,8 cm, 8,4 cm y 4,9 cm. Encontrar la medida del ángulo menor.
- Dos de los lados de un triángulo miden 400 m y 600 m respectivamente si el ángulo entre ellos mide  $46,3^\circ$ , hallar el área y el perímetro del triángulo.
- Una persona sostiene dos volantines (cometas) que están volando. A uno de los cometas le ha soltado 100 m de pita (hilo) y al otro 80 m. Si el ángulo que forman ambos hilos es aproximadamente  $30^\circ$ , ¿A qué distancia está un volantín de la otro?
- Un triángulo está inscrito en una circunferencia de radio 5cm y determina sobre ella tres arcos de  $80^\circ$ ,  $140^\circ$  y  $140^\circ$ . Halla los lados del triángulo.
- Las diagonales de un paralelogramo miden 36m y 46m respectivamente y forman un ángulo de  $108^\circ 30'$ , calcular los lados del paralelogramo.
- ¿Qué ángulo forman dos fuerzas de 30kp y 22kp respectivamente cuya resultante es de 40kp?
- Calcula la altura del monumento; además calcula el valor de  $\alpha$ .



8.- Halla la distancia  $BC$ , si  $m = 60^\circ$ ,  
 $\alpha = 50^\circ$ ,  $n = 51^\circ$ ,  $\beta = 74^\circ$  y  $AD = 100m$



### ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 49.** Reflexionamos y respondemos las siguientes preguntas

Responde reflexivamente las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante aprender a resolver triángulos oblicuángulos?
- ¿Qué elementos de la trigonometría nos puede ayudar a resolver problemas de nuestra Comunidad Educativa?

¿Cómo la Trigonometría podría ayudarte a resolver algunos problemas de tu vida diaria?



### ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 50.** Utilicemos nuestro teodolito casero

- En equipo de 3 integrantes, realizamos cálculos de distancias inaccesibles con la ayuda de nuestros teodolitos contruidos en la unidad anterior y las leyes de seno y coseno.
- Anotamos en nuestro cuaderno los cálculos y objetos medidos para socializar en una plenaria en clase.
- Elaboramos nuestros carteles con las leyes aprendidas y los apuntes más importantes para textuar el aula.

## IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SU VALOR EN LA PRODUCTIVIDAD



### ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

**Actividad 51.** Analicemos la siguiente historia de Palmar Chico:

En la comunidad de “Palmar Chico” del municipio de Yacuiba, Región Autónoma del Gran Chaco de Tarija, en el mes de septiembre se lleva adelante uno de los eventos etnológicos más importantes del Chaco sudamericano, donde se comparten las tradiciones y se hacen diferentes demostraciones sobre las prácticas e identidad culturales de la región como, corrida de toros, carreras cuadreras de caballos, doma de potros, el juego de la sortija, la marcada, la taba, ambrosía y la mejor gastronomía del Chaco boliviano.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa la palabra “identidad”?
2. ¿Qué es la identidad cultural?
3. ¿Cuál es tu identidad cultural?
4. Menciona tres ejemplos de identidad



### ¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

### Identidades y ecuaciones

Ecuación: Igualdad que se verifica sólo para algunos valores de sus variables.

Identidad: Igualdad que se verifica para todos los posibles valores de sus variables.

## 1. Identidades trigonométricas fundamentales

Es una igualdad establecida entre dos expresiones que involucran funciones trigonométricas de una o más variables (o ángulos), las cuales se verifican para todo valor admisible de dichas variables.

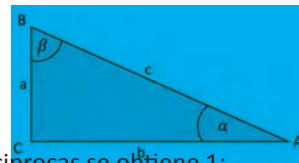
Las identidades que indicaremos a continuación son fundamentales:

### Relaciones Inversas

Para obtener las identidades inversas, haremos uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.

En el triángulo rectángulo las funciones del ángulo  $\alpha$  son:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} & \tan \alpha &= \frac{a}{b} & \csc \alpha &= \frac{c}{a} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cot \alpha &= \frac{b}{a} & \sec \alpha &= \frac{c}{b}\end{aligned}$$



### Actividad 52

#### Construcción del seno de la suma de dos ángulos con GeoGebra

- 1) Dibuja un punto de origen demostración y renómbralo con "punto O".
- 2) Traza tres semirrectas con el punto de origen, considerando que el segmento  $\overline{OA} = 1$ .
- 3) Dibuja tres ángulos, como se muestran en la figura 1.
- 4) Traza un segmento perpendicular con el punto A y la semirrecta  $\overline{OB}$ , como se muestra en la figura 2.
- 5) Traza otra perpendicular del punto A al segmento  $\overline{OC}$ , como se muestra en la figura 2.
- 6) Luego, traza otras dos líneas perpendiculares con  $\overline{OA}$  y  $\overline{OC}$ , hasta obtener dos triángulos (señalados con color café), como se muestra en la figura 2.

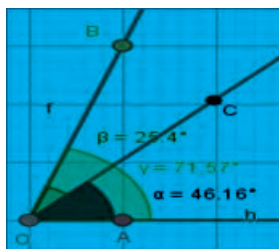


Figura 1

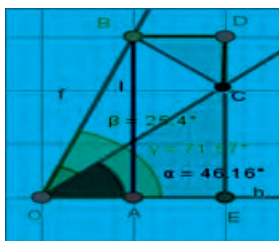


Figura 2

Multiplicando una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene 1:

$$\sin \alpha * \csc \alpha = \frac{a}{c} * \frac{c}{a} = 1 \quad \cos \alpha * \sec \alpha = \frac{b}{c} * \frac{c}{b} = 1 \quad \tan \alpha * \cot \alpha = \frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$$

De esta manera se tiene las identidades Inversas o recíprocas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

### Identidades del cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: tangente y cotangente y tienen la propiedad de relacionar, por medio de un cociente, las funciones trigonométricas seno y coseno.

Si realizamos el cociente de la función seno por la función coseno, se tiene la función tangente:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a * c}{b * c} = \frac{a}{b} = \tan \alpha \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b * c}{a * c} = \frac{b}{a} = \cot \alpha$$

Por tanto:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

### Relaciones Pitagóricas

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo se tiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividimos ambos miembros entre  $c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Aplicamos la propiedad de los exponentes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Los cocientes son equivalentes a las funciones  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$

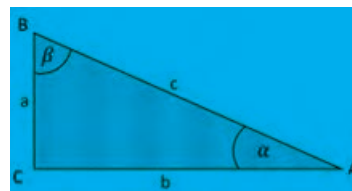
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Las demás identidades pitagóricas se obtienen de forma similar:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



## Demostración de identidades

Demostrar o verificar una identidad significa mostrar que es posible transformar un miembro de la identidad en el otro, mediante procesos justificados. Algunas pautas útiles son las siguientes:

- 1. Transformar el miembro más complicado.
- 2. Expresar las funciones en términos de seno y coseno y simplificar.
- 3. Efectuar operaciones algebraicas y factorizaciones convenientes.

**Ejemplo 1:** Demostramos la siguiente identidad

$$\csc \alpha - \sec \alpha = \cot \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sec \alpha} - \sec \alpha &= \\ \frac{1 - \sec^2 \alpha}{\sec \alpha} &= \\ \frac{\cos^2 \alpha}{\sec \alpha} &= \\ \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sec \alpha} &= \\ \boxed{\cot \alpha \cdot \cos \alpha} &= \end{aligned}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Identidad pitagórica.
- Separamos el coseno

**Ejemplo 2:** Demostramos la siguiente identidad

$$\sec x + \cos x \cdot \cot x = \csc x$$

$$\begin{aligned} \sec x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sec x} &= \\ \frac{\sec^2 x + \cos^2 x}{\sec x} &= \\ \frac{1}{\sec x} &= \\ \boxed{\csc x} &= \end{aligned}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Identidad pitagórica.
- Identidad recíproca.

**Ejemplo 3:** Demostramos la siguiente identidad

$$\tan t + 2 \cos t \cdot \csc t = \sec t \cdot \csc t + \cot t$$

$$\begin{aligned} \frac{\sec t}{\cos t} + 2 \cos t \cdot \frac{1}{\sec t} &= \\ \frac{\sec^2 t + 2 \cos^2 t}{\sec t} &= \\ \frac{\cos t \cdot \sec t}{\sec t} + \frac{\sec^2 t + \cos^2 t}{\sec t} &= \\ \frac{1 + \cos^2 t}{\sec t} &= \\ \frac{1 + \cos^2 t}{\sec t} &= \\ \boxed{\sec t \cdot \csc t + \cot t} &= \end{aligned}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Disgregamos el término  $2 \cos^2 t$ .
- Identidad pitagórica.
- Separamos los términos del numerador.
- Identidades recíprocas y del cociente.

### Sugerencias para demostrar identidades

- Simplifica el miembro más complicado.
- Realiza las transformaciones utilizando las identidades básicas.
- A menudo es útil reescribir una expresión en términos de seno y coseno.
- Realiza las operaciones algebraicas que consideres necesarias.
- Si no te va bien desarrollando un miembro, desarrolla el otro, te puede dar algunas ideas.

### Variaciones de las identidades fundamentales

$$\sin \theta \cdot \cos \theta = 1$$

$$\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

### Actividad 53

**Demostramos las siguientes identidades**

$$1) \tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha$$

$$2) \frac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \sec^2 u$$

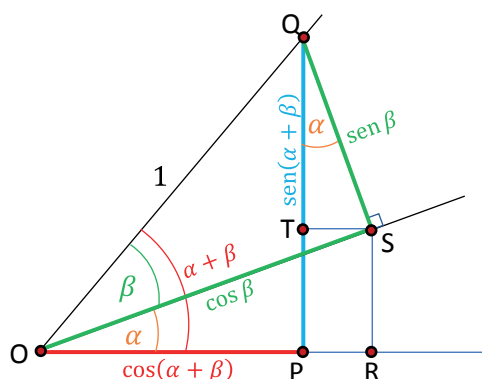
$$3) \frac{\csc^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

$$4) \frac{1 + \csc \beta}{\sec \beta} - \cot \beta = \cos \beta$$

$$5) \frac{\cos \beta}{1 - \sec \beta} = \sec \beta + \tan \beta$$

## 2. Identidades de la suma y de la resta de dos ángulos

En esta sección deduciremos identidades para la suma y la diferencia de dos ángulos que reducen



$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sec \beta}$$

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}; \text{ luego } \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \sec \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sec \beta} \cdot \frac{\sec \beta}{\sec \alpha}; \text{ luego } \frac{\sec \beta}{\sec \alpha} = \cos \alpha \cdot \sec \beta$$

Por tanto:

$$\sec(\alpha + \beta) = \sec \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sec \beta$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \overline{OP} = \overline{OR} - \overline{PR} \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\cos \beta}; \text{ luego } \overline{OR} = \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \sin \alpha &= \frac{\overline{TS}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{PR}}{\sin \beta}; \text{ luego } \overline{PR} = \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

En base a estas deducciones y de similar modo, podemos establecer las identidades para la diferencia de ángulos:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Ejemplo 1:** Calculemos el valor exacto de  $\sin 105^\circ$ .

No tenemos forma de calcular  $\sin 105^\circ$  directamente, pero podemos escribir el ángulo de  $105^\circ$  como la suma (o resta) de ángulos notables:

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$



### Actividad 54

**Demostramos:**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$$

$$\tan(270^\circ + \beta) = -\cot \beta$$

Para la tangente:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\cancel{\sin \alpha} \cdot \cancel{\cos \beta} + \cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\sin \beta}}{\cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\cos \beta} - \cancel{\sin \alpha} \cdot \cancel{\sin \beta}} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

**Ejemplo 2:**

**Demostramos que:**  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin x + \cos x)$

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} &= \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x &= \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin x + \cos x) &= \end{aligned}$$

**Ejemplo 3: Demostramos:**

$$\sin(x + 60^\circ) = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos 60^\circ + \cos x \cdot \sin 60^\circ =$$

$$\sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2} =$$

## 3. Identidades trigonométricas de ángulos dobles

Para:  $\sin 2\alpha$  partiremos de la identidad:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Reemplazamos  $\beta = \alpha$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Reducimos términos semejantes y tendremos:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Se realiza el mismo procedimiento para coseno y tangente:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

**Ejemplo 1:**

**Demostramos que:**  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \\ 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta &= \\ 1 - 2 \sin^2 \theta &= \end{aligned}$$



**Ejemplo 2:**

Demostramos que:  $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \sec \theta$

$$\frac{2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} =$$

$$2 \cos \theta - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} =$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} =$$

$$\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} =$$

$$\frac{1}{\cos \theta} =$$

$$\boxed{\sec \theta} =$$

**Ejemplo 3:**

Demostramos que:  $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cot x$

$$\frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} =$$

$$\frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} =$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$\boxed{\cot x} =$$

**Actividad 55**

Demostramos las siguientes identidades:

- a)  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$   
 b)  $\frac{1 + \tan^2 \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \sec 2\beta$   
 c)  $\csc 2\gamma = \frac{1}{2} \sec \gamma \csc \gamma$

**4. Identidades trigonométricas de ángulos medios**

Las identidades de ángulos medios son las siguientes:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

|     | I C | II C | III C | IV C |
|-----|-----|------|-------|------|
| Sen | +   | +    | -     | -    |
| Cos | +   | -    | -     | +    |
| Tan | +   | -    | +     | -    |

El doble signo dependerá del cuadrante al que pertenezca.

Otras identidades de la tangente del ángulo medio son:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

**Ejemplo 1:** Si  $\beta = 22^\circ 30'$  calcula  $\sin \beta, \cos \beta$  en forma exacta.

Como  $\beta$  pertenece al primer cuadrante el signo de ambas funciones es positivo.

$$\sin 22^\circ 30' = \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ 30' = \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

**Ejemplo 2:** Si  $\cos \beta = \frac{3}{5}$  y  $\beta$  pertenece al IV cuadrante, calcula  $\tan \frac{\beta}{2}$ :

$$\tan \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}} = -\sqrt{\frac{\frac{5-3}{5}}{\frac{5+3}{5}}} = -\sqrt{\frac{2}{8}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

**Ejemplo 3:** Hallamos el valor de E:  $E = \sqrt{\frac{1}{\csc^2 \left(\frac{M+N}{2}\right)} + \frac{1}{\sec^2 \left(\frac{M+N}{2}\right)}} + 3$

$$E = \sqrt{\sin^2 \left(\frac{M+N}{2}\right) + \cos^2 \left(\frac{M+N}{2}\right)} + 3 = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

**Ejemplo 4:** Demuestra la identidad:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} =$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} =$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} =$$

**5. Transformación de suma a producto y de producto a suma**

De Productos a sumas

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

De Sumas a Productos

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

**Ejemplo 1:** Expresamos las sumas y diferencias como productos.

$$a) \sin 7\theta - \sin 3\theta = 2 \cos \frac{7\theta+3\theta}{2} \cdot \sin \frac{7\theta-3\theta}{2}$$

$$= \boxed{2 \cos 5\theta \cdot \sin 2\theta}$$

$$a) \cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin \frac{4\theta+2\theta}{2} \cdot \sin \frac{4\theta-2\theta}{2}$$

$$= \boxed{-2 \sin 3\theta \cdot \sin \theta}$$

### Actividad 57

**Demostramos:**

$$\frac{\cos 8x + \cos 6x}{\sin 8x - \sin 6x} = \tan x$$

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \cos^2 x - \cos^2 y$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$$

**Ejemplo 2:** Demostramos:

$$\frac{\sin \theta + \sin 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$$

$$\frac{2 \sin 2\theta \cdot \cos \theta}{2 \cos 2\theta \cdot \cos \theta} =$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} =$$

$$\boxed{\tan 2\theta} =$$

**Ejemplo 3:** Expresamos los productos como sumas o diferencias.

$$a) \cos 6x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} [\cos(6x + 2x) + \cos(6x - 2x)]$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 4x) = \boxed{\frac{\cos 8x}{2} + \frac{\cos 4x}{2}}$$

$$a) \sin 5\theta \cdot \cos 3\theta = \frac{1}{2} [\sin(5\theta + 3\theta) + \sin(5\theta - 3\theta)]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin 8\theta + \sin 2\theta] = \boxed{\frac{\sin 8\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}}$$

## 6. Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas son ciertas ecuaciones que están afectadas de funciones trigonométricas. Las soluciones (ángulo), se puede dar en uno y dos cuadrantes (soluciones principales) y además se repite en todas las vueltas (soluciones generales).

Para resolver una ecuación trigonométrica no existe un método general, pero podemos clasificar los métodos de resolución de acuerdo a las principales ecuaciones trigonométricas.

### Método 1. Ecuación básica

Este tipo de ecuaciones trigonométricas se pueden resolver directamente despejando la función trigonométrica. Son las más sencillas que podemos ver dentro de las ecuaciones trigonométricas.

**Ejemplo 1:** Resuelve la ecuación:  $1 = 2 \cos x$

### Actividad 58

Resolvemos las ecuaciones:

$$1) \tan \beta = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$3) \sin(\beta) = \frac{5}{6}$$

$$4) \tan \alpha = \frac{2}{7}$$

$$5) \frac{1}{\cos x} = 3$$

Despejamos  $\cos x$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \cos^{-1} \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ$$

Solución principal:

$$x = 360^\circ - x_1$$

$$x = 360^\circ - 60^\circ$$

$$x = 300^\circ$$

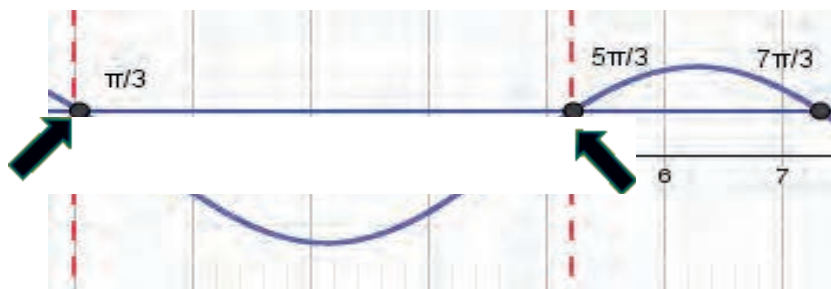
Solución general:

$$\boxed{x_G = 360^\circ k \pm 60}$$

Recordemos que para convertir  $60^\circ$  a radianes debemos utilizar la fórmula:

$$\frac{S}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi \text{ Rad}}$$

$60^\circ$  equivale a  $\frac{\pi}{3}$  y  $300^\circ$  equivale a  $\frac{5\pi}{3}$



**Ejemplo 2:** Resolvemos la ecuación:  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 = 30^\circ$$

Solución principal:

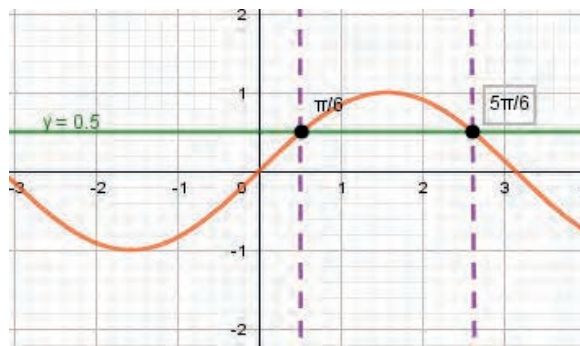
$$x = (180^\circ - x_1)$$

$$x = (180^\circ - 30^\circ)$$

$$x = 150^\circ$$

Solución general:

$$x_G = 180^\circ k \pm 30^\circ$$



## — Método 2. Ecuación de la forma $m \cdot \sin x = n \cdot \cos x$

Las ecuaciones trigonométricas que tiene la forma  $m \cdot \sin x = n \cdot \cos x$ , se debe realizar las operaciones adecuadas para expresar en forma de cociente:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{n}{m}$$

**Ejemplo 1:** Resuelve la ecuación:  $4 \cdot \sin \alpha - 3 \cdot \cos \alpha = 0$

Solución:

$$4 \cdot \sin \alpha = 3 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\alpha_1 = 3.87$$

Solución principal:

$$\alpha = (180^\circ + \alpha_1)$$

$$\alpha = (180^\circ + 3.87^\circ)$$

$$\alpha = 183.87^\circ$$

Solución general:

$$x_G = 180^\circ k + 183.87^\circ$$

Al expresar la ecuación a la forma

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{n}{m}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Luego se procede a despejar la función.

No olvides que se debe tener una solución principal y otra solución general.



**¡No lo olvides!**

Para resolver este tipo de ejercicios se debe reemplazar  $2x = 0$  tanto en la solución principal como en la solución general y luego recién despejar y simplificar.

**Ejemplo 2:** Resuelve la ecuación:  $10 \cdot \sin 4x - 5 \cdot \cos 4x = 0$

Solución:

$$10 \cdot \sin 4x = 5 \cdot \cos 4x$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{5}{10}$$

$$\tan 4x = \frac{5}{10}$$

$$4x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$4x = 26.565^\circ$$

$$x_1 = 6.64^\circ$$

Solución principal:

$$4x = (180^\circ + x_1)$$

$$4x = (180^\circ + 26.565^\circ)$$

$$x = \frac{206.565}{4}$$

$$x = 51.164^\circ$$

Solución general:

$$4x_G = 180^\circ k + 26.565^\circ$$

$$x_G = \frac{180^\circ k + 26.565^\circ}{4}$$

$$x_G = 45^\circ k + 6.641^\circ$$

**Ejemplo 3:**

Resuelve la ecuación  $2 \cos x \tan x - 1 = 0$

$$2 \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$2 \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$2 \cdot \cos x \cdot \sin x = \cos x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad ; \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

$$x_1 = \cos^{-1}(0) \quad ; \quad x_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 = 90^\circ \quad ; \quad x_2 = 30^\circ$$

Solución principal:

$$x = (360^\circ - x_1) \quad ; \quad x = (180^\circ - x_2)$$

$$x_3 = (360^\circ - 90^\circ) \quad ; \quad x_4 = (180^\circ - 30^\circ)$$

$$x_3 = 270^\circ \quad ; \quad x_4 = 150^\circ$$

Solución general:

$$x_G = 360^\circ k \pm x_1 \quad ; \quad x_G = 180^\circ k + (-1)^k x_2$$

$$x_{G1} = 360^\circ k \pm 90^\circ \quad ; \quad x_{G2} = 180^\circ k + (-1)^k 30$$

**Ejemplo 4:**

$$\sin 2x (3 \cos x - 2) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad ; \quad 3 \cos x - 2 = 0$$

$$2x_1 = \sin^{-1}(0) \quad ; \quad x_2 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$2x_1 = 0^\circ \quad ; \quad x_2 = 48.19^\circ$$

Solución principal:

$$x = (180^\circ - x_1) \quad ; \quad x = (360^\circ - x_2)$$

$$2x_3 = (180^\circ - 0^\circ) \quad ; \quad x_4 = (360^\circ - 48.19^\circ)$$

$$2x_3 = 180^\circ \quad ; \quad x_4 = 311.81^\circ$$

$$x_3 = 90^\circ$$

Solución general:

$$x_G = 180^\circ k + (-1)^k x_1 \quad ; \quad x_G = 360^\circ k \pm x_2$$

$$2x_{G1} = 180^\circ k + (-1)^k 0^\circ \quad ; \quad x_{G2} = 360^\circ k \pm 48.19^\circ$$

$$2x_{G1} = 180^\circ k \quad ; \quad x_{G1} = 90^\circ k$$

## Actividad 59

Un avión que va de La paz a Santa Cruz tarda 1 hora a una velocidad de 920Km/h  
¿Cuánto tardara si se dirige a una velocidad de 1500Km/h?

**Método 3.** Ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ 

Este método consiste en transformar de manera que sea factorizada, usualmente se convierte en una ecuación trigonométrica de segundo grado que se puede factorizar por aspa simple o por fórmula general, teniendo en cuenta que la incógnita es la función trigonométrica.

**Ejemplo 1:**

Resolvamos la ecuación:  $\text{sen}^2 x = \frac{3(1-\cos x)}{2}$

El ejercicio también se puede resolver por aspa simple:

$$\begin{array}{l} 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen} x + 1 = 0 \\ 2\text{sen} x \quad \quad -1 = -\text{sen} x \\ \text{sen} x \quad \quad \quad 1 = -2\text{sen} x \end{array}$$

Factorizando:

$$(2\text{sen} x - 1)(\text{sen} x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos^2 x) &= 3(1 - \cos x) \\ 2 - 2\cos^2 x &= 3 - 3\cos x \\ 2 - 3 - 2\cos^2 x + 3\cos x &= 0 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 &= 0 \\ (2\cos x - 1)(\cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \quad ; \quad \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos x = 1$$

$$x_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad x_2 = \cos^{-1}(1)$$

$$x_1 = 60^\circ \quad ; \quad x_2 = 0^\circ$$

Solución principal:

$$x = (360^\circ - x_1) \quad ; \quad x = (360^\circ - x_2)$$

$$2x_3 = (360^\circ - 60^\circ) \quad ; \quad x_4 = (360^\circ - 0^\circ)$$

$$2x_3 = 300^\circ \quad ; \quad x_4 = 360^\circ$$

Solución general:

$$x_G = K360^\circ \pm x_1 \quad ; \quad x_G = K360^\circ \pm x_2$$

$$x_{G1} = K360^\circ \pm 60^\circ \quad ; \quad x_{G2} = K360^\circ \pm 0$$

$$x_{G2} = K360^\circ$$

**Ejemplo 2:**

Resolvamos la ecuación:  $2 * \text{sen} x + \csc x = 3$

$$2 \text{sen} x + \frac{1}{\text{sen} x} = 3$$

$$\frac{2\text{sen}^2 x + 1}{\text{sen} x} = 3$$

$$2 * \text{sen}^2 x + 1 = 3 * \text{sen} x$$

$$2 * \text{sen}^2 x - 3 \text{sen} x + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de

segundo grado por fórmula:

$$\text{sen} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{sen} x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$\text{sen} x = \frac{3+1}{4} \quad ; \quad \text{sen} x = \frac{3-1}{4}$$

$$\text{sen} x = 1 \quad ; \quad \text{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \text{sen}^{-1}(1) \quad ; \quad x_2 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 = 90^\circ \quad ; \quad x_2 = 30^\circ$$

**Ejemplo 3:**

Determinamos las soluciones de cada ecuación en el intervalo  $[0, 2\pi)$  y  $[0^\circ, 360^\circ]$

$$\text{a) } \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 2$$

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = 270^\circ \quad \boxed{x = 135^\circ}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cos \theta \tan \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (\sqrt{3} \tan \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\boxed{\theta = 90^\circ \text{ ó } 270^\circ}$$

$$\sqrt{3} \tan \theta = 1$$

$$\boxed{\theta = 30^\circ \text{ ó } 210^\circ}$$

**Actividad 60**

Resolvamos las ecuaciones trigonométricas:

- 1)  $\text{sen}^2 \beta + \text{sen} \beta = -6$
- 2)  $8\text{sen}^2 \beta - 11 \text{sen} \beta + 3 = 0$
- 3)  $3\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 2 = 0$
- 4)  $2 \cos x = 1 - \text{sen} x$
- 5)  $4 \tan^2 \beta + 12 \tan \beta - 27 = 0$
- 6)  $8 + \text{sen} x = 10 \cos^2 x$
- 7)  $2 \cos^2 x = \text{sen} x - 1$
- 8)  $8 \tan^2 \beta - 14 \tan \beta = -3$
- 9)  $2 \tan x - 3 \tan x = 1$

**Movimiento Parabólico.** - En el movimiento de un proyectil en el vacío, la distancia máxima se calcula mediante la relación:

$$D_{\max} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$v_0$  es la velocidad inicial  
 $\alpha$  es el ángulo de salida  
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  es la constante de la gravedad

Expresa la fórmula de la distancia máxima en términos de una sola función trigonométrica:

$$D_{\max} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \xrightarrow{\text{IDENTIDAD DE ÁNGULO DOBLE}} \boxed{\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}$$

**Aeronáutica.** - Cuando un avión se mueve más rápido que el sonido, sus ondas sonoras forman un cono. La fórmula que relaciona la velocidad del avión, en unidades Mach (1Mach=1368km/h), con el ángulo  $\alpha$  del vértice del cono de ondas es  $\frac{1}{M} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Si la velocidad de un avión es Mach 2, determina el valor de  $\alpha$ .

DATOS:

$$M = 2$$

$$\alpha = ?$$

FÓRMULA:

$$\frac{1}{M} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

OPERACIONES:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 30^\circ \cdot 2 \quad \boxed{\alpha = 60^\circ}$$





### ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 61.** Realizamos la valoración, analizando y respondiendo a las siguientes preguntas:

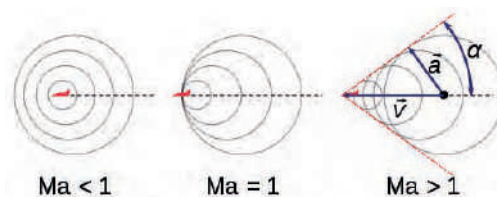
- 1) ¿Cuál es el objetivo de una ecuación trigonométrica?
- 2) ¿Dónde se aplican las ecuaciones trigonométricas?
- 3) ¿Por qué es importante el conocer identidades trigonométricas?



### ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 62.** Trabajemos con nuestros materiales

- Realiza un formulario con todas las identidades trigonométricas.
- Realiza un mapa conceptual del tema y compártelo en tu clase.



## INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA APLICADA AL CONTEXTO Y/O A LA TECNOLOGÍA



### ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

**Actividad 63.** Analicemos la historia de algunos agricultores del área rural que tienen diferentes estrategias para ubicar puntos estratégicos:

En la comunidad de Vera Cruz, ubicado en la provincia Linares a 90 km de la ciudad de Potosí, una gran parte de la población se dedica a la agricultura y a la crianza de animales como ser: vacas, chivos, chanchos, ovejas y otros.

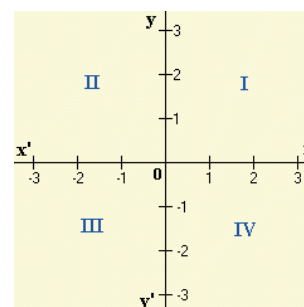


En relación al cuidado de los bueyes en esa región, los comunarios tienen la costumbre de mantener durante varios meses a los bueyes en los cerros, cada año en la temporada de cosecha los bueyes retornan a la comunidad hasta que pase la misma, posteriormente los dueños trasladan a los animales rumbo al cerro lugar donde viven la mayor parte del año y ahí es donde los pobladores buscan una señal como un árbol o una roca visible que no sea fácil de modificarse por las inclemencias de la naturaleza, ese punto es el punto de origen, que les sirve como referencia para ubicar los puntos cardinales considerando la orientación del sol, desde el punto de origen cuentan un número de pasos determinados hacia el Este, lo necesario, en la dirección de donde sale el sol (para nosotros el eje  $x$  positivo). Posteriormente, continúan contando pasos con dirección al norte que representa al eje  $y$ ; de esa manera encuentran diferentes puntos de ubicación o las coordenadas que les sirve para orientarse y retornar al mismo lugar donde dejaron a los bueyes.



### Actividad 64

Realiza la comparación entre un sistema de coordenadas rectangulares y los puntos cardinales.



Es muy interesante la práctica de los pobladores de las comunidades del área rural, analicemos la historia para responder las siguientes preguntas:

- ¿Utilizas los cuatro puntos cardinales para orientarte?
- ¿Qué comparación puedes hacer entre los puntos cardinales con un sistema de coordenadas rectangulares?
- ¿Qué sistemas de referencia conoces?



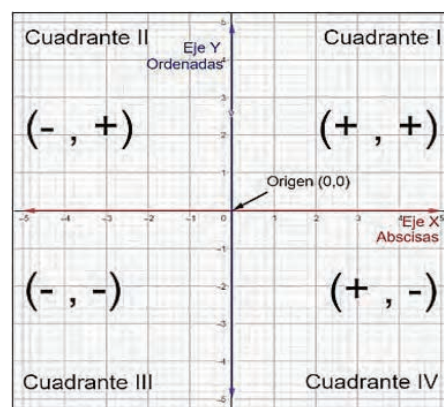
**Historia de la geometría analítica**

El nacimiento de la geometría analítica se atribuye a Descartes, por el apéndice La Geometría incluido en su Discurso del método, publicado en 1637, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes.

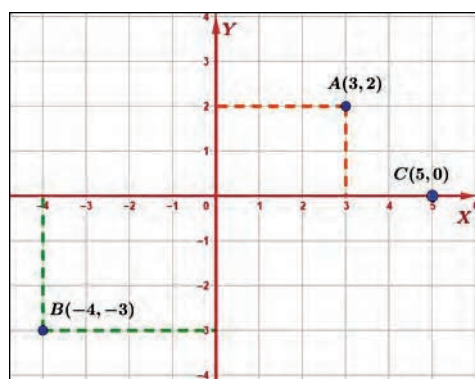
**1. Sistemas de coordenadas rectangulares y su relación con los saberes ancestrales**

Un sistema de coordenadas rectangulares también se denomina cartesiano en honor a René Descartes. Consta de dos rectas llamadas ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen formando cuatro cuadrantes. La recta horizontal se llama eje de las abscisas o de las  $x$ , y la recta vertical se llama eje de las ordenadas o eje de las  $y$ .

Está formado por dos ejes en el plano, siendo estos perpendiculares que se cortan en el origen. Las coordenadas de un punto cualquiera serán dadas por las proyecciones en el eje de las " $x$ " así como en el eje de las " $y$ ", como de la distancia entre el punto y el origen sobre cada uno de los ejes.

**Par ordenado**

En matemáticas, un par ordenado es una pareja de elementos, donde se distingue un elemento de otro. El par ordenado cuyo primer elemento es " $x$ " y el segundo elemento es " $y$ " se denota por  $(x, y)$ .



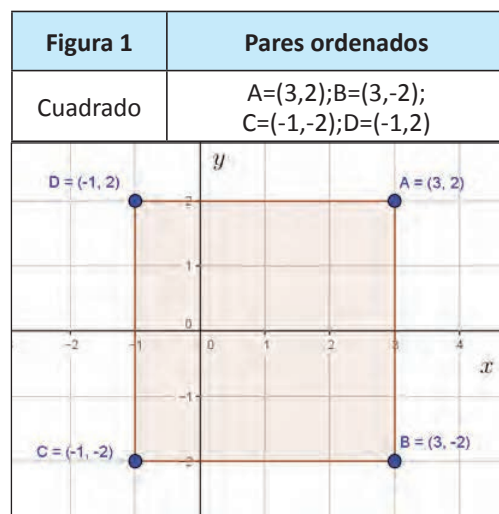
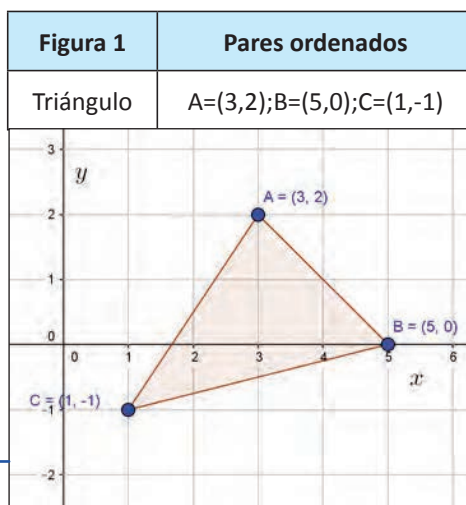
El Primer valor " $x$ " pertenece al eje horizontal  $x$  o eje de las abscisas; y el segundo elemento " $y$ " pertenece al eje vertical  $y$  o eje de las ordenadas;  $(x, y)$ .

**Ejemplo 1.**

Graficamos los puntos en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados  $A(3, 2)$ ;  $B(-4, -3)$  y  $C(5, 0)$ . (Figura 1).

**Ejemplo 2.**

Graficamos las siguientes figuras geométricas en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados:  $A(3, 2)$ ;  $B(3, -2)$ ;  $C(-1, -2)$  y  $D(-1, 2)$ . (Figura 2).

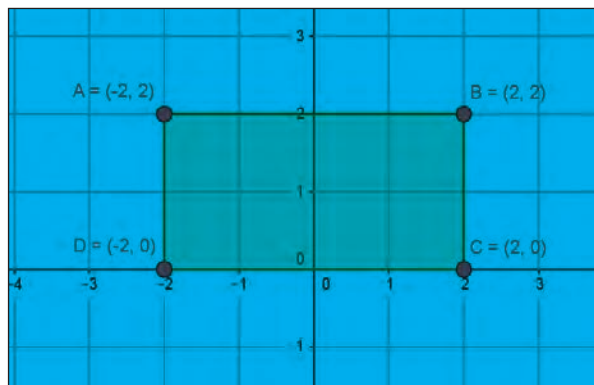
**Actividad 65**

Graficamos las figuras geométricas mediante los siguientes pares ordenados.

- $A = (3,3); B = (3,-5); C = (-1,-1); D = (-1,3)$
- $A = (2,2); B = (4,-2); C = (-2,-2); D = (-2,2)$
- $A = (5,5); B = (3,-2); C = (-2,-3); D = (0,2)$
- $A = (5,3); B = (3,-4); C = (-3,-5); D = (-2,2)$

**Pares ordenados:**

- $A = (3, 2)$   
 $B = (3, -2)$   
 $C = (-1, -2)$   
 $D = (-1, 2)$



**Actividad 66:** graficamos las siguientes figuras geométricas en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados:

| figura     | Pares Ordenados                      |
|------------|--------------------------------------|
| Triángulo  | A=(2,2); B=(4,0); C=(0,-1)           |
| Cuadrado   | A=(0,2); B=(2,2); C=(2,0); D=(0,0)   |
| Rectángulo | A=(-1,2); B=(2,2); C=(2,0); D=(-1,0) |
| Rombo      | A=(0,3); B=(1,0); C=(0,-3); D=(-1,0) |

### Geometría analítica, problemas fundamentales

Las dos cuestiones fundamentales de la geometría analítica son: Dado el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, para obtener su ecuación y dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que verifican dicha ecuación.

#### 2. Distancia entre dos puntos

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje  $x$  o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

$$|x_2 - x_1| = d$$

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje " $y$ " o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

$$|y_2 - y_1| = d$$

Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la siguiente relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dados dos puntos cualesquiera  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , definimos la distancia entre ellos,  $d(P_1, P_2)$  como la longitud del segmento de recta que los separa.

Teniendo los puntos:  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$

Trazamos por  $P_1$  y  $P_2$  paralelas a ambos ejes se forma el triángulo rectángulo. Donde la hipotenusa es la distancia y los catetos las rectas  $P_1D$  y  $P_2D$

$$P_1D = x_2 - x_1 \text{ y } P_2D = y_2 - y_1$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

#### Ejemplo 1.

Calculamos la distancia entre los siguientes pares de puntos.

A(-3,2) y B(2,3)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2 + 3)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{26} = 5,17$$

#### Ejemplo 2.

Determinemos el perímetro del triángulo cuyos vértices son: A(-3,1), B(1,4) y C(5,0)

Cálculo de la distancia AC:

$$\overline{AC} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Cálculo de la distancia AB:

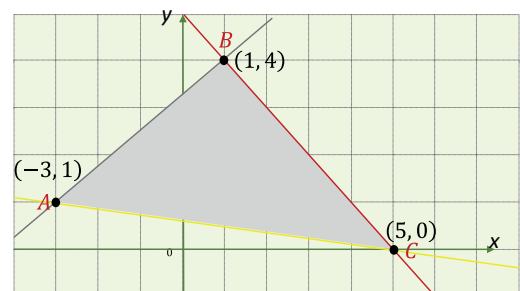
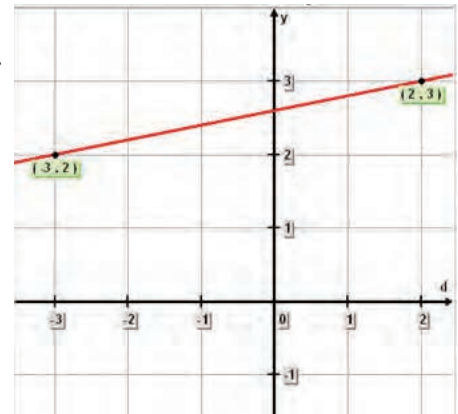
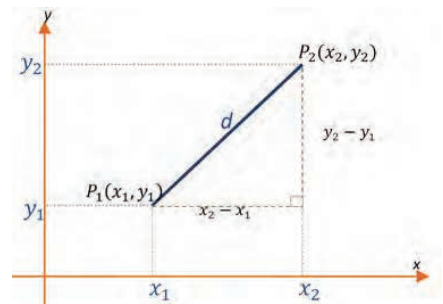
$$\overline{AB} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Cálculo de la distancia BC:

$$\overline{BC} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

Calculamos el perímetro sumando los lados:

$$P = \sqrt{65} + 5 + \sqrt{32} = 18,72$$



Actividad que debes realizar para fortalecer tus conocimientos.

### Actividad 67

1. Calculamos la distancia entre los puntos  $A(2,3)$  y  $B(0,-10)$
2. Calculamos la distancia entre los puntos  $A(-6,1)$  y  $B(-1,2)$
3. Calculamos la distancia entre los puntos  $A(\frac{1}{2}, -3)$  y  $B(-5, \frac{1}{6})$
4. Calculamos la distancia entre los puntos  $A(-8,0)$  y  $B(0,4)$

1) Calcula la distancia entre los puntos  $A(-5,0)$  y  $B(0,-12)$

2) Calcula la distancia entre los puntos  $A(-7,1)$  y  $B(-1,-2)$

3) Calcula la distancia entre los puntos  $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$  y  $B(-3, \frac{1}{6})$

4) Calcula la distancia entre los puntos  $A(-6,0)$  y  $B(0,-11)$

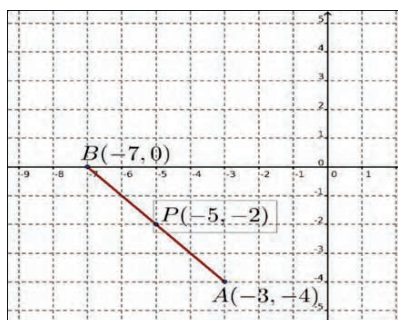
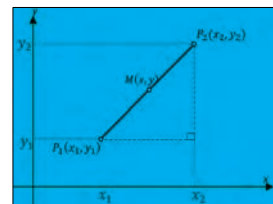
### Punto Medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento están dadas por las semisumas de las coordenadas de sus puntos extremos.

Dados los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , las coordenadas del punto medio están dadas por las siguientes expresiones:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



### Ejemplo 1:

Determina el punto medio del segmento  $AB$  delimitado por los puntos:  $A(-3, -4)$  y  $B(-7, 0)$ .

Punto A:  $x_1 = -3$ ,  $y_1 = -4$  Punto B:  $x_2 = -7$ ,  $y_2 = 0$

$$x = \frac{-7 - 3}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

Calculamos la coordenada en "x":

$$y = \frac{-4 + 0}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Calculamos la coordenada en "y":

El punto medio es:  $P(-5, -2)$

### Actividad 68

1. Calculamos el punto medio del segmento  $AB$  delimitado por los puntos:  $A(-2, -6)$  y  $B(4, -2)$
2. Calculamos el punto medio del segmento  $AB$  delimitado por los puntos:  $A(4, -3)$  y  $B(1, 4)$
3. Calculamos el punto medio del segmento  $AB$  delimitado por los puntos:  $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$  y  $B(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$
4. Calculamos el punto medio del segmento  $AB$  delimitado por los puntos:  $A(-2, -6)$  y  $B(4, -2)$

### 3. División de un segmento en una razón dada

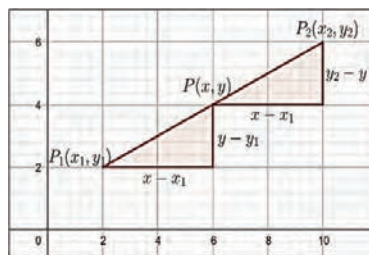
Dividir un segmento  $P_1 P_2$  en una relación dada "r" es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento  $P_1 P_2$ , de modo que las dos partes,  $P_1 P$  y  $P P_2$ , están en la relación r:

$$r = \frac{P_1 P}{P P_2}$$

Donde  $P(x,y)$  es el punto P

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$



### Ejemplo 2:

¿Qué puntos intermedios  $P_1$  y  $P_2$  dividen al segmento de extremos  $A(-1,-3)$  y  $B(5,6)$  en tres partes iguales?

Como el segmento se divide en tres partes iguales ubicaremos dos puntos:

Para  $P_1$  la razón es  $r = 2$ :

$$x_1 = \frac{-1 + 2(5)}{1 + 2}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 2(6)}{1 + 2}$$

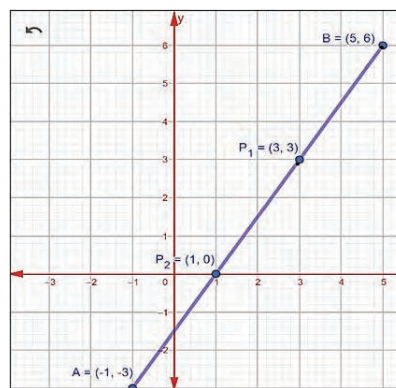
$$x_1 = \frac{9}{3}$$

$$y_1 = \frac{9}{3}$$

$$x_1 = 3$$

$$y_1 = 3$$

Con la razón  $r = 2$  tenemos el punto  $P_1(3,3)$



Para  $P_2$  la razón es  $r = \frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-1 + \frac{1}{2}(5)}{1 + \frac{1}{2}} \quad y_2 = \frac{-3 + \frac{1}{2}(6)}{1 + \frac{1}{2}}$$

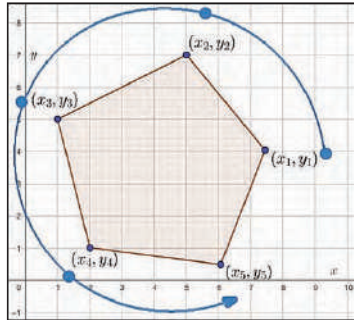
$$x_2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 \quad y_2 = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0$$

Con la razón  $r = \frac{1}{2}$  tenemos el punto  $P_2(1, 0)$

#### 4. Área de un polígono

El área de un polígono de vértices:  $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2) \dots N(x_n, y_n)$  está dado por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix} u^2$$



#### Glosario

*Figura geométrica plana que está limitada por tres o más rectas y tiene tres o más ángulos y vértices.*

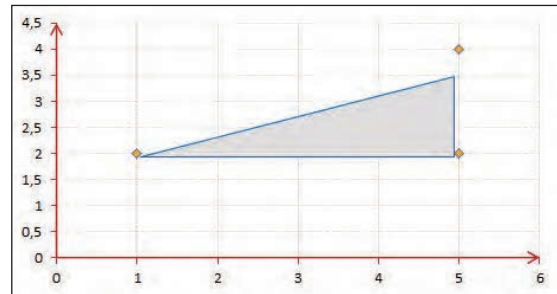
#### Ejemplo 3

Calculamos el área del triángulo delimitado por los puntos:  $A = (1, 2)$ ,  $B = (5, 2)$  y  $C = (5, 4)$

$$A = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} u^2$$

Las diagonales primarias llevan signo positivo.  
Las diagonales secundarias llevan signo negativo.

$$A = \frac{1}{2} |2 + 20 + 10 - 10 - 10 - 4| = \frac{1}{2} * 8 = 4u^2$$



#### Ejemplo 4

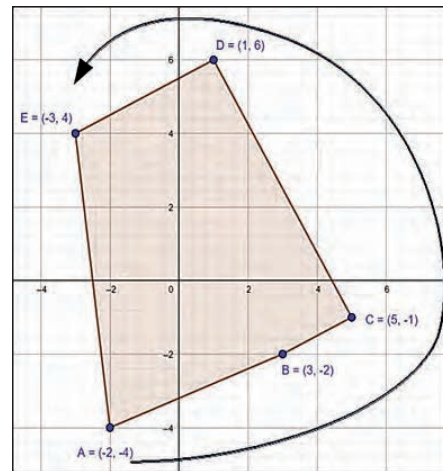
Calculamos el área del polígono delimitado por los puntos:  $A(-2, -4)$ ;  $B(3, -2)$ ;  $C(5, -1)$ ;  $D(1, 6)$  y  $E(-3, 4)$

$$A = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -2 \\ 5 & -1 \\ 1 & 6 \\ -3 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} u^2$$

$$A = \frac{1}{2} * |4 - 3 + 30 + 4 + 12 + 12 + 10 + 1 + 18 + 8|$$

$$A = \frac{1}{2} * |96u^2|$$

$$A = 48u^2$$



**Actividad 70:** Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno:

1. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos:  $A(2, 5)$ ;  $B(7, 1)$ ;  $C(3, -4)$  y  $D(-2, 3)$
2. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos:  $A(0, 4)$ ;  $B(1, -6)$ ;  $C(-2, -3)$  y  $D(-4, 2)$
3. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos:  $A(1, 5)$ ;  $B(-2, 4)$ ;  $C(-3, -1)$ ;  $D(2, -3)$  y  $D(5, 1)$



## 5. Pendiente de una recta

**Actividad 71.** Resolvamos los siguientes ejercicios

**Actividad para que lo realices en tu casa y fortalecer tus conocimientos.**

1. Calculamos el área del polígono delimitado por los puntos:  $A(2,3); B(5,7); C(-3,4)$
2. Hallamos el área del pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas  $A(-3,-2); B(-2,5); C(2,7); D(5,1); E(2,-4)$
3. Hallamos el área del triángulo cuyas coordenadas de los vértices son:  $A(2,-3); B(4,2); C(-5,-2)$ .

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Se denota con la letra  $m$ .

Si  $m > 0$ , la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje  $OX$  es agudo.

Si  $m < 0$ , la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje  $OX$  es obtuso.

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el semi eje positivo de las abscisas. Deducimos la fórmula de la pendiente:

Teniendo  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  en la misma recta y el ángulo  $\alpha$  de inclinación. Se trazan paralelas desde ambos puntos hacia los ejes y queda expreso el triángulo  $P_1DP_2$ . Posteriormente deducimos:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{DP_2}{P_1D} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

### Ejemplo 5

La pendiente de la recta que pasa por los puntos  $A(2,1)$  y  $B(4,7)$  es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{7 - 1}{4 - 2}$$

$$m = \frac{6}{2}$$

$$m = 3$$

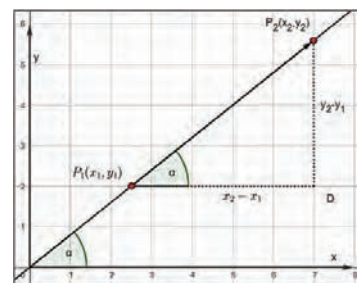
Inclinación:

$$\tan \alpha = m$$

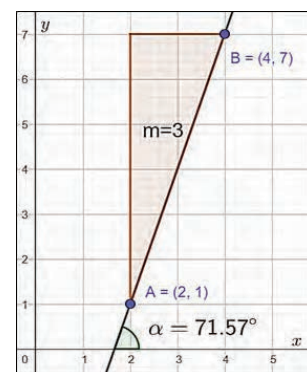
$$\tan \alpha = 3$$

$$\alpha = \tan^{-1}(3)$$

$$\alpha = 71.57^\circ$$



$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



### Actividad 72

Hallamos las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

- 1)  $A(3,4)$   $B(1,-2)$
- 2)  $A(2,4)$   $B(2,-4)$
- 3)  $A(1,3)$   $B(7,1)$
- 4)  $A(3,-2)$   $B(3,5)$
- 5)  $A(6,0)$   $B(6,\sqrt{3})$

Actividad que debes realizar para fortalecer tus conocimientos.

1) Calcular la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos.

2) Calcular si la recta que pasa por los puntos  $A(1,-1)$  y  $B(-1,4)$  es paralela o perpendicular, a la recta que pasa por los puntos  $C(\frac{1}{2}, 1)$  y  $D(0, \frac{1}{4})$

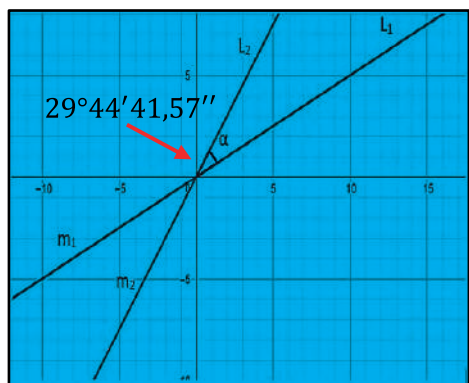
3) Determina si la recta que pasa por los puntos  $A(-2,-11)$  y  $B(0,-3)$  es paralela o perpendicular, a la recta que pasa por los puntos  $C(8,-3)$  y  $D(2, -\frac{3}{2})$

## Ángulo entre dos rectas

El ángulo  $\alpha$  medida entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$  en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la recta  $L_1$  con pendiente  $m_1$  hacia la recta  $L_2$  con pendiente  $m_2$  es:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right)$$

**Ejemplo 6:** Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$  de pendientes



$$m_1 = \frac{1}{2} \text{ y } m_2 = \frac{3}{2}$$

Aplicando la fórmula:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Reemplazando los valores:

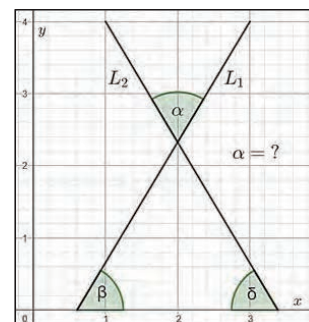
$$\alpha = \arctan \left( \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (\frac{3}{2})(\frac{1}{2})} \right)$$

$$\alpha = \arctan \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} \right)$$

$$\alpha = \arctan \left( \frac{1}{\frac{7}{4}} \right)$$

$$\alpha = \arctan \left( \frac{4}{7} \right)$$

$$\alpha = 29^\circ 44' 41,57''$$



- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , de pendientes  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 3$ .
- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , de pendientes  $m_1 = -\frac{2}{3}$  y  $m_2 = 5$
- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , de pendientes  $m_1 = \frac{3}{2}$  y  $m_2 = \frac{7}{2}$

### Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

#### Paralelismo

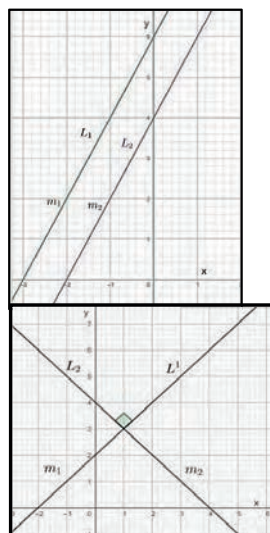
Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$m_1 = m_2$$

#### Perpendicularidad

Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a 1 ó sea

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{ó} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



#### Actividad 73

- 1) Demostramos que las rectas que pasan por los puntos son paralelas:  
 $L_1 = A(2,3); B(5,7)$   
 $L_2 = A(2,2); B(5,6)$
- 2) Demostramos que las rectas que pasan por los puntos son perpendiculares:  $L_1 = A(-1,1); B(1,1)$   
 $L_2 = A(1,0); B(1,4)$



#### ¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

**Actividad 74.** Valoremos la utilidad de la geometría analítica en actividades como la distribución de parcelas, cálculo de áreas de terrenos e inclinación de la pendiente de un techo u otras aplicaciones de la misma.

Para que reflexionemos y analicemos la necesidad e importancia de la geometría analítica en nuestra cotidianidad, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante aprender a resolver problemas relacionados a geometría analítica?
- ¿Cómo podemos aplicar las coordenadas rectangulares para la ubicación de puntos determinados?
- ¿Cómo aplicamos la distancia entre dos puntos para realizar cálculos de distancias inaccesibles?
- En tu cotidianidad ¿aplicas la geometría analítica? Si no lo realizas ¿crees ahora que puedes resolver algunos problemas de la comunidad a través de la aplicación de la geometría analítica?



#### ¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

**Actividad 75.** Construimos con un GEOPLANO que nos ayudara a demostrar de manera gráfica y física la aplicabilidad de la geometría analítica. Para la construcción requerimos el siguiente material. En función a tu creatividad puede aplicar otros materiales para la construcción del geoplano.

#### Material

- Plastoformo de 1m por 1m de 1cm de grosor.
- Cartón prensado de 1m por 1m.
- Papel lustre de color claro par forrar el cartón prensado.
- Pegamento.
- Chinchas con cabeza de colores.
- Marcador grueso de color negro.

#### Construcción

- Forramos el cartón prensado con el papel lustre.
- Pegamos el cartón prensado con el plastoformo.
- Trazamos el sistema de coordenadas rectangulares en la cara forrada del cartón prensado.
- Insertamos los chinchas de color en todos los puntos del cuadrículado.

## LABORATORIO MATEMÁTICO



### ¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

**Actividad 76.** Identifiquemos conocimientos previos sobre la aplicación y uso de las tecnologías en educación, específicamente el celular y la computadora.

Los estudiantes actualmente conocen el uso del celular, pero en varios casos lo utilizan de manera inadecuada, por lo tanto, es importante responder las siguientes preguntas problematizadoras:

- ¿Por qué es importante el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje?
- ¿Qué aplicación conoces, que sean útiles para fortalecer tus conocimientos en el área de matemática?
- ¿Qué tecnologías de información y comunicación utilizas diariamente?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre el computador?
- ¿Qué aplicaciones o softwares relacionados al área de las matemáticas conoces? Menciona.



Descarga las siguientes aplicaciones en tu equipo celular y tu pc:



### ¡CONTINUAMOS CON LA TEORÍA!

Gráfica de funciones trigonométricas con software especializado (GeoGebra, Microsoft Mathematics, Wolfram Mathematica, Matlab).

### Sabías qué...

El creador de GeoGebra Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis de maestría, en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad Atlántica de Florida (2006-2008) y en la actualidad, en la Johannes Kepler Universität, Austria.

## Es la representación gráfica a través de un software educativo

### GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas libre para todas las áreas de las matemáticas escolares, desde prebásica hasta educación superior. Su interfaz es bastante intuitiva.

Para la representación gráfica en el software GeoGebra, inicialmente es importante y necesario conocer las herramientas de interfaz de GeoGebra que está organizado por vistas, componentes, menús y cuadro de diálogos.

### Vistas

Son los espacios donde se va creando la gráfica. Esta organizado por las siguientes vistas: algebraicas, CAS gráfica, gráfica 3D y hoja de cálculo.

### Componentes

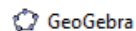
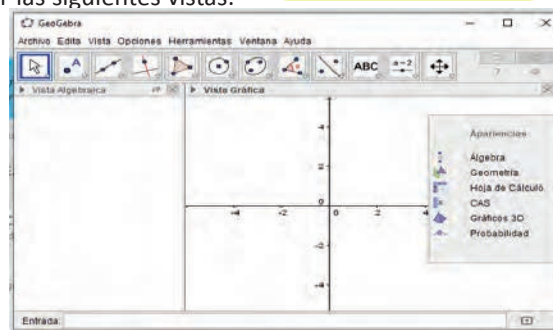
Está compuesto por la barra de menú, barra de herramientas, barra de entrada, menú contextual, barra de navegación y teclado virtual.

### Barra de menú

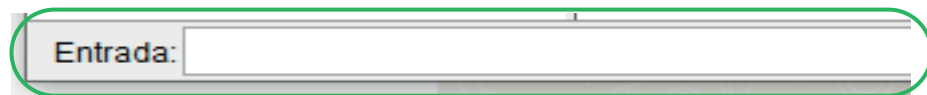
La Barra Lateral que permite seleccionar una de las Perspectivas, puede homologarse a un menú más que, incluso, puede denominarse Menú Apariencias

### Barra de herramientas

Este compuesto por todas las herramientas que son más usuales y en cada uno de los iconos hay otros sub iconos.



Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda



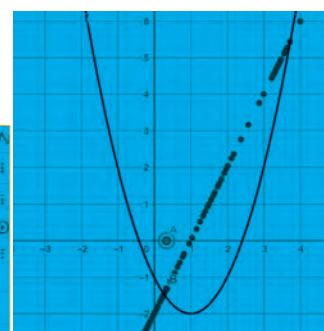
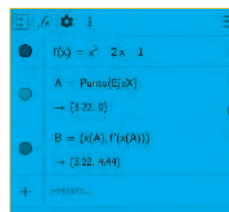
## Gráficas de geometría analítica

### Ejercicio 1: Lugar geométrico

Seleccionar el punto B que depende de otro punto A cuyo lugar geométrico va a trazarse y sobre el cual debe hacerse

clic luego de B. El punto B debe pertenecer a un objeto –ej.: una recta, un segmento, una circunferencia–.

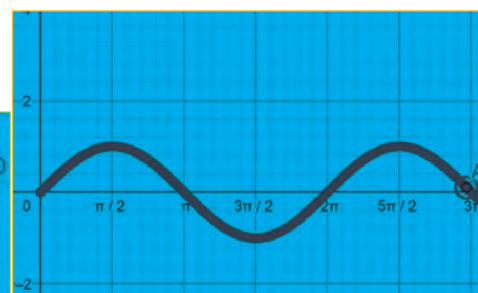
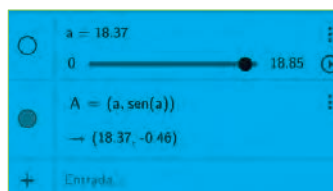
1. Anotar  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  en el Campo de entrada y pulsar la tecla Enter.
2. Ubicar un nuevo punto A en el eje x.
3. Crear un punto B =  $(x(A), f'(x(A)))$  que dependerá del punto A.
4. Clic derecho sobre el punto B, habilitar “mostrar rastro”.
5. Arrastrar con el mouse el punto A sobre el eje x para ver a B desplazarse por el lugar geométrico.



## Gráficas trigonométricas

**Ejercicio 2:** Construcción de la gráfica interactiva de la función seno.

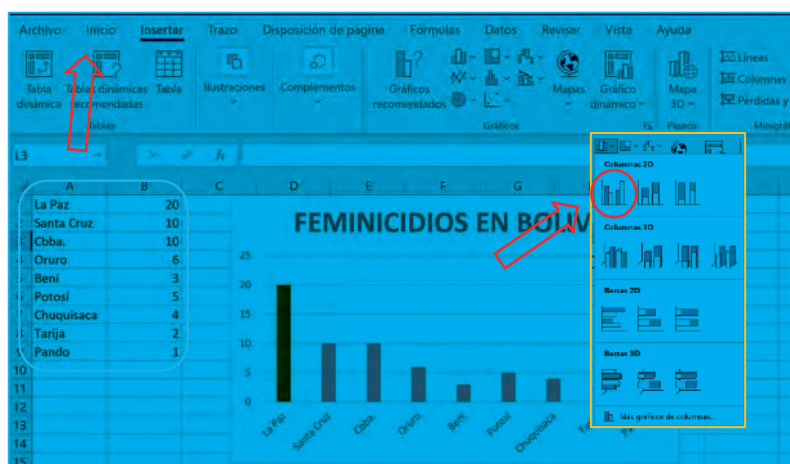
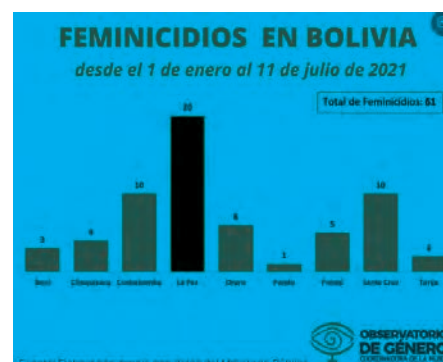
1. Clic derecho sobre el eje x, graduar el eje en radianes.
2. En la barra de entrada presionar “1” y enter. (Esto agregará el deslizador a).
3. Abrimos las propiedades del deslizador para establecer sus parámetros: Mín: 0, Máx:  $6\pi$ , Incremento: 0.01
4. Insertar un punto dependiente de a:  $A = (a, \sin(a))$ .
5. Clic derecho sobre el punto A y activar “mostrar rastro”.
6. Clic en el botón del deslizador para iniciar la animación.



## Gráficas de estadística

**Ejercicio 3:** Según datos del Ministerio Público, durante el primer semestre del 2021, se registraron 61 feminicidios. La gráfica muestra los datos por departamento.

- Insertamos los nombres de cada departamento en la columna A.
- En la columna B, insertamos las cantidades según departamento de acuerdo al gráfico.
- Seleccionamos los datos de ambas columnas. Con los datos seleccionados, vamos a la pestaña INSERTAR.
- Seleccionamos insertar gráfico de barras.



## Taller del pensamiento lógico matemático

El pensamiento lógico matemático es una de las habilidades más relevantes en la educación, pues ha venido adquiriendo interés en relación con el crecimiento exponencial de la tecnología.

Hoy queremos compartir contigo las razones más importantes por las que debemos fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico matemático, así como algunas estrategias que podrás aplicar en el aula.



La vida es matemática, considera que todas nuestras acciones y decisiones diarias consisten en una “sutil configuración de patrones matemáticos”, los cuales nos permiten explicar cómo se conduce el mundo a través de cálculos estadísticos, probabilidades o leyes de la lógica que, sin que darnos cuenta, rigen nuestras decisiones diarias.

Técnicamente, utilizamos el razonamiento lógico matemático todo el día: cuando calculamos el tiempo para llegar al colegio, o cuando hacemos cálculos para comprar algo; todo el día estamos razonando situaciones que requieren aplicar las matemáticas.

## Ajedrez V

El Ajedrez es sin duda el deporte ciencia que puede practicarse desde cualquier edad, con las experiencias cotidianas que suceden, a veces es necesario realizar un análisis de cada situación para tomar las mejores decisiones, seguramente encontraras un sin fin de opciones para practicar este deporte, te presentamos una página en la que podrás encontrar todos los detalles para que seas un ajedrecista destacado.

### Ejercicios de razonamiento (combinaciones y mates)

En ajedrez es importante la resolución de ejercicios y problemas de razonamiento, empezaremos resolviendo los siguientes mates:

Mate en 1



Escanea el QR



Ingresa al Qr para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades



Escanea el QR



Ingresa al Qr para aprender las nociones básicas de ajedrez



Escanea el QR



Ingresa al Qr para resolver problemas de razonamiento



¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

### Actividad 77. Momento de reflexionar.

Es importante valorar la aplicabilidad de los programas de GeoGebra y Excel, para realizar la representación gráfica de las funciones trigonométricas y la demostración gráfica de problemas matemáticos, como así también debemos realizar un análisis y reflexión de la importancia del uso correcto de los celulares y computadoras para fortalecer la formación integral y holística.

Por tanto, respondamos reflexivamente las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo podemos aplicar GeoGebra y Excel, en otras áreas de saberes y conocimiento?
- ¿Qué gráficas te parecen más importantes e interesantes para crearlos en GeoGebra?
- ¿Consideras que es importante la aplicación y uso de los teléfonos inteligentes como los ordenadores en la educación? ¿Por qué?
- ¿Cuánto tiempo por día utilizas tu celular para interactuar con otras personas a través de las redes sociales? ¿consideras que favorece a tu formación integral el tiempo exagerado en las redes sociales?



¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

### Actividad 78

- A través de GeoGebra graficamos el campo deportivo de la comunidad, con las medidas reglamentarias, posteriormente analizamos la representación matemática o ecuaciones de cada uno de las figuras trazadas.
- En una hoja de cálculo, elabora un diagrama de barras con la cantidad de personas por domicilio de tu manzano, zona o comunidad.







ESTADO PLURINACIONAL DE  
**BOLIVIA**

MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN



[www.minedu.gob.bo](http://www.minedu.gob.bo)



[@minedubol](https://www.facebook.com/minedubol)



[@minedubol](https://twitter.com/minedubol)



[@minedu\\_bol](https://www.instagram.com/minedu_bol)



Ministerio de Educación - Oficial



MinEduBol



[informacion@minedu.gob.bo](mailto:informacion@minedu.gob.bo)



(591) 71550970 - 71530671



[@minedu\\_bolivia](https://www.tiktok.com/@minedu_bolivia)