



ÁREA:

MATEMÁTICA



2^{do}

AÑO DE ESCOLARIDAD

CAMPO: CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN



ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

© De la presente edición

Texto de aprendizaje. 2do año de escolaridad. Educación Secundaria
Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular.

Texto oficial 2024

Edgar Pary Chambí

Ministro de Educación

Manuel Eudal Tejerina del Castillo

Viceministro de Educación Regular

Delia Yucra Rodas

Directora General de Educación Secundaria

DIRECCIÓN EDITORIAL

Olga Marlene Tapia Gutiérrez

Directora General de Educación Primaria

Delia Yucra Rodas

Directora General de Educación Secundaria

Waldo Luis Marca Barrientos

Coordinador del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

COORDINACIÓN GENERAL

Equipo Técnico de la Dirección General de Educación Secundaria

Equipo Técnico del Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

REDACTORES

Equipo de maestras y maestros de Educación Secundaria

REVISIÓN TÉCNICA

Unidad de Educación Género Generacional

Unidad de Políticas de Intraculturalidades Interculturalidades y Plurilingüismo

Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros

Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

ILUSTRACIÓN:

Franz Javier Del Carpio Sempértegui

DIAGRAMACIÓN:

Freddy Edgar Machaca Mamani

Depósito legal:

4-1-25-2024 P.O.

Cómo citar este documento:

Ministerio de Educación (2024). Texto de aprendizaje. 2do año de escolaridad. Educación
Secundaria Comunitaria Productiva. Subsistema de Educación Regular. La Paz, Bolivia.

Av. Arce, Nro. 2147 www.minedu.gob.bo

LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA

ÍNDICE

Presentación.....	5
MATEMÁTICA.....	57
Primer trimestre	
Los números racionales y sus aplicaciones	58
Conjunto de los números irracionales	64
El conjunto de los números reales.....	70
Álgebra y sus términos	74
El Álgebra y su relación con las actividades.....	80
Segundo trimestre	
Operaciones con expresiones algebraicas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología	90
Ecuaciones de primer grado	104
Ecuaciones de primer grado en la comunidad	116
Tercer trimestre	
Introducción a la trigonometría	118
Introducción a la trigonometría y su aplicación en el cálculo de distancias.....	124
Las formas en el espacio tridimensional y los recursos tecnológicos	132



PRESENTACIÓN

Con el inicio de una nueva gestión educativa, reiteramos nuestro compromiso con el Estado Plurinacional de Bolivia de brindar una educación de excelencia para todas y todos los bolivianos a través de los diferentes niveles y ámbitos del Sistema Educativo Plurinacional (SEP). Creemos firmemente que la educación es la herramienta más eficaz para construir una sociedad más justa, equitativa y próspera.

En este contexto, el Ministerio de Educación ofrece a estudiantes, maestras y maestros, una nueva edición revisada y actualizada de los TEXTOS DE APRENDIZAJE para los niveles de Educación Inicial en Familia Comunitaria, Educación Primaria Comunitaria Vocacional y Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Estos textos presentan contenidos y actividades organizados secuencialmente, de acuerdo con los Planes y Programas establecidos para cada nivel educativo. Las actividades propuestas emergen de las experiencias concretas de docentes que han desarrollado su labor pedagógica en el aula.

Por otro lado, el contenido de estos textos debe considerarse como un elemento dinamizador del aprendizaje, que siempre puede ampliarse, profundizarse y contextualizarse desde la experiencia y la realidad de cada contexto cultural, social y educativo. De la misma manera, tanto el contenido como las actividades propuestas deben entenderse como medios canalizadores del diálogo y la reflexión de los aprendizajes con el fin de desarrollar y fortalecer la conciencia crítica para saber por qué y para qué aprendemos. Así también, ambos elementos abordan problemáticas sociales actuales que propician el fortalecimiento de valores que forjan una personalidad estable, con autoestima y empatía, tan importantes en estos tiempos.

Por lo tanto, los textos de aprendizaje contienen diversas actividades organizadas en áreas que abarcan cuatro campos de saberes y conocimientos curriculares que orientan implícitamente la organización de contenidos y actividades: Vida-Tierra-Territorio, Ciencia-Tecnología y Producción, Comunidad y Sociedad, y Cosmos y Pensamientos.

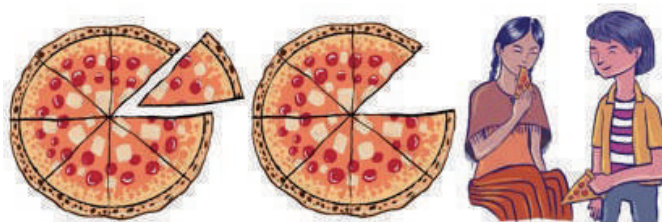
En consecuencia, el Ministerio de Educación proporciona estos materiales para que docentes y estudiantes los utilicen en sus diversas experiencias educativas. Recordemos que el principio del conocimiento surge de nuestra voluntad de aprender y explorar nuevos aprendizajes para reflexionar sobre ellos en beneficio de nuestra vida cotidiana.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

PRÁCTICA

Dos amigas pidieron una pizza a domicilio para ellas y sus amigos, la pizza llegó antes que sus amigos y las dos decidieron dividirla. Ambas prueban una parte de la pizza antes que lleguen sus amigos.



Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en base a la imagen:

- ¿En cuántas partes está dividida la pizza?
- ¿Cuántas partes hay en total?
- ¿Qué parte de la pizza comieron las dos amigas?

TEORÍA

IMPORTANTE

$\frac{a}{b}$
 a → numerador
 b → denominador

La lectura de los números fraccionarios es:

- $\frac{1}{2}$ se lee; un medio
- $\frac{1}{3}$ se lee; un tercio
- $\frac{3}{5}$ se lee; tres quintos
- $4\frac{6}{7}$ se lee; cuatro enteros y seis séptimos
- $\frac{4}{9}$ se lee; cuatro novenos
- $\frac{1}{10}$ se lee; un décimo
- $\frac{7}{23}$ se lee; siete veintitresavos
- $\frac{9}{13}$ se lee; nueve treceavos

Se llama número racional (fracción) a todo par de números enteros, **a** y **b**, denotados por $\frac{a}{b}$, en la que **a** es el numerador y **b** el denominador, **b** distinto de cero. De este modo, el conjunto de los números racionales es:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

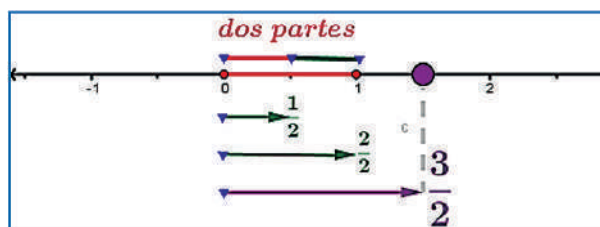
Ejemplo:

9 es racional porque: $9 = \frac{9}{1}$

Las fracciones se pueden reducir encontrando otras equivalentes:

$\frac{1}{2}$ es el equivalente a $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \dots$ $-\frac{2}{5}$ es el equivalente a $-\frac{4}{10} = -\frac{6}{15} = -\frac{8}{20} \dots$

La representación en la recta numérica puede ser comprendida así:



1. Operaciones con números racionales

Suma o resta con igual denominador (homogéneas)

La suma se realiza sumando los numeradores y colocando el mismo denominador de las fracciones.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{1+7}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3-2}{7} = \frac{1}{7}$$

Suma o resta con distinto denominador (heterogéneas)

La suma se realiza reduciendo las fracciones a común denominador.

El común denominador se los divide con cada uno de los denominadores y se multiplica por el numerador respectivo, luego se suma o resta en el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{25} = \frac{1 \cdot 25 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 25} = \frac{25 + 15}{125} = \frac{40}{125} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{12} = \frac{18 + 4 - 3}{12} = \frac{19}{12} \text{ o } 1 \frac{7}{12}$$

Multiplicación

La multiplicación se procede multiplicando numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{(-3) \cdot 2 \cdot 4}{5 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-24}{75} = -\frac{8}{25}$$

$$3\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{2} = \frac{13}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$$

En este caso, se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa la multiplicación.

División

En la división, el numerador se calcula multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, el denominador se calcula multiplicando el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Ejemplo:

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$$

$$4\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4} = \frac{22}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{22 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{88}{35} = 2\frac{18}{35}$$

En este caso, se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa la división.

SUMA O RESTA

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

RECUERDA

Mixto

$$4\frac{1}{3}; \frac{3 \cdot 4 + 1}{3} = \frac{13}{3}$$

Fracción propia

$$\frac{5}{9}; 5 < 9$$

Fracción impropia

$$\frac{7}{3}; 7 > 3$$

MULTIPLICACIÓN

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

DIVISIÓN

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejercicios de aplicación que debemos resolver:

- Para preparar una torta se utilizan los siguientes ingredientes: $1\frac{1}{2} \text{ kg}$ de harina, $\frac{1}{2} \text{ kg}$ de huevo, una taza de leche equivalente a $\frac{1}{4} \text{ kg}$ y azúcar $\frac{5}{8} \text{ kg}$. ¿Cuántos kilogramos pesan todos los ingredientes?
- Una calle tiene longitud de $2\frac{2}{5}$ y la otra $1\frac{3}{4}$ kilómetros. ¿Cuál es la longitud total?
- Se receta la siguiente dieta mensual para el consumo de carne, primera semana $\frac{1}{4} \text{ kg}$, segunda $\frac{3}{8} \text{ kg}$, tercera $\frac{7}{16} \text{ kg}$ y la última semana $\frac{1}{2} \text{ kg}$. ¿Cuántos kilos se debe consumir al mes?
- De una bolsa de azúcar de 1 kg se extrae una porción de $\frac{3}{8} \text{ kg}$. ¿Cuánta azúcar queda en la bolsa?

NOTA

$$0,\hat{7} = 0,777 \dots$$

$$0,8\hat{3} = 0,8333 \dots$$

EJERCICIO

Convierte a número decimal.

- 1) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{5}{4}$ 7) $3\frac{6}{25}$ 10) $2\frac{7}{8}$
 2) $\frac{3}{5}$ 5) $\frac{5}{8}$ 8) $7\frac{5}{18}$ 11) $4\frac{7}{30}$
 3) $\frac{1}{5}$ 6) $1\frac{4}{5}$ 9) $5\frac{11}{30}$ 12) $3\frac{5}{11}$

2. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Expresión decimal a un número racional

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \text{ Se procede la división: } \begin{array}{r} 30 \\ 20 \overline{) 4} \\ \underline{20} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 2 \end{array} ; \frac{3}{4} = 0,75 \text{ es un decimal exacto}$$

$$\frac{7}{9} \text{ Se procede la división: } \begin{array}{r} 70 \\ 70 \overline{) 9} \\ \underline{70} \\ 0 \end{array} ; \frac{7}{9} = 0,777 \dots = 0,\hat{7} \text{ decimal periódico puro}$$

$$\frac{5}{6} \text{ Se procede la división: } \begin{array}{r} 50 \\ 20 \overline{) 6} \\ \underline{40} \\ 10 \\ \underline{12} \\ -2 \end{array} ; \frac{5}{6} = 0,833 \dots = 0,8\hat{3} \text{ decimal periódico mixto}$$

Números decimales exactos y periódicos

Ejemplos:

Decimales exactos

$$1) 1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \quad 2) 0,16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25} \quad 3) 3,125 = \frac{3125}{1000} = \frac{25}{8}$$

Ejemplos:

En el numerador se escribe el número sin la coma decimal y se resta el número sin el periodo.

En el denominador se escribe el nueve por el periodo respectivo y ceros por la parte no periódica.

$$1) 0,555 \dots = 0,\hat{5} = \frac{5 - 0}{9} = \frac{5}{9}$$

$$2) 2,515151 \dots = 2,\hat{51} = \frac{251 - 2}{99} = \frac{249}{99} = \frac{83}{33}$$

$$3) 0,3555 \dots = 0,3\hat{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

$$4) 1,243535 \dots = 1,24\hat{35} = \frac{12435 - 124}{9900} = \frac{12311}{9900}$$

Operaciones combinadas

Para las operaciones combinadas lo primero es resolver la operación dentro del paréntesis o corchetes, después la multiplicación o división, finalmente la suma o resta.

NOTA

$$0,888 \dots = 0,\hat{8}$$

$$0,5333 \dots = 0,5\hat{3}$$

$$2,4313131 \dots = 2,4\hat{31}$$

EJERCICIO

Convierte a fracción común.

- 1) $0,\hat{8}$ 4) $5,\hat{19}$
 2) $1,\hat{2}$ 5) $4,\hat{21}$
 3) $0,\hat{18}$ 6) $3,12\hat{14}$

Ejercicio de aplicación que debemos resolver:

- La población estudiantil de la unidad educativa aumentó $\frac{1}{4}$ con respecto al año pasado, que eran 600 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes hay este año?

Ejemplo:

Realiza la operación:

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{4}\right)\right]$$

Solución

Opera primero lo que está dentro del paréntesis o corchete.

$$\left(\frac{2-3}{6}\right) - \left[\left(\frac{3-6}{4}\right) - \left(\frac{8-1}{4}\right)\right]$$

$$\left(\frac{-1}{6}\right) - \left[\left(\frac{-3}{4}\right) - \left(\frac{7}{4}\right)\right]$$

$$\left(\frac{-1}{6}\right) - \left[\frac{-3-7}{4}\right]$$

$$\frac{-1}{6} - \frac{-10}{4} = \frac{-4+60}{24} = \frac{56}{24} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

Ejemplo:

Efectúa la siguiente operación.

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

Solución

Lo que encierran los paréntesis se efectúa en primera instancia, luego el resultado se multiplica por la cantidad que está afuera del paréntesis y se simplifica para realizar la suma y obtener el resultado.

$$2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3}{6}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{6}\right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{10-9}{6}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3+2}{6}\right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{2}{6} + \frac{20}{6}$$

$$\frac{22}{6} = \boxed{\frac{11}{3}} \text{ o } \boxed{3\frac{2}{3}}$$

Ejemplo:

Cuál es el resultado de la siguiente expresión.

$$\left(1\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\right)$$

Solución

Primero se realiza la resta que está dentro del paréntesis y después la división.

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{8-5}{6}\right) \div \left(\frac{3-6}{8}\right)$$

$$\frac{3}{6} \div \frac{-3}{8} = \frac{24}{-18} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

SIGNOS DE LA MULTIPLICACIÓN

$$(+) \cdot (+) = +$$

$$(+) \cdot (-) = -$$

$$(-) \cdot (+) = -$$

$$(-) \cdot (-) = +$$

SIGNOS DE LA DIVISIÓN

$$(+) \div (+) = +$$

$$(+) \div (-) = -$$

$$(-) \div (+) = -$$

$$(-) \div (-) = +$$

EJERCICIO

Realiza las operaciones

$$1) \frac{3}{4} \cdot (2) - \frac{5}{8} \cdot (4)$$

$$2) \frac{3}{8} \cdot (8-6) - \frac{5}{16} \cdot (6-2)$$

$$3) \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(3 - 2\frac{1}{2}\right)$$

$$4) \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

$$5) \left(1\frac{1}{9}\right) \div \left(4 - 2\frac{2}{3}\right)$$

NOTA

$$(-1)^{par} = +$$

$$(-1)^{impar} = -$$

IMPORTANTE

Propiedades de la potencia.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Propiedades de la potencia.

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Propiedades de la radicación.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \div \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a}{b}}$$

Potencias y raíces de fracciones racionales

La potencia de un número racional es la multiplicación reiterada.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo:

Efectúa la siguiente potencia.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

A continuación, se citan propiedades de la potencia de fracciones.

Propiedades	Fórmula	Ejemplo
Distributiva de una Potencia	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$ $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{1}{5}\right)^3$
Producto de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$
Cociente de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{5-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
Potencia de una potencia	$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$	$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \cdot 4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$

Ejemplo:

Extraer la raíz cuadrada.

$$\sqrt[3]{-\frac{125}{64}} = -\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = -\frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{-5}{4}$$

Ejemplo:

Simplificar.

$$\left(\sqrt{0,25} + \sqrt{0,04} - \sqrt{0,09}\right)^{-1}$$

$$\left(\sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{\frac{4}{100}} - \sqrt{\frac{9}{100}}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{5+2-3}{10}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$$

Resolvemos los siguientes ejercicios combinados:

a) $\frac{\sqrt{2^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} + \frac{3}{2}}} - \frac{2}{3}$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2^{-1} - \sqrt[3]{-27} - 0,8\right]^{-1}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{27} \cdot 3^3} - \sqrt{\frac{9}{4} \cdot (-6)^2}$

3. Problemas. Números racionales aplicados al contexto y la tecnología

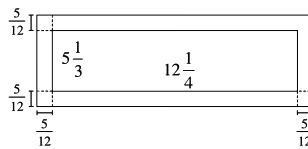
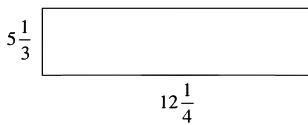
Actualmente, la aplicación de los números racionales se lo utiliza diariamente, al momento de cocinar, la cual necesita seguir una receta en la que aparece fracciones, por ejemplo: $\frac{1}{4}$ parte de leche evaporada, $\frac{1}{3}$ de hielo molido.

Las aplicaciones cotidianas están siempre presentes como la hora, al señalar $\frac{1}{4}$ de hora.

Ejemplo:

Una fotografía mide $5\frac{1}{3}$ pulgadas de ancho por $12\frac{1}{4}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{5}{12}$ pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Solución



Las dimensiones son:

$$5\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right) = \frac{16}{3} + \frac{10}{12} = \frac{16}{3} + \frac{5}{6} = \frac{32+5}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}$$

$$12\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right) = \frac{49}{4} + \frac{10}{12} = \frac{49}{4} + \frac{5}{6} = \frac{147+10}{12} = \frac{157}{12} = 13\frac{1}{12}$$

EJERCICIO

Realiza las operaciones:

1. Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{2}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?
2. Carlos divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de renta y servicios y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Carlos percibe en un mes Bs 12000, ¿cuánto dinero designa a cada rubro?

VALORACIÓN

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué son importantes los números racionales?
- ¿En qué consideras que puedes aplicar lo aprendido sobre los números racionales?
- ¿En qué situaciones de la cotidianidad se aplica los números racionales?
- ¿Cómo los números racionales ha permitido el desarrollo de la ciencia y la tecnología?

PRODUCCIÓN

De la siguiente imagen, realizamos la copia a una escala recomendable.



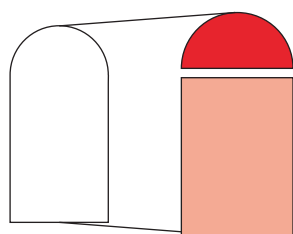
- Recortamos cada figura copiada en las partes que señala.
- Con las imágenes recortadas en todas sus partes, realizamos y explicamos las operaciones que se puede realizar de manera analítica y práctica.
- Qué tipos de fracciones se puede encontrar con cada imagen recortada.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

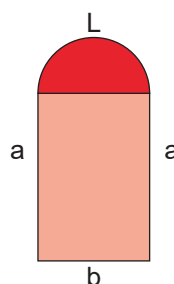
PRÁCTICA

En la naturaleza y las edificaciones realizadas a lo largo de la historia, se puede observar la aplicación de formas geométricas, es decir, algunas edificaciones arquitectónicas, como se observa en la imagen. Se puede identificar el uso de patrones geométricos que, para encontrar la longitud de los espacios geométricos, se debe utilizar fórmulas ya conocidas y otras que se identificarán en el presente contenido.

En la puerta principal de la catedral encontramos dos figuras geométricas; un rectángulo y una semicircunferencia.



Para encontrar la longitud (perímetro) de la puerta principal se aplica el siguiente procedimiento:



Para encontrar la longitud se suma los valores de **a**, **b**, **a** y **L**.

Sin embargo, para encontrar el valor de **L** se utiliza la siguiente fórmula:

$$L = \frac{2\pi R}{2}$$

Actividad

Respondemos las siguientes preguntas en base a la imagen:

- En la fórmula para encontrar la longitud de la semicircunferencia, se utiliza el número π . ¿Por qué se utiliza el π en las formas circulares?
- ¿Por qué, el número π no se puede representar como una fracción?
- ¿Cuál es el origen del número π ?

TEORÍA

NÚMERO RACIONAL

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

NÚMERO IRRACIONAL

En los números irracionales, el decimal es infinito, pero no periódico (ninguna serie de números se repite con frecuencias)

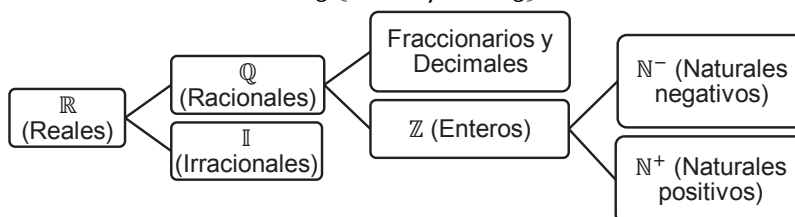
1. Los números irracionales y su clasificación

Los números irracionales no se pueden expresar como fracción, contiene elementos numéricos que se expresan como decimales infinitos no periódicos.

- $\pi = 3,1415926$
- $e = 2,71828$
- $\sqrt{2} = 1,41421356$

Se debe notar que es difícil expresar los números irracionales como fracción y que sus cifras decimales no son periódicos. Al conjunto de los números irracionales se denota con $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \{x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Q}\}$$



Actividad

- Identificamos los números irracionales: $\sqrt{2}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{7}$; 1,61803398874; 0,6666...; 2,5
- Localizamos en la recta numérica: a) 0,25 b) $-\frac{3}{2}$ c) -0,75 d) 2,16 e) 0,3 f) 0,5

Ejemplo: Utiliza la escuadra para construir el segmento de longitud $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

- Se tiene el segmento $\overline{AB}$ cualquiera, el segmento tendrá la unidad de medida.
- La perpendicular del punto A, con segmento $\overline{AC}$ de longitud 1.
- Se une el punto C y B, por el Teorema de Pitágoras, el segmento $\overline{CB}$ tiene longitud $\sqrt{2}$.
- El segmento $(\overline{CD})$ perpendicular a $\overline{CB}$ de longitud 1.
Se une los puntos B y D, se obtiene el triángulo BCD de longitudes 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente. La Hipotenusa el segmento $\overline{DB}$ es $\sqrt{3}$.

Los números irracionales se clasifican en irracionales algebraicos y trascendentes:

Irracionales algebraicos

Son el conjunto de un número algebraico con raíces “n-ésimas” de una ecuación polinómica de cualquier grado y con coeficiente real, no puede ser expresado como una fracción.

Ejemplo:

La ecuación $x^2 - 2 = 0$, despejando $x = \sqrt{2}$.
Otras expresiones; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt{3}$

Irracionales trascendentes

No son un polinomio, no se expresa como solución de raíces, el conjunto de los irracionales trascendentes es: logarítmicas, trigonométricas y exponenciales.

Ejemplo:

$e = 2,71828$

El **Teorema de Pitágoras**, es el primer número irracional que surge en la historia y se define como: “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

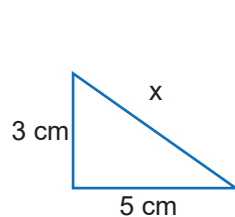
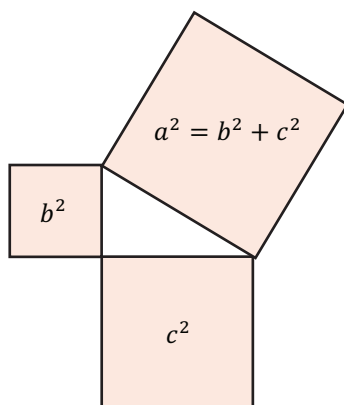
De la fórmula se tiene las siguientes relaciones

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Hipotenusa Cateto Cateto

Ejemplo: Halle el valor de “X” en los siguientes triángulos.



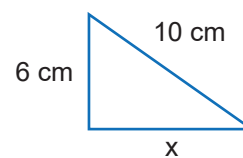
$$x^2 = b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$x = \sqrt{3^2 + 5^2}$$

$$x = \sqrt{9 + 25}$$

$$x = \sqrt{34} \text{ cm}$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2}$$

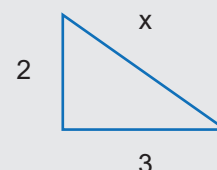
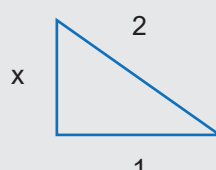
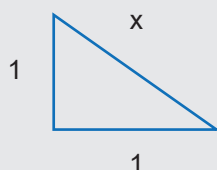
$$x = \sqrt{100 - 36}$$

$$x = \sqrt{64}$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

Actividad

- A partir del ejemplo anterior, determinamos el valor de “x” de los triángulos rectángulos y observamos el resultado.



DATOS CURIOSOS SOBRE EL NÚMERO IRRACIONAL

Razón de oro o número áureo.

$$\varphi = 1,61803398874 \dots$$

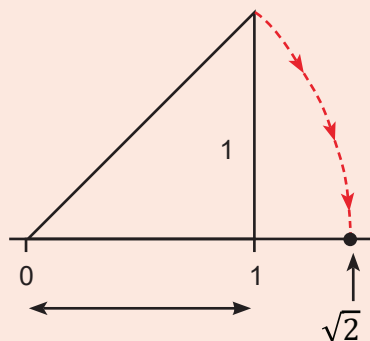
Si a es racional y b es irracional, entonces la suma $a + b$ es irracional.

Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional, su producto $a \cdot b$ es irracional

CARACTERÍSTICAS DE $\mathbb{Q}^c$

- Son infinitos
- Son ordenados
- Existe entre dos números irracionales infinita cantidad de otros números.

GRÁFICA DE LA RAÍZ CUADRADA DE 2



2. Operaciones con números irracionales

Se puede realizar operación de suma, resta, división y multiplicación.

Suma y resta de los números irracionales

Para la suma o resta se aplica la regla básica de los radicales semejantes.

Ejemplo:

$7\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; $-3\sqrt{3}$ tienen el mismo índice y el radicando.

$= (7 + 3 - 3)\sqrt{3}$ se suman los coeficientes y se escribe el radical semejante.

$= 7\sqrt{3}$ el resultado es un número irracional.

Multiplicación y división de los números irracionales

Se aplica la propiedad de radicales para raíces de igual o diferente índice.

Ejemplo:

Multiplicar la siguiente expresión.

$$3\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{15} = (3 \cdot 4)\sqrt{7 \cdot 15} = 12\sqrt{105}$$

Ejemplo:

Dividir la siguiente expresión.

$$4\sqrt{10} \div 8\sqrt{5} = \left(\frac{4}{8}\right)\sqrt{\frac{10}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

El **inverso aditivo** de un número irracional será siempre otro número irracional.

Ejemplo:

$$a) -b + b = 0 \quad b) \pi + (-\pi) = 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2} \text{ y su inverso } -\sqrt{2}, \text{ la suma es: } \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

El **inverso multiplicativo** de un número irracional será siempre otro número irracional.

Ejemplo:

$$\pi \text{ y su inverso } \frac{1}{\pi}, \text{ entonces } \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$$

Ejemplo:

$$\sqrt{3} \text{ y su inverso } \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ el producto es: } \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

- Resolvemos los ejercicios de los números irracionales a) $\sqrt{17} - 2\sqrt{4}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $\frac{7}{9} + \sqrt{3}$ d) $\frac{1}{3} \cdot \pi$
- Determinamos cuáles son números irracionales a) $\sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[5]{775}$ c) 0 d) $\sqrt{64}$ e) 4,9999 f) $\sqrt{15}$ g) $\sqrt[6]{64}$ h) $-\sqrt{10}$ i) $-5\sqrt{2}$

3. Racionalización

Es una operación que elimina raíces en el numerador o el denominador, se lo representa con una raíz equivalente.

Para la operación de racionalización se multiplica el numerador y el denominador por un factor que permita eliminar la raíz o raíces.

Racionalización del denominador

Ejemplo:

Racionalice el denominador de $\frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3}$ el numerador como el denominador

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Ejemplo:

Racionalice el denominador de $\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}$
 $\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}$ se multiplica por $\sqrt{2}$ el numerador como el denominador

$$\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{4\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{12}}{4 \cdot 2} = \boxed{\frac{\sqrt{12}}{8}}$$

Ejemplo:

Racionalice la siguiente expresión $\frac{2}{3\sqrt[5]{49}}$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{49}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{7^2}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{2\sqrt[5]{7^3}}{3\sqrt[5]{7^5}} = \frac{2\sqrt[5]{7^3}}{3 \cdot 7} = \boxed{\frac{2\sqrt[5]{7^3}}{21}}$$

Ejemplo:

Racionalice la siguiente expresión $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+3\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{3+2\sqrt{2}}{1+3\sqrt{3}} &= \frac{(3+2\sqrt{2}) \cdot (1-3\sqrt{3})}{(1+3\sqrt{3}) \cdot (1-3\sqrt{3})} \\ &= \frac{3 \cdot 1 - 3 \cdot 3\sqrt{3} + 1 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 3(\sqrt{3})^2}{1^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{3 - 9\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 6 \cdot 3}{1 - 9 \cdot 3} \\ &= \frac{3 - 9\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 18}{1 - 27} = \frac{-15 - 7\sqrt{3}}{-26} = \boxed{\frac{15 + 7\sqrt{3}}{26}} \end{aligned}$$

RACIONALIZAR

Racionalización del denominador

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}$$

Un binomio irracional cuadrático.

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$$

Se utiliza la diferencia de cuadrados.

$$(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$$

Racionalización de un numerador

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c} = \frac{a}{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

AVERIGUA UN POCO

¿Cómo racionalizar cuando el denominador es un binomio?

¿Cómo racionalizar cuando el denominador es un trinomio?

- Racionalizamos los denominadores:

a) $\frac{10}{\sqrt{20}}$ b) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ d) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{5-\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}}$ g) $\frac{15}{4\sqrt{3}}$ h) $\frac{5}{3+\sqrt{7}}$

NÚMEROS

Números reales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots - \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

Números irracionales

$$\mathbb{I} = \{\dots - \sqrt{3}, \dots \sqrt{2}, \dots \pi, \dots \varphi, \dots\}$$

Adición

Sean a y b números reales, entonces $a + b$ es la suma.

Sustracción

Sean a y b números reales, $a - b$ se define como la resta.

$$a - b = a + (-b)$$

Racionalización del numerador

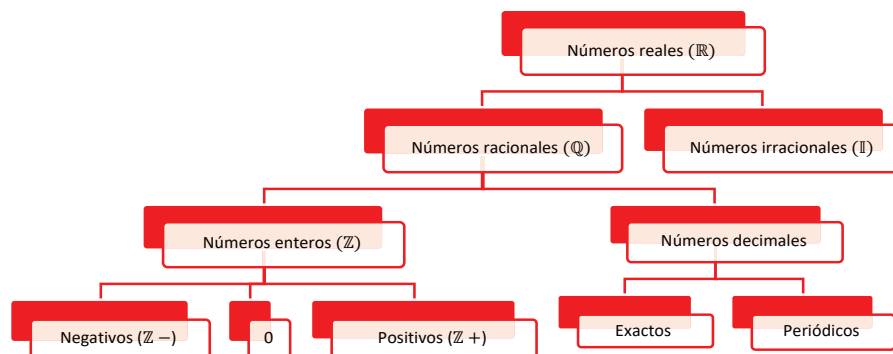
Ejemplo: Racionalice la siguiente expresión $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$

Solución

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1)^2 - (\sqrt{3})^2}{3(1 - \sqrt{3})} = \frac{-2}{3 - 3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3} - 3}}$$

4. Los números reales y su relación de orden

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ conforman el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$.



Los números reales se representan en la recta numérica.



Lectura y escritura

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

La lectura se lo realiza de derecha a izquierda.

Ejemplo: 62 428 253 se lee.

Millones			Millares			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
	6	2	4	2	8	2	5	3

Se lee "sesenta y dos millones cuatrocientos veintiocho mil doscientos cincuenta y tres".

EJERCICIOS

Escribimos en forma numérica

- Dieciocho mil.
- Setecientos mil doscientos cuarenta y tres.
- Ciento dieciséis millones, trescientos cuarenta y seis mil quinientos veinticuatro.

En el conjunto de los números reales se define la operación de la adición y después la sustracción.

5. Propiedades de los números reales

5.1. Propiedades de la adición de números reales

Propiedad	Simbología	Ejemplo
Conmutativa	$a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$1 + 0 = 1$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$6 + (-6) = 0$

5.2. Propiedades de la multiplicación de números reales

Propiedad	Simbología	Ejemplo
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$
Elemento neutro	$a \cdot 1 = a$	$7 \cdot 1 = 7$
Inverso	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$3 \cdot (2 + 9) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 9$
Producto con 0	$a \cdot 0 = 0$ $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$	$4 \cdot 0 = 0$

PROPIEDADES DE LA POTENCIA

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$1^n = 1$$

$$n^1 = n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

La importancia de los radicales en la vida cotidiana

Los ingenieros civiles utilizan las ecuaciones con radicales para realizar las edificaciones en superficies cuadradas, estos profesionales utilizan las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado en la construcción de infraestructuras y para ello se valen de los radicales, tomando en cuenta la infinidad de utilidades y aplicaciones de los números racionales e irracionales, responde las siguientes preguntas:

- En tu opinión ¿Qué utilidad tienen los números irracionales?
- ¿Qué relación hay entre los números fraccionarios y decimales?
- ¿Cómo crees que sería la vida sin la aplicación de los números racionales e irracionales?



Actividad

- Realizamos el cálculo de la superficie de un mantel cuadrado para cubrir una mesa cilíndrica, la mesa tiene un diámetro de 2 m y su altura es de 1 m, ¿cuáles son las medidas del mantel, de tal modo que sirva para cubrir la mesa y toque ligeramente el piso?



EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

PRÁCTICA

Los números reales son parte del diario vivir que se tiene y se utiliza para realizar diferentes tipos de cálculo de manera inconsciente o consciente de ello. Sin embargo, algo que utilizamos a diario es la consulta de la hora o la fecha, en tal sentido, la aplicación que se da es el “orden”, por ejemplo, 1,2,3,4 o como el calendario, que establece criterios de tiempo y días.

La semana.

DOM 20	LUN 21	MAR 22	MIÉ 23	JUE 24	VIE 25	SÁB 26

Actividad

En base a la lectura, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el calendario está distribuido en días y semanas?
- ¿Qué piensas de la aplicación de los números?
- ¿Crees que es necesario conocer los números reales?

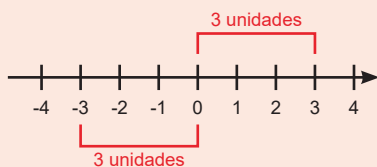
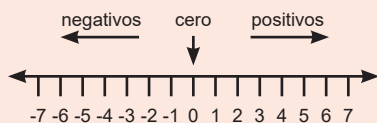
TEORÍA

RECUERDA

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \left(\frac{b}{a} \right)$$

LA RECTA REAL



1. Operaciones con los números reales

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) \\ & -\left(\frac{1+3}{2}\right) + \left(\frac{3-10}{15}\right) = -\left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{-7}{15}\right) = -2 - \frac{7}{15} = \frac{-30-7}{15} = \boxed{-\frac{37}{15}} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Realizamos las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} + \frac{4}{10}\right)^{-1} \\ & \left(\frac{4+6+3}{12}\right) - \left(\frac{15-4+4}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{12}\right) - \left(\frac{15}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{12}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \\ & = \left(\frac{13}{12}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13-8}{12} = \boxed{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Realizamos las operaciones.

$$0,5 + 0,2 - \sqrt{0,1} - 0,18$$

$$\frac{5}{10} + \frac{2}{9} - \sqrt{\frac{1}{9}} - \frac{18-1}{90} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{17}{90} = \frac{45+20-30-17}{90} = \frac{18}{90} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Actividad

- Ubicamos los números en la recta real: -2 ; $-\sqrt{9}$; $\frac{1}{2}$; 3 ; $\sqrt{25}$
- Realizamos las siguientes operaciones combinadas:

$$\text{a) } \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{3} \quad \text{b) } -\frac{5}{3} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) \quad \text{c) } \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{9} - 1\right) \div \frac{7}{3}\right] \div \frac{4}{5} \quad \text{d) } 0,5 - 0,1 - \frac{5}{10} + 0,92$$

Potenciación de reales

Sea a un número real y n un número natural, definido por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-veces}} \text{ tal que: } a \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Se define lo siguiente con la potencia y valor cero

$$a^0 = 1; \quad 0^n = 0; \quad 0^0 = \text{no definido}$$

Ejemplo:

Desarrolla el exponente.

$$\text{a) } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{16}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{8}}$$

Las propiedades de las potencias son las mismas que se expresan en los números reales.

Ejemplo:

Desarrollamos el exponente.

$$\text{a) } \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \div \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\text{b) } (2^3)^{-2} \cdot (3^2)^{-1} \cdot (2 \cdot 3)^2 = (2)^{-6} \cdot (3)^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^{-4} \cdot 3^0 = \boxed{2^{-4}}$$

Los números reales, radicación

Operación inversa a la potenciación, se conoce el exponente y la potencia.

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow 5 = \sqrt[2]{25} \text{ por lo tanto, se define: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donde: a es la base, m el exponente y n el índice

Ejemplo: Expresa como radical o como exponente, según corresponda:

$$\text{a) } 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \quad \text{b) } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} \quad \text{c) } 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \quad \text{d) } \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \text{e) } \sqrt[3]{2a} = (2a)^{\frac{1}{3}}$$

Simplificación de radicales

Ejemplo:

$$\text{Simplifica } \frac{1}{3} \sqrt[3]{375}.$$

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{375} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \cdot 5 \sqrt[3]{3} = \boxed{\frac{5}{3} \sqrt[3]{3}}$$

Ejemplo:

$$\text{Simplifica } \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

$$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{8}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8}{8^2}} = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \sqrt{8} = \boxed{\frac{1}{40} \sqrt{8}}$$

ELEMENTOS DE LA POTENCIA

$$\begin{array}{ccc} & \text{Exponente} & \\ & \nearrow & \searrow \\ a^n = b & & \\ \text{Base} & & \text{Potencia} \end{array}$$

Si la base de una potencia es negativa:

- Si el exponente es par, el resultado es positivo.
- Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Ejemplos

- $(-3)^2 = 9$
- $(-3)^3 = -27$

RECUERDA

$$\begin{array}{ccc} & \text{Radical} & \\ & \downarrow & \\ \text{Índice} \nearrow & \sqrt[n]{a} = b & \nwarrow \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{Radicando} & \text{Raíz} \end{array}$$

Propiedades

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Recuerda

$$\sqrt{a^2} = a$$

Realizamos las siguientes operaciones con radicales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} & \text{b) } 2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} & \text{c) } 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{189} & \text{d) } \frac{3}{2}\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \text{e) } 3\sqrt{99} - 5\sqrt{44} - 3\sqrt{11} & \text{f) } 5\sqrt{7} + \sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} & \text{g) } \sqrt[3]{64} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{56} & \text{h) } \frac{1}{2}\sqrt{45} - 5\sqrt{8} - \frac{1}{5}\sqrt{2} \end{array}$$

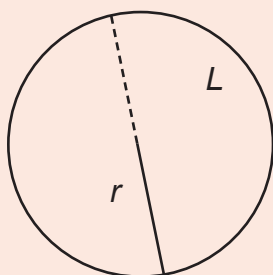
MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

$$x^n \sqrt[n]{a} \cdot y^n \sqrt[n]{b} = xy^n \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

NÚMEROS TRASCENDENTES

El número π



$$\pi = \frac{L}{2r}$$

El número e , en término general.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Para obtener el cálculo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

RETO

Simplifica

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$$

RESUELVE EL SIGUIENTE PLANTEAMIENTO

Una pizzería vende diferentes tamaños de pizza, hay de 30, 37 y 45 cm respectivamente, un cliente se dio cuenta de que dos pizzas pequeñas tienen el mismo costo que una pizza grande. ¿Cuál es mejor, comprar dos pizzas pequeñas o una grande?

Operaciones con radicales

Para realizar la suma o resta con radicales, se simplifica al máximo los radicales.

Ejemplo: Realizamos la siguiente operación, $5\sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5}$.

$$5\sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (5 + 1 - 3)\sqrt{5} = \boxed{3\sqrt{5}}$$

Ejemplo:

Realizamos la siguiente operación, $2\sqrt{20} + \sqrt{180} - 3\sqrt{12} - 5\sqrt{108}$.

Simplifica cada radical.

$$2\sqrt{20} = 2\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{12} = 3\sqrt{2^2 \cdot 3} = 3\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{108} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 5\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

Una vez simplificado se realiza la operación correspondiente.

$$= 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 30\sqrt{3}$$

$$= (4 + 6)\sqrt{5} - (6 + 30)\sqrt{3}$$

$$= \boxed{10\sqrt{5} - 36\sqrt{3}}$$

La multiplicación y división de radicales se realiza operando los coeficientes.

Ejemplo: Realiza la multiplicación de los radicales: $2\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 2} = \boxed{6\sqrt{30}}$$

Ejemplo: Realiza la división de los radicales: $\sqrt{24}$; $\sqrt{2}$

$$\sqrt{24} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

2. Números trascendentes

En el conjunto de los números reales, existen los números algebraicos.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Esta expresión de ecuación polinómica tiene una solución, donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son racionales y x es la solución.

También, existen los números trascendentes, que no son solución de una expresión algebraica, es decir, es un número que no es algebraico, por ejemplo, el π o e .

El número π independiente del círculo grande o pequeño, la relación entre perímetro, círculo y diámetro siempre valdrá $\pi \approx 3.1415926535\dots$

Otro número trascendente, importante para el cálculo y análisis matemático, es el $e = 2.71828182845904$

Otro ejemplo de número trascendental es de David Gawen Champernowne (1912-2000) con base 10 y su abreviatura:

$$C_{10} = 0,123456789101112131415161718192021 \dots$$

Otro ejemplo, que señala que todo número algebraico que no sea 0 o 1 y este elevado a un exponente irracional, se considera un número trascendente.

$$-2\sqrt{2}$$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Los números reales y los subconjuntos que lo componen tienen variadas aplicaciones, en especial el número trascendental π , este número fue utilizado en la antigüedad y hasta la fecha se lo utiliza en diferentes aplicaciones como la ciencia, economía, física, astronomía, informática y otros.

En el campo de la ciencia se lo utiliza en la órbita de los satélites, por su aplicación de cálculo y aproximación al utilizar la mayor cantidad de dígitos.

Los problemas resueltos con la aplicación de las matemáticas en la actualidad tienen que ver con el uso de los celulares, que sin el uso del número π , no se podría descomponer una señal en sus frecuencias.

Definimos una aplicación de frecuencias a una señal en tiempo continuo (señal analógica) es una función, una señal en tiempo discreto (señal discreta) es otra función, por la cual se define la señal digital.

Ejemplo: Las señales (continuas o discretas) se encuentran en áreas como: sismología, imágenes de radar, ingeniería biomédica, la comprensión de datos, comunicaciones satelitales, imágenes satelitales y otras más.

Audio, el sonido es una señal en tiempo continuo y tiene como rango la intensidad (volumen) del sonido, por ejemplo, la función de señal: $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Imágenes, asociadas a los píxeles en escala de grises que se observa en una pantalla, la señal asocia a cada pixel de la imagen un valor de intensidad de gris. Este es un ejemplo de una señal $f: \mathbb{R}$, cuando se trata de imágenes a color, está representado por cantidades constituyentes de tres valores, por ejemplo, azul, rojo y verde o cuatro, por ejemplo, cian, magenta, amarillo y negro, colores básicos, para ello se tiene la señal definida también como función de número real.

En la actualidad tenemos el GPS (Global Positioning System) Sistema de Posicionamiento Global, esta aplicación utiliza un posicionamiento en base a la circunferencia y para el cálculo utiliza el número π , este número realiza el cálculo con precisión.

Otra aplicación de e es el crecimiento y decrecimiento exponencial, la cual se lo aplica en medicina, población y otros ámbitos de la vida cotidiana.

Este crecimiento o decrecimiento aplicado, está definido por: $P(t) = P_0 e^{kt}$

En la actualidad se viven situaciones de inseguridad, a diario se puede escuchar que algunas personas fueron víctimas por delincuentes. Cuando se sufre el robo de un objeto y este objeto tiene activado el GPS, se puede ubicar o rastrear el objeto, la aplicación que tenemos instalado en algún dispositivo u objeto utiliza los conceptos fundamentales de los números reales. En tal sentido, reflexiona y responde.

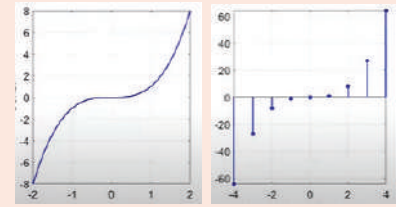
- ¿Crees que la utilización de los números reales permitió el desarrollo de la tecnología?
- ¿Cuál es el subconjunto de los números reales que consideras son las más aplicadas? ¿Por qué?
- ¿Qué te parece el haber conocido los números reales?

GLOSARIO

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

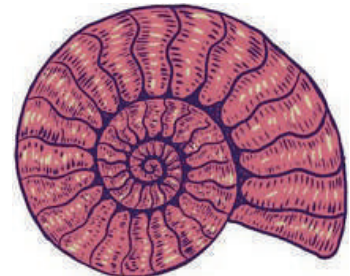
Representa la función de los números reales a reales.

SEÑALES



Continua

Discreta



VALORACIÓN



PRODUCCIÓN

Realizamos un cuadro sinóptico tomando en cuenta las siguientes preguntas:

- ¿Qué es un GPS?
- ¿Cómo funciona el GPS?
- ¿Qué es un reloj atómico?
- ¿Cuál es la aplicación que se tiene en la actualidad?

Una vez concluido el cuadro sinóptico, explicamos en el curso el uso y aplicación de la matemática.



ÁLGEBRA Y SUS TÉRMINOS

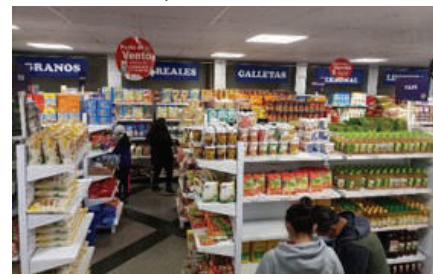
PRÁCTICA

La siguiente actividad consiste en reunir envolturas que encuentres en el patio o hayas comprado, estas envolturas o envases pueden ser de diferentes productos.

Actividad

- Con los envases reunidos, encontramos algunos valores o palabras que sean semejantes, y explicamos qué palabras, números u otros elementos llamaron tu atención.

Productos de Emapa



TEORÍA

AL-KHWARIZMI



Matemático árabe

(780 - 850)

A él se debe las palabras "álgebra", "guarismo" y "algoritmo". Es considerado el "padre del álgebra" debido a un compendio de cálculo por reintegración y comparación en su tratado del álgebra, donde enseña el álgebra aplicada a la resolución de problemas cotidianos, dentro del imperio islámico.

1. Nociones básicas de álgebra

El álgebra es una rama de la matemática que trata de cantidades y se conoce al árabe al-Khwarizmi como el padre del álgebra.

Se debe distinguir dos lenguajes, el usual o habitual y el numérico.

Lenguaje usual

- Seis dividido entre dos
- La suma de dos números

Lenguaje numérico

$$6 \div 2$$

$$a + b$$

Ejemplo: Lenguaje habitual o usual al lenguaje numérico.

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje numérico
El doble de cuatro	$2 \cdot 4$
Tres elevado al cuadrado	3^2
La cuarta parte de veinte	$\frac{20}{4}$
Cinco elevado al cuadrado	5^2
Tres medios	$\frac{3}{2}$

El álgebra combina la parte numérica con lo literal.

Ejemplo:

$$5x \quad 3ab \quad \frac{1}{2}x^2$$

El lenguaje algebraico utiliza letras combinadas con números y signos.

Ejemplo: Lenguaje habitual o usual al lenguaje algebraico.

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje algebraico
La suma de dos números	$a + b$
Un número menos dos unidades	$x - 2$
El cubo de un número	a^3
El cuadrado de un número	a^2

2. Expresiones algebraicas y la modelización

La expresión algebraica es la combinación entre números reales (constantes) y letras (variables), por ejemplo.

$$3a + 5b - 2$$

Para comprender de mejor manera la expresión algebraica distinguimos dos lenguajes: el lenguaje numérico y el algebraico.

- El lenguaje numérico solo expresa números.
- El lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones de la vida cotidiana.

Ejemplo:

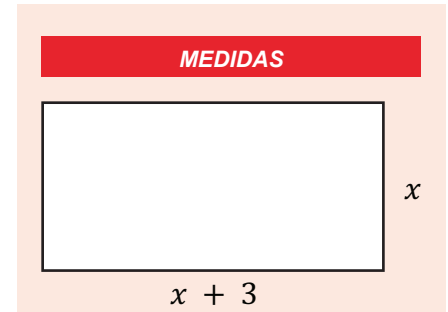
El largo de una sala excede a su ancho en 3 metros.

El enunciado lo expresamos en el lenguaje algebraico, el largo y ancho.

- La medida del ancho: "x"
- La medida del largo: "x+3"

Ejemplo: Lenguaje habitual o usual al lenguaje algebraico.

Lenguaje habitual o usual	Lenguaje algebraico
La tercera parte de un número	$\frac{a}{3}$
El cuadrado de la suma de dos números	$(a + b)^2$
El doble de la suma de dos números	$2(a + b)$
El inverso de un número más tres	$\frac{1}{a} + 3$
La mitad de la edad de Andrea	$\frac{x}{2}$
Tercera parte de la edad de Juan más dos años	$\frac{x}{3} + 2$
Tres números consecutivos	$x; x + 1; x + 2$
Un número cualquiera	a
Un número cualquiera aumentado en cinco	$b + 5$
La semisuma de dos números	$\frac{a + b}{2}$
Las dos terceras partes de un número disminuido en cuatro.	$\frac{2}{3}(x - 4)$



LENQUAJE NUMÉRICO
 Intervienen números y signos de operación.

LENQUAJE NUMÉRICO
 Combina letras con números y signos de operación aritmética.

Expresamos al lenguaje algebraico:

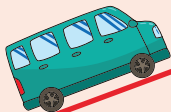
- La edad de Juan hace cinco años.
- El tripe de la edad de Juan.
- La mita de un número menos tres.
- La suma de dos números más cinco.
- El tripe de un número menos tres
- La diferencia de dos números.
- Tres números enteros consecutivos.
- El triple de un número disminuido en nueve.
- Dos novenos de un número disminuido en la unidad.

CONSTANTE



Velocidad constante

CONSTANTE



Velocidad variable

3. Estudio de variables y constantes

El álgebra tiene la combinación de números (constantes) y la parte literal o letras (variables).

Ejemplo:

$$2x \quad 6xy \quad 9xyz$$

Las letras x , y o z son consideradas variables y las cantidades 2, 6 "y" 9 son valores constantes.

Ejemplo:

$$4a + 3b - 4$$

En la expresión son constantes 4, 3, -4 y las variables a , b

Ejemplo: Identifica las variables y constantes.

- a) $5xy$; constante 5, xy variables.
- b) $\pi r^2 h$; constante π , r y h variables.
- c) x : constante 1 y la variable es x .
- d) $3x$: constante 3 y la variable es x .
- e) $-8xy^2$: constante 8 y la variable es x, y .
- f) $23ab$: constante 23 y la variable es a, b .

Ejemplo:

Una persona que trabaja en una tienda de ventas, la persona recibe un sueldo cada mes y por cada venta realizada recibe una comisión, es decir, un monto de dinero.

El sueldo es una constante que se sumara por cada venta realizada, entonces la comisión que recibe por venta es una variable que depende de la venta.

Ejemplo:

El kilo de carne esta Bs. 28 (veintiocho bolivianos), las personas realizan las siguientes compras:

Kilogramos	1	2	4	12
Costo (Bs.)	28	56	112	336

La compra por kilo:

$$28 \div 1 = 28$$

$$56 \div 2 = 28$$

$$112 \div 4 = 28$$

$$336 \div 12 = 28$$

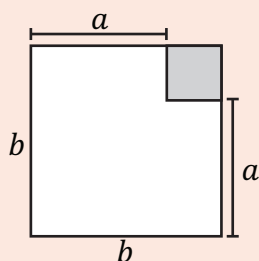
Bs. 28 es la **constante**

El costo y el kilo son variables y el precio del kilo es constante.

En la tabla se aprecia la cantidad de kilos comprados y como el costo aumenta, la división del costo entre los kilogramos es 28.

El valor del kilo es una variable independiente, el costo es la variable dependiente.

CUADRADO DE LA DIFERENCIA



El área del cuadrado pequeño es $(b - a)^2$, puesto que su lado mide $(b - a)$

Identificamos las variables y constantes de:

a) $3x^5$

b) $5\pi r^2$

c) $-43x^3y^2$

d) $8z^5y^3x^5$

e) $-2u^2v^5$

f) $-87x^2$

g) $-25r^2$

h) $x + y^2$

i) -4

4. Término algebraico

La expresión algebraica en la que no está separado por operadores de suma o resta, se llama término algebraico y se compone por: coeficiente, variable o parte literal y exponente.

Además, al término algebraico se denomina monomio, por ejemplo, $-5x^2y^3$, que significa: -5 por x^2 por y^3

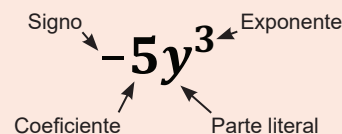
Ejemplos:

Expresiones de un término algebraico.

$$-7y^3z; \quad \frac{2}{3}x^3y; \quad -\frac{3}{5}x^nz; \quad -\frac{31}{6}x^3y; \quad \frac{3}{4}xy^2$$

TÉRMINO ALGEBRAICO

El término algebraico se compone por:



4.1. Elementos de un término algebraico

a) Signo

El signo puede ser positivo (+) o negativo (-). Cuando un término no tiene signo es positivo, por ejemplo:

$$3y; \quad 5xyz; \quad x^2y^3$$

b) Coeficiente

El coeficiente es un número, por ejemplo:

$$5a; \quad -4xy \text{ son } 5 \text{ y } -4 \text{ respectivamente.}$$

c) Variable o parte literal

Está representado por letras, es más común usar: a, b, c, x, y, z. La parte literal del término considerado variable puede tener exponentes, por ejemplo:

$$3x^2; \quad 5xy^nz; \quad x^2y^3$$

d) Exponente

Son las potencias de la variable, si no tiene exponente se sobreentiende que es la unidad, por ejemplo:

$$x, \text{ el exponente de } x \text{ es } 1.$$

Ejemplo:

Identifica los elementos del término: $-7x^3$

- Signo: negativo
- Coeficiente: -7
- Variable: x
- Exponente: 3

Ejemplos:

Identifica las partes del término algebraico: $37x^2y^3z$

- Signo: positivo
- Coeficiente: 37
- Parte literal: x^2y^3z

NOTA

No es necesario escribir el número "1" como coeficiente.

$$1x^2 = x^2$$

Se lo sobreentiende.

Identificamos los elementos del término:

a) $-9x^5$

b) $-5ab^2$

c) $3x^4y^2$

d) $3x^5$

e) $5\pi r^2$

f) $-43x^3y^2$

g) $8z^5y^3x^5$

h) $-2u^2v^5$

i) $-87x^2$

CURIOSIDAD

En 1.897 faltó muy poco para que el estado de Indiana, en EEUU, estableciese por ley un método para lograr la cuadratura del círculo.

El episodio ha pasado a la historia como la "Indiana PI Bill", el proyecto de ley de **Indiana sobre PI**, porque la propuesta, que recogía la llamada "nueva verdad matemática" de un pirado llamado Edwin J. Goodwin, establecía que "la razón entre el diámetro y la circunferencia es cinco cuartos a cuatro" dando por tanto un valor para Pi de exactamente 3,2.

Qué bueno que esta ley 246 NUNCA SE PROMULGÓ ... Investiga más con tu maestra o maestro.

LEY DE SIGNOS

Para el producto de dos términos, la ley de signos se reduce a lo siguiente:

El producto de signos iguales es positivo (+).

El producto de signos diferentes es negativo (-).

$$(+) \cdot (+) = (+)$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

$$(+) \cdot (-) = (-)$$

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

5. Términos semejantes, reducción y su aplicación

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma variable(letra), pueden tener diferente coeficiente numérico y diferente signo.

Ejemplo: Los siguientes términos tienen las mismas bases con sus exponentes iguales, por lo tanto, son términos semejantes.

$$-7x \text{ con } 3x \quad -9x^3y^2 \text{ con } 4x^3y^2 \quad \frac{2}{3}xyz^2 \text{ con } xyz^2$$

5.1. Reducción de términos semejantes

Para reducir se toman expresiones con términos semejantes, luego se suman o restan los coeficientes.

Para reducir términos se presentan tres casos:

- I. Términos semejantes de igual signo se suman los coeficientes seguida de la parte literal.

Ejemplo: Reducir $3x + 8x + x + 4x$

Los coeficientes se suman, $3 + 8 + 1 + 4$, entonces;
 $x + 8x + x + 4x = 16x$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $16x$

Ejemplo: Reducir $-3xyz - 5xyz - 2xyz - xyz$

Los coeficientes se suman, $-3 - 5 - 2 - 1$, entonces;
 $-3xyz - 5xyz - 2xyz - xyz = -11x$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-11x$

- II. Términos semejantes de diferente signo, se halla la diferencia de los coeficientes, se anota el signo del mayor coeficiente seguida de parte literal.

Ejemplo: Reducir $9x - 5x$

La diferencia entre 9 y 5, el signo del mayor (que es 9x) es "+" (positivo), entonces;

$$9x - 5x = 4x$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $4x$

Ejemplo: Reducir $4xy - 7xy$

La diferencia entre 4 y 7, el signo del mayor (que es 7x) es "-" (negativo), entonces;

$$4xy - 7xy = -3xy$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-3xy$

- III. Términos semejantes de diferentes signos, se asocian todos los términos positivos y se los reduce, luego se asocian todos los términos negativos, ambas expresiones se reducen al mínimo.

Ejemplo: Reducir $2x^2 - 5x^2 - 3x^2 + 7x^2$

Primero asociamos los positivos y luego los negativos:

$$2x^2 + 7x^2 - 5x^2 - 3x^2$$

$$9x^2 - 8x^2 = x^2$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: x^2

Ejemplo: Reducir $2x^2y - 8x^2y + 3x^2y + 4x^2y - 5x^2y$

Primero asociamos los positivos y luego los negativos:

$$2x^2y + 3x^2y + 4x^2y - 8x^2y - 5x^2y$$

$$9x^2y - 13x^2y = -4x^2y$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-4x^2y$

5.2. Reducción de términos semejantes de distinta base

Se agrupan términos semejantes y se efectúa el mismo procedimiento como en los casos anteriores.

Ejemplo:

Reducir $3x^2y + 7x^2z - 4x^2z - 6x^2y + 2x^2y$

Primero asociamos los términos semejantes: x^2y y los que tienen x^2z

$$\underbrace{3x^2y - 6x^2y + 2x^2y}_{-x^2y} + \underbrace{7x^2z - 4x^2z}_{+3x^2z}$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-x^2y + 3x^2z$

Ejemplo:

Reducir $0,5x^3y - 3xy^2 - 5x^3y + 0,75xy^2 - \frac{2}{3}x^3y$

Los decimales se expresan en fracciones, después, se procede como en los anteriores casos de agrupación y simplificación de términos semejantes.

$$\begin{aligned} &0,5x^3y - 3xy^2 - 5x^3y + 0,75xy^2 - \frac{2}{3}x^3y \\ &\frac{1}{2}x^3y - 3xy^2 - 5x^3y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{2}{3}x^3y \\ &\left(\frac{1}{2}x^3y - 5x^3y - \frac{2}{3}x^3y\right) + \left(-3xy^2 + \frac{3}{4}xy^2\right) \\ &\left(\frac{1}{2} - 5 - \frac{2}{3}\right)x^3y + \left(-3 + \frac{3}{4}\right)xy^2 \\ &-\frac{31}{6}x^3y - \frac{9}{4}xy^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado de la simplificación es: $-\frac{31}{6}x^3y - \frac{9}{4}xy^2$

REGLA PRÁCTICA

Los signos de agrupación:

Paréntesis ()

Corchetes []

Llaves { }

Cuando el signo de agrupación tiene coeficiente +1 (simplemente +), los términos dentro del signo de agrupación mantienen su signo positivo o negativo.

Cuando el signo de agrupación tiene coeficiente -1 (simplemente -), los términos dentro del signo de agrupación, si son positivos, se hacen negativos y si son negativos, se hacen positivos.

Actividad

Reducimos los siguientes términos:

a) $0,5a - 2,5b + 0,4a - \frac{1}{2}b - \frac{2}{3}a$

b) $\frac{2}{3}x^{a-1} - \frac{1}{5}y^{a-2} + \frac{1}{2}x^{a-1} - \frac{3}{4}y^{a-2} - 4x^{a-1}$

c) $-\frac{5}{4}x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}x^2 + 3xy - 6x^2 - \frac{1}{2}xy$

d) $-9m^2 - 15mn + 8m^2 + 18mn + 95mn + 25m^2$

e) $3x^2 - 5xy + 9x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}x^2$

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Crees que es importante el álgebra en el contexto?
- ¿Cómo se aplica el álgebra en el diario vivir?
- ¿Te agradó el tema del álgebra? ¿Por qué?

VALORACIÓN

PRODUCCIÓN

Actividad

- Mencionamos 10 ejemplos de la cotidianidad en relación al concepto de términos semejantes, elabora una tabla donde se compare el lenguaje común con el lenguaje algebraico utilizado.

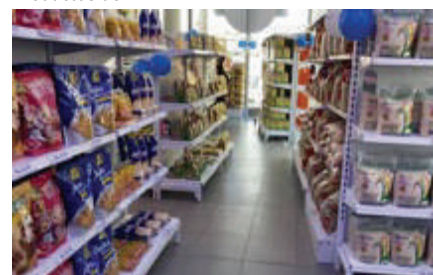
EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES

PRÁCTICA

En la cotidianidad realizamos compras, sea en la tienda de barrio o la comunidad. Por ejemplo, podemos comprar pan, o algún tipo de alimento y así, realizamos diferentes compras.

Para comprender la aplicación del álgebra, registra la compra del pan por una semana (siete días) con la letra P y los refrescos con R y otras compras con O, al final de los siete días realiza la suma de las compras, suma las variables P, R y O, así comprueba cuánto costó cada producto.

Productos de EMAPA



TEORÍA

REGLA PRÁCTICA

¡Para que te diviertas con el álgebra!

Puedes asombrar a tu público con un conocimiento casi mágico de los números.

Para ello, bastará con adivinar la edad de un voluntario (o bien un número cualquiera que elija). Se deberá proceder como sigue:

Pide a un voluntario que siga los pasos correctamente.

1º) Que multiplique su edad (o número cualquiera que haya elegido) por 3.

2º) Que le sume 10 al resultado.

3º) Que le reste el doble de su edad (o del número elegido) al resultado.

4º) Que reste 6 al último resultado obtenido.

5º) Que nos diga el número obtenido.

Ahora, sólo tienes que restar 4 al último número que mencionó el voluntario para dar con el número original y maravillar a todos con su sagacidad.

1. Clasificación de las expresiones algebraicas

La expresión algebraica se clasifica en:

Nombre	Cantidad de términos	Expresión
Monomio	Un solo término	$-7x^2y^3z$
Binomio	Dos términos	$-7x^2 + 3a$
Trinomio	Tres términos	$x^3 + 2x - u$
Polinomio	Dos o más términos	$x^4 + 3x^2 + 3x - 5$

2. Grado relativo y absoluto de un monomio y un polinomio

Grado relativo y absoluto de un monomio

- El **grado absoluto (GA)** es la suma de los exponentes de las variables (letras).
- El **grado relativo (GR)** es el exponente que tiene la variable (letra).

Ejemplo. Determinar el grado absoluto y relativo del monomio.

$$-7x^2y^3z$$

El grado absoluto es la suma de los exponentes: 2, 3 y 1;

$$2 + 3 + 1 = 6 \text{ el monomio es de } 6^{\text{to}} \text{ grado.}$$

El grado relativo es:

- Con respecto a “x” es de 2do grado.
- Con respecto a “y” es de 3er grado.
- Con respecto a “z” es de 1er grado.

Grado relativo y absoluto de un polinomio

- El **grado absoluto (GA)** de un polinomio es igual al monomio de mayor grado.
- El **grado relativo (GR)** de un polinomio es igual al exponente de mayor valor con relación a la variable (letra).

- Realizamos dos ejemplos de: monomio, binomio, trinomio y polinomio.
- Determinamos los grados absoluto y relativo de cada monomio: $4x^2$; $14x^3y^2$; $2xyz$, $3x$

Ejemplo: Determina el grado absoluto y relativo del polinomio.

$$x^4 + 3x^2y^3 + 3xy - 5$$

El grado absoluto del polinomio es: $3x^2y^3$

$$2 + 3 = 5 \text{ es de } 5^{\text{to}} \text{ grado.}$$

El grado relativo del polinomio es:

- Con respecto a “x”, el polinomio es de 4^{to} grado.
- Con respecto a “y”, el polinomio es de 3^{er} grado.

Actividad

Completamos la siguiente tabla:

Polinomio	Grado Absoluto	Grado relativo
$5x^3 - 2x^2y + xy^4$		
$6a^2 - 5a - 8$		
$3m^2 + 2m^4 - m + 2$		
$10y^3 - 2y^2z + 4yz^3$		

3. Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene al reemplazar la parte literal o letra con el valor que le corresponda y después realizar la operación indicada.

Ejemplo: Hallar el valor numérico de la expresión:

$$x^3y^2z^3; \text{ si } x = 4, y = 3, z = \frac{1}{2}$$

Se reemplaza los valores de x, y, z y se efectúa las operaciones para obtener el valor numérico.

$$x^3y^2z^3 = (4)^3(3)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (64)(9)\left(\frac{1}{8}\right) = \boxed{72}$$

El resultado de los valores para la expresión es: 72.

Ejemplo: Hallar el valor numérico de:

$$\frac{3x^2}{2} - \frac{2xy}{4} + \frac{y}{3x}; x = 2, y = \frac{1}{4}$$

Al reemplazar y realiza las operaciones.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{2} - \frac{2xy}{4} + \frac{y}{3x} &= \frac{3(2)^2}{2} - \frac{2(2)\left(\frac{1}{4}\right)}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{3(2)} \\ &= \frac{12}{2} - \frac{4}{4} + \frac{1}{6} = 6 - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{144 - 6 + 1}{24} = \boxed{\frac{139}{24}} \end{aligned}$$

El valor numérico de la expresión es: $\frac{139}{24}$

Ejemplo: Hallar el valor numérico de: $P(a, b) = 5a + 4b$ para $a = 2$ y $b = 3$

El valor es: $P(a, b) = 5a + 4b$

$$P(2, 3) = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 10 + 12 = \boxed{22}$$

El resultado para los valores es: 22.

REGLA PRÁCTICA

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones indicadas

En un término, entre el coeficiente y la variable existe multiplicación. Así:

$$\begin{array}{c} -2 \cdot x^3 \\ \downarrow \\ \text{multiplicación} \end{array}$$

PARA PENSAR...

Juega al sudoku

9			3	4			7	
8	5		7			3	4	9
	7		8	9	1	2		
	6	8				4		
3			6	8	7		1	5
				5	4			3
					8			
		4	1		2	5		
6		5		7	9	1		2

Encuentra el valor para el resultado.

$$\begin{aligned} \text{●} + \text{●} &= 4 \\ \text{●} + \text{●} &= 3 \\ \text{●} + \text{●} &= 4 \\ \text{●} - \text{●} &= ? \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $P(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^3 - y^2$ hallar $P(2, -2)$

$$P(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^3 - y^2$$

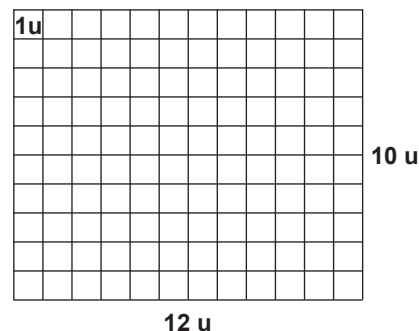
$$P(2, -2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2(-2) + 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2$$

$$P(2, -2) = 8 + 16 - 16 - 4 = \boxed{4}$$

El resultado del valor numérico es: 4.

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho, se expresa: $A(x, y) = xy$

Ejemplo: Calcular el área del rectángulo de 10 unidades de largo y 12 de ancho.



$$A(x, y) = xy$$

$$A(10u, 12u) = 10u \cdot 12u = 120u^2$$

Ejemplo: Calcular el área de un trapecio cuyas dimensiones son: Base 8 cm, base menor 6 cm y altura 10 cm.

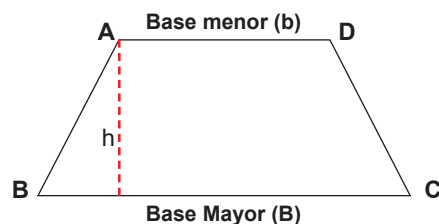
La unidad de medida está en cm.

$$S(B, b, h) = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$S(8u, 6u, 10u) = \frac{(8u + 6u)10u}{2}$$

$$= \frac{(14u)10u}{2}$$

$$S(B, b, h) = 70u^2$$



El área del trapecio es: $70cm^2$

Dada la expresión algebraica, hallamos el valor numérico:

a) $P(x)=5x-4$ hallar: $P(2)$

b) $P(x)=7x+12$ hallar: $P(2,3)$

c) $P(x)=5(x-1)$ hallar: $P(-4)$

Encontramos el valor numérico:

$$m = -3, n = 2, p = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}, y = 10, z = \frac{1}{2}$$

a) $2m + 3n$

b) $m + n - y$

c) $3p + y - m$

d) $\frac{2z + 3x}{n}$

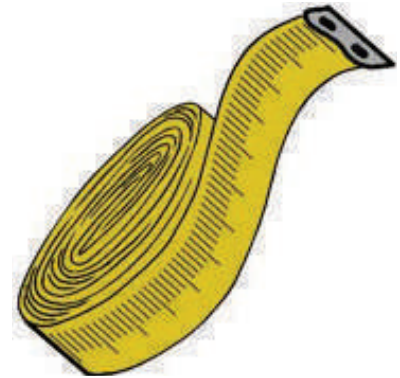
e) $\left(\frac{z + x}{3m - n}\right)^2$

f) $\frac{m^n}{3} - p^n + z^n$

3.1. Prioridades en las operaciones

Para calcular el valor numérico de una expresión algebraica, se debe tomar en cuenta las siguientes reglas.

- Si la expresión tiene signos de agrupación, el cálculo se comienza por el interior de estos.
- Si hay potencias, se efectúan las potencias teniendo cuidado con el signo en caso de ser base negativa.
- Si hay productos, primero se efectúan estos.
- Se efectúan las sumas y restas.
- Se simplifica si el resultado es una fracción reducible.



3.2. Signos de agrupación

Se utilizan los signos de agrupación para indicar la cantidad en su interior.

- Corchetes $[]$
- Paréntesis $()$
- Llaves $\{\}$
- Vínculo $-$

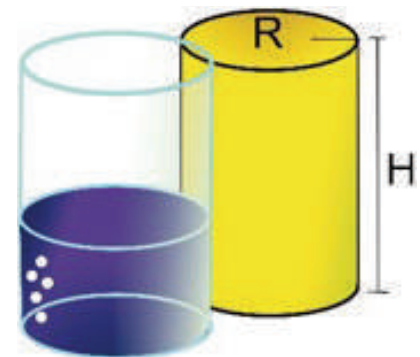
3.3. Reglas para suprimir la agrupación

Si está el signo “+” delante del signo de agrupación, se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo.

$$+(-x + y - z) = -x + y - z$$

Si está el signo “-” delante del signo de agrupación, se suprime y cambia el signo de cada cantidad que está dentro de él.

$$\begin{aligned} -(-x + y - z) &= x - y + z \\ -\overline{3x - 5y} &= -(3x - 5y) = -3x + 5y \end{aligned}$$



$$V = \pi r^2 h$$

Ejemplo: Simplifica

$$2x + \{-[5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - \overline{z + 4})] - (-x + y)\}$$

Se suprime el vínculo:

$$2x + \{-[5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - \overline{z + 4})] - (-x + y)\}$$

$$2x + \{-[5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - z - 4)] - (-x + y)\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$2x + \{-[5y + 3x - z + 2 + x - y + z + 4] + x - y\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$2x + \{-5y - 3x + z - 2 - x + y - z - 4 + x - y\}$$

Se suprimen las llaves:

$$2x - 5y - 3x + z - 2 - x + y - z - 4 + x - y$$

Se agrupan y se reduce los términos semejantes:

$$2x - 3x - x + x - 5y + y - y + z - z - 2 - 4$$

$$\boxed{-x - 5y - 6}$$

El resultado de la expresión es: $-x - 5y - 6$

COMPLEMENTO

Los términos semejantes son aquellos que solo se diferencian en el coeficiente numérico y su signo.

Para reducir términos semejantes, en una expresión algebraica o polinomio, se asocian los términos semejantes y se operan los coeficientes.

Ejemplo: Simplificar

$$\frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left[2x - \frac{2}{3}y - \left(-x + \frac{1}{4}y - \overline{x - y} \right) \right] \right\}$$

Solución.

Se suprime el vínculo:

$$\frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left[2x - \frac{2}{3}y - \left(-x + \frac{1}{4}y - \overline{x - y} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left[2x - \frac{2}{3}y - \left(-x + \frac{1}{4}y - x + y \right) \right] \right\}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$\frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left[2x - \frac{2}{3}y + x - \frac{1}{4}y + x - y \right] \right\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$\frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + 2x - \frac{2}{3}y + x - \frac{1}{4}y + x - y \right\}$$

Se suprimen las llaves:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + 2y - 2x + \frac{2}{3}y - x + \frac{1}{4}y - x + y$$

Se agrupan y se reduce los términos semejantes:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x - 2x - x - x + 2y + \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}y + y$$

$$\boxed{-\frac{17}{4}x + \frac{47}{12}y}$$

El resultado de la expresión es: $-\frac{17}{4}x + \frac{47}{12}y$

Simplificamos cada expresión:

a) $-\frac{1}{3}x - \left[\frac{3}{2}y - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right]$

b) $4x - \{ -[x^2 + 3y - (3 - y) - (2 + x^2)] \}$

c) $-\frac{4}{3}x - \left\{ -\frac{5}{3} - \left[-\frac{5}{3}x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) + \left(-\frac{8}{3}x + 1 \right) - \frac{1}{3}x + \frac{7}{6} \right] \right\}$

d) $\frac{3}{2}m + \left[\left(-\frac{2}{3}n - \frac{2}{5}m \right) + \frac{1}{3}n \right] + \frac{1}{5}m + \frac{5}{4}n$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las expresiones algebraicas se utilizan de diferentes maneras en la cotidianidad, son utilizadas para resolver problemas simples hasta los complejos, permite la toma de decisiones y comprender de mejor manera la información adquirida.

Ejemplo: Cuántas horas tarda una persona en recorrer 10 kilómetros en bicicleta a una velocidad constante de “ v ” kilómetros por hora.

Para resolver el problema aplicamos la fórmula:

$$(tiempo) = \frac{(distancia)km}{(velocidad\ constante)km/h}$$

$$(tiempo) = \frac{10km}{v\ km/h}$$

La respuesta es:

$$(tiempo) = \frac{10}{v} \text{ horas}$$

La velocidad es la relación que existe entre la distancia que recorre y el tiempo que tarda en recorrer la distancia.

Esta relación de cantidades en situaciones de la cotidianidad se la relaciona con las expresiones algebraicas.



distancia = 10 km
tiempo = ¿? horas

Actividad

Representamos las siguientes situaciones con expresiones algebraicas:

- En una canasta hay 20 frutas en total, incluyendo naranjas y manzanas. Si hay x número de naranjas, represente el número de manzanas.
- Juan compró 3 camisas. Cada camisa costó x Bs. Represente el cambio de pago con un billete de Bs. 200.

« VALORACIÓN »

Reflexionamos y respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué otras aplicaciones de las expresiones algebraicas se aplican en nuestro contexto?, menciona 5 ejemplos.
- ¿Cómo aplicamos el lenguaje algebraico en nuestra cotidianidad?
- ¿Cómo aportó el álgebra en el desarrollo de la ciencia y tecnología?

PRODUCCIÓN

Actividad

Aprendizaje en la familia

- Consultamos datos curiosos sobre la medida de los calzados, la edad y estatura y a partir de esta información planteamos las expresiones algebraicas.

Analizamos y respondemos los siguientes planteamientos.

- Si Juan recorre con una velocidad de 35 m/min. ¿Cuál es la distancia de su casa al colegio si emplea 9 min?
- Un maestro acomoda 2 estudiantes por mesa y el aula tiene 16 mesas ¿Cuántos estudiantes pueden ingresar al aula?

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

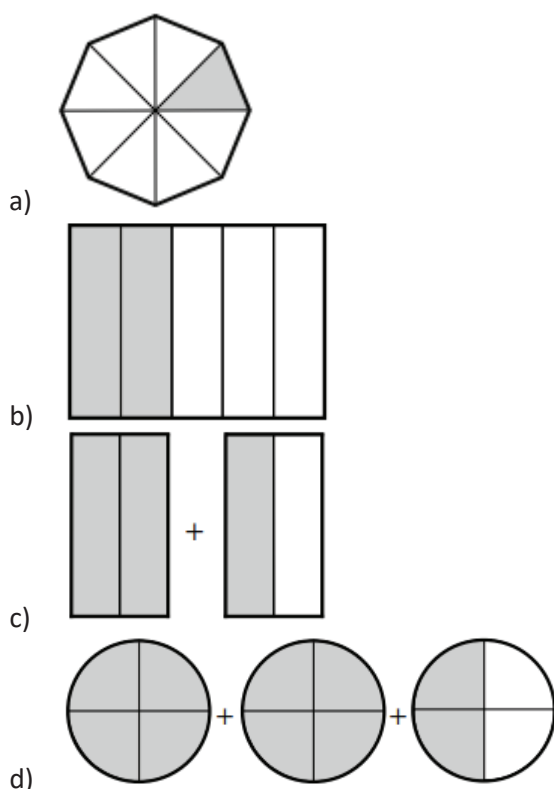
LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

Representación

Representar gráficamente las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2}$  $\frac{3}{5}$  $\frac{4}{3}$  $\frac{7}{6}$ 

Indica la fracción que representa a la parte sombreada en cada figura:



Operaciones

Efectuar las operaciones:

a) $\frac{3}{20} + \frac{18}{20} + \frac{13}{20}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$

c) $1\frac{1}{6} - \frac{3}{2} + 2\frac{7}{12} - 4 + \frac{1}{3}$

d) $2\frac{4}{9} * 2\frac{1}{4} * 1\frac{3}{11} * 1\frac{1}{3}$

Operaciones combinadas

Resuelve:

a) $\frac{3}{8}(4 - 2) + \frac{5}{16}(8 - 4)$

b) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(3 - 2\frac{1}{2}\right)$

Problema

- Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{12}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?
- Agustín se ejercita caminando todas las tardes de la semana para mejorar su presión arterial, entre semana camina $\frac{1}{2}$ hora, mientras que el fin de semana camina $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo invierte Agustín en caminar?
- Jorge y David deciden juntar parte de sus ahorros para comprar un nuevo juego de video, Jorge aporta $\frac{3}{5}$ de Bs 2000 ahorrados, mientras que David decide aportar $\frac{1}{3}$ de Bs 3000, ¿cuál fue el costo del juego de video?
- Roberto divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de renta y servicios y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Roberto percibe en un mes Bs 1200, ¿cuánto dinero designa a cada rubro?

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Operaciones

Ubicar en una recta numérica a los números irracionales:

a) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{29}$

b) $\sqrt{10}$

e) $-\sqrt{40}$

c) $-\sqrt{17}$

f) $\sqrt{36-9}$

Racionalización

Racionalizar el denominador en cada caso:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{25}{18}}$ c) $\frac{3a}{\sqrt[3]{2a}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
 e) $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$ f) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ g) $\frac{-1}{1-2\sqrt{3}}$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Operaciones

Hallar el resultado:

a) $3,456 + 0,342 - 2,108$
 b) $15,362 \cdot 3,236$
 c) $2 - \frac{3}{5} + 4,7$
 d) $-3,2 + 5,2 - \frac{9}{5}$
 e) $2 - 0,3 + 5,02 + 8\frac{3}{7}$
 f) $2 + \frac{1}{2} - 3 + 1,7 - 4\frac{7}{2}$
 g) $5,3 - 2 + \frac{5}{2} - 2 + 2,17$

Resuelve:

a) $(0,8 - \frac{1}{2}) \div (3 + \frac{1}{2})$
 c) $(\frac{3}{2} - \frac{3}{5} \cdot 3) \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{5})$
 d) $(-1,5) \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$
 e) $0,5 \div [(0,5 + \frac{1}{2}) - \frac{3}{5}]$

Operaciones con radicales

Resuelve:

a) $\sqrt{10} - 1 - (-2)^2 \cdot 3 \div (-2)$
 b) $16^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3^2} - \sqrt[3]{81}$
 c) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 3 + (\sqrt{\frac{1}{2}} + 5)^2$
 c) $\sqrt{\frac{1}{27}} \cdot 3^3 - \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot (-6)^2$

ÁLGEBRA Y SUS TÉRMINOS

Lenguaje algebraico

Indica, por medio de símbolos, los enunciados.

Expresión verbal	Expresión algebraica
La suma de dos números	
El doble de un número	
Un número es igual a tres veces otro	
La suma de tres números enteros consecutivos	
La diferencia de dos números es igual a la mitad de un tercero	
Ana tiene dos bolivianos y compra con ellos cuatro caramelos	
Un número aumentado en nueve	
En estadística, el promedio se obtiene del cociente de la suma de todas las frecuencias entre el número de frecuencias	

Escribe una expresión algebraica que represente a cada enunciado:

- El perímetro del cuadrado es igual a la suma de sus cuatro lados.
- El perímetro de la circunferencia es igual a dos veces el radio por pi.
- El área del círculo es igual al cuadrado del radio por pi.
- El volumen del cubo es igual al cubo de su arista.
- El volumen del cilindro es igual al cuadrado del radio por la altura y por pi.
- El volumen del cono es igual a un tercio del radio al cuadrado por su altura y por pi.
- El volumen de la esfera es igual a cuatro tercios de su radio al cubo por pi.

Traducción de lenguaje

- El área de la esfera es igual a cuatro veces el radio al cuadrado por pi.
- El espacio recorrido es igual a la velocidad por tiempo.
- La fuerza de atracción mutua que se crea entre dos puntos materiales es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional.
- Al cuadrado de su distancia, todo ello multiplicado por la constante G, de la gravitación universal. (Primera ley de Newton).
- El número máximo de electrones que puede haber en un nivel es igual a dos veces su nivel energético al cuadrado.
- Los volúmenes ocupados por una masa gaseosa a presión constante son directamente proporcionales a las temperaturas absolutas. (Ley de Gay Lussac).

Reducción de términos semejantes

Reducir los términos semejantes en cada expresión:

- $5y + 4y - 10y =$
- $13x - 4y - 2x - y =$
- $11a + 4b - 7a - 11b =$
- $3x^3y + 8x^3y - 7x^3y =$
- $5y + 4y + 19y =$
- $3a^2 - 2b - 5a^2 + b =$
- $\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{5}x^2y + x^2y =$

EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES

Expresiones algebraicas

Completar la tabla:

Polinomio	Grado Absoluto	Clase de Polinomio	Variables
$5x^3 - 2x^2y + xy^4$			
$6a^2 - 5a - 8$			
$3m^2 + 2m^4 - m + 2$			
$10y^3 - 2y^2z + 4yz^3$			

Desglosamos cada uno de los términos algebraicos según los elementos que lo componen y completa la tabla. Puede guiarse por el ejemplo del primer término.

Término Algebraico	Signo	Factor Numérico	Factor Literal	Grado
$-20ab^2$	-	20	ab^2	3
$+4xy^5$				
$8q^6p^4$				
$-9b^2$				
$12x^3y^4z^5$				
$-\frac{2}{3}m^4n^3$				
$-7x^3y^2z^5$				

Una con una línea, los términos de la columna X con el término semejante de la columna Y.

Columna X	Columna Y
a) $-2xy$	$50a^7b^2c^4$
b) $-11a^2b^3c^4$	$-9a^4b^4$
c) $20mn^2$	$56a^4b^4$
d) $-100a^4b^4$	$-15m^5n^4$
e) $-23m^5n^4$	mn^2
f) $-0,25q^7p^4$	$80xy$
g) $34a^7b^2c^4$	$-5a^2b^3c^4$

Valor numérico

Calcular el valor numérico para cada expresión:

- Para $a = 4$, $20a - 12a^2 =$
- Para $c = -1$, $3c^2 - 13 =$
- Para $x = 5$; $y = 9$; $z = 2$, $2x^3 - 4xy^2 - xy =$
- Para $a = 2$; $b = 2$; $c = 3$, $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$
- Para $x = 3$ $y = -2$, $x^2y - xy - 8 =$
- Para $a = 3$ $b = -2$, $\frac{27}{a} + 15b =$
- Para $m = -4$, $-2m^2 - 6m - 15 =$
- Para $m = 2$; $n = 0$, $10m^3n - 2m^2n^2 + \frac{1}{4}mn =$
- Para $B = 2$; $b = 1$; $h = -2$, $\frac{(B+b) \cdot h}{2} =$

Simplificación de expresiones algebraicas

Simplificar las expresiones algebraicas a su mínima expresión:

a) $-(3x - 2y + 5x) =$

b) $(2a - 7b + 12c) - (9a + 12b - 20c) =$

c) $[-(7x + 2xy - y^2) + (-3xy - y^2)] =$

d) $\frac{7}{2}y^5 - \frac{5}{3}y^5 + \frac{1}{3}y^5 - \frac{5}{2}y^5 =$

e) $\frac{1}{5}abc + \frac{7}{5}a^2bc + \frac{9}{2}abc^2 - \frac{1}{3}a^2bc + \frac{1}{4}abc^2 - \frac{1}{7}abc =$

Suprimir los signos de agrupación reduciendo los términos semejantes en cada caso:

a) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)$

b) $\frac{1}{2}x - \left\{\frac{3}{4}x - 2y + \left(2x - \frac{2}{3}y - \left[-x + \frac{1}{4}y - \overline{x - y}\right]\right)\right\}$

c) $\frac{2}{3}a - \left\{-\frac{1}{5}b - \left(2a - \frac{3}{5}b\right) + \frac{2}{3}a\right\} - \frac{1}{2}b$

d) $4x - \frac{2}{5}x - (3x - y) + \left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y - \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y\right)\right\}$

En los ejercicios siguientes, debe reducir los términos semejantes, según corresponda:

a) $m + 2m$

b) $a + 2a + 9a$

c) $m^2 - 2m^2 - 7m^2$

d) $6x^2y^2 - 12x^2y^2 + x^2y^2$

e) $3a - 2b - 5b + 9a$

f) $a^2 + b^2 - 2b^2 - 3a^2 - a^2 + b^2$

g) $x^2yz + 3xy^2z - 2xyz^2 - 3xy^2z + xyz^2 - x^2yz$

h) $2pq + 3p - 12q - 15q + 7pq - 13p$

i) $2x - 6y - 2x - 3y - 5y$

j) $15a + 13a - 12b - 11a - 4b - b$

a) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$

b) $\frac{a^2b}{5} - \frac{2ab^2}{3} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{6a^2b}{5}$

c) $m - \frac{m}{2} + \frac{2m}{3} - \frac{m}{4}$

d) $\frac{3a-b}{2} + \frac{3a-b}{5}$

e) $2p + \frac{3}{4}q - 7p + \frac{3}{2}q$

f) $a + a^2 + a^3 + a^4 - a - 2a^2 + 3a^3 - 4a^4$

g) $0,2m - 0,02n + 1,07m - 1,03n - m - n$

h) $0,5x^2y - 0,4xy^2 + 0,3x^2y - 0,2xy^2 + x^2y$

i) $1,17a - 2,15a - 3,25a + 4,141a$

j) $1 + x + xy - 2 + 2x - 3xy - 3 + 2xy - 3x$

k) $\frac{1}{5}m^2n - \frac{2}{3}mn - \frac{3}{2}m^2n + \frac{3}{10}m^2n - \frac{8}{3}mn$

l) $\frac{27}{4}p - \frac{35}{6}q + \frac{1}{4}p - \frac{1}{6}q$

m) $u^2 + uv + v^2 - 2u^2 + 3uv - v^2$

n) $\frac{11}{3}s - \frac{3}{4}t + \frac{2}{3}s - \frac{1}{3}s - \frac{5}{3}s + t + \frac{1}{4}t$

o) $0,117a - 0,35b - 2,25b - 1,1b + 3,04a$

p) $10a + 5a^2 - 13a^3 - 2a - 9a^3 + 16a^2 + a$

q) $\frac{1}{6}pt - \frac{2}{5}p - \frac{3}{4}t + \frac{2}{3}pt - \frac{3}{5}p + \frac{7}{4}t + \frac{1}{6}pt$

r) $x^2yz - xy^2z^2 + xy^2z^2 - x^2y^2z^2$

s) $\frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{3}ab^2 - a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}ab^2$

t) $0,7m - \frac{1}{7}p - 0,04m + 0,3p - \frac{3}{4}p$

(Ejercicios recopilados)

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PRÁCTICA

Los comerciantes, de un mercado se encuentran vendiendo sus productos en las calles, ofreciendo ropa, frutas, verduras, juguetes, zapatos, etc.

Debido al comercio, los vecinos del lugar hicieron aprobar la construcción de un mercado donde deben instalarse los comerciantes.



Actividad

Analiza lo sucedido y responde las siguientes preguntas:

- ¿Los comerciantes deberían ingresar o no a uno de los puestos del mercado?
- ¿Cómo deberían organizarse los representantes de los comerciantes?
- ¿Cómo aplicamos nuestros conocimientos algebraicos para esta distribución?

TEORÍA

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

El álgebra se diferencia de la aritmética porque, a través del uso de letras, se vale de abstracciones para representar variables o cantidades desconocidas. Asimismo, permite escribir fórmulas (llamadas fórmulas algebraicas) que expresan una regla o principio y que facilitan la resolución de ecuaciones.

RECUERDA

Para sumar y restar números debemos tomar en cuenta lo siguiente:

- Signos iguales se suman y se copia el mismo signo.
- Signos diferentes se restan, pero se copia el signo del número mayor.

$$= \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}m + 3m - m - \frac{3}{4}m - 2m - \frac{1}{4}m = \frac{4m + 8m + 36m - 12m - 9m - 24m - 3m}{12} = \frac{48m - 48m}{12} = 0m$$

1. Operaciones con expresiones algebraicas

Las operaciones que se puedan dar entre expresiones algebraicas son: suma, resta, multiplicación y división de monomios y polinomios entre sí.

a) Adición

- Adición de monomios

Para realizar la adición algebraica de monomios se efectúan las operaciones indicadas de suma y resta con los coeficientes de cada término, el resultado mantiene la parte literal correspondiente. En otras palabras, cuando sumamos y restamos monomios simplemente estamos reduciendo términos semejantes.

Ejemplos:

$$1. \quad 3x; 5x; -7x; 13x; -9x; -20x; -2x; 24x; x$$

$$3x + 5x - 7x + 13x - 9x - 20x - 2x + 24x + x = +46x - 38x = 8x$$

$$2. \quad 2a; 3b; -5a; 10b; -6a; -12b; 5a; 13bx; a; 2b; 2a; -6b$$

$$2a + 3b - 5a + 10b - 6a - 12b + 5a + 13b + a + 2b + 2a - 6b =$$

$$= 10a - 11a + 28b - 18b = -a + 10b$$

$$3. \quad \frac{1}{3}m; \frac{2}{3}m; -m; -\frac{3}{4}m; -2m; -\frac{1}{4}m; 3m$$

$$\frac{1}{3}m + \frac{2}{3}m - m - \frac{3}{4}m - 2m - \frac{1}{4}m + 3m =$$

Encontramos el resultado de sumar los siguientes monomios:

- $6a; 3a; 10a; -8a; -5a; -12a; 9a; 33a; -22a; -a; 3a$
- $4x; 3y; -5x; -6y; -9x; 13y; -7x; 8y; x; -y; 12x; 10y$
- $\frac{2}{3}n; \frac{1}{4}n; -2n; -\frac{5}{4}n; -\frac{5}{3}n; \frac{3}{4}n; \frac{2}{5}n; -n; 4n$

Actividad

- Adición de polinomios

El resultado de sumar dos o más polinomios es otro polinomio que se obtiene reduciendo los términos semejantes en los sumandos.

Para sumar dos o más polinomios se colocan las expresiones uno de bajo del otro, de tal modo que los términos semejantes queden en una misma columna.

Después se suman o se restan los coeficientes dependiendo de los signos de todos los términos, en lo posible todos los polinomios se deben ordenar en forma descendente. En la adición de polinomios se pueden considerar tres métodos para encontrar el resultado: de forma horizontal, vertical y de coeficientes separados.

ORDEN DE UN POLINOMIO

A la hora de realizar operaciones con expresiones algebraicas o polinomios, estos deben estar ordenados de forma decreciente o descendente, vale decir: ordenar de grado mayor a grado menor, si faltase algún término se completa con 0.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ 4x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x - 6 \end{array}$$

Ejemplos:

1. $8x + 3y - 2z$; $3y - 4z + 5x$; $3z - 8y + 4x$; $y - 15x + 3z$

Método clásico, de forma horizontal:

$$8x + 3y - 2z + 3y - 4z + 5x + 3z - 8y + 4x + y - 15x + 3z = 2x - y + 0z$$

2. $4x^3 - 5x - 7 + 2x^2$; $2x^3 + 4x - 3x^2 + 3$; $x^3 - 5x + 6x^2 + 2$

Método clásico, de forma vertical:

$$4x^3 + 2x^2 - 5x - 7$$

$$2x^3 - 3x^2 + 4x + 3$$

$$x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$

$$7x^3 + 5x^2 - 6x - 2$$

3. Sean los polinomios: $A(a) = \frac{1}{2}a^3 + 3a - \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{5}$

Hallamos: $A(a) - B(a) =$

$$\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2 + 3a - \frac{3}{5}$$

$$-\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{6}a^3 - a^2 + \frac{7}{2}a - \frac{7}{20}$$

Método de coeficientes separados:

$$4 + 2 - 5 - 7$$

$$2 - 3 + 4 + 3$$

$$1 + 6 - 5 + 2$$

$$7 + 5 - 6 - 2 \rightarrow 7x^3 + 5x^2 - 6x - 2$$

$$B(a) = \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}$$

Operaciones auxiliares:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1-3}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$-\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{-12+5}{20} = -\frac{7}{20}$$

4. Sean los polinomios: $P(x) = x^4 + 2x - 3x^2 + 1$ $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x^4 - 2$ $R(x) = 3x^4 + 3 - 5x$

Hallamos: $P(x) + Q(x) - R(x) =$

$$P: 1x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$Q: 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 0x - 2$$

$$-R: -3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 5x - 3$$

$$2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 7x - 4$$

$$2Q(x) + 3R(x) - 2P(x) =$$

$$2Q: 8x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 0x - 4$$

$$3R: 9x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 15x + 9$$

$$-2P: -2x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 4x - 2$$

$$15x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 19x + 3$$

Determinamos el resultado de sumar los siguientes monomios:

a) $4x + 2y - 3z$; $2y + 5x - 7z$; $9z - 6y + 11x$; $z - 19x + 2y$

b) $5x^3 - 6x - 3 + 3x^2$; $3x^3 - 5x + 4x^2 + 2$; $2x^3 - 3x + 7x^2 + 1$

Dados los polinomios, operamos:

$$P(x) = x^3 + 3x - 2x^2 + 4$$

$$Q(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x^4 - 1$$

$$R(x) = 2x^4 + 4 - 6x$$

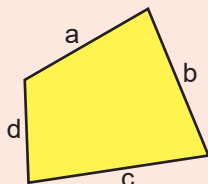
$$2P(x) + R(x) - Q(x) =$$

$$R(x) + 2Q(x) - 3P(x) =$$

$$4P(x) - 2Q(x) - R(x) =$$

PERÍMETRO

Encontrar el perímetro de una figura regular o irregular es sumar las longitudes de sus lados.

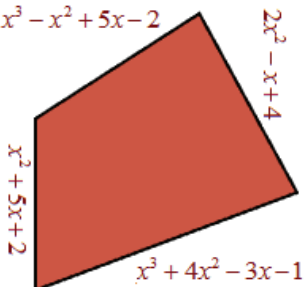


- Aplicación geométrica

La aplicación de la adición de polinomios ésta dado en encontrar el perímetro de una figura regular o irregular.

Ejemplos:

1. $x^3 - x^2 + 5x - 2$



$$x^3 - x^2 + 5x - 2$$

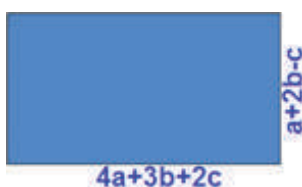
$$0x^3 + x^2 + 5x + 2$$

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 1$$

$$\underline{0x^3 + 2x^2 - x + 4}$$

$$P = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 3$$

2.



$$4a - 3b + 2c$$

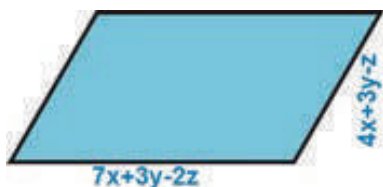
$$a + 2b - c$$

$$4a - 3b + 2c$$

$$\underline{a + 2b - c}$$

$$P = 10a - 2b + 2c$$

3. Hallamos el perímetro de la figura para valores de: $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$



$$7x + 3y - 2z$$

$$4x + 3y - z$$

$$7x + 3y - 2z$$

$$\underline{4x + 3y - z}$$

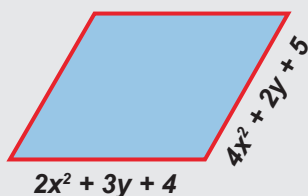
$$P = 22x + 12y - 6z$$

$$P(x, y, z) = 18x + 12y - 6z$$

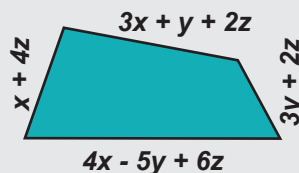
$$P(4, 2, 1) = 18(4) + 12(2) - 6(1) = 72 + 24 - 6 = 90$$

Determinamos el perímetro de las siguientes figuras:

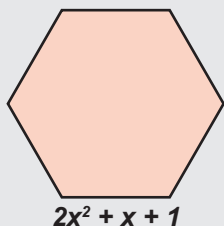
a)



c)



b)



d)



b) Multiplicación

- Monomio por monomio

Para multiplicar monomios entre sí, se multiplican los coeficientes (parte numeral), luego se multiplican las variables (parte literal) aplicando las reglas correspondientes, recordando que el producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene la misma base y el exponente se obtiene sumando los exponentes de los factores.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

- $3x \cdot 2x = (3 \cdot 2)(x \cdot x) = 6x^2$
- $(-5xy) \cdot (2xy^2) = (-5 \cdot 2)(xy \cdot xy^2) = -10x^2y^3$
- $\left(\frac{5}{8}abc\right) \cdot \frac{4}{7}a^2b^2c = \left(\frac{5}{\cancel{2}^1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{7}\right)(abc \cdot a^2b^2c) = \frac{5}{14}a^3b^3c^2$
- $\left(-1\frac{1}{4}mn^2\right) \cdot \left(-2\frac{2}{5}m^2n^3\right) = \left(\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{4}^1} \cdot \frac{\cancel{12}^3}{\cancel{5}^1}\right)(mn^2 \cdot m^2n^3) = 3m^3n^5$
- $\left(\frac{3}{8}x^2y^2\right) \cdot \left(\frac{16}{9}xy\right) = \left(\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{8}^2} \cdot \frac{\cancel{16}^2}{\cancel{9}^3}\right)(x^2y^2 \cdot xy) = \frac{2}{3}x^3y^3$

- Monomio por polinomio

En la multiplicación de un monomio por un polinomio, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, se utiliza también la regla de signos, para coeficientes y propiedades de potencias para la parte literal.

Ejemplos:

- $2 \cdot (x^2 - 3 + 4x) = 2 \cdot (x^2 + 4x - 3) = 2x^2 + 8x - 6$
- $4a \cdot (2a^2 - 4 + 3a) = 4a \cdot (2a^2 + 3a - 4) = 8a^3 + 12a^2 - 16a$
- $(-5m^2 - 3m + 6) \cdot (-5m) = 25m^3 + 15m^2 - 30m$
- $\left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{2}a - 2\right) \cdot \frac{4}{3}a = \left(\frac{12}{12}a^3 + \frac{36}{6}a^2 - \frac{8}{3}a\right) = a^3 + 6a^2 - \frac{8}{3}a$
- $\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{27}x^2 + \frac{24}{36}x - \frac{16}{27}\right) = \frac{8}{27}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{16}{27}$

PARA MULTIPLICAR

Si vamos a multiplicar expresiones algebraicas, debemos tomar en cuenta lo siguiente

Regla de signos:

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

Propiedad distributiva:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

RECORDANDO

Cuando multiplicamos números, se multiplican de forma normal:

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$5 \cdot (-3) = -15$$

$$-5 \cdot 6 = -30$$

$$(-4) \cdot (-8) = 32$$

Cuando multiplicamos variables o letras, debemos tomar en cuenta la siguiente propiedad:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$x \cdot x = x^{1+1} = x^2$$

$$a \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$$

Determinamos el producto de las siguientes expresiones:

$$2p \cdot (-5p^2) =$$

$$3 \cdot (x^2 - 2 + 3x) =$$

$$13mn \cdot 3m^2n^3 =$$

$$(x^2 - y^2 + 2xy) \cdot 3xy =$$

$$\left(-\frac{12}{55}x^2\right) \cdot \left(-\frac{11}{24}x^2y\right) =$$

$$4m \cdot (m^2 - 5 + 2m) =$$

$$10x \cdot (-2x^3) =$$

$$(-2a) \cdot (-3a^3 - 3 + 4a^2 + 5a) =$$

$$(32a^2b^2c^2) \cdot (-4abc) =$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{2}\right) \cdot 12x =$$

$$(-3abc) \cdot (-4ac) =$$

$$(-2a) \cdot (2 + 3a^2 - 4a) =$$

$$8xy \cdot 5x^2y^2 =$$

$$(m^2 - 4 + 3m) \cdot (-5m) =$$

- Polinomio por polinomio

Al igual que en el caso anterior, cuando el multiplicador es un polinomio, se aplica también la propiedad distributiva de la multiplicación para cada uno de los términos del multiplicador; luego se realiza la reducción de términos semejantes. Todos los polinomios deben estar ordenados en forma descendente.

La multiplicación de polinomios se puede realizar de dos maneras: vertical y horizontal.

ÁLGEBRA Y ALGO MÁS

Una vez le enviaron a Cauchy un artículo que pretendía demostrar que $x^3+y^3+z^3=t^3$ no tenía soluciones enteras. Cauchy devolvió el manuscrito con una simple nota en la que se podía leer: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

CURIOSO

El origen de los números negativos se sitúa en la India, donde los matemáticos del siglo VII los usaban para indicar deudas.

Ejemplos:

1) $(n-8)(n+3)=$

Multiplicación de manera horizontal:

$$(n-8)(n+3) = n^2 + 3n - 8n - 24 = n^2 - 5n - 24$$

Multiplicación de manera vertical:

$$\begin{array}{r} n \quad -8 \\ \cdot n \quad +3 \\ \hline +3n \quad -24 \\ n^2 - 8n \\ \hline n^2 - 5n - 24 \end{array}$$

2) $(2x^2 - 3x + 5)(3x + 4)=$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -3x \quad +5 \\ \cdot \quad \quad +3x \quad +4 \\ \hline +8x^2 \quad -12x \quad +20 \\ 6x^3 - 9x^2 + 15x \\ \hline 6x^3 - x^2 + 3x + 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad +5 \\ \cdot \quad \quad +3 \quad +4 \\ \hline +8 \quad -12 \quad +20 \\ 6 \quad -9 \quad +15 \\ \hline 6 - 1 + 3 + 20 \rightarrow 6x^3 - x^2 + 3x + 20 \end{array}$$

Realizamos los siguientes productos:

$$(3x+1) \cdot (4x-3) =$$

$$(2m^2 - 7 - m) \cdot (m^3 + 3m - 5) =$$

$$(6 - 3m + 2m^2) \cdot (m^4 - 2m + 1) =$$

$$(ab - 2a^2 + 3b^2) \cdot (a^2 - 5ab + 2b^2) =$$

$$(u^2 + 2u^3 + 4u^4 - 3) \cdot (u^2 + 3 - 5u) =$$

$$(a^2 - 3a + 4) \cdot (2a^2 - 5 + 3a) =$$

$$(4x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 10 - 2x) =$$

$$(8a-3) \cdot (a^2 - 7 + 6a) =$$

$$(7-4p) \cdot (3p^3 - 1 + 2p^2) =$$

$$(y^2 - 5 + 7y) \cdot (y^2 - 2 - 3y) =$$

$$(x^3 - 2 + 3x + 2x^2) \cdot (2x^2 - 3 + 4x) =$$

$$(5y^2 - 3 - 2y) \cdot (4y^3 - 1) =$$

$$(4n+3) \cdot \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}n \right) =$$

$$(3+2x-4x^2) \cdot (5x-7) =$$

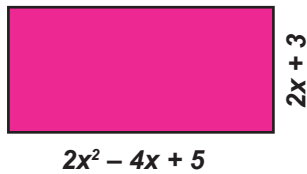
- Aplicación geométrica

La aplicación de la multiplicación de polinomios en geometría, está dado por encontrar el área de una figura regular. Conociendo los lados de la figura y reemplazando en las diferentes fórmulas podemos encontrar su área.

Ejemplos:

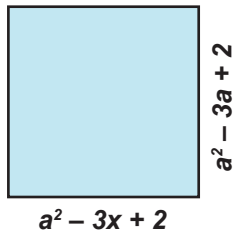
Resolver cada ejercicio.

- 1) Determinar el área del rectángulo:



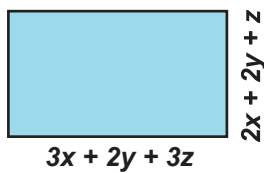
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 5 \\ + 2x + 3 \\ \hline + 6x^2 - 12x + 15 \\ 4x^3 - 8x^2 + 10x \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 2x + 15 \end{array}$$

- 2) Calcular el área de la figura:



$$\begin{array}{r} a^2 + 3a + 2 \\ \times a^2 + 3a + 2 \\ \hline 2a^2 + 6a + 4 \\ + 3a^3 + 9a^2 + 6a \\ \hline a^4 + 3a^3 + 2a^2 \\ \hline a^4 + 6a^3 + 13a^2 + 12a + 4 \end{array}$$

- 3) Hallar el área de la figura si sus valores son: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$



$$\begin{array}{r} 3x + 2y + 3z \\ 2x + 2y + z \\ \hline + 3xz + 2yz + 3z^2 \\ + 6xy + 4y^2 + 6yz \\ \hline 6x^2 + 4xy + 6xz \\ \hline 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 10xy + 9xz + 8yz \end{array}$$

$$A(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 10xy + 9xz + 8yz$$

$$A(5, 2, 1) = 6(3)^2 + 4(1)^2 + 3(1)^2 + 10(3)(1) + 9(3)(1) + 8(1)(1)$$

$$A = 54 + 4 + 3 + 30 + 27 + 8 = 126$$

ÁREAS

Cuadrado

$A = a^2 = a \cdot a$

Rectángulo

$A = a \cdot b$

Triángulo

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

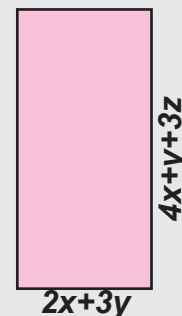
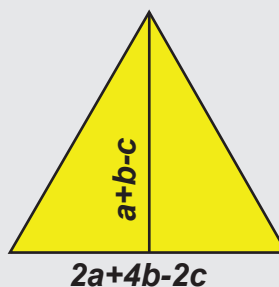
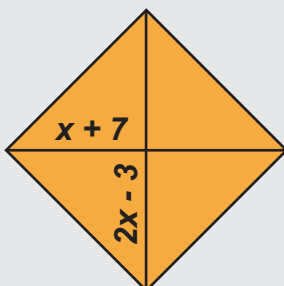
Rombo

$A = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$

Polígono regular

$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$

Determinamos el área de las siguientes figuras:



c) División

- Monomio entre monomio

Para dividir monomios entre sí, primero se multiplican los signos si hubiese, luego los coeficientes numéricos, seguidamente se dividen las partes literales aplicando las reglas operatorias, especialmente las que corresponden al cociente de potencias de la misma base, recordemos que el cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene la misma base y el exponente se obtiene restando los exponentes de los factores.

RECORDANDO

Cuando dividimos números, debemos se realizan los signos:

$$\begin{aligned} 30 \div 3 &= 10 \\ 51 \div (-17) &= -3 \\ -50 \div 10 &= -5 \\ (-64) \div (-8) &= 8 \end{aligned}$$

Cuando dividimos variables o letras, debemos tomar en cuenta la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= a^{m-n} \\ x^2 \div x &= x^{2-1} = x \\ a^4 \div a^2 &= a^{4-2} = a^2 \end{aligned}$$

Ejemplos:

- $62xy^2 \div 31xy = \frac{62xy^2}{31xy} = 2y$
- $x^2y^3z^4 \div xy^2z^2 = \frac{x^2y^3z^4}{xy^2z^2} = xyz^2$
- $8a^2 \div (-2a^2) = \frac{8a^2}{-2a^2} = -4$
- $120m^2n^2 \div 150mn^2 = \frac{120m^2n^2}{150mn^2} = \frac{4}{5}m$
- $\left(-\frac{3}{4}xy^2z\right) \div \left(-\frac{9}{8}xyz\right) = \frac{-\frac{3}{4}xy^2z}{-\frac{9}{8}xyz} = \frac{24}{36}y = \frac{2}{3}y$

- Polinomio entre monomio

Para realizar la división de un polinomio por un monomio, en primera instancia se opera con la regla de signos, se aplica la propiedad distributiva de la división respecto de la adición algebraica, pero sólo cuando el divisor es un monomio.

PARA DIVIDIR

Si vamos a dividir expresiones algebraicas, debemos tomar en cuenta la regla de signos:

$$\begin{aligned} + \div + &= + \\ + \div - &= - \\ - \div + &= - \\ - \div - &= + \end{aligned}$$

Propiedad distributiva:

$$(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$$

Ejemplos:

- $(12x^3 - 8x^2 + 16x) \div 4x = \frac{12x^3}{4x} - \frac{8x^2}{4x} + \frac{16x}{4x} = 3x^2 - 2x + 4$
- $(15a^2 - 5a - 10) \div (-5) = \frac{15a^2}{-5} - \frac{5a}{-5} - \frac{10}{-5} = -3a^2 + a + 2$
- $(35m^5 + 45m^4 - 15m^3) \div (5m^2) =$
 $= \frac{35m^5}{5m^2} + \frac{45m^4}{5m^2} - \frac{15m^3}{5m^2} = 7m^3 + 9m^2 - 3m$
- $(50x^4y^2 - 35x^2y^3 + 25xy^4 - 10x^2y^2) \div (-15xy) =$
 $= \frac{50x^4y^2}{-15xy} - \frac{35x^2y^3}{-15xy} + \frac{25xy^4}{-15xy} - \frac{10x^2y^2}{-15xy} = -\frac{10}{3}x^3y + \frac{7}{3}xy^2 - \frac{5}{3}y^3 + \frac{2}{3}xy$

Resolvemos las siguientes divisiones:

- $33xy \div 11x =$
- $(-36a^2b^2c) \div 30abc =$
- $(-54x^3y^2) \div (-18xy^2) =$
- $(4xyz) \div (16xz) =$
- $(14m^4n^3) \div (-12m^3n^2) =$
- $\left(-\frac{12}{35}x^2\right) \div \frac{6}{5}x =$
- $(21x^4 - 33x + 18x^2 + 15x^3) \div (3x) =$
- $(49m^4n^2 + 14m^2n^4 - 63m^2n^3) \div (-7mn) =$
- $(32a^4b^2c - 44a^2b^4c^2) \div (2a^2b^2c) =$
- $(20x^2yz - 55xy + 15xz - 100x) \div (-5x) =$
- $(15x^3 + 2x - 3x^2 + 18x^4) \div (-5x) =$
- $\left(\frac{3}{4}a^3 + \frac{5}{2}a^4 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{5}{4}a\right) \div \left(-\frac{4}{5}a\right) =$

- De polinomios

Cuando la división es entre polinomios, el procedimiento es similar al que se ha empleado en la división de números naturales.

- Método clásico

Para dividir por este método, se sigue los siguientes pasos:

- Se ordenan tanto el dividendo como el divisor y se completan si es necesario de forma descendente.
- El primer término del dividendo se divide por el primer término del divisor.
- Se multiplica el número obtenido por todos los términos del divisor, los productos se trasladan con signo cambiado hacia el dividendo, a continuación, se reducen términos semejantes.
- Se divide nuevamente el primer término del resto del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el cociente de nuestra división.

Ejemplos:

Realizar las siguientes divisiones:

1) $(2x^2 - 3x + 2) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 2 \\ -2x^2 + 6x - 6 \\ \hline +3x + 2 \\ -3x + 9 \\ \hline 11 \end{array}$$

2) $(x^4 - 2x - 1 - x^2) \div (x^2 + 1 + x)$

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - x^2 - 2x - 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 - 2x \\ +x^3 + x^2 + x \\ \hline -x^2 - x - 1 \\ +x^2 + x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

División exacta

$$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x + 1} = x^2 - x - 1$$

3) $(33ab^2 - 24a^2b - 10b^3 + 12a^3) \div (4a^2 - 5b^2)$

$$\begin{array}{r} 12a^3 - 24a^2b + 33ab^2 - 10b^3 \\ -12a^3 + 0 + 15ab^2 \\ \hline -24a^2b + 48ab^2 - 10b^3 \\ +24a^2b + 0 - 30b^3 \\ \hline +48ab^2 - 40b^3 \end{array}$$

División exacta

$$\text{Residuo: } 48ab^2 - 40b^3$$

PARA DIVIDIR

Si la división es inexacta $R \neq 0$, la división se debe escribir:

$$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

$$D = Cd + R$$

Si la división es exacta $R = 0$, la división se escribe:

$$\frac{D}{d} = C$$

$$D = Cd$$

PASOS PARA DIVIDIR:

1º Dividimos el primer número del dividendo entre el primer número del divisor: $2x^2 \div x = 2x$

2º Este número $2x$ se multiplica por los dos números del cociente cambiando de signo:

$$2x \cdot x = 2x^2$$

se anota $-2x^2$

$$2x \cdot (-3) = -6x$$

se anota $+6x$

Se reducen términos semejantes y así sucesivamente se prosigue con los demás números.

Determinamos el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:

- $(x^2 + 4x - 5) \div (x + 2)$
- $(x^2 - x^4 - x + x^5) \div (1 + x^2 - x)$
- $(x^4 + 34 - 11x^2) \div (x^2 - 3)$
- $(3x + 2 - x^2 + x^3) \div (1 - x + x^2)$
- $(8 + x^3 + 4x^2 - 5x) \div (x^2 + 1 - 2x)$
- $(a^3 + 2a^2 - 4) \div (a + 4)$
- $(x^3 + 5 - 7x) \div (x^2 - 3x + 4)$
- $(2x^3 + 2 - 3x + x^4) \div (x^2 - 2x + 1)$
- $(9x^2 - 4 + x^5 - 3x^4 + 7x) \div (2 - 3x + x^2)$
- $(5ab^2 - 9b^3 - 6a^2b + 8a^3) \div (2a - 3b)$

- Método de Horner

Es un método general para dividir polinomios, debemos verificar que los dos polinomios estén completos ordenados de forma decreciente. Tomamos en cuenta la siguiente estructura para acomodar el dividendo y el divisor.

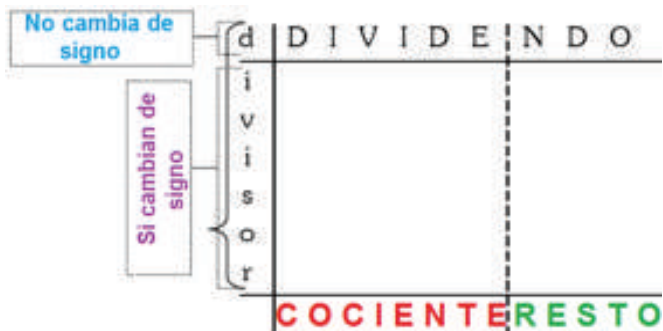
PASOS PARA DIVIDIR

1° Trasladamos los coeficientes del dividendo y del divisor en el esquema.

2° Se divide el 1er coeficiente del dividendo entre el 1er coeficiente del divisor: $12 \div 3 = 4$; este resultado se coloca en la primera columna y debajo de la segunda línea horizontal, luego se multiplica por los coeficientes del divisor que han sido cambiados de signo: $4 \times 7 = 28$; $4 \times 4 = 16$; ambos resultados se colocan en la 2da y 3ra columna, respectivamente y en una fila.

3° Luego la suma de la segunda columna: $28 + (-7) = 21$; se vuelve a dividir entre el primer coeficiente del divisor ($21 \div 3 = 7$), resultado que se coloca en la 2da columna y debajo de la segunda línea horizontal.

Se multiplica por los coeficientes del divisor que han sido cambiados de signo, estos productos: 49 y 28 se colocan en la 3ra y 4ta columna y debajo de la primera fila en que se colocaron los anteriores productos, con la suma de la tercera columna se procede en forma análoga que la anterior, pero las cantidades de las columnas que están a la derecha de la 2da línea vertical se suman y ya no se dividen entre el primer coeficiente del divisor, simplemente se colocan en el espacio destinado a los coeficientes del residuo.



Ejemplos:

Dividir:

$$1) (12x^4 - 74x^2 - 7x^3 + 16 - 7x) \div (3x^2 - 4 - 7x)$$

	3	12	-7	-74	-7	16
	7		28	16		
	4			49	28	-12
					-21	
		4	7	-3	0	4

$$C: 4x^2 + 7x - 3 \quad R = 4$$

$$2) (15x^6 - 23 - 9x^5 + 70x^3 + 56x^4 + 73x) \div (3x^3 + 11 + 7x)$$

	3	15	-9	21	36	0	73	-23
	0		0	-35	-55			
	-7			0	21	33		
	-11				0	-49	-77	
						0	-84	-132
		5	-3	7	12	-16	-88	-155

$$C: 5x^3 - 3x^2 + 7x + 12 \quad R = -16x^2 - 88x - 155$$

Dividimos las siguientes expresiones por el método de Horner:

- $(3x^4 + 4 - 5x^2) \div (x^2 + 1)$
- $(3x + 4 - 3x^2 + x^3) \div (2 - x + x^2)$
- $(x^2 - 2x^4 - 3x + 2x^5) \div (2 + x^2 - x)$
- $(6 + x^3 + 3x^2 - 4x) \div (x^2 + 2 - 3x)$
- $(x^4 - 1) \div (x^2 + 1)$
- $(x^2 - 1 + x^4 + 2x) \div (1 - x + x^2)$
- $(4x^2 - 3 + x^5 + 3x) \div (2 - 2x + x^2)$
- $(5x^2 - 2 + x^5 - 4x^4 + 6x) \div (4 - 2x + x^2)$

- Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

La división sintética o regla de Ruffini es una regla práctica que permite determinar los coeficientes del cociente y el residuo de la división de un polinomio por un binomio. La división por este método se realiza tomando en cuenta el siguiente procedimiento:

- Verificar que el divisor sea un binomio de la forma: $(x \pm a)$ o $(cx \pm b)$, donde a es divisor del término independiente del polinomio dividendo.
- Se ordena y se completa si es necesario el polinomio dividendo en forma descendente, de igual manera se ordena el divisor.
- Se copian los coeficientes de los términos del dividendo en la parte superior y se anota con signo cambiado el segundo término del divisor en la parte izquierda.
- Se baja el primer coeficiente para multiplicar en forma diagonal y sumar o restar dependiendo del signo en forma vertical.
- El último número de la regla es el residuo de nuestra división y los coeficientes hacia la derecha son parte del cociente.

Ejemplos:

Dividir mediante Ruffini las siguientes expresiones:

1) $(x^2 + 3 - 4x) \div (x - 2)$

	1	-4	3
2	1	-4	3
	1	-2	1

	1	-4	3
2	1	-4	3
	1	-2	1

Por tanto: $C: x - 2$ $R = 1$

2) $(a^4 + 8a - 18 - 3a^3) \div (a + 3)$

	1	-3	0	8	-18
-3	1	-3	0	8	-18
	1	-6	18	-54	126
	1	-6	18	-42	108

Por tanto: $C: x^3 - 6x^2 + 18x - 42$ $R = 108$

Utilizamos el método de Ruffini para encontrar el cociente y el residuo de las divisiones:

- $(u^3 + 3 - 5u + 3u^2) \div (u - 1)$
- $(-2x^3 + x^4 - 3x + 10) \div (x + 2)$
- $(10y^5 - 7 - 16y^3 + 12y^2) \div (y + 2)$
- $(2a^3 - a^4 + 2a^2 + 1 - 7a) \div (a + 4)$
- $(n^4 - 7n - 5 + 2n^2 + 4n^3) \div (3 + n)$
- $(2x^5 - 5x + 17 - 3x^4 - 4x^2) \div (x - 1)$
- $(3x^5 - 7x + 1 - 4x^4 - 3x^2) \div (x + 5)$
- $(m^5 + 3m + 1 - 2m^4 - 4m^2) \div (m - 3)$

- Teorema del resto

Así cómo es posible hallar el cociente y el residuo de una división indicada aplicando la regla de Ruffini, también es posible hallar el resto o residuo por simple inspección o valor numérico, este procedimiento recibe el nombre de teorema del resto.

El residuo de dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x \pm a)$ se obtiene sustituyendo el valor opuesto $(\mp a)$ del término independiente del divisor por la variable del dividendo (x) .

$$x + a \ \& \ x = -a$$

$$x - a \ \& \ x = +a$$

PASOS PARA DIVIDIR

1º Verificamos primeramente que el divisor sea un binomio.

2º Encontramos el valor de la variable, ya sea x , y , m , etc., despejando su valor.

3º Este valor encontrado se reemplaza en todas las variables.

4º Se toma en cuenta la secuencia lógica de las operaciones aritméticas para encontrar el resultado.

5º Este resultado encontrado es el residuo de la división.

Ejemplos:

Hallar el residuo de las siguientes divisiones:

1) $(2x^5 - 5x + 11 - 2x^4 - 4x^2) \div (x - 1) \quad \& \ x = 1$

$$R = 2(1)^5 - 5(1) + 11 - 2(1)^4 - 4(1)^2$$

$$R = 2(1) - 5(1) + 11 - 2(1) - 4(1) = 2 - 5 + 11 - 2 - 4 = 13 - 11 = 2$$

$$R = 2$$

2) $(a^4 + 3a - 5a^2 - 1) \div (a + 3) \quad \& \ a = -3$

$$R = (-3)^4 + 3(-3) - 5(-3)^2 - 1$$

$$R = 81 - 9 - 5(9) - 1 = 81 - 9 - 45 - 1 = 81 - 55 = 26$$

$$R = 26$$

3) $(2n^3 + 3 - 4n^2 + n) \div (2n + 1) \quad \& \ n = -\frac{1}{2}$

$$R = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$R = 2\left(-\frac{1}{8}\right) + 3 - 4\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + 3 - 1 - \frac{1}{2} =$$

$$R = \frac{-1 + 12 - 4 - 2}{4} = \frac{12 - 7}{4} = \frac{5}{4} \quad R = \frac{5}{4}$$

4) $(y^4 - 4 + 3y^3 + 2y^2 + y) \div (2y - 3) \quad \& \ y = \frac{3}{2}$

$$R = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 4 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} =$$

$$R = \frac{81}{16} - 4 + 3\left(\frac{27}{8}\right) + 2\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{81}{16} - 4 + \frac{81}{8} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$R = \frac{81 - 64 + 162 + 72 + 24}{16} = \frac{339 - 64}{16} = \frac{275}{16} \quad R = \frac{275}{16}$$

Utilizamos el método de Ruffini para encontrar el cociente y el residuo de las divisiones:

- $(x^3 - 2x^2 - 5 + 3x) \div (x - 1)$
- $(a^4 - 3a^2 - 2 + 3a) \div (2a - 1)$
- $(x^3 - 2x^2 - 7 + x) \div (x - 3)$
- $(3m^3 - 2m^2 + 10 + 3m) \div (3m + 2)$
- $(2u^2 - 5u + 3u^3 - 8) \div (u + 2)$
- $(12u^4 - 36a^2 - 2 + 4a + a^3) \div (2a + 3)$
- $(n^4 - 7n + 10 + 2n^2 + 6n^3) \div (n - 2)$
- $(y^4 + 2y^2 - 1 + 2y^3 + 10y) \div (2y + 4)$
- $(2y^3 - y^4 - 4y^2 + 20 - 5y) \div (y + 4)$
- $(3m^6 + 2m - 5m^2 + 3m^4 - m^3 + 1) \div (3m - 6)$

2. Operaciones algebraicas combinadas

También se pueden trabajar combinando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios, pero debemos tener en cuenta el signo negativo de la resta cambiando los signos del polinomio.

Ejemplos: Sean los polinomios:

$$P(x) = 2x^4 + 3x - 2x^2 - 2$$

$$Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x^4 - 4$$

$$R(x) = x^4 + 2 - 4x^2$$

$$S(x) = x^2 + 1 - 3x$$

$$T(x) = x - 2$$

Encontrar el resultado de las siguientes operaciones:

1) $(P+Q-R) \cdot S =$

$$\begin{array}{r} P: 2 + 0 - 2 + 3 - 2 \\ Q: 1 + 3 - 2 + 0 - 4 \\ R: -1 + 0 + 4 + 0 - 2 \\ \hline 2 + 3 + 0 + 3 - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 + 3 + 0 + 3 - 8 \\ \cdot \quad +1 - 3 + 1 \\ \hline +2 + 3 - 0 + 3 - 8 \\ -6 - 9 + 0 - 9 + 24 \\ \hline +2 + 3 + 0 + 3 - 8 \\ \hline 2x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 17x^2 + 27x - 8 \end{array}$$

2) $(3Q-2P+R) \div T =$

$$\begin{array}{r} 3Q: 3 + 9 - 6 + 0 - 12 \\ -2P: -4 + 0 + 4 - 6 + 4 \\ +R: 1 + 0 - 4 + 0 + 2 \\ \hline 0x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 6x - 6 \end{array}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$R = 0(2)^4 + 9(2)^3 - 6(2)^2 - 6(2) - 6$$

$$R = 9(8) - 6(4) - 12 - 6 = 72 - 24 - 12 - 6 = 72 - 42 = 30$$

$$R = 30$$

3) $(P-Q) \cdot T + (P+R) \cdot S =$

$$\begin{array}{r} P: 2 + 0 - 2 + 3 - 2 \\ -Q: -1 - 3 + 2 + 0 + 4 \\ \hline 1 - 3 + 0 + 3 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} P: 2 + 0 - 2 + 3 - 2 \\ +R: 1 + 0 - 4 + 0 + 2 \\ \hline 3 + 0 - 6 + 3 + 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 - 9 - 3 + 21 - 15 + 3 + 0 \\ + 1 - 5 + 6 + 3 - 4 - 4 \\ \hline 3x^6 - 8x^5 - 8x^4 + 27x^3 - 12x^2 - x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - 3 + 0 + 3 + 2 \\ \cdot \quad +1 - 2 \\ \hline -2 + 6 + 0 - 6 - 4 \\ +1 - 3 + 0 + 3 + 2 \\ \hline 1 - 5 + 6 + 3 - 4 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 + 0 - 6 + 3 + 0 \\ \cdot \quad +1 - 3 + 1 \\ \hline +3 + 0 - 6 + 3 + 0 \\ -9 - 0 + 18 - 9 + 0 \\ \hline +3 + 0 - 6 + 3 + 0 \\ \hline 3 - 9 - 3 + 21 - 15 + 3 + 0 \end{array}$$

OPERACIONES COMBINADAS

1° Debemos ordenar todos los polinomios de forma descendente, si faltan términos debemos completar.

2° Resolver primeramente las operaciones que estén dentro los signos de agrupación.

3° Convenientemente se debe utilizar el método de coeficientes separados.

Sean los polinomios: $P(a) = a^4 + 3a - 2a^2 - 4$

$Q(a) = 2a^3 - 3a^2 + a^4 - 5$

$R(a) = a^4 + 4 - 3a^2 + a$

$S(a) = a^2 + 2 - a$

$T(a) = 2a + 3$

Determinamos el valor de las siguientes operaciones:

• $(P-Q+R) \cdot S =$ • $(P+R) \cdot S + (Q-R) \cdot T =$

• $(Q-P-R) \cdot T =$ • $(P \cdot S) - (R \cdot T) =$

• $(2R+Q-3P) \div S =$ • $(P \div T) - (R \div T) + (S \cdot R) =$

• $(3Q-2R+P) \div T =$ • $(2P-3R) \cdot T + (3R-2Q) \cdot S =$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

El álgebra es una herramienta fundamental en la matemática y en la vida cotidiana. Su comprensión y aplicación resultan esenciales para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, así como para la resolución de problemas cotidianos, además están expresados en forma de expresiones algebraicas los cuales son resueltos siguiendo los pasos que corresponde y aplicados a diferentes situaciones y contextos.



APLICACIONES DE LAS OPERACIONES CON POLINOMIOS

En Ingeniería forestal, necesitamos la geometría para calcular áreas, pero también los polinomios para calcular cuántos árboles necesitamos replantar después de haber talado en un bosque.

En física, en el cálculo de la trayectoria de proyectiles (son parabólicas), o en el cálculo de órbitas de satélites o cohetes.

En Estadística, las rectas de regresión se expresan mediante ecuaciones lineales y también pueden ser polinomios con más de una variable, como ocurre en la regresión lineal múltiple.

El uso de polinomios en el área de la salud es amplio, desde el cálculo de las dosis más adecuadas de un medicamento, o el peso de un paciente enfermo en función del tiempo.

Ejemplos:

1) Se pateo una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza, medida desde el suelo en función del tiempo, está dada por la fórmula:

$h(t) = t^2 - 6t + 2$, donde h representa la altura medida en metros y t el tiempo, medido en segundos.

a. Si el tiempo que tarda en llegar al suelo es de 10 segundos, ¿desde qué altura se lanzó?

$$t = 10 \quad h(10) = 10^2 - 6(10) + 2$$

$$h = 100 - 60 + 2 = 102 - 60 = 42$$

$h = 42 \text{ m}$ Fue lanzado desde los 42 metros.

b. Si el tiempo es nulo, ¿cuál es la altura mínima de reposo?

$$t = 0 \quad h(0) = 0^2 - 6(0) + 2$$

$$h = 0 - 0 + 2 = 2$$

La pelota se encuentra en reposo a los 2 metros

2) Los costos de los gastos se representan por la ecuación:

$C(x) = 2x^2 - 60x$. Los ingresos de las ventas se representan por la ecuación: $I(x) = 8050 - 420x$.

a. Determinar el polinomio que representa la ganancia de la empresa.

$$G(x) = C(x) - I(x) \quad \& \quad G(x) = 2x^2 - 60x - (8050 - 420x)$$

$$G(x) = 2x^2 - 60x - 8050 + 420x$$

$$G(x) = 2x^2 + 360x - 8050$$

b. Si x representa el total de objetos que vendieron, encuentra la ganancia obtenida por la empresa después de vender 100 objetos.

$$x = 100 \quad G(100) = 2(100)^2 + 360(100) - 8050 =$$

$$G(100) = 2(10000) + 36000 - 8050 =$$

$$G = 20000 + 36000 - 8050 = 47950$$

La compañía obtiene una ganancia de Bs. 47950

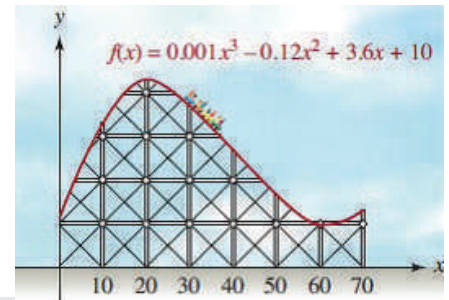
Resolvemos los siguientes problemas:

- Encontrar la ganancia de una tienda que vende muebles en un mes en el que se vendieron 210 muebles. La ganancia se calcula restando los gastos de los ingresos. Los gastos mensuales se determinan por el polinomio $C(x) = 6x^2 - 20x - 4$ y los ingresos están determinados por $I(x) = 3500 - 230x + 8x^2$
- Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba de forma parabólica. La ecuación de la trayectoria está dada por la fórmula: $h(t) = 2t^2 - 3t + 10$, donde h representa la altura medida en metros y t el tiempo, medido en segundos.
 - a. Si el tiempo que tarda en llegar al suelo es de 25 segundos, ¿desde qué altura se lanzó?
 - b. ¿Qué altura alcanza la pelota si el tiempo de viaje es de 5 segundos?

VALORACIÓN

Los resultados de operar con expresiones algebraicas se pueden representar gráficamente, este hecho resuelve variados problemas en distintas áreas de la ciencia y la vida cotidiana: se usan en problemas de economía y de ingeniería, por ejemplo.

En economía aparecen para modelizar los mercados, mostrando cómo los precios varían con el tiempo; o cómo la subida o bajada del precio de un producto repercute en sus ventas, incluso en el cálculo de impuestos.



Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿En qué situaciones cotidianas se aplican las operaciones de suma y resta algebraica?, citamos tres ejemplos y explicarlos en la clase.
- Citamos una situación tecnológica en la que se aplican la multiplicación y/o división algebraica, compartir el dato con tus compañeras y compañeros de clase, dialogando sobre cada tema expuesto.
- ¿Se considera importante la aplicación de operaciones algebraicas en la resolución de problemas en nuestro contexto?, ¿por qué?

PRODUCCIÓN

Los polinomios son una combinación de varios términos que pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse (siempre que el divisor no sea nulo).

Actividad

Investigamos cuáles son los usos y la importancia que tienen en las siguientes áreas, citamos dos ejemplos:

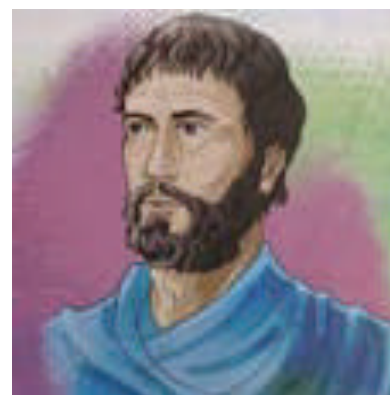
Áreas	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Mecánica de fluidos.		
Geología		
Astronomía	Movimiento (trayectoria) de las estrellas	
Química		
Medicina		
Biología		
Pronostico del clima		
Propagación de una enfermedad	Función de crecimiento poblacional bacteriológico	
Economía	Presupuestos de gastos	
Ingeniería eléctrica y electrónica		
Ingeniería de sistemas		
Ingeniería industrial	Construcción o planeamiento de materiales	

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

PRÁCTICA

Diofanto fue un matemático que aportó bastante en el estudio y tratamiento de las ecuaciones, que en su tumba dejó un acertijo matemático que se resuelve con ecuaciones algebraicas.

En una unidad educativa del oriente, Mario le pregunta a Aneth la edad de sus padres, ella responde de la siguiente forma: “mi mamá es menor por 4 años que mi padre y la mitad de la edad de mi mamá es 19”.



Diofanto de Alejandría
325-409

Actividad

Respondemos:

- ¿Cómo puedes plantear este problema en tu cuaderno?
- ¿Cuál es la edad de los papás de Josué?

TEORÍA

ECUACIÓN

Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

1. Definición de igualdad

Es la expresión donde dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor:

$$a = b + c$$

$$3x^2 = 4x + 15$$

$$x = 4a$$

Identidad algebraica

Es una igualdad válida para cualquier valor que tomen sus variables.

Ejemplos:

Veamos las siguientes identidades:

1) $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$ Verifiquemos para $a = 2$

$$(2+3)^2 = 2^2 + 6(2) + 9$$

$$(5)^2 = 4 + 12 + 9$$

$$25 = 25$$

Es una identidad para el valor dado.

2) $\frac{x^3 - 8y^3}{x - 2y} = x^2 + 2xy + 4y^2$

Verifiquemos para $x = 4$ $\wedge$ $y = -3$

$$\frac{4^3 - 8(-3)^3}{4 - 2(-3)} = 4^2 + 2(4)(-3) + 4(-3)^2 \rightarrow$$

$$\frac{64 - 8(-27)}{4 + 6} = 16 - 24 + 4(9)$$

$$\rightarrow \frac{64 + 216}{10} = 16 - 24 + 36$$

$$28 = 28$$

Es una identidad para los valores dados.

2. Definición de ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado o ecuación lineal, es una igualdad algebraica cuya potencia es equivalente a uno, su solución es el valor de la incógnita que satisface la igualdad.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma:

$$ax = b$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

Donde x es la incógnita (el valor que no sabemos o el valor desconocido)

Actividad

Verificamos las siguientes identidades para los valores dados:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$(x-7)(x+10) = x^2 + 3x - 70$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$\frac{m^4 - n^4}{m^2 + n^2} = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow m = 10 \wedge n = 4$$

3. Lenguaje matemático

Una de las razones que dificultan el aprendizaje de la matemática es porque se expresan en un lenguaje especial, que es un dialecto del lenguaje natural. El lenguaje matemático es una forma de comunicación a través de símbolos especiales para realizar cálculos matemáticos.

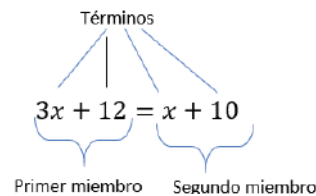
- En el lenguaje natural, sumar es aumentar y restar es disminuir. En el lenguaje matemático, sumar es aumentar o disminuir (si se suma un número negativo).
- El lenguaje matemático o algebraico, requiere una interpretación para traducir las palabras o ideas en expresiones y ecuaciones matemáticas. Existen muchas palabras y frases que sugieren operaciones aritméticas.



4. Elementos de una ecuación

En una ecuación lineal de primer grado, se pueden distinguir varios elementos:

- Incógnita, es la variable o letra que aparece en la ecuación.
- Constante, son los términos independientes de cada miembro, son los números que no acompañan a la variable o incógnita.
- Términos, cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
- Miembro, es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo =.



a) Miembros de una ecuación

Se llama primer miembro de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad, y segundo miembro a la expresión que está a la derecha.

$$\underbrace{3x + 12}_{\text{Primer Miembro}} = \underbrace{x - 10}_{\text{Segundo Miembro}}$$

b) Transposición de términos

Este proceso consiste en llevar los términos de una ecuación de un primer miembro al otro. Esta transposición de términos tiene cuatro posibilidades.

Este método resulta controversial, se trata de comprender que cada una de las operaciones tiene otra operación inversa, así:

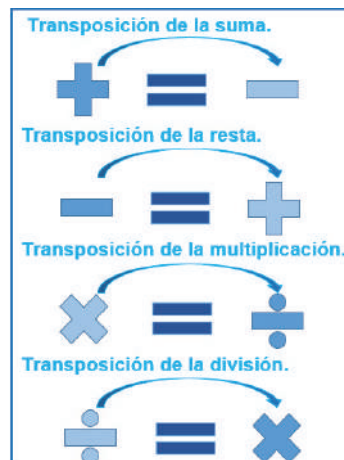
La operación inversa de la adición es la sustracción.

La operación inversa de la sustracción es la adición.

La operación inversa de la multiplicación es la división y

La operación inversa de la división es la multiplicación.

Así que cuando decimos “**pasa al otro miembro a...**”, comprenderemos que en realidad se está “**aplicando la operación inversa**” de cada operación.



ECUACIÓN

Un número: x

Equivale, es, igual: $=$

Aumentado, incrementado: $+$

Reducido, decrecido: $-$

El doble de un número: $2x$

El triplo de un número: $3x$

La mitad de un número: $\frac{x}{2}$

Cinco sextas partes de un número: $\frac{5x}{6}$

La cuarta parte de un número: $\frac{x}{4}$

APLICANDO LA OPERACIÓN INVERSA

- Si un término tiene signo positivo en un miembro, pasa al otro miembro con signo negativo.

$$x + 4 = 2 \Rightarrow x = 2 - 4$$

- Si un término tiene signo negativo, pasa al otro miembro con signo positivo.

$$x - 3 = 5 \Rightarrow x = 5 + 3$$

- Si un término está multiplicando pasa al otro lado a dividir.

$$5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

- Si un término está dividiendo pasa al otro lado a multiplicar. Si un término está dividiendo pasa al otro lado a multiplicar.

$$\frac{x}{2} = 7 \Rightarrow x = 7 \cdot 2$$

5. Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación significa determinar el valor que la incógnita toma de tal modo que satisfaga la igualdad.

a) Ecuaciones lineales sencillas

Para resolver ecuaciones sencillas de primer grado, debemos separar las letras en el primer miembro y los números en el segundo miembro, tomando en cuenta la transposición de términos. Por lo general se dice que para resolver una ecuación lineal de primer grado las x en un miembro y los números en el otro. A veces es necesario verificar la respuesta, el valor encontrado se debe reemplazar en la ecuación dada, si se cumple entonces el valor es correcto, si no se cumple debemos revisar nuestros procedimientos para corregir y hallar el valor verdadero para que se cumpla la igualdad.

VERIFICANDO

$$\begin{aligned}x+1-3x+4 &= 9-2x-5-x \\ -1+1-3(-1)+4 &= 9-2(-1)-5-(-1) \\ -1+1+3+4 &= 9+2-5+1 \\ -1+8 &= 12-5 \\ 7 &= 7\end{aligned}$$

VERIFICANDO

$$\begin{aligned}3x+4-2x+5 &= 10-5x-7+2x \\ 3\left(-\frac{3}{2}\right)+4-2\left(-\frac{3}{2}\right)+5 &= 10-5\left(-\frac{3}{2}\right)-7+2\left(-\frac{3}{2}\right) \\ -\frac{9}{2}+4+3+5 &= 10+\frac{15}{2}-7-3 \\ \frac{-9+8+6+10}{2} &= \frac{20+15-14-6}{2} \\ \frac{-9+24}{2} &= \frac{35-20}{2} \\ \frac{15}{2} &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

Ejemplos:

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $x+1-3x+4=9-2x-5-x$

$$\begin{aligned}x+1-3x+4 &= 9-2x-5-x \\ x-3x+2x+x &= 9-5-1-4 \\ x &= 9-10 \\ x &= -1\end{aligned}$$

2) $3x+4-2x+5=10-5x-7+2x$

$$\begin{aligned}3x+4-2x+5 &= 10-5x-7+2x \\ 3x-2x+5x-2x &= 10-7-4-5 \\ 8x-4x &= 10-16 \\ 4x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ x &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

3) $8+x-5+7x-7=1+12x-11-x$

$$\begin{aligned}8+x-5+7x-7 &= 1+12x-11-x \\ x+7x-12x+x &= 1-11-8+5+7 \\ 9x-12x &= 13-19\end{aligned}$$

$-3x = -6$ $\parallel \cdot (-1)$ Cuando la x sale negativa, se multiplica ambos miembros de la igualdad por -1

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow x = 2$$

Encontramos el valor de las incógnitas en las siguientes ecuaciones:

- $12y-10=-11+9y$
- $5z+6z-81=7z+102+65z$
- $27-8x=21-6x$
- $3n+8-2n+101-26+n=-3n+120-35$
- $11x+5x-1=65x-36$
- $9x+4-3x-1-7+x=2x-15+3x+22$
- $8x-4+3x=7x+14+x$
- $x-2x+3+5+9-4x-3x=3-x+18-2x$
- $8x+9-12x=4x-13-5x$
- $2y+5-3y-y+10=1+y$

b) Ecuaciones de primer grado con signos de agrupación

Para resolver ecuaciones con signos de agrupación, debemos tomar en cuenta que:

- Se hacen desaparecer los signos de agrupación aplicando la propiedad distributiva, regla de signos y en algunos casos desarrollando productos notables.
- Se trasponen los términos de un miembro a otro miembro, la incógnita en un miembro y los números al otro.
- Se reducen términos semejantes y se despeja la variable para encontrar el valor de la incógnita que satisface la ecuación dada.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

Quitamos paréntesis

$$x - 2x - 1 = 8 - 3x - 3$$

Transponemos términos

$$x - 2x + 3x = 8 - 3 + 1$$

Reducimos términos semejantes

$$2x = 6$$

Despejamos la variable

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

Simplificamos la fracción

$$x = 3$$

Solución

2) $10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$

$$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5 + 10x$$

$$10x + 54x - 8x - 10x = -2 + 5 + 90 + 45$$

$$46x = 138$$

$$x = \frac{138}{46} = 3$$

$$x = 3$$

Solución

3) $(3x - 1)^2 - 3(2x + 3)^2 + 42 = 2x(-x - 5) - (x - 1)^2$

$$9x^2 - 6x + 1 - 3(4x^2 + 12x + 9) + 42 = -2x^2 - 10x - (x^2 - 2x + 1)$$

$$9x^2 - 6x + 1 - 12x^2 - 36x - 27 + 42 = -2x^2 - 10x - x^2 + 2x - 1$$

$$9x^2 - 6x - 12x^2 - 36x + 2x^2 + 10x + x^2 - 2x = -1 - 1 + 27 - 42$$

$$-34x = -17$$

$$x = \frac{-17}{-34} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

HISTORIA

Desde el siglo XVII a. C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

Alrededor del siglo I d. C. los matemáticos chinos escribieron "El arte del cálculo", en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado.

PROCEDIMIENTO

1° Se hacen desaparecer signos de agrupación:

$$\{ () \}$$

2° Se trasladan las letras a la izquierda y los números o constantes a la derecha:

$$\text{Letras } (x) = \text{Números}$$

3° Se reducen términos semejantes.

4° Se despeja la variable para encontrar de forma reducida el valor de la incógnita.

Quitamos paréntesis

Propiedad distributiva

Transponemos términos

Reducimos términos semejantes

Despejamos la variable

Simplificamos la fracción

Solución

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

$$2x^2 - (x + 1)^2 + 3x = x(x - 2) + 5$$

$$3x + [-5x - (x + 3)] = 8x + (-5x - 9)$$

$$3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$$

$$3x(x - 3) + 5(x + 7) - x(x - 1) + 2(x^2 + 7) + 4 = 0$$

$$7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$$

$$(x + 1)(x - 2) - (4x - 1)(3x + 5) - 6 = 8x - 11(x - 3)(x + 7)$$

$$(x + 1)^2 + 2(x - 1) - (x + 3)(x - 2) = 2x(x + 1) - (2x + 3)(x - 4) - 11$$

c) Ecuaciones lineales con coeficiente fraccionario

Para resolver ecuaciones de primer grado con fracciones, es necesario seguir los siguientes pasos:

- Si hay signos de agrupación se hacen desaparecer aplicando la propiedad distributiva y la regla de signos.
- Se saca el común denominador de todas las fracciones.
- Se multiplican todas las fracciones por el mcm para eliminar los denominadores de todos los términos.
- Si una fracción tiene por delante el signo negativo, se cambian los signos de los términos de la fracción.
- Se transponen las variables o incógnitas a un lado y los números en el otro.
- Se reducen términos semejantes y se despeja la variable para encontrar la solución de la ecuación.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$1) \frac{x}{2} = \frac{x}{6} - \frac{1}{4}$$

$$12 \cdot \frac{x}{2} = 12 \cdot \frac{x}{6} - 12 \cdot \frac{1}{4}$$

$$6x = 2x - 3$$

$$6x - 2x = -3$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Sacamos el mcm de las tres fracciones: $mcm = 12$

Multiplicamos y simplificamos todas las fracciones por el mcm

Transponemos términos

Reducimos términos semejantes

Despejamos la variable

Solución

$$2) 1 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}$$

$$40 \cdot 1 - 40 \cdot \frac{x-1}{40} = 40 \cdot \frac{2x-1}{4} - 40 \cdot \frac{4x-5}{8}$$

$$40 \cdot 1 - (x-1) = 10(2x-1) - 5(4x-5)$$

$$40 - x + 1 = 20x - 10 - 20x + 25$$

$$-x - 20x + 20x = -10 + 25 - 40 - 1$$

$$-x = -26 \parallel \cdot (-1)$$

$$x = 26$$

Sacamos el mcm de las cuatro fracciones:

Multiplicamos y simplificamos las fracciones por el mcm

Aplicamos la propiedad distributiva

Transponemos términos

Reducimos términos semejantes

Multiplicamos ambos miembros por menos uno

Solución

$$3) \frac{x-5}{5} + \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-2}{3}$$

$$60 \cdot \frac{x-5}{5} + 60 \cdot \frac{x-1}{2} - 60 \cdot \frac{x-3}{4} = 60 \cdot \frac{x-2}{3}$$

$$12(x-5) + 30(x-1) - 15(x-3) = 20(x-2)$$

$$12x - 60 + 30x - 30 - 15x + 45 = 20x - 40$$

$$12x + 30x - 15x - 20x = -40 + 60 + 30 - 45$$

$$7x = 5$$

$$x = \frac{5}{7}$$

Sacamos el mcm de las cuatro fracciones: $mcm = 60$

Multiplicamos y simplificamos las fracciones por el mcm

Aplicamos la propiedad distributiva

Transponemos los términos

Reducimos términos semejantes

Despejamos la variable

Solución

Determinamos el valor de x en las siguientes ecuaciones:

$$\bullet \frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$$

$$\bullet \frac{3x-4}{3} + \frac{2-3x}{2} = \frac{1-x}{4}$$

$$\bullet \frac{x-7}{5} - \frac{x-11}{6} + \frac{x+10}{7} = 2$$

$$\bullet \frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{6} - x = \frac{2-3x}{2} - 1$$

$$\bullet \frac{x-1}{2} - (x-3) + \frac{1}{6} = \frac{x+3}{3}$$

$$\bullet 2x - \frac{5x-6}{4} + \frac{x-5}{3} + 5x = 0$$

$$\bullet \frac{4x+1}{3} + \frac{13+2x}{6} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3}$$

$$\bullet \frac{3x-1}{2} - \frac{5x+4}{3} - \frac{x+2}{8} = \frac{2x-3}{5} - \frac{1}{10}$$

d) Ecuaciones de primer grado con denominadores compuestos

En este tipo de ecuaciones lineales, es necesario y obligatorio factorizar los denominadores de todas las fracciones para después resolverla como una ecuación fraccionaria.

Ejemplos:

Determinar los valores de x en las siguientes ecuaciones:

$$1) \frac{x^2+2}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} = 0$$

Factorizamos los denominadores de las fracciones

$$\frac{x^2+2}{(x+2)(x-2)} - \frac{x}{x-2} = 0$$

Sacamos el mcm de las tres fracciones: $mcm = (x+2)(x-2)$

$$(x+2)(x-2) \cdot \frac{x^2+2}{(x+2)(x-2)} - (x+2)(x-2) \cdot \frac{x}{x-2} = (x+2)(x-2) \cdot 0$$

Multiplicamos y simplificamos las fracciones por el mcd

$$x^2+2-x(x+2)=0$$

Aplicamos la propiedad distributiva

$$x^2+2-x^2-2x=0$$

Transponemos los términos

$$x^2-x^2-2x=-2$$

Reducimos términos semejantes

$$-2x=-2 \quad || \cdot (-1)$$

Multiplicamos ambos miembros por menos uno

$$2x=2$$

Despejamos la variable

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Simplificamos la fracción

$$x=1$$

Solución

$$2) \frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+3}{4x^2-1}$$

Factorizando los denominadores de las fracciones

$$\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+3}{(2x+1)(2x-1)}$$

Sacamos el mcm de las fracciones: $mcm = (2x+1)(2x-1)$

$$(2x+1)(2x-1) \cdot \frac{3}{2x+1} - (2x+1)(2x-1) \cdot \frac{2}{2x-1} = (2x+1)(2x-1) \cdot \frac{x+3}{(2x+1)(2x-1)}$$

Multiplicamos y simplificamos las fracciones por el mcm

$$3(2x-1)-2(2x+1)=x+3$$

Aplicamos la propiedad distributiva

$$6x-3-4x-2=x+3$$

Transponemos los términos

$$6x-4x-x=3+3+2$$

Reducimos términos semejantes

$$x=8$$

Solución

Encontramos el valor de x en las siguientes ecuaciones:

$$\bullet \frac{5}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\bullet \frac{2x-9}{10} + \frac{2x-3}{2x-1} = \frac{x}{5}$$

$$\bullet \frac{5}{1+x} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} = 0$$

$$\bullet \frac{x}{4} - \frac{x^2-8x}{4x-5} = \frac{7}{4}$$

$$\bullet \frac{1}{3} - \frac{x-2}{2x+4} = \frac{x+2}{3x+6}$$

$$\bullet \frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x+4} = \frac{1}{12x-12}$$

$$\bullet \frac{2x+7}{5x+2} - \frac{2x-1}{5x-4} = 0$$

$$\bullet \frac{5x+13}{15} - \frac{4x+5}{5x-15} = \frac{x}{3}$$

$$\bullet \frac{6x-1}{18} - \frac{3(x+2)}{5x-6} = \frac{1+3x}{9}$$

$$\bullet \frac{3}{x-4} = \frac{2}{x-3} + \frac{8}{x^2+12-7x}$$

e) Ecuaciones literales de primer grado

Son ecuaciones en la que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas que figuran en la ecuación están representadas por letras: a, b, c, d, m y n, donde x es la incógnita o variable desconocida. Este tipo de ecuaciones se resuelven siguiendo las mismas reglas que se aplican a las ecuaciones numéricas.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $a(x+a)-x=a(a+1)+1$

$$ax+a^2-x=a^2+a+1$$

$$ax-x=a^2+a+1-a^2$$

$$x(a-1)=a+1$$

$$x=\frac{a+1}{a-1}$$

Quitamos paréntesis

Transponemos términos

Reducimos términos semejantes y factorizamos

Despejamos la variable

Solución

2) $x(3-2b)-1=x(2-3b)-b^2$

$$3x-2bx-1=2x-3bx-b^2$$

$$3x-2bx+3bx-2x=-b^2+1$$

$$x+bx=1-b^2$$

$$x(1+b)=(1+b)(1-b)$$

$$x=\frac{\cancel{(1+b)}(1-b)}{\cancel{1+b}}$$

$$x=1-b$$

Quitamos paréntesis

Transponemos términos

Reducimos términos semejantes

Factorizamos en ambos miembros

Despejamos la variable

Simplificamos la fracción

Solución

3) $\frac{a-1}{x-a}-\frac{2a(a-1)}{x^2-a^2}=-\frac{2a}{x+a}$

$$\frac{a-1}{x-a}-\frac{2a^2-2a}{(x+a)(x-a)}=-\frac{2a}{x+a}$$

$$(x+a)(x-a) \cdot \frac{a-1}{x-a} - (x+a)(x-a) \cdot \frac{2a^2-2a}{(x+a)(x-a)} = -(x+a)(x-a) \cdot \frac{2a}{x+a}$$

$$(x+a)(a-1)-(2a^2-2a)=-2a(x-a)$$

$$ax-x+a^2-a-2a^2+2a=-2ax+2a^2$$

$$ax-x+2ax=2a^2-a^2+a+2a^2-2a$$

$$3ax-x=3a^2-a$$

$$x(3a-1)=a(3a-1)$$

$$x=\frac{a\cancel{(3a-1)}}{\cancel{3a-1}}=a$$

$$x=a$$

Factorizando los denominadores de las fracciones

Sacamos el mcm de las fracciones: $mcm = (x+a)(x-a)$

Multiplicamos y simplificamos las fracciones por el mcm

Quitamos paréntesis con la propiedad distributiva

Transponemos los términos

Reducimos términos semejantes

Factorizamos en ambos miembros

Despejamos la variable

Simplificamos la fracción

Solución

Determinamos el valor de x en las siguientes ecuaciones:

• $ax-a(a+b)=-x-(1+ab)$

• $x^2+a^2=(a+x)^2-a(2a-1)-x$

• $\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x}$

• $x(a+b)-3-a(a-2)=2(x-1)-x(a-b)$

• $(x+a)(x-b)-(x+b)(x-2a)=b(a+2)+3a$

• $\frac{x-3a}{a^2}-\frac{2a-x}{ab}=-\frac{1}{a}$

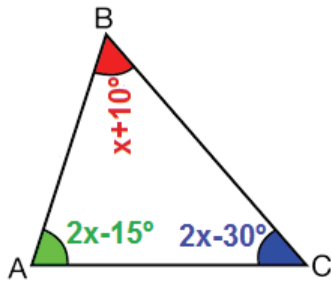
f) Aplicaciones geométricas

Ejemplos:

Resolvemos los siguientes problemas sobre geometría plana aplicando ecuaciones de primer grado:

1. Encontramos el valor de x en el siguiente triángulo:

Sabemos que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180° .



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$2x - 15^\circ + x + 10^\circ + 2x - 30^\circ = 180^\circ$$

$$2x + x + 2x = 180^\circ + 15^\circ - 10^\circ + 30^\circ$$

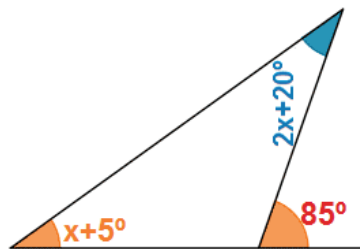
$$5x = 225^\circ$$

$$x = \frac{225^\circ}{5} = 45^\circ$$

$$x = 45^\circ \quad \text{Solución}$$

2. Calculamos x en el siguiente triángulo:

En un triángulo el ángulo exterior es la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.



$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{E}$$

$$x + 5^\circ + 2x + 20^\circ = 85^\circ$$

$$x + 2x = 85^\circ - 20^\circ - 5^\circ$$

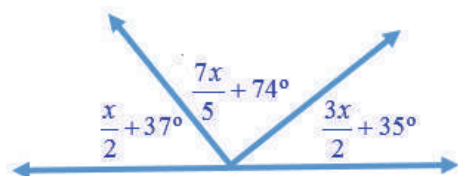
$$3x = 60^\circ$$

$$x = \frac{60^\circ}{3} = 20^\circ$$

$$x = 20^\circ \quad \text{Solución}$$

3. Determinamos el valor del ángulo en:

La suma de los ángulos suplementarios es 180°



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\frac{x}{2} + 37^\circ + \frac{7x}{5} + 74^\circ + \frac{3x}{2} + 35^\circ = 180^\circ \quad mcd = 10$$

$$5x + 370^\circ + 14x + 740^\circ + 15x + 350^\circ = 1800^\circ$$

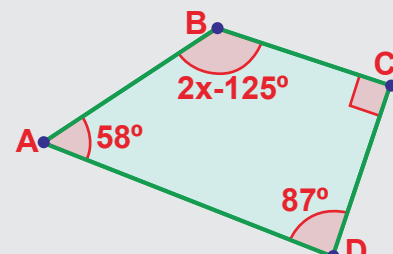
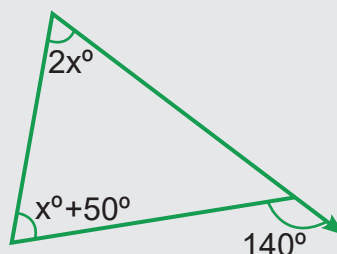
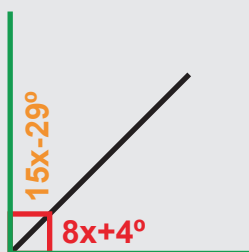
$$5x + 14x + 15x = 1800^\circ - 370^\circ - 740^\circ - 350^\circ$$

$$34x = 340^\circ$$

$$x = \frac{340^\circ}{34} = 10^\circ$$

$$x = 10^\circ \quad \text{Solución}$$

Encontramos el valor de x en las siguientes gráficas:



6. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Algunas veces un problema describe una sucesión de acciones sobre números, se da el resultado y se pide el número original. Un problema se puede resolver aplicando estrategias, técnicas, métodos o procedimientos distintos y de cualquier naturaleza, pero todos estos recursos que se emplea para encontrar el valor de las incógnitas llevan al mismo resultado.

Para plantear y resolver un problema mediante ecuaciones lineales, es recomendable seguir los siguientes pasos:

- Leer el problema hasta comprender y entenderlo, luego plantear la ecuación: para ayudarnos a entender el problema podemos realizar lo siguiente.
- Traducir del lenguaje escrito al lenguaje simbólico de la matemática.
- Resolver la ecuación planteada, verificar el resultado y dar respuesta al problema.

ENTENDER EL PROBLEMA

1° Para ayudarnos a entender el problema podemos responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que se pide encontrar?
- ¿Cuáles son los datos o informaciones disponibles?
- ¿Se parece este problema a otro que haya resuelto antes?
- ¿Qué estrategias podría seguir para resolver el problema?

2° Algunas estrategias, hacer una lista organizada, dibujar diagramas, confeccionar tablas, escribir una ecuación, buscar un patrón, simplificar el problema.

3° Luego de resolver el problema: ¿cuál es la respuesta?, ¿puedes comprobarla?, ¿es razonable?

Ejemplos:

Resolvemos los siguientes problemas:

1. Si al triple de la edad de Mario se le resta doce años, el resultado es igual al doble de su edad más tres años. ¿Qué edad tiene Mario?

Sea x la edad de Mario:

$$\begin{aligned} 3x - 12 &= 2x + 3 \\ 3x - 2x &= 3 + 12 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Mario tiene 15 años.

2. Si Aneth gasta la mitad de su salario, Bs. 40 más, sólo le quedan Bs. 850. ¿cuál es el salario de Aneth?

Sea x el salario de Aneth:

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{2} - 40 &= 850 & mcd = 2 \\ 2 \cdot x - 2 \cdot \frac{x}{2} - 2 \cdot 40 &= 2 \cdot 850 \\ 2x - x - 80 &= 1700 \\ 2x - x &= 1700 + 80 \\ x &= 1780 \end{aligned}$$

El salario de Aneth es de 1780 Bs.

3. En la ciudad de La Paz la unidad de medida de la temperatura se expresa en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) y en las noticias europeas nos indican en grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Existe una ecuación que nos permite comprender las temperaturas en esa medida. La lectura del último dato de medición de temperatura de La Paz fue de 24° Fahrenheit, encuentra la temperatura en grados Celsius.

Sea x la temperatura en $^{\circ}\text{C}$:

$$\begin{aligned} ^{\circ}\text{F} &= \frac{9^{\circ}\text{C}}{5} + 32^{\circ} & mcd = 5 \\ 5 \cdot 24^{\circ} &= 9x + 5 \cdot 32^{\circ} \\ 120^{\circ} &= 9x + 160^{\circ} \\ -40^{\circ} &= 9x \\ x &= -4,4^{\circ} \end{aligned}$$

El mes de octubre del 2021, la temperatura promedio de la ciudad de La Paz en grados Celsius fue de 10° .

MÉTODO FALSO

En el siglo XVI a.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con el reparto de cosechas y de materiales. Tenían un método para resolver ecuaciones llamado "método de la falsa posición".

Resolvemos los siguientes problemas sobre ecuaciones lineales de primer grado:

- Si al doble de un número se le suma su mitad, el resultado equivale al número aumentado en doce. ¿De qué número se trata?
- e vende la mitad de una caja de manzanas, más tarde se vende un tercio de la misma caja, si aún sobran 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas contenía la caja?
- Daniela gastó dos quintos de sus ahorros en ropa, un tercio del resto en la compra de un libro y le sobraron Bs. 24. ¿Cuánto tenía al principio?
- La suma de tres números es sesenta y tres. El segundo número es el doble del primero y el tercero es tres más que el segundo. Determina los números.
- La suma de cuatro números enteros consecutivos es cuatrocientos cincuenta. Hallar los números.

Actividad

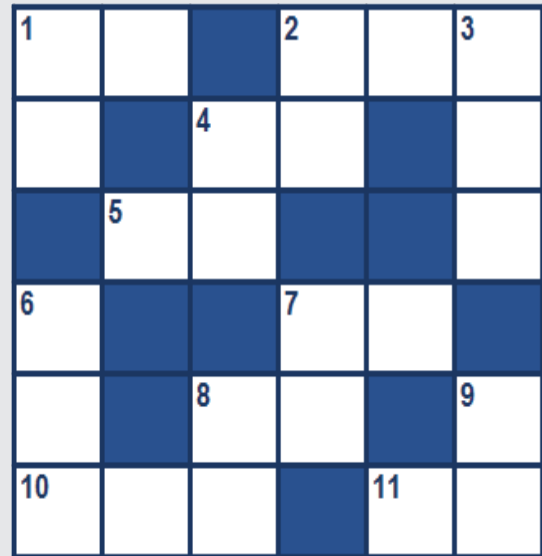
Completamos el siguiente crucigrama sobre ecuaciones de primer grado:

HORIZONTALES:

1. $x + 17 = 52$
2. $2y - 200 = 42$
4. $2y - 3 = 45$
5. $2x = 80$
7. $3a - 3 = 114$
8. $y + 96 = 160$
10. $x + 576 = 900$
11. $4x + 5 = 89 + 8$

VERTICALES:

1. $x + 42 = 72$
3. $8n + 50 = 850$
4. $6a - 11 = 109$
6. $x - 28 = 315$
7. $2y + 12 = 80$
8. $4n - 6 = 250$
9. $2x - 100 = 26$



VALORACIÓN

Las ecuaciones de primer grado sirven para la interpretación y resolución de problemas cotidianos, para realizar compras, pagar deudas, conocer edades, problemas de partición, cálculo de áreas, dinero, entre otros.

Actividad

Respondemos de manera reflexiva y crítica las siguientes preguntas:

- ¿Cómo aplicamos la resolución de ecuaciones de primer grado en nuestro diario vivir?
- ¿Por qué es importante resolver ecuaciones de primer grado?
- ¿Si no fueran las ecuaciones lineales, cómo crees que resolveríamos problemas relacionados con la tecnología, producción, economía, etc.?

LAGRANGE

Una de las mayores aportaciones de teoría de las ecuaciones se debe al matemático francés, aunque nacido en Italia, Joseph Luis La Grange (1736-1813). La Grange fue uno de los mayores analistas de su época, aunque también destacó en otras disciplinas. Su mayor aportación al Álgebra es su famosa memoria "sobre la resolución de las ecuaciones numéricas".

PRODUCCIÓN

- Investigamos problemas del contexto y la tecnología que se resuelven con ecuaciones de primer grado.
- Elaboramos un modelo matemático para dar solución a los problemas investigados

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Adición y sustracción

Determinar el resultado de las siguientes operaciones con polinomios:

- $2a + 3b - 4c; 4b - 5c + 3a; 7c - 7b - 5a$
- $(3a^2 + 5a - 3 + 2a^3) + (a^3 - 4a + 5 - 6a^3)$
- $(5a^3 - 9 + 6a^2 - 8a) - (5a^3 + 10 - 21a^2 + 14a)$
- $x + 3y - 5z; 3y - 4z - 6x; 2z - 3x - 7y; 8x + 7z + y$
- $(8 + 3x^2 - 4x + 7x^3) - (6x^3 - 4x + 2x^2 + 7)$
- $(8x^3 + 1 - 2x^2 + 4x) + (-5x + 4 - 3x^2 - 6x^3)$
- De $x - y + z$ restar la suma de $y - x - z$ con $2z - 2y + 2x$
- Restar $m - n - 2p$ de la suma de $5p + 3m - 4n; 8n - 11p - 7m; 2n - m - 7p$
- Restar la suma de $x^4 + 10x^2 + 15$ con $-11x^3 - 14x^2 - 3x + 1$ de $6x^4 + 7x^2 + 8x - 1$
- De la suma $x^4 + x^2 - 3; 5 - 3x - x^3; 4x + x^4 - 5x^2$ restar la suma de $-7x^3 + 8x^2 - 3x + 4$ con $x^4 - 3$

Multiplicación

Multiplicar los siguientes polinomios:

- $2x \cdot (x^2 - 4 + 5x + 2x^3)$
- $(3x + 1) \cdot (x^2 + 7x - 3)$
- $(a + 2b) \cdot (a^3 - 3ab^2 - 2b^3 + 4a^2b)$
- $(2n + n^2 - 8) \cdot (n^2 - 5n + 2 + n^3)$
- $(2a + 3b - 4c) \cdot (a^2 - 6b^2 + 2c^2)$
- $(a^3 - 2ab^2 + 3a^2b - 5b^3) \cdot (-3ab)$
- $(2x^2 - 4 + 5x) \cdot (x^2 + x - 3)$
- $(7m + m^2 + 2) \cdot (m^4 + m - 1 - 3m^2)$
- $(3x^2y - 2xy^2 + 5xy) \cdot (3x + 2y - 4xy)$
- $(m + 2n - 1) \cdot (m^2 - 2mn + 3n^2 + 2)$

División Método clásico

Encontrar el cociente y el residuo mediante división normal de los siguientes polinomios:

- $(x^2 + 5x - 2) \div (x - 3)$
- $(3n + 2 - n^2 + n^3) \div (1 - n + n^2)$
- $(8 + a^3 + 4a^2 - 5a) \div (a^2 + 1 - 2a)$
- $(m^4 - 1 - 2m - m^2) \div (m^2 - 1 - m)$
- $(12x^3 - 10y^3 - 35x^2y + 33xy^2) \div (4x - 5y)$
- $(x^4 + 4 - 11x^2) \div (x^2 - 3)$
- $(x^4 - 2x - 1 - x^2) \div (x^2 + 1 + x)$
- $(x^5 - 5x^4y + 20x^2y^2 - 16xy^4) \div (x^2 - 8y^2 - 2xy)$
- $(3a^2 + 5a - 4 - a^3 + a^4) \div (a^2 + 2)$
- $(4n^4 - 10 - 9n^2 + 2n^3) \div (2n - 4)$

Método de Horner

Determinar el cociente y el residuo mediante el método de Horner de los siguientes polinomios:

- $(2x^2 + 3x - 1 + x^3) \div (x^2 + x - 2)$
- $(3a + 1 - 2a^2 + a^3) \div (2 - 2a + a^2)$
- $(10 + a^3 + 5a^2 - 7a) \div (a^2 + 2 - 3a)$
- $(-11m^3 + 3m^5 + 46m^2 - 32) \div (3m^2 - 8 + 6m)$
- $(6x^3 + x^2 + 5 + 3x) \div (2x + 1)$
- $(x^4 + 3 - 5x^3) \div (x^2 + 1)$
- $(m^4 - 3m - 2 - 5m^2) \div (m^2 + 2 + m)$
- $(10 + a^3 + 5a^2 - 7a) \div (a^2 + 2 - 3a)$
- $(5x + 6 - 4x^2 + 2x^3) \div (4 - 5x + x^2)$
- $(15n^3 - 11n^2 + 18 + 10n - 7a) \div (3n + 2)$

Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

Hallar el cociente y el residuo aplicando el método Ruffini a las siguientes divisiones:

41. $(a^3 + 5a - 4 + a^2) \div (a + 3)$

45. $(2x^3 + 6x - 12 - 9x^2) \div (x - 2)$

42. $(x^3 - 2 + 2x - 3x^2) \div (x + 1)$

46. $(u^6 + 6u^3 - 2u^5 - 7u^2 - 4u + 6) \div (u - 1)$

43. $(a^4 + 2a^2 - 6 + a - 5a^3) \div (a - 4)$

47. $(2 - 2x + x^5 + 3x^4 + 4x^2) \div (x + 2)$

44. $(m^3 + 4m - 2 + 3m^3) \div (2m - 4)$

48. $(15x^3 + 18 + 10x - 11x^2) \div (3x + 2)$

Teorema del resto

Calcular el residuo mediante el Teorema del residuo en los siguientes polinomios:

49. $(4x^2 + 3x - 4 + x^3) \div (x + 1)$

53. $(3a + 3 - a^3 + 2a^4) \div (a - 1)$

50. $(4m - 2m^2 - m^4 + 5) \div (m + 2)$

54. $(n^5 + 2n - n^4 - 6 + 2n^3) \div (n - 2)$

51. $(2b - 4b^3 + 5b^4 - 1) \div (b + 3)$

55. $(8k + 2k^3 - k^4 + 2k^5 - 1) \div (k - 3)$

52. $(m^5 - 3m^3 + m^4 - 2 + m) \div (2m + 4)$

56. $(5n^2 - 10 + 7n + n^3) \div (3n - 6)$

Operaciones algebraicas combinadas

Sean los polinomios:

$A(x) = x^4 - 3x + 2x^3 - x^2 + 2$

$B(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x^3 + 1$

$C(x) = 3x^4$

$D(x) = x^4 + 2x - 6$

$E(x) = x^2 + 2 - 3x$

$F(x) = 2x - 3$

Realizar las siguientes operaciones combinadas entre polinomios:

57. $(A + B - C) \cdot E =$

61. $(D - E - E) \cdot F =$

58. $(A + 2B - E) \cdot G =$

62. $(2D + 3F - 4A - C) \cdot G =$

59. $A \cdot F + B \cdot G - C \cdot E =$

63. $(B + C - D) \div E =$

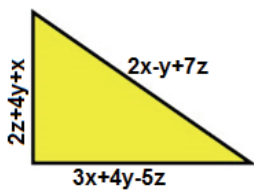
60. $(3D - 2B - C + D) \div E =$

64. $D \div F + A \div G - C \div E =$

Aplicaciones geométricas

Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

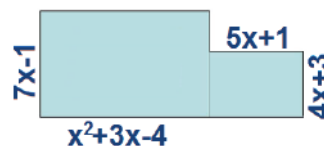
65.



66.

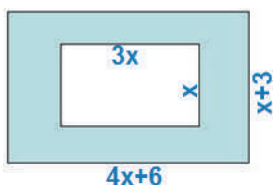


67.

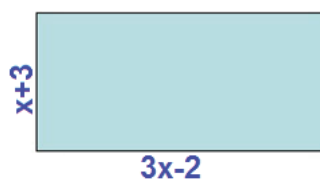


Determinar el área de las siguientes figuras

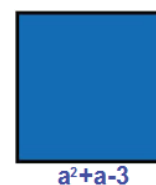
68.



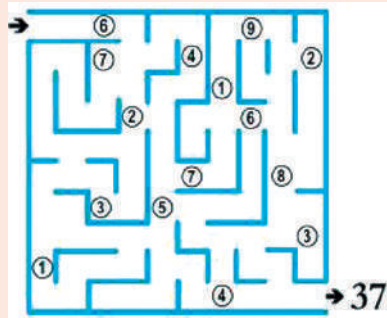
69.



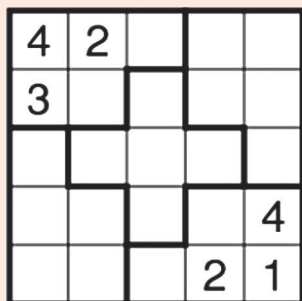
70.



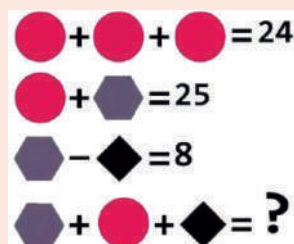
Con resaltador recorre este laberinto numérico de modo que sumando hasta la salida de 37.



Coloca los números del 1 al 5 sin repetir en ninguna fila, columna ni en la región demarcada.



Determina el valor de cada figura en las siguientes ecuaciones de modo que se cumplan las igualdades de referencia.



20. $\frac{x+1}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-6+x} = \frac{2x}{x^2+6+5x}$

Ecuaciones literales de primer grado

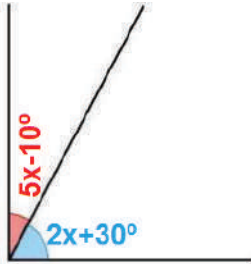
Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

21. $m(n-x) - m(n-1) = m(mx-a)$
22. $x-a+2 = 2ax-3(a+x)-2(a-5)$
23. $x(a+b)-3-a(a-2) = 2(x-1)-x(a-b)$
24. $(m+4x)(3m+x) = (2x-m)^2 + m(15x-m)$
25. $(ax-b)^2 = (bx-a)(a+x) - x^2(b-a^2) + a^2 + b(1-2b)$
26. $a^2(a-x) - a^2(a+1) - b^2(b-x) - b(1-b^2) + a(1+a) = 0$
27. $\frac{2}{a} + \frac{a}{x-a} = \frac{2x+a}{ax}$
28. $\frac{x+m}{m} - \frac{x-n}{n} = \frac{m^2+n^2}{mn} - 2$

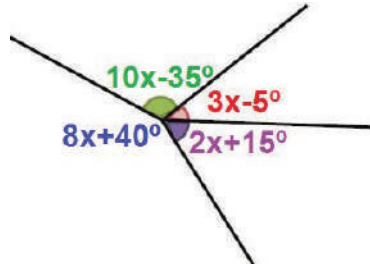
Aplicaciones geométricas

Encontrar el valor de x en las siguientes gráficas:

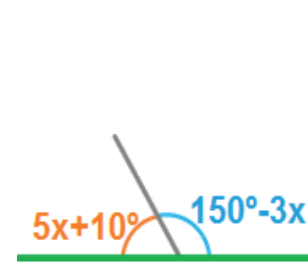
29. S



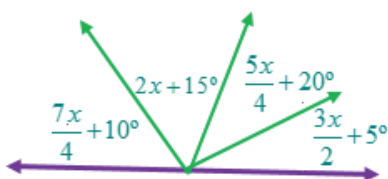
30.



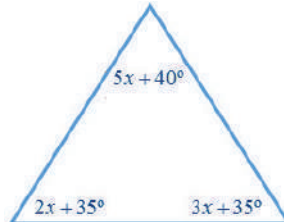
31.



32.



33.



34.



Problemas aplicados al contexto y la tecnología

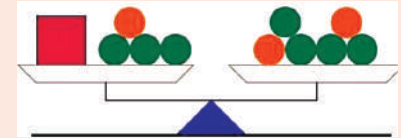
Plantear una expresión algebraica y resolver los siguientes problemas sobre ecuaciones lineales:

35. Una familia tiene 4 hijos y la suma de sus edades es 65 años. Determinar la edad de cada uno, sabiendo que el mayor tiene 3 años más que el segundo y este es 2 años mayor que el tercero y el tercero es 4 más que el último.
36. Durante la segunda guerra mundial, en una batalla de un destacamento del ejército ruso murieron la cuarta parte de sus soldados, heridos la quinta parte, fueron prisioneros la mitad, salvándose solamente 500. ¿Cuántos soldados había?
37. Si al triple de un número se le añaden 5 veces la décima parte de dicho número y al total se le añade 15 resulta el mismo número multiplicado por 4. ¿Cuál es el número?
38. Un turista gastó el primer día en Copacabana $\frac{1}{4}$ del dinero que traía; el segundo día gastó $\frac{1}{3}$ del resto y aún le quedaron Bs. 250. ¿Cuánto dinero traía?
39. La suma de la quinta parte de un número con las tres octavas partes excede en cuarenta y nueve al doble de la diferencia entre un sexto y una doceava parte del número, encuentra el número.
40. Aneth gastó dos quintos de sus ahorros en ropa, un tercio del resto en la compra de un libro y le sobraron Bs. 24, ¿cuánto tenía al principio?
41. Hallar dos números pares consecutivos, de tal forma que un quinto del primero más los siete onceavos del segundo menos ocho, equivalga a un medio del segundo decrecido en uno.

(Problemas y ejercicios recopilados)

SOBRE EQUILIBRIO

Sabiendo que la balanza se encuentra en equilibrio, las bolas naranjas tienen un peso de 3 kg, las verdes tienen un peso de 1 kg, ¿cuánto pesa el cuadrado rojo?



INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

PRÁCTICA

Podemos observar que las estructuras metálicas que se utilizan para hacer encadenados, torres de alta tensión, vigas para la construcción de techos y en algunos puentes, están hechas con triángulos, ya que esta es la única figura que es capaz de no deformarse al sufrir alguna fuerza.

Es por ello que es la más utilizada en el sector de la construcción o en situaciones que se ejerce fuerza.



Actividad

- ¿En qué otras situaciones se utiliza la figura del triángulo?
- Investigamos ¿por qué las pirámides son triangulares?
- ¿Por qué se utilizan triángulos para dibujar la estructura humana?

TEORÍA

PITÁGORAS

¿Qué decía Pitágoras sobre los triángulos?

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.



1. Definición de triángulo

Triángulo es una figura geométrica de tres lados, tres ángulos y tres vértices.

Ángulo, es la abertura entre dos rectas que se encuentran unidas por un vértice.

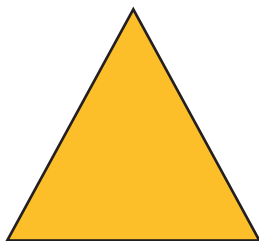
Vértice, es el punto por donde pueden pasar dos o más rectas, las cuales forman un ángulo.

2. Triángulos y su clasificación

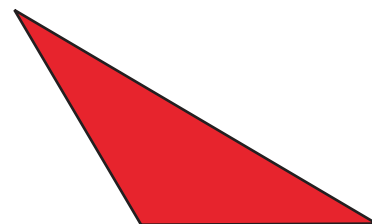
Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos, estos pueden ser.

a) Según sus ángulos

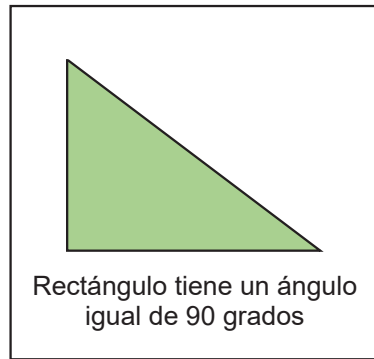
Pueden ser mayores que 90 grados o menores de 90 grados.



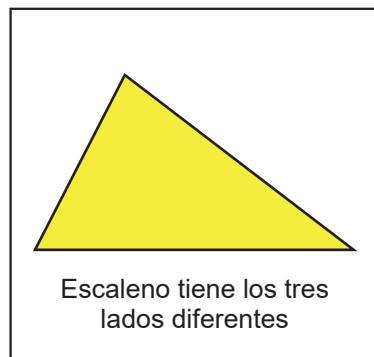
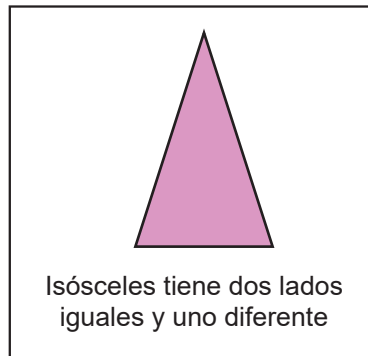
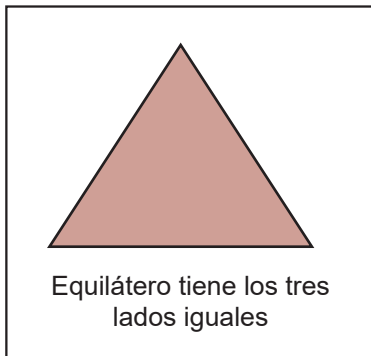
Acutángulo tiene ángulos menores a 90 grados



Obtusángulo tiene un ángulo mayor a 90 grados

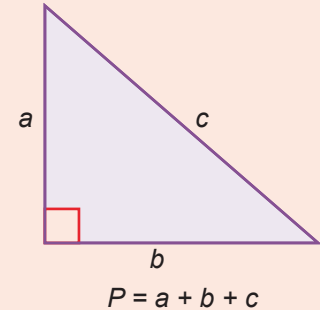


b) Clasificación según sus lados



RECUERDA

El perímetro de un cuerpo geométrico es la suma de todos sus lados.



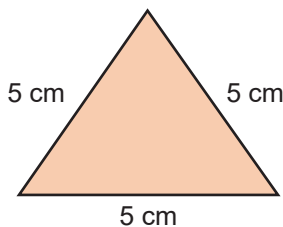
INQUIETUD

Identifica los triángulos de la figura según el ángulo que tienen y según sus lados.



Ejemplo:

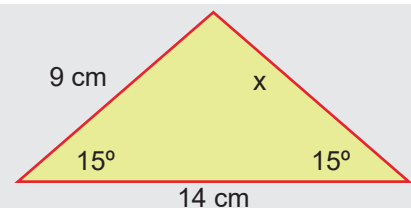
Hallamos el perímetro de un triángulo equilátero de lado igual a 5 cm como indica la figura:



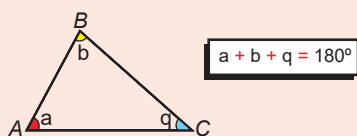
Desarrollo
Perímetro= 5 cm + 5 cm + 5 cm
Perímetro=15 cm

Calculamos:

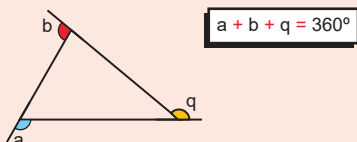
- El valor de x en el siguiente triángulo, sabiendo que se trata de un triángulo isósceles.
- En la misma figura calculamos el perímetro.



RECUERDA



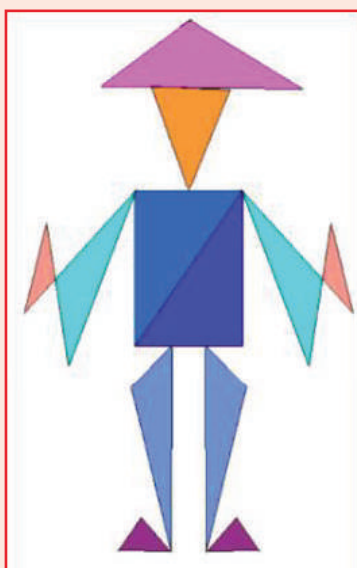
Suma de ángulos interiores



Suma de ángulos exteriores

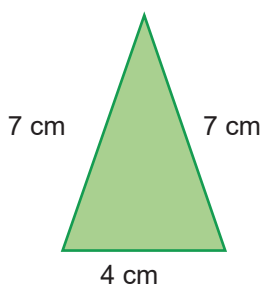
INQUIETUD

Recorta hojas de color y arma la siguiente figura, luego clasifica los triángulos.



Ejemplo:

Hallamos el perímetro del triángulo isósceles de la figura.



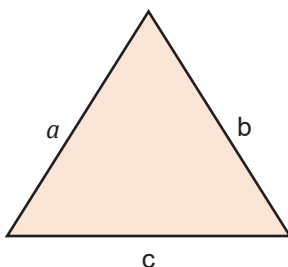
Desarrollo

$$P = 7 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 4 \text{ cm}$$

$$P = 18 \text{ cm}$$

Ejemplo:

Sabiendo que el perímetro del triángulo equilátero es 18 cm, encontramos el valor de sus lados.



Desarrollo

Sabemos que en el triángulo equilátero los 3 lados son iguales, entonces $a = b = c$

$$18 \text{ cm} = a + a + a$$

$$18 \text{ cm} = 3a$$

$$\frac{18}{3} \text{ cm} = a$$

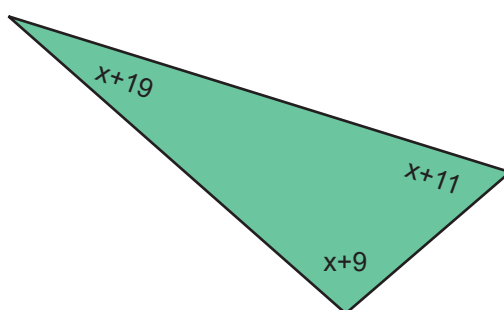
$$6 \text{ cm} = a$$

3. Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo siempre será igual a 180 grados.

Ejemplo:

Hallamos el valor de "x" de la figura:



Desarrollo

$$X + 9 + X + 11 + X + 19 = 180$$

$$3X + 39 = 180$$

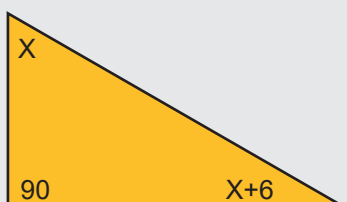
$$3X = 180 - 39$$

$$X = 141/3$$

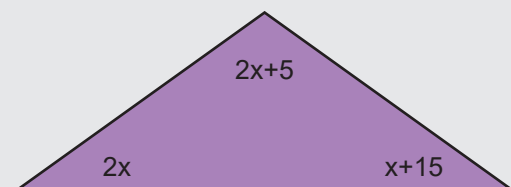
$$X = 47$$

Actividad

- Encontramos el valor de **X** del siguiente triángulo



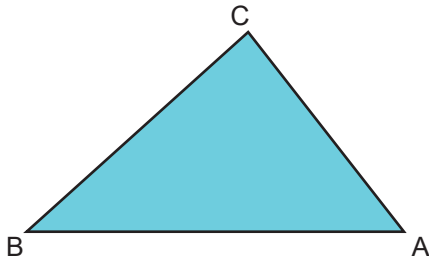
- Encontramos el valor de **x** del siguiente triángulo



Ejemplo:

Encontramos el valor del ángulo que falta en el siguiente triángulo.

$A = 70^\circ$; $B = 26^\circ$

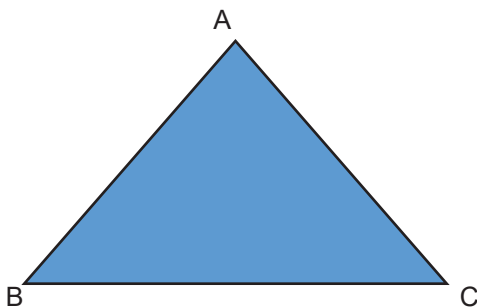


$$\begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ \\ 70^\circ + 26^\circ + C &= 180^\circ \\ C &= 180^\circ - 70^\circ - 26^\circ \\ C &= 84^\circ \end{aligned}$$

Ejemplo:

Encontramos el valor del ángulo que falta en el siguiente triángulo isósceles.

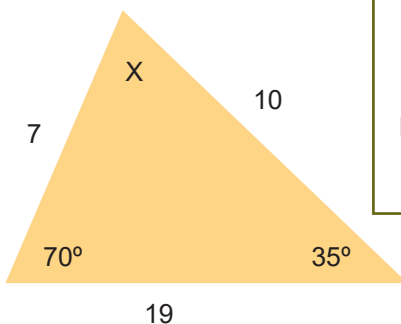
$A = 100^\circ$



$$\begin{aligned} B &= C \\ A + B + C &= 180^\circ \\ 100^\circ + A + A &= 180^\circ \\ 2A &= 180^\circ - 100^\circ \\ 2A &= 80^\circ \\ A &= 80^\circ / 2 \\ A &= 40^\circ \end{aligned}$$

Ejemplo:

Hallamos el perímetro y el ángulo que falta en el siguiente triángulo escaleno.



Perímetro

$$\begin{aligned} P &= a + b + c \\ P &= 10 + 7 + 19 \\ P &= 36 \end{aligned}$$

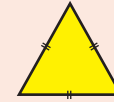
Ángulo X

$$\begin{aligned} X + B + C &= 180^\circ \\ X + 70^\circ + 35^\circ &= 180^\circ \\ X &= 180^\circ - 35^\circ - 70^\circ \\ X &= 75^\circ \end{aligned}$$

RECUERDA

Los triángulos se clasifican así:

Por sus lados



Triángulo equilátero
Tiene 3 lados iguales



Triángulo isósceles
Tiene 2 lados iguales



Triángulo escaleno
No tiene lados iguales

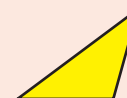
Por sus ángulos



Triángulo agudo
Tiene 3 ángulos $< 90^\circ$



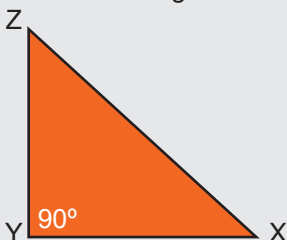
Triángulo rectángulo
Tiene un ángulo $= 90^\circ$



Triángulo obtusángulo
Tiene un ángulo $> 90^\circ$

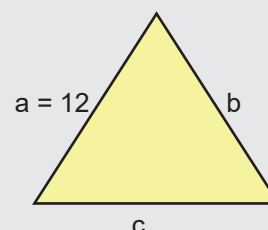
Actividad

- Hallamos el ángulo "Z" en el triángulo:



$$\begin{aligned} X &= 31^\circ \\ Y &= 90^\circ \end{aligned}$$

- Encontramos el perímetro del triángulo equilátero

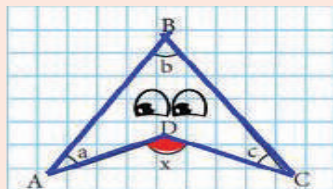


$$a = b = c$$

**PROPIEDADES VARIADAS DE
LOS TRIÁNGULOS**

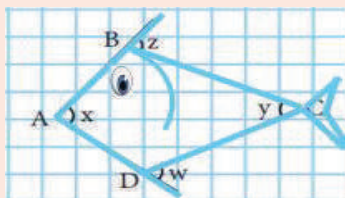
El boomerang

$$x = a + b + c$$



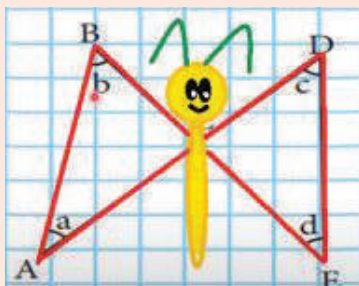
El Pececito

$$x + y = z + w$$



La Mariposa

$$a + b = c + d$$

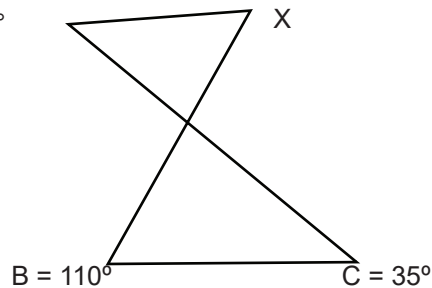


4. Propiedades de ángulos externos de un triángulo cualquiera

Encontrar el valor de x en los siguientes triángulos:

Ejemplo:

$$A = 50^\circ$$



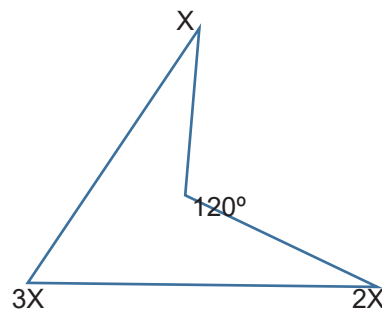
$$X + A = B + C$$

$$X + 50^\circ = 110^\circ + 35^\circ$$

$$X = 110^\circ + 35^\circ - 50^\circ$$

$$X = 95^\circ$$

Ejemplo:



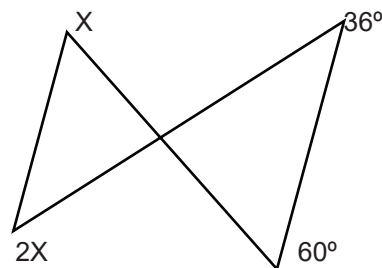
$$120^\circ = X + 3X + 2X$$

$$120^\circ = 6X$$

$$120^\circ / 6 = X$$

$$20 = X$$

Ejemplo:



$$X + 2X = 36^\circ + 60^\circ$$

$$3X = 96^\circ$$

$$X = 96^\circ / 3$$

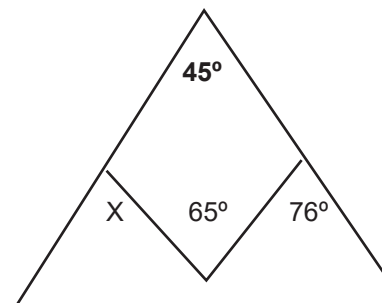
$$X = 32^\circ$$

Ejemplo:

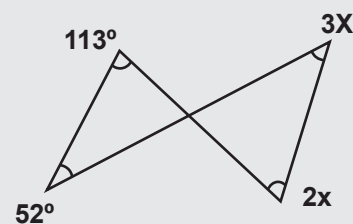
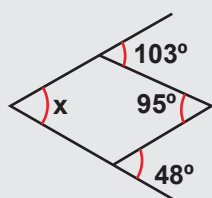
$$X + 76^\circ = 45^\circ + 65^\circ$$

$$X = 110^\circ - 76^\circ$$

$$X = 34^\circ$$

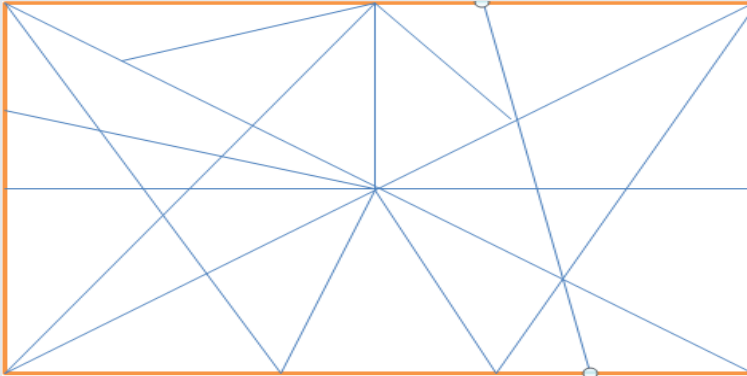


- Hallamos el valor de (x) en las siguientes figuras:



Actividad

- En la siguiente figura, clasificamos los triángulos según sus lados y pintamos de color azul los escalenos, de color rojo los isósceles y de color amarillo los equiláteros.



Después de asimilar los conocimientos de triángulos y su clasificación, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la importancia de utilizar los triángulos en las construcciones de nuestras casas?
- ¿Cómo se llama la ciencia que estudia los triángulos?
- Observamos en nuestras casas y hacemos un listado de las partes en las que se encuentran las figuras triangulares.

Construcción de un tangram con materiales del contexto

- En equipos de trabajo realizamos la construcción de un tangram.

Materiales:

- Tijera
- Lápiz
- Regla
- Cartulina de colores o cartón

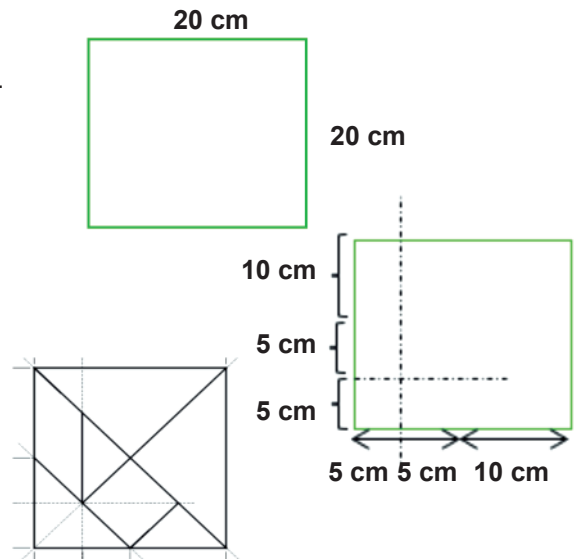
Paso 1. Con la regla se arma un cuadrado de 20 cm de cada lado.

Paso 2. Marcar dos lados de 5 cm y uno de 10 cm.

Paso 3. Trazar diagonales como indica la figura.

Paso 4. Recortar cada figura.

Paso 5. ¡A formar figuras!



CURIOSIDADES

¿Sabías que la separación entre cerchas es de 1 m para mayor duración y resistencia?



VALORACIÓN



PRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

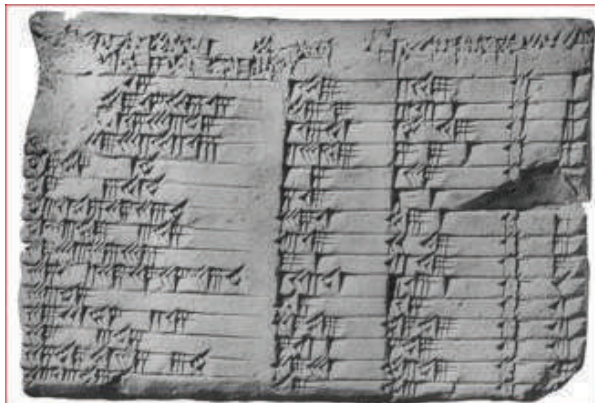
PRÁCTICA

Desde hace más de 3000 años se ha ido extendiendo la historia de la trigonometría y de las funciones trigonométricas.

En Babilonia comenzaron a determinar algunos cálculos sobre medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Existen algunas tablas grabadas sobre arcilla seca que dan fe de los estudios realizados

Estos hechos demuestran la importancia de los triángulos y su estudio desde la antigüedad.

Tablilla babilonia Plimpton 322



Actividad

Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante el estudio de los triángulos en situaciones de la vida cotidiana?
- ¿En tu comunidad o barrio, dónde puedes observar el uso de triángulos rectángulos?
- Observamos nuestra sombra por la mañana, al medio día y por la tarde, conversamos entre compañeras y compañeros sobre ¿qué diferencias notamos?

TEORÍA

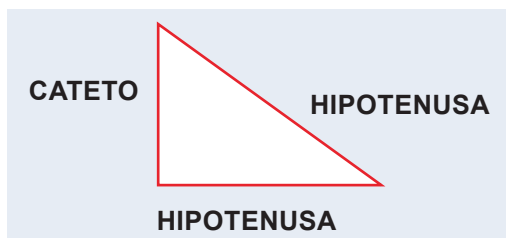
HIPATIA DE ALEJANDRÍA

Es una mujer de las primeras matemáticas de la cual se tiene referencia. Fue maestra de la prestigiosa escuela neoplatónica y realizó importantes contribuciones a la ciencia en los campos de matemática y astronomía.

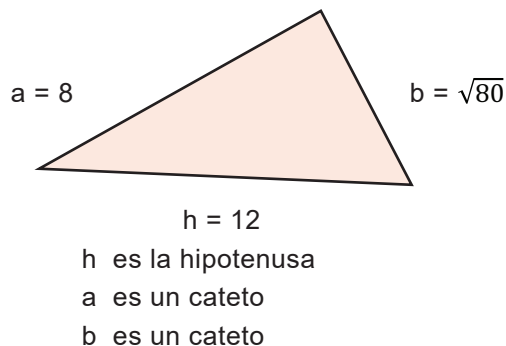


Triángulo rectángulo

1. Definición, un triángulo rectángulo se caracteriza por tener un ángulo igual a 90° . El lado que se encuentra al frente del ángulo de 90° es el lado más largo del triángulo y se conoce como hipotenusa, los otros dos lados se llaman catetos.



Ejemplo: En el siguiente triángulo reconocer la hipotenusa y los catetos



Para resolver un triángulo rectángulo se debe saber que la sumatoria de los tres ángulos internos del triángulo es igual a 180° , también saber el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

2. Teorema de Pitágoras

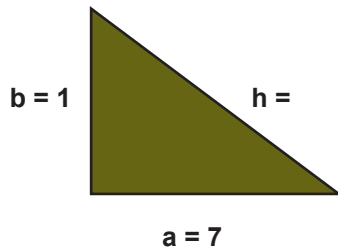
El teorema de Pitágoras nos indica que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema nos sirve para encontrar los lados del triángulo rectángulo.

Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo calcular el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $a = 7$; $b = 1$, $h = ?$



$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 7^2 + 1^2$$

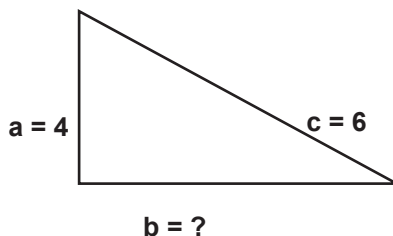
$$h^2 = 49 + 1$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{50}$$

$$h = \sqrt{50} \text{ ó } 7,07$$

Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo calculamos el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $a = 6$; $b = ?$, $c = 4$



$$b^2 = c^2 - a^2$$

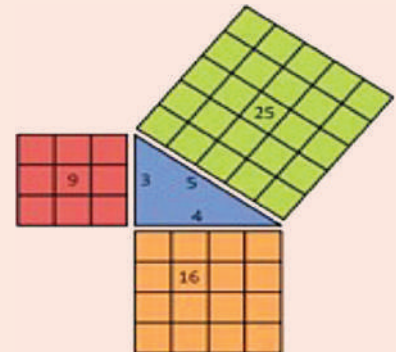
$$b^2 = 6^2 - 4^2$$

$$b^2 = 36 - 16$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{20}$$

$$b = \sqrt{20}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.



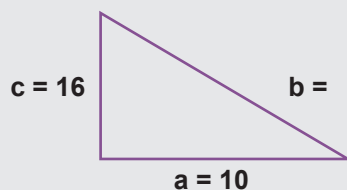
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Recuerda, para identificar los triángulos rectángulos, habitualmente, se coloca un cuadrado pequeño en el vértice donde se forma el ángulo recto (90°)



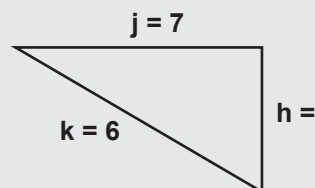
- Dado el triángulo rectángulo encontramos el cateto que falta aplicando el teorema de Pitágoras si:

$$a = 10; b = ?, c = 16$$



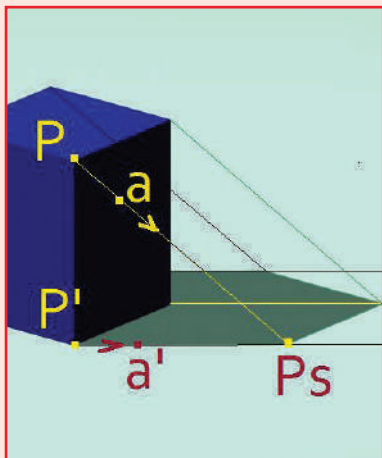
- En el siguiente triángulo rectángulo encontramos la hipotenusa con el teorema de Pitágoras si:

$$j = 7; k = 6, h = ?$$



RECUERDA

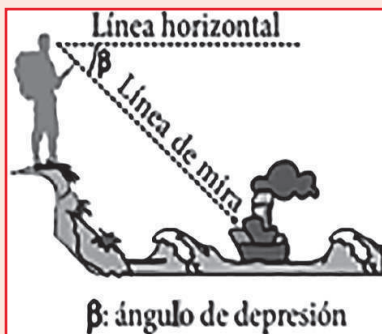
¿Sabías que se puede calcular la altura de un objeto usando el triángulo rectángulo?



Fuente: <https://sombras-y-reflejos.blogspot.com/2012/08/>

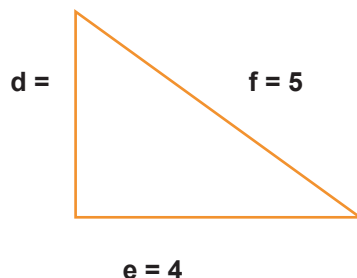
ANGULO DE DEPRESIÓN

Es el ángulo formado por la línea de mira y la línea horizontal, cuando la línea de mira está debajo de la línea horizontal



Ejemplo:

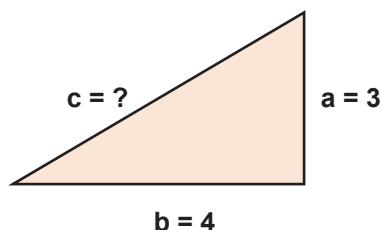
Dado el siguiente triángulo rectángulo calcular el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $f = 5$; $e = 4$, $d = ?$



$$\begin{aligned} d &= f^2 - e^2 \\ d^2 &= 5^2 - 4^2 \\ d^2 &= 25 - 16 \\ \sqrt{d^2} &= \sqrt{9} \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo:

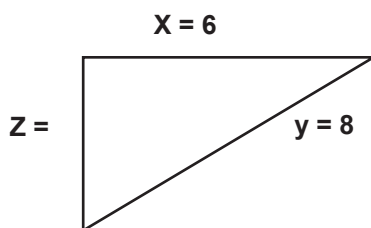
Dado el siguiente triángulo rectángulo calcular el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $a = 3$; $b = 4$, $c = ?$



$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ c^2 &= 16 + 9 \\ \sqrt{c^2} &= \sqrt{25} \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo:

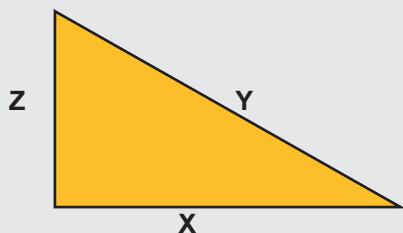
Dado el siguiente triángulo rectángulo calcular el valor de sus lados aplicando el teorema de Pitágoras sabiendo que: $x = 6$; $y = 8$ y $z = ?$



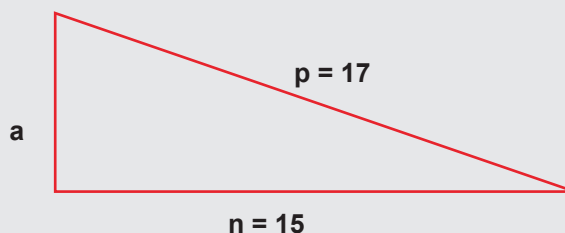
$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 - x^2 \\ z^2 &= 8^2 - 6^2 \\ z^2 &= 64 - 36 \\ \sqrt{z^2} &= \sqrt{28} \\ z &= 5,29 \end{aligned}$$

Actividad

- Encontramos el valor de x del siguiente triángulo sabiendo que $y = 7$; $z = 4$

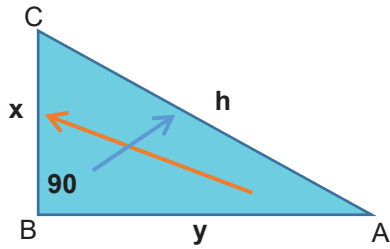


- Encontramos el valor de " a " del siguiente triángulo



3. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo son seis, las tres últimas son el recíproco de las tres primeras.



h = hipotenusa (lado más largo)
 x = cateto opuesto respecto al ángulo A
 y = cateto adyacente respecto al ángulo A

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\operatorname{cos} A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}}$$

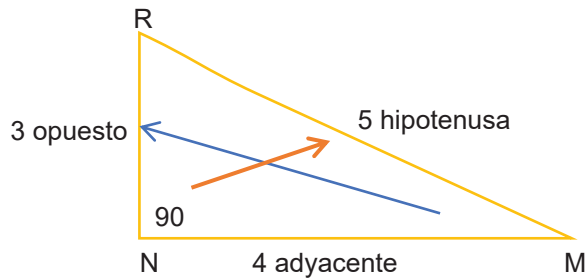
$$\operatorname{cotan} A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}}$$

$$\operatorname{sec} A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}}$$

Ejemplo:

Encontrar las razones trigonométricas en el siguiente triángulo con respecto al ángulo M.



$$\operatorname{sen} M = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cotan} M = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cos} M = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sec} M = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tan} M = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec} M = \frac{5}{3}$$

También es posible encontrar las seis razones trigonométricas, del anterior triángulo, para el ángulo R.

RECUERDA

Las razones trigonométricas son relaciones entre los lados del triángulo y sólo dependen de los ángulos de éste.

RAZÓN TRIGONOMÉTRICA	SIMBOLOGÍA
SENO	sen
COSENO	cos
TANGENTE	tan

CURIOSO

Para nombrar los ángulos se utilizan las letras griegas, tales como:

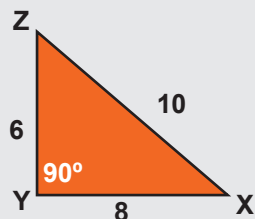
A α B β Γ γ
 alfa beta gamma

También se pueden utilizar las letras del abecedario teniendo en cuenta que las letras minúsculas representan lados y las mayúsculas ángulos.

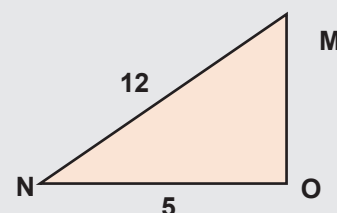
A, B, C,...

Actividad

- Hallamos las funciones trigonométricas del ángulo Z:

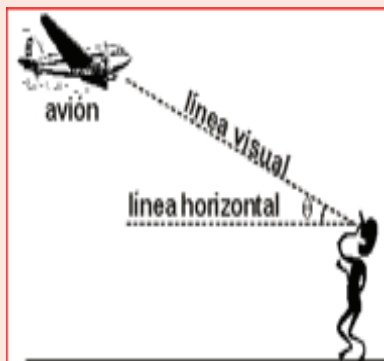


- Hallamos todas las funciones trigonométricas del ángulo N



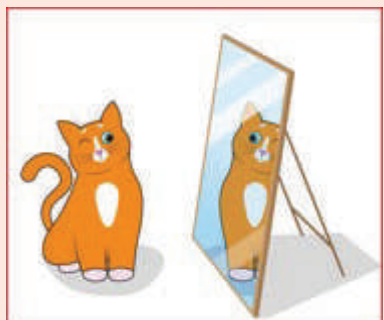
ÁNGULO DE ELEVACIÓN

Es el ángulo formado por la línea de mira y la línea horizontal, cuando la línea de mira está encima de la línea horizontal.



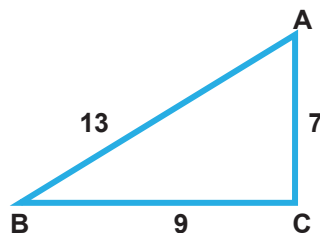
RAZONANDO

Hay gatos en una habitación de cuatro esquinas, cada gato en un rincón, adivina cuántos gatos logra ver cada gato.



Ejemplo:

Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B del siguiente triángulo.



$$\operatorname{sen} B = \frac{7}{13}$$

$$\cos B = \frac{9}{13}$$

$$\tan B = \frac{7}{9}$$

$$\cotan B = \frac{9}{7}$$

$$\sec B = \frac{13}{9}$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{13}{7}$$

Ejemplo:

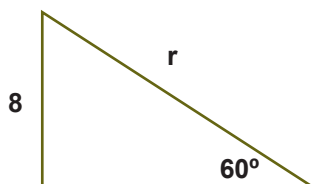
En el siguiente triángulo, encontramos el valor de "r"

Paso 1. Primero observamos, los datos conocidos en el triángulo.

Paso 2. Identificamos la función que se puede ser utilizada en función de los datos.

Paso 3. Remplazamos los datos en la función.

Paso 4. Despejamos la variable y encontramos el resultado con ayuda de la calculadora.



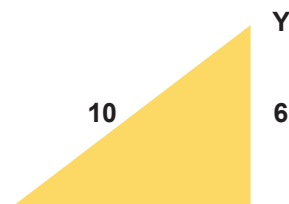
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{8}{r}$$

$$r = \frac{8}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$r = 9,23$$

Ejemplo:

Encontrar el valor del ángulo Y en el siguiente triángulo.



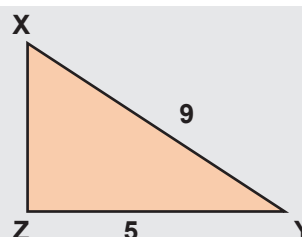
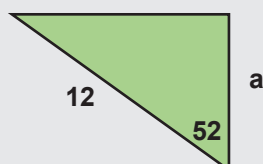
$$\cos Y = \frac{6}{10}$$

$$\cos Y = 0,6$$

$$Y = 53,13^\circ$$

Actividad

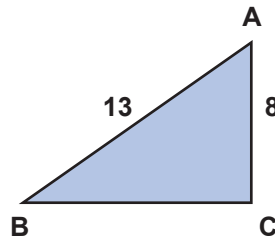
- Hallamos los datos que faltan en los siguientes triángulos:



Ejemplo:

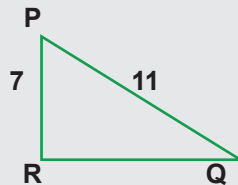
Hallar los datos que faltan en el triángulo

$\cos A = \frac{8}{13}$	$180 = 90 + 52,02$
$\cos A = 0,61$	$180 - 90 - 52,02 :$
$\therefore \cos^{-1} 0,61$	$37,98^\circ = B$



Actividad

- En equipos de trabajo, resolvemos el triángulo:



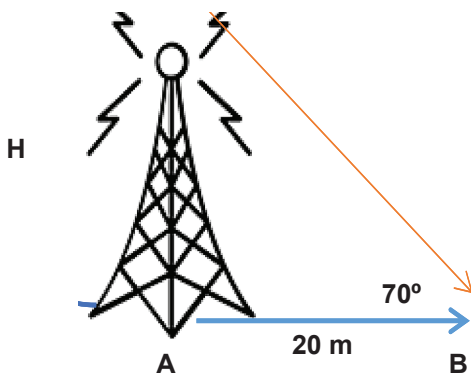
4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver problemas se debe de leer detenidamente y poder comprender que nos pide encontrar el problema, de esa manera evitaremos encontrar datos innecesarios.

También se necesitará saber las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

Ejemplo:

Se desea medir la altura de una antena, para ello se encuentra la distancia de AB que es 20 m, de A hacia el punto más alto de la antena se mide un ángulo de 70° . ¿Cuál es la altura de la antena?



$$\sin 70^\circ = \frac{H}{20}$$

$$\sin 70^\circ \cdot 20 = H$$

$$18,78 = H$$

CURIOSIDADES

Los minutos tienen 60 segundos gracias a los babilonios.

Estos desarrollaron sus estudios matemáticos en base 60 (sistema sexagesimal) y no en base 10, por eso, también un círculo tiene 360 grados.



ACERTIJO

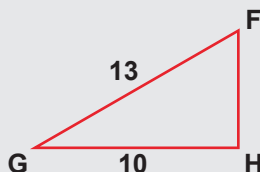
¿No soy el doble del número 3, no soy la mitad del número 10, tampoco el doble del número 4, sabes tú que número soy?



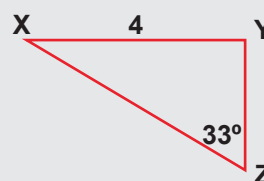
5, 8, 7, 6

Actividad

- Hallamos el lado que falta del siguiente triángulo:



- Hallamos el ángulo X en el triángulo:



COSAS PARA RECORDAR

En todo triángulo rectángulo el lado más largo se llama hipotenusa.

Para encontrar los lados de un triángulo rectángulo se necesita el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las funciones trigonométricas nos sirven para hallar ángulos y lados de un triángulo rectángulo.

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

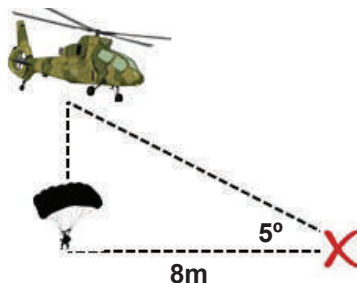
La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° .

$$A + B + C = 180^\circ$$

En la calculadora, para encontrar un ángulo con funciones trigonométricas se debe presionar la función shift (inversa).

Ejemplo:

Un paracaidista cae a 8 metros de su objetivo, si la diagonal del objetivo con el helicóptero es de 5 grados ¿A qué altura se encuentra el mismo?

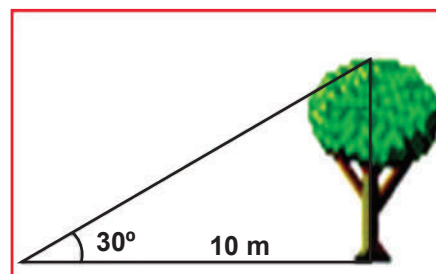


$$\begin{aligned}\tan 5^\circ &= \frac{8}{h} \\ h &= \frac{8}{\tan 5^\circ} \\ h &= 91,44 \text{ metros}\end{aligned}$$

Ejemplo:

En el siguiente gráfico, encontramos la altura del árbol, sabiendo que a una distancia de 10 metros se forma un ángulo de elevación de 30° con la copa del árbol.

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{H}{10} \\ H &= \tan 30^\circ \cdot 10 \\ H &= 5,77\end{aligned}$$



Ejemplo:

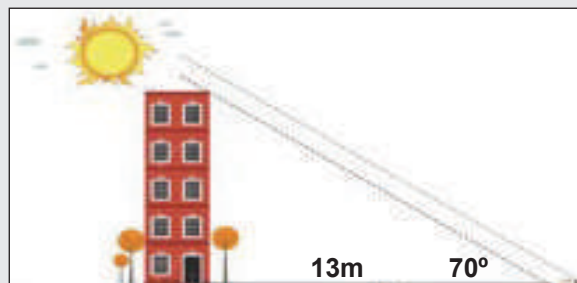
Dos niños juegan en el tobogán, el mismo tiene una escalera de 3 metros y la distancia del final del tobogán al pie de la escalera es de 4 metros. ¿qué tan largo es el tobogán?

$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= x^2 \\ x &= \sqrt{9 + 16} \\ x &= \sqrt{25} \\ x &= 5\end{aligned}$$



El tobogán tiene 5 metros de largo.

- Calculamos la altura de un edificio que proyecta una sombra de 13 m cuando el sol está a 70° sobre el horizonte.



Ejemplo:

Hallamos el ángulo que deberá formar la escalera de 5 m, con el suelo, para que Luis pueda arreglar el foco que se encuentra a una altura de 4 m.

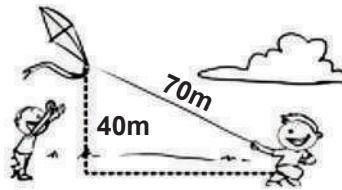


$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{4}{5} \\ A &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \\ A &= 53,13^\circ\end{aligned}$$

Ejemplo:

Un niño tiene una cometa de papel amarrada a un hilo de 70 m; y la altura a la cual se encuentra la cometa es 40 m. ¿Cuál es el ángulo que forma el hilo con la horizontal?

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{40}{70} \\ A &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{40}{70}\right) \\ A &= 34,85^\circ\end{aligned}$$



Para realizar la medición de terrenos es necesario realizar la triangulación al igual que para la construcción de carreteras y puentes, cables de alta tensión, camping y otros.

- Preguntamos en nuestra comunidad o a los abuelitos ¿cómo realizan las mediciones de terrenos o de parcelas en el campo?.
- Alguna vez, ¿viste cómo los topógrafos miden las calles para realizar el asfaltado?, conversa en la clase sobre la importancia de resolver triángulos.

Taller construcción de un Teodolito Casero

Materiales

- Lápiz
- Transportador completo o medio
- Silicona en barra
- Medio metro de poli tuvo
- Un palo de escoba
- 5 clavos de 1 ½ pulgadas
- Martillo

Paso 1. Se pega el poli tuvo con el transportador, exactamente a la mitad, de tal forma que se vea el punto medio que indica los 0° y 180°.

Paso 2. Se marca una línea central a un costado del palo de escoba.

Paso 3. Se une el transportador y el poli tuvo con el palo de escoba con la ayuda del clavo y martillo de tal forma que pueda girar libremente, tomando en cuenta que el clavo debe estar en la mitad del s para poder medir los ángulos.

¡A medir los ángulos!

RECORDEMOS



Tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos

ángulo recto = 90°

ángulo agudo < 90°

VALORACIÓN



PRODUCCIÓN



LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

PRÁCTICA

Juan vive en la provincia Guarayos del departamento de Santa Cruz, se dedica a la construcción de viviendas y tinglados, para lo que necesita conocer distintas figuras y cuerpos geométricos.

Para hacer un galpón necesita soldar varias barras de fierro formando cerchas que sostendrán el techo, las cerchas están formadas por varios triángulos.

¿Qué otras figuras geométricas crees que entrarían en una construcción?

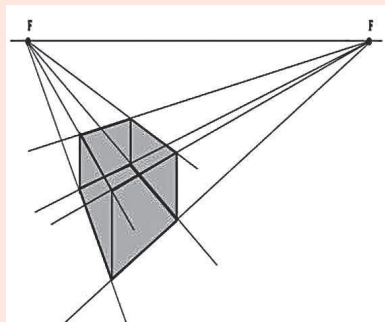
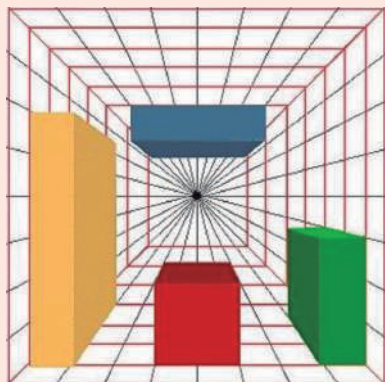
¿Observaste en tu comunidad cómo realizan el armazón para el vaciado de cemento?



TEORÍA

TRIDIMENSIONAL

Un objeto es tridimensional si tiene tres dimensiones; es decir, cada uno de sus puntos puede ser localizado especificando tres datos: ancho, alto y profundidad.



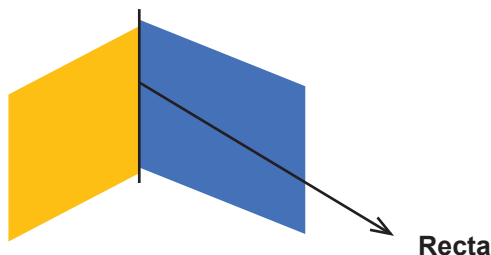
1. El espacio tridimensional: punto, recta, segmento y plano

En geometría podemos ver diferentes tipos de figuras geométricas, para ello debemos conocer algunos conceptos básicos.

Punto. Se da por la intersección de dos rectas:



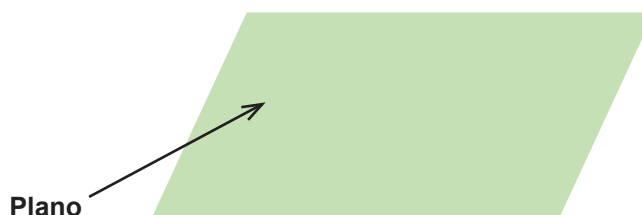
Recta. Es una sucesión infinita de puntos que se da en la intersección de dos planos.



Segmento. Es una parte de la recta que tiene un principio y un fin.

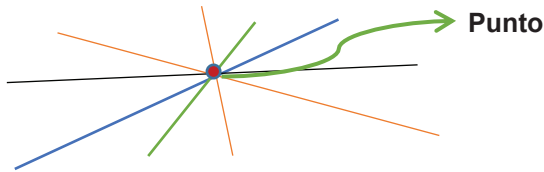


Plano. Está formado por una sucesión infinita de puntos.

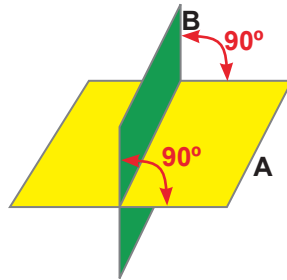


Postulados sobre rectas, planos y puntos

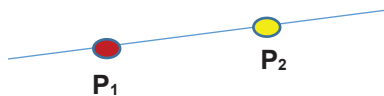
- a) Existen infinitas rectas que pueden pasar por un punto.



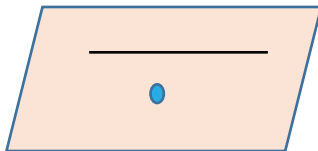
- b) Por una recta pueden pasar infinitos planos.



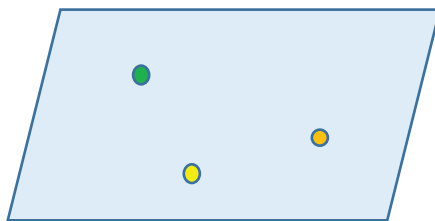
- c) Por medio de dos puntos se puede definir una recta.



- d) Por medio de un punto y una recta se determina un plano.

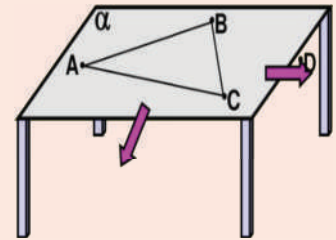


- e) Dos o más puntos determinan un plano



CURIOSIDADES

Tres puntos no alineados determinan un único plano.



PERÍMETRO

Es la suma de todos los lados de una figura geométrica.

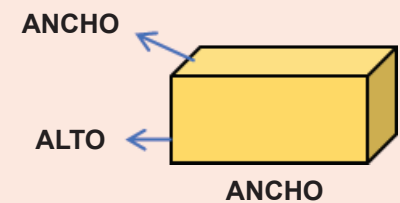
$$P = L1 + L2 + L3 + L4$$

ÁREA

Es toda región que está conformada por una figura geométrica.

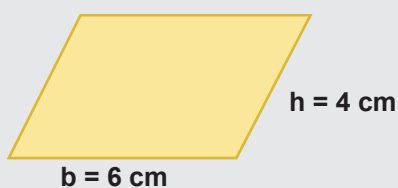
CUERPOS GEOMÉTRICOS

Los cuerpos geométricos son aquellos que ocupan un lugar en el espacio y son tridimensionales, es decir, tienen sus tres dimensiones: alto, ancho y largo.



Actividad

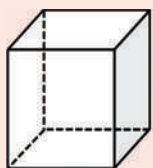
- Encontramos el área de un paralelogramo con las siguientes medidas.



- Hallamos el perímetro de un aro de bicicleta de 30 cm de radio.

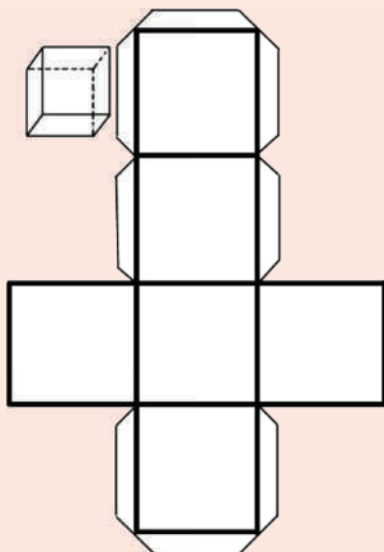


EL CUBO



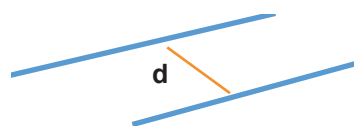
NOMBRE	CANTIDAD
CARAS	6
ARISTAS	12
VERTICES	8

Sus partes

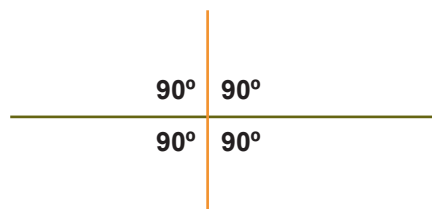


Su construcción

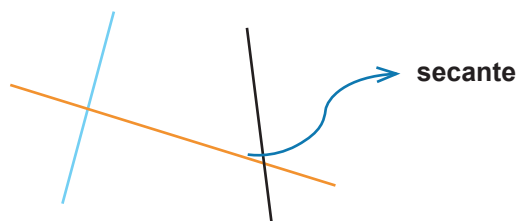
Rectas paralelas. Son aquellas rectas que mantienen una distancia entre sí y no llegan a juntarse nunca.



Rectas perpendiculares entre sí. Son rectas que forman un ángulo de 90° al cortarse



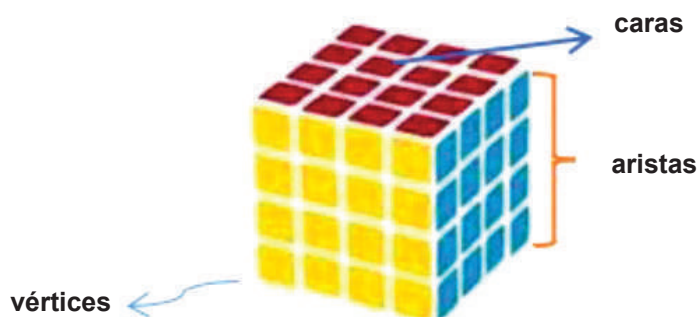
Recta secante. Es aquella recta que corta a otras dos o más rectas.



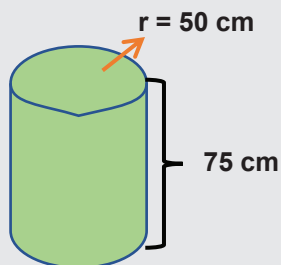
2. Clasificación de los cuerpos geométricos. Estos se clasifican en: poliedros y cuerpos redondos.

Poliedros. Entre los poliedros tenemos el cubo, prisma y pirámide.

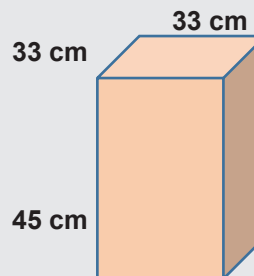
a) Cubo. Es un cuerpo geométrico de 8 caras cuadradas planas, todas del mismo tamaño. Por ejemplo, el cubo Rubik:



- Encontramos el volumen de un barril que se desea llenar de agua, sabiendo que tiene las siguientes medidas.



- Hallamos el volumen y área de una caja de cerámicos de $33 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$.

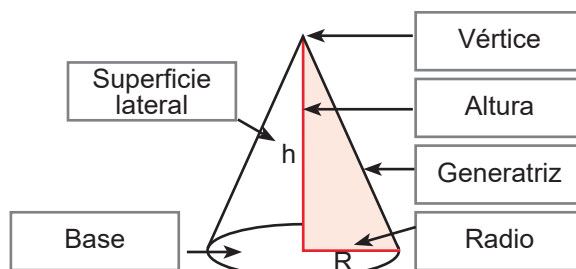


FIGURAS GEOMÉTRICAS

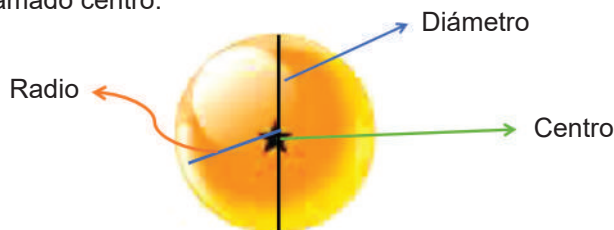
Las figuras geométricas son aquellas que tienen dos dimensiones y delimitan alguna superficie plana.

Estas pueden ser:

Círculo	
Óvalo	
Cuadrado	
Rectángulo	
Rombo	
Romboide	
Trapezio	
Triángulo	
Pentágono	
Hexágono	



c) Esfera. Es un cuerpo geométrico que no tiene caras, ya que se forma con un conjunto de puntos que mantienen la misma distancia a punto fijo llamado centro.



3. Características de los cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos tienen tres dimensiones: alto, largo, ancho y ocupan un lugar en el espacio. Estos a su vez cuentan con lados, aristas, altura, bases y vértices.

a) Cubo. El cubo tiene:

- 6 caras
- 8 vértices
- 12 aristas
- Lados iguales y paralelos entre si

b) Prisma. Los prismas varían sus características de acuerdo a su forma, por ejemplo:

- Prisma rectangular tiene:
6 caras rectangulares
8 vértices
12 aristas caras paralelas e iguales de dos en dos
- Un prisma pentagonal tiene:
7 caras: 5 caras rectangulares y 2 caras pentagonales
10 vértices
15 aristas

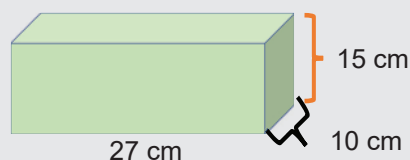
c) Pirámide. Las pirámides al igual que los prismas, varían de acuerdo a la base que tengan.

- Pirámide de base triangular:
Cuatro lados que son triángulos equiláteros
6 aristas
4 vértices
- Pirámide de base cuadrada
1 base cuadrada y 4 caras triangulares
5 vértices
8 aristas

Actividad

- Encontramos el perímetro de una caja de zapatos si sus medidas son:

- Trazamos una sucesión de puntos y luego unimos anotando la figura que forma.



d) **Cilindro.** Los cilindros tienen:

- 2 caras circulares y 1 cara rectangular
- No tiene vértices
- 2 aristas curvas

e) **Cono.** El cono cuenta con:

- 1 base circular
- 1 vértice
- 1 radio en la base
- 1 superficie lateral (cara curva)
- 1 generatriz es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman la altura y el radio

f) **Esfera**

- No tiene aristas
- No tiene vértices
- Tiene una superficie totalmente curva
- No tiene base

4. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Área y volumen de un cubo

Para hallar el área de un cubo se necesita conocer el área de su base que es un cuadrado y esta se multiplica por sus 6 caras que tiene el cubo.

Para el volumen se multiplica el área de la base por la altura

Área	$L^2 * N$
Volumen	L^3

Área y volumen de un prisma

El área de un prisma resulta de sumar el área de sus dos bases más el área de sus caras laterales, sean estas la figura que sea, mientras que el volumen es el producto del área de la base por la altura.

Área	$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$
Volumen	$A_b * h$

Área y volumen de una pirámide

El área de una pirámide es igual a área de su base más el área de todas sus caras, mientras que el volumen de una pirámide es el área de la base por la altura sobre 3.

Área	$A_b + (A_1 + A_2 + A_3)$
Volumen	$\frac{\text{area de la base} * h}{3}$

Área y volumen de un cilindro

El área del cilindro es la suma del área de sus 2 bases circulares más el área de su cara lateral, mientras que el volumen será igual a la altura por el área de la base.

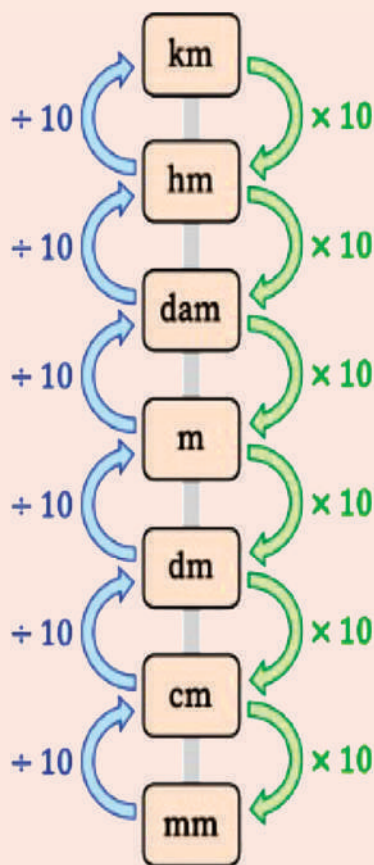
COSAS PARA RECORDAR

FIGURA	ÁREA
Cuadrado 	L^2
Triángulo 	$\frac{b * h}{2}$
Rectángulo 	$b * h$
Trapezio 	$\frac{(b_1 + b_2) * h}{2}$
Rombo 	$\frac{d * D}{2}$
Circunferencia 	$\pi * R^2$

Actividad

- Para una construcción se necesita $5,25\text{m}^3$ de arena, ¿cuáles deben ser las medidas de la carrosa del camión que transportará la arena a su destino?
- Si el área de las caras laterales de un cubo es de 49m^2 , calcular el perímetro y el volumen de dicho cubo.

COSAS PARA RECORDAR



Área	$2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h$
Volumen	$\pi * r^2 * h$

Área y volumen de un cono

Para encontrar el área de un cono se suma el área de su base más el área de su cara lateral.

El volumen es el área de su base por la altura sobre 3.

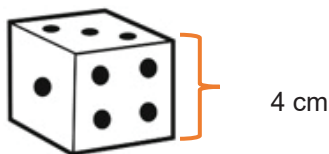
Área	$\pi * r^2 + \pi * r * a$
Volumen	$\frac{\text{area de la base} * h}{3}$

Área y volumen de una esfera

El área y el volumen de una esfera son:

Área	$4 * \pi * r^2$
Volumen	$\frac{4 * \pi * r^3}{3}$

Ejemplo: hallamos el área y volumen del dado que tiene 4 cm de lado.



$$A = L^2 * N$$

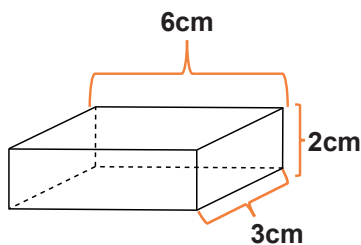
$$A = (4\text{cm})^2 * 6 = 16\text{cm}^2 * 6$$

$$A = 96 \text{ cm}^2$$

$$V = L^3$$

$$V = (4\text{cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$$

Ejemplo: hallamos el área y volumen de 5 barras de hielo si cada una de ellas tienen la medida que muestra la imagen.



$$A = b * h$$

$$A_1 = 3\text{cm} * 2\text{cm} = 6\text{cm}^2 * 2 = 12\text{cm}^2$$

$$A_b = 3\text{cm} * 6\text{cm} = 18\text{cm}^2 * 2 = 36\text{cm}^2$$

$$A_3 = 6\text{cm} * 2\text{cm} = 12\text{cm}^2 * 2 = 24\text{cm}^2$$

$$A_T = 12\text{cm}^2 + 36\text{cm}^2 + 24\text{cm}^2 = 72\text{cm}^2$$

$$A_t = 72\text{cm}^2 * 5 = 360 \text{ cm}^2$$

RESPUESTA. El área de 5 barras de hielo es 360cm^2

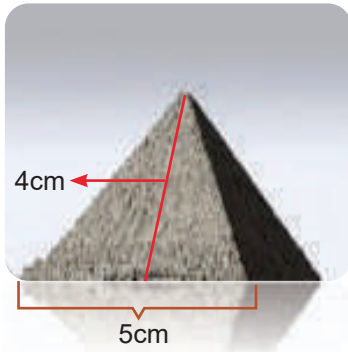
$$V = A_b * h$$

$$V = 36 \text{ cm}^2 * 5 = 180 \text{ cm}^3$$

$$V = 18 \text{ cm}^2 * 2 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^3$$

RESPUESTA. Las 5 barras de hielo abarcan 180 cm^3

Ejemplo: Hallar el área y el volumen de la pirámide que tiene las siguientes medidas.



$$A = A_B + (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$A_B = (5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = \frac{5 \text{ cm} * 4 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

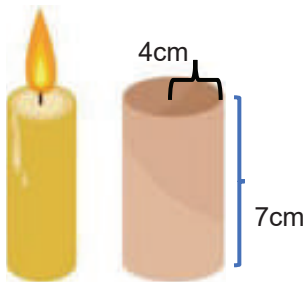
$$A = 25 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 = 65 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_B * h}{3}$$

$$V = \frac{25 \text{ cm}^2}{3} * 4 \text{ cm}$$

$$V = 33,33 \text{ cm}^3$$

Ejemplo: Se quiere hacer velas para una iglesia pero para ello se necesita cierta cantidad de cera, si el molde tiene las siguientes medidas ¿cuál es el área del molde y el volumen de cera necesaria para cada vela?



$$A = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h$$

$$A = 2 * \pi * (4 \text{ cm})^2 + 2 * \pi * 4 \text{ cm} * 7 \text{ cm}$$

$$A = 2 * \pi * 16 \text{ cm}^2 + 2 * \pi * 28 \text{ cm}^2$$

$$A = 100.53 \text{ cm}^2 + 175.92 \text{ cm}^2$$

$$A = 276.459 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi * r^2 * h$$

$$V = \pi * (4 \text{ cm})^2 * 7 \text{ cm}$$

$$V = \pi * 16 \text{ cm}^2 * 7 \text{ cm}$$

$$V = 351.86 \text{ cm}^3$$

Ejemplo: Jaime tiene canicas de colores y quiere comprarse cuatro más, pero Oscar se las quiere vender según su volumen y área. ¿cuál es el volumen y área de cada una si tienen como radio 2cm?



$$A = 4 * \pi * r^2$$

$$A = 4 * \pi * (2 \text{ cm})^2$$

$$A = 4 * \pi * 4 \text{ cm}^2$$

$$A = 25.13 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4 * \pi * r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 * \pi * (2 \text{ cm})^3}{3}$$

$$V = \frac{4 * \pi * 8 \text{ cm}^3}{3}$$

$$V = \frac{100.53 \text{ cm}^3}{3} = 33.51 \text{ cm}^3$$

RESPUESTA. Cada una de las canicas tiene un área de 25,13 cm² y el volumen es de 33,51 cm³

CURIOSIDADES

¿Sabías que un decímetro cúbico es igual a 1 litro?

Multiplicación de un entero por una fracción

$$\frac{7}{5} * 8 =$$

Recuerda que todo número entero lleva la unidad como denominador.

$$\frac{7}{5} * \frac{8}{1} = \frac{7 * 8}{5 * 1} = \frac{56}{5} = 11 \frac{1}{5}$$

OLIMPIADA CIENTÍFICA – 2018

– Se trata de formar un cubo con ladrillos cuyas dimensiones son: 24 cm largo, 18 cm de ancho y 9 cm de alto. ¿Cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño?

- a) 360
- b) 9648
- c) 240
- d) 14400
- e) Ninguno de los anteriores



DATO CURIOSO

El número pi es una constante que indica la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es decir, que si con una cinta medimos el contorno de cualquier objeto redondo (circunferencia) y el resultado lo dividimos entre su diámetro, obtendremos como resultado siempre el mismo número: 3,14.

El número pi está representado por π y se lo considera un número irracional infinito, a cifra infinita, es uno de los números trascendentales más importantes en la matemática y otras ciencias.

Actualmente, se conocen 31 trillones de decimales de pi, pero el valor que más se usa actualmente es 3,1416.



Ejemplo: Pedro quiere hacer helados de barquillo de 3 cm de radio, pero necesita saber qué cantidad de helado entra en cada cono. Ayuda a Pedro a resolver el problema sabiendo que cada cono tiene las siguientes medidas.

$$A = \pi * r^2$$

$$A = \pi * (3cm)^2$$

$$A = 28,27cm^2$$

$$V = \frac{\text{area de la base} * h}{3}$$

$$V = 28,27cm^2 * \frac{10cm}{3}$$

$$V = 94,24cm^3$$



Ejercicios propuestos

Ejercicio. María quiere hacer sombreros de cumpleaños, si el diámetro de su cabeza es de 36 cm ¿Qué medida tendrá que tener el área del sombrero; si de altura tendrá 25 cm?



Ejercicio. Cada uno de los basureros que tiene el colegio, donados por el Gobierno Municipal, tiene una altura de 1 m y un diámetro de 50 cm ¿hallar la capacidad de basura que puede contener cada basurero?

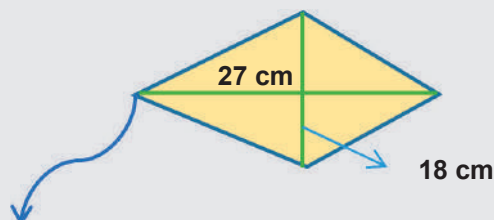


Actividad

- Indicamos con una X qué partes tiene cada uno de los cuerpos geométricos

	vértices	base	aristas
Cubo			
Esfera			
Pirámide			
Cono			
Prisma			

- Indicamos el área de una cometa romboide con las siguientes dimensiones.



Ejercicio. Se necesita saber cuál es el área y volumen de un balón de básquet sabiendo que sus medidas son las de la siguiente figura.



Ejercicio. En una fábrica de galleta se necesita empaquetar 10 cajas cada una con 12 paquetes de galletas, si cada paquete tiene las siguientes medidas. ¿cuál será el volumen de cada caja?



Ejercicio. Se desea llenar de agua una piscina de 30 m de largo, 18 m de ancho y 3 m de alto. ¿cuál es la capacidad de la piscina?



En el Municipio de Chimoré, en el área Piscícola, se puede producir entre 40 y 60 toneladas de peces cuando funciona todos los estanques, cada uno con una superficie de 1000 m²

Cada estanque produce de 500 a 700 peces en un promedio de 8 a 12 meses. Tradicionalmente, se producen las especies de pacú y tambaqui.

- ¿Cuál será el volumen de cada estanque?
- ¿De qué manera ayuda al país el proyecto piscícola realizado en Chimoré? ¿cómo aporta la matemática al proyecto?
- Investigamos cuántos estanques hay construidos para la cría de peces en cada departamento.

Realizamos un robot pez tambaqui, utilizando diferentes cuerpos geométricos. Organizamos a las compañeras y compañeros de aula, una exposición de los peces contruidos (pueden ser otros robots).

POTENCIAS

Recuerda las leyes de potenciación.

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

VALORACIÓN



Construcción del complejo piscícola en Chimoré

PRODUCCIÓN

REFORZANDO MIS APRENDIZAJES

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Triángulos y su clasificación

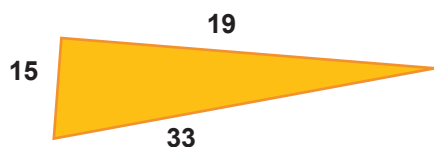
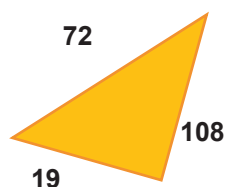
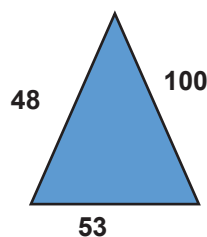
Completamos con V si es verdadero o F si es falso.

1. Todo triángulo isósceles tiene sus tres lados iguales (____)
2. Un triángulo equilátero tiene todos sus ángulos iguales (____)
3. Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos menores que 90° (____)

Perímetro

Calculamos el perímetro de los siguientes triángulos

- | | | |
|-------------|----------|----------|
| 1. $a = 15$ | $b = 17$ | $c = 25$ |
| 2. $a = 78$ | $b = 21$ | $c = 49$ |
| 3. $a = 11$ | $b = 48$ | $c = 59$ |
| 4. $a = 19$ | $b = 15$ | $c = 27$ |
| 5. $a = 5$ | $b = 46$ | $c = 53$ |
| 6. $a = 18$ | $b = 91$ | $c = 10$ |



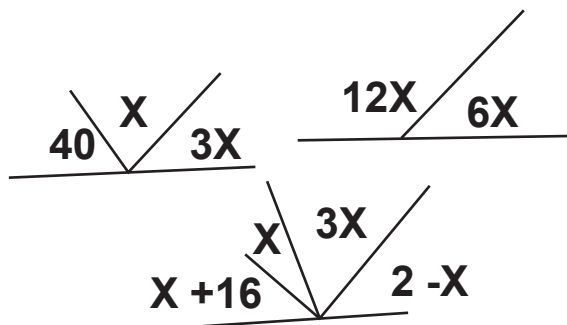
Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

Encontrar el valor de cada ángulo para cada uno de los siguientes casos:

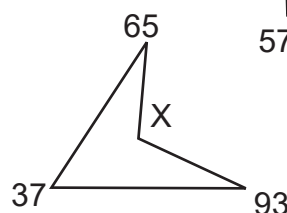
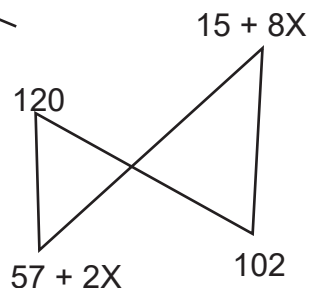
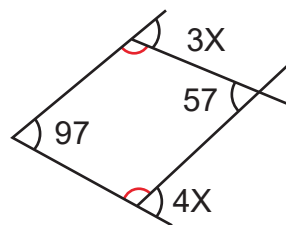
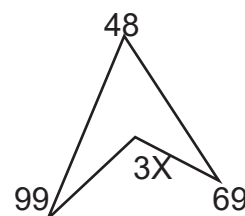
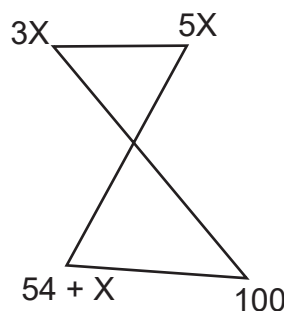
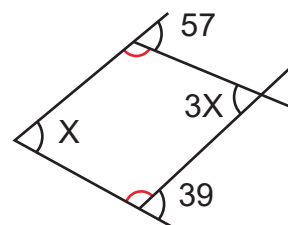
- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------|
| 1. $A = X$ | $B = 3X$ | $C = 2X$ |
| 2. $C = 50^\circ$ | $B = 70$ | $A = X$ |
| 3. $B = 3X$ | $B = 39^\circ$ | $A = 2X - 9^\circ$ |
| 4. $A = X$ | $B = 75$ | $C = 35^\circ$ |
| 5. $C = 2X$ | $A = 48^\circ$ | $B = 72 - X$ |
| 6. $B = 88 - 4X$ | $C = 5X$ | $A = 53 + 2X$ |
| 7. $A = 63$ | $B = ?$ | $C = 88$ |
| 8. $A = ?$ | $B = 59$ | $C = 77$ |
| 9. $A = 51$ | $B = 63$ | $C = ?$ |

Ángulos suplementarios

Calculamos el valor de los ángulos complementarios si la suma de estos es igual a 180°



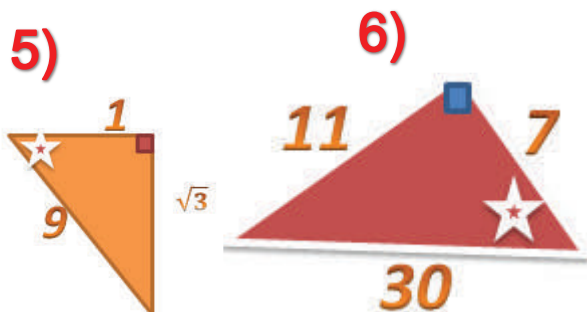
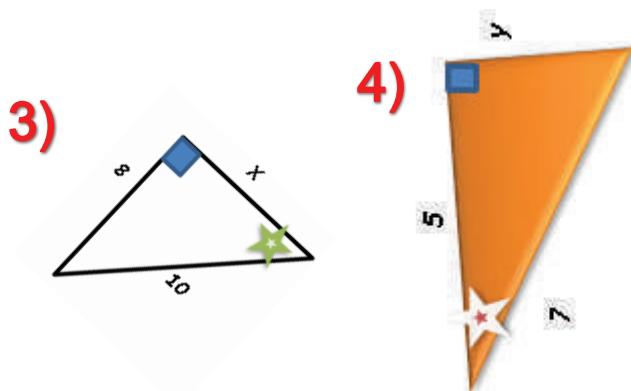
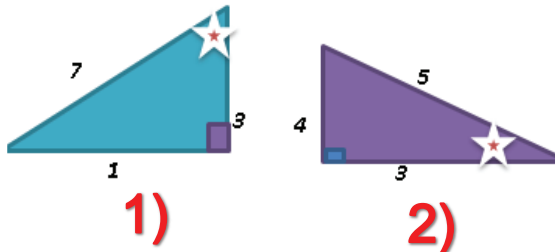
Propiedades de ángulos externos para un triángulo cualquiera



INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

Triángulos rectángulos

Dados los siguientes triángulos identifica la hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto:



Triángulo	hipotenusa	Cateto opuesto	Cateto adyacente
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Teorema de Pitágoras

Completamos la siguiente tabla, tomando en cuenta el triángulo:



N°	Hipotenusa	Cateto opuesto	Cateto adyacente
1	50	40	
2		20	36
3		12	20
4	30	18	
5		13	23
6	100		6

Razones trigonométricas

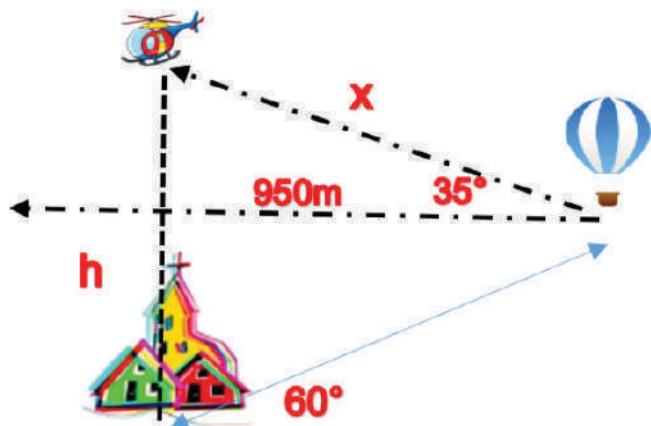
De la anterior tabla encontrar los datos que nos piden a continuación:

N°	Sen A	Tan A	Cos A
1			
2			
3			
4			
5			
6			

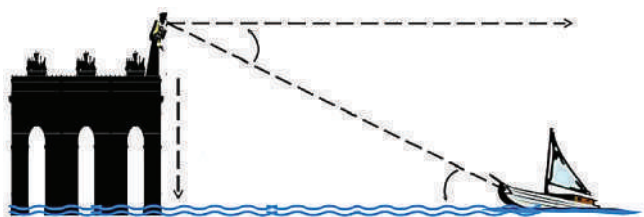
Resolvemos los siguientes problemas de triángulos rectángulos.

- Hallamos la altura de un edificio que proyecta una sombra de 7 m cuando el sol forma un ángulo de 5° con la horizontal.

2. ¿Qué distancia proyecta la sombra de un árbol de 4 m cuando el sol forma un ángulo de 30° con la horizontal?
3. Un poste de luz está sujeto al suelo por un cable, para evitar que se caiga por los fuertes vientos, dicho cable es de 15 m y forma un ángulo de 45° con el suelo. ¿qué distancia hay del poste a la estaca que sujeta el cable en el suelo?
4. Dada la siguiente imagen, responde:



- ¿A qué altura se encuentra el helicóptero del pueblo?
- ¿Determina la distancia x del globo al helicóptero?
- ¿A qué altura del piso se encuentra el globo, que divisa al helicóptero?
5. Una persona de 1,72 m divisa desde el muelle una embarcación a lo lejos. Si el ángulo de depresión es 35° , ¿a qué distancia del muelle se encuentra la embarcación?, considerando que la altura del muelle es de 3.5 m.



LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

Punto, recta y plano

Completamos los espacios en blanco:

1. Laes una sucesión deinfinito.
2. Unes por.....puntos.
3. Un segmento es una parte de laque tiene un y un final.
4. El se puede determinar por uny una
5. La rectaes aquella que corta..... o más.....
6. La recta que corta a otra recta formando un ángulo de 90° se llama.....

Clasificación de cuerpos geométricos

En el siguiente cuadro dibuja tres cuerpos redondos y tres poliedros que pueden ser vistos en el diario vivir.

Cuerpos redondos	Poliedros

Características de los cuerpos geométricos

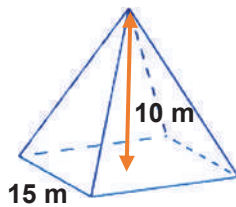
Completamos el siguiente cuadro:

Figura	Caras	Vértice	Arista
	6	8	12
	12	20	30
Pirámide cuadrangular			
Cilindro			
Cono			

Áreas, perímetro y volumen de cuerpos geométricos.

Resuelve los siguientes problemas:

- Un arqueólogo descubre una pirámide cuadrangular que tiene las siguientes dimensiones. ¿Cuál será el área y volumen?



- ¿Cuál será el volumen de 5 tarros de leche que tienen la siguiente medida?



- ¿Qué volumen tendrá una caja de cartón que tiene las siguientes medidas?

Largo 30 cm

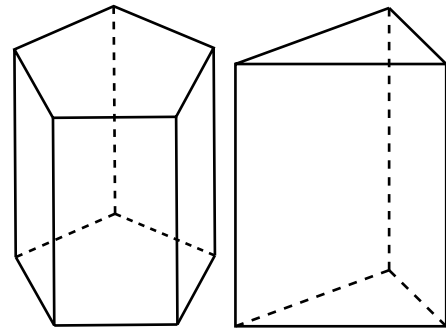
Ancho 15 cm

Altura 40 cm

- Hallamos el volumen de 5 balones de fútbol que tienen un radio de 11 cm.



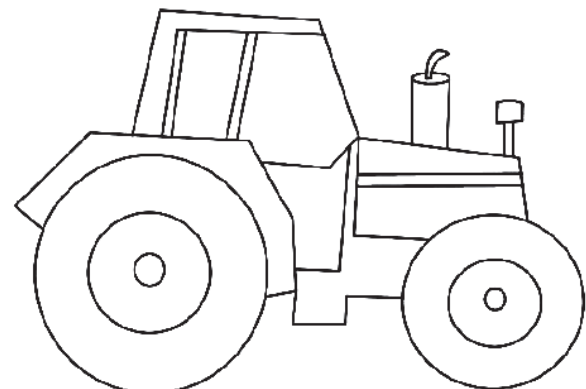
- Recortamos papel, construimos los siguientes prismas:



Completamos con "V" si es verdadero o "F" si es falso

- El perímetro de un cuadrado es la suma de todos sus lados. ()
- Un prisma es un poliedro. ()
- Todos los poliedros tienen volumen. ()
- Una esfera tiene vértices. ()
- Un cubo tiene 8 lados. ()
- Todos los poliedros tienen caras iguales. ()
- Un paralelepípedo tiene 8 caras. ()

Identificamos las figuras que componen el siguiente dibujo:



BIBLIOGRAFÍA

ÁREA: MATEMÁTICA

Ministerio de Educación (2022). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva “*Texto de aprendizaje*” 2do. Año (2do trimestre). La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación (2023). Subsistema de Educación Regular, Educación Secundaria Comunitaria Productiva “*Texto de aprendizaje*” 2do. Año. primer, segundo y tercer trimestre. La Paz, Bolivia.

Ministerio de Educación. “*Prontuario de mis aprendizajes MATEMÁTICA [En proceso de Publicación]*.” (2023)

Allen R, A. (1998). *Algebra Elemental*. Mexico: Prentice Hall.

TINTAYA CONDORI, L. (2015). *Matemáticas 2*, Editorial Bruño – Bolivia.

Aguilar Marquez, A., Bravo Vazquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación de México

Santillana Ed., (2013). *Matemática 2 para segundo curso de educación secundaria*. Santillana de Ediciones S.A.

Peña Romay, Efraín (2017) *Matemáticas 1*. Ediciones GES. Bolivia

Quisbert Callisaya, Abraham (2019) *Matemáticas 1*. Editorial “ABYA YALA PATUJU”. Bolivia

Equipo de redactores del texto de aprendizaje del **2DO AÑO DE ESCOLARIDAD** de Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

PRIMER TRIMESTRE

Biología – Geografía

Ana Laura Rojas Paca

Lengua Castellana

Teddy Orlando Valeriano Condori

Ciencias Sociales

Eva Soledad Nina Alanoca

Matemática

Verónica Rocío Chino Chino

SEGUNDO TRIMESTRE

Biología – Geografía

Jazmine Coral Ontiveros Terán

Lengua Castellana

Lider William Valero Chino

Ciencias Sociales

Willy Montalvo Pareja

Matemática

Wilson Quiroga Escobar

TERCER TRIMESTRE

Biología – Geografía

Rolando Miranda Quispe

Lengua Castellana

Jazmin del Carmen Cañasto
Quisbert

Ciencias Sociales

Miguel Angel Lliulli

Matemática

Marieta Smith Salazar

Por una EDUCACIÓN de CALIDAD rumbo al BICENTENARIO

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR - SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA



ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN